ВНИИГиМ

СПРАВОЧНИК ПО МЕЛИОРАЦИИ И ГИДРОТЕХНИКЕ

ТОМ I

СЕЛЬХОЗГИЗ
1934

НКЗ СССР
АКАДЕМИЯ С.-Х. НАУК имени В. И. ЛЕНИНА
ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ГИДРОТЕХНИКИ И МЕЛИОРАЦИИ

631-6
С-74

СПРАВОЧНИК ПО МЕЛИОРАЦИИ И ГИДРОТЕХНИКЕ

В 3-х ТОМАХ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
Инж. П. И. АБОЛ (отв. ред.), проф. А. Н. КОСТЯКОВ, проф. А. Я. МИЛОВИЧ, проф. А. Д. БРУДАСТОВ, проф. Е. А. ЗАМАРИН, проф. М. М. ГРИШИН, проф. Н. М. ЩАПОВ, проф. А. В. КАЛИНИНИКОВ, проф. В. Е. БЕЛИЛОВСКИЙ, проф. К. А. МИХАЙЛОВ (общая редакция), проф. В. В. ПОДАРЕВ, инж. Д. П. ЮНЕВИЧ, инж. М. С. РУБИН, инж. Н. В. КРЫЛОВ.
Отв. секретарь Г. Б. СЕЛИССКИЙ

Гидромеханизации
Инв. № 3617
Библиотека и Техархив

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
КОЛХОЗНОЙ И СОВХОЗНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Н. Крылов.*
Техредактор: *И. Соболев*
и Н. Фивейский.
Корректор *Перрэ.*
Инд. 19-Г. Сельхозгиз 4075.
Формат 82×110¹/₁₆.
Объем 46,5 п. л. 70 000 тип. зн. в 1 п. л.
Сдано в производство 25/V 1933 г.
Подписано к печати 5/VIII 1934 г.
Цена 10 руб. 75 коп.
Переплет 1 руб. 25 коп.
Уполн. Главлита Б-34451.
Зак. № 2284. Тираж 10 000 экз.

1-я Образцовая типография Огиза
РСФСР треста „Полиграфкнига".
Москва, Валовая, 28.

СПИСОК АВТОРОВ

Астапов С. В. инж.
Бурсиан В. Р. инж.
Белкова Е. Н. инж.
Белиловский В. К. проф.
Брудастов А. Д. проф.
Брудастов В. И. инж.
Бредис А. И. инж.
Бродянский М. С. инж.
Ващенко Г. Е. инж.
Гришин М. М. проф.
Гебель В. Г. проф.
Глаголев А. А. проф.
Денисов П. А. инж.

проф. Дроздов В. А.

Демидов П. Н. инж.
Зитта Ф. О. инж.
Замарин Е. А. проф.
Иогансон Е. И. инж.
Кузнецов А. Н. инж.
Конради Ф. М. инж.
Красавин А. М. инж.
Калинников А. В. проф.
Книжников Б. К. инж.
Каган Г. С. инж.
Каплинский С. В. инж.
Костяков А. Н. проф.
Котов Н. Г. инж.
Кременецкий Н. Д. доц.
Копылов Н. А. проф.
Калабугин А. Я. проф.
Ладыгин Н. А. доц.
Лебедев П. Н. инж.
Ломизе Г. М. доц.
Макридин Н. В. инж.
Миндер Г. П. инж.
Миркин С. Л. инж.
Михайлов К. А. проф.
Милович А. Я. проф.
Машкевич О. Т. инж.
Нифантов А. П. геолог
Островский А. И. инж.
Олешкевич Л. В. доц.
Панасенко А. Д. инж.
Поляков Н. В. проф.
Платон В. М. инж.
Подарев В. В. проф.
Потапов М. В. доц.
Розов Л. П. проф.

инж. Решеткин М. М.

Силаньтев Д. Ф. инж.
Соколов Д. Я. проф.
Селькин А. М. инж.
Семенихина Л. Н. инж.
Синельников Н. П. инж.
Троицкий В. А. инж.
Тихий М. И. проф.
Харчев Е. К. инж.
Тромбачев С. П. проф.
Талызин А. А. инж.
Фандеев В. В. инж.
Федоров И. А. инж.
Флоринский М. М. проф.
Фролов Н. С. проф.
Черкасов А. А. доц.
Царевский А. М. инж.
Шаров И. А. проф.
Щапов Н. М. проф.
Эпштейн Н. Л. инж.
Янишевский Н. А. проф.

МОСКВА 1, Тверской бульвар д. № 13
Трест НКТП „Гидромеханизация“

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачей справочника является обобщить достижения и опыт современных мелиоративно-гидротехнических работ и исследований как у нас, так и за границей в целях использования этих данных в практике мелиоративно-гидротехнического строительства в СССР.

При составлении справочника Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники и мелиорации учел необходимость комплексного использования водных ресурсов (орошение, регулирование рек в целях осушения, гидроэнергия, борьба с паводками и т. д.) в условиях социалистического сельского хозяйства.

Для осуществления намеченных работ по изданию справочника при Всесоюзном научно-исследовательском институте гидротехники и мелиорации в 1931 г. была организована бригада в составе тт. А. Ф. Павлова, М. Бобылева, А. И. Шкляревского, Г. Б. Селисского. Бригада разработала план издания справочника, программу и сорганизовала авторский коллектив. В середине 1932 г. была организована редакционная коллегия в составе: директора Института гидротехники и мелиорации инж. П. И. Абола, проф. А. Н. Костякова, проф. А. Д. Брудастова, проф. А. Я. Миловича, проф. Е. А. Замарина, проф. М. М. Гришина, проф. Н. М. Щапова, проф. А. В. Калинникова, проф. В. К. Белиловского, проф. К. А. Михайлова, проф. В. В. Подарева, инж. Д. П. Юневича, инж. М. С. Рубина и инж. Н. В. Крылова. Ответственным редактором был назначен директор института инж. Абол П. И., ответственным секретарем редколлегии — Г. Б. Селисский. Общее руководство редакционной работой и сводка всех материалов были возложены на проф. К. А. Михайлова. Организация работы по подготовке материалов к печати была возложена на И. Д. Глыбина.

К составлению справочника было привлечено большое количество работников центральных исследовательских и производственных организаций и работников с мест.

Справочник издается в трех томах.

Первый том — общая часть. В этой части даются все материалы, касающиеся необходимого справочного материала по разделу математики, математической статистики, номографии, гидравлики наземных и подземных вод, сопротивления материалов, статики сооружений и сейсмостойкости. При составлении разделов математики и статики сооружений использованы в значительной мере материалы Hütte, Ферстера, Клейнлогеля и др. В отдельных случаях в целях правильного применения технических расчетов даны примеры расчетов.

Во втором томе освещены вопросы, связанные с изысканиями при проведении мелиоративных и гидротехнических работ в сельском хозяйстве, вопросы проектирования и строительства оросительных и осушительных систем и использования местного стока, а также вопросы водоснабжения совхозов и колхозов. Учитывая тесную связь раздела насосных установок и насосов с вопросами механического орошения, осушения и водоснабжения совхозов и колхозов, во II том включен специальный раздел насосов и насосных установок.

В третьем томе сосредоточены вопросы, касающиеся проектирования и строительства гидротехнических сооружений при орошении, осушении и водоснабжении совхозов и колхозов, а также освещены гидротехнические сооружения при комплексных ирригационно энергетических проблемах. Особо выделен вопрос стройматериалов и нормализации производства работ при их механизации. Приведены данные для проектирования водозабора из рек, приплотинным сооружениям (сбросы, водоприемники, рыбоходы и пр.), сооружениям на каналах, гидростанциям, регулировочным работам, стройматериалам и общим данным по организации работ с приведением норм выработки для работы строительными механизмами.

В последующих изданиях предполагается раздел организации работ выделить в самостоятельный 4-й том, соответственно развив его.

Затянувшееся издание первого тома, который был сдан для оформления в конце 1932 г., не позволило полностью использовать опыт и достижения как ВНИИГиМ и его филиалов за 1934 год, так и других научно-исследовательских организаций и строительств.

Возможные недостатки первого издания справочника будут исправлены в следующем издании.

Редакция обращается ко всем лицам и организациям, которые будут пользоваться справочником по гидротехнике и мелиорации, прислать все замечания и пожелания для учета их при подготовке материалов ко второму изданию по адресу: Москва, 8, Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники и мелиорации (ВНИИГиМ).

Редакция

МАТЕМАТИКА, ГИДРАВЛИКА, СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ТОМ I

Под редакцией проф. К. А. МИХАЙЛОВА

В составлении 1-го тома принимали участие: инж. БРЕДИС А. И., проф. ГЛАГОЛЕВ А. А., проф. ЗАМАРИН Е. А., доц. ЛОМИЗЕ Г. М., проф. МИЛОВИЧ А. Я., доц. ПОТАПОВ М. В., инж. ФАНДЕЕВ В. В., доц. ЧЕРКАСОВ А. А., проф. МИХАЙЛОВ К. А.

Полностью составлены разделы:

Приложения теории вероятностей — доц. М. В. ПОТАПОВ, Номография — проф. А. А. ГЛАГОЛЕВ, Движение грунтовых вод — доц. А. А. ЧЕРКАСОВ, Гидротехнический расчет — проф. Е. А. ЗАМАРИН, Учет сейсмических сил — доц. Г. М. ЛОМИЗЕ

Прочие разделы обработаны редакцией по рукописям и имеющимся справочникам.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие V

МАТЕМАТИКА

I. Таблицы

1. Степени, корни, бригговы логарифмы, обратные числа, длины окружностей и площади кругов. 1
2. Числа для перехода от радиан к градусам и обратно для выражения дуги. 21
3. Круговые функции 22
4. Круговые, показательные и гиперболические функции 26
5. Часто встречающиеся числовые значения 30
6. Длина дуги, стрелка, длина хорды и площадь сегмента для радиуса, равного 1 31

II. Алгебра

А. Степени, корни, логарифмы

Степени 33
Корни . . . . . —
Комплексные числа 34
Логарифмы . . . . . —

Б. Теория соединений 35
В. Определители 36
Г. Ряды . . . . . —
1. Арифметический ряд первого порядка . . . . . —
2. Ряды высшего порядка . . —
3. Геометрический ряд 37
4. Особые ряды . . . . . —
Д. Вычисление сложных процентов 38
Е. Уравнения . . . . . —
1. Уравнения первой степени . —
2. Уравнения второй степени . 39
3. Уравнения третьей степени . —

III. Тригонометрия

А. Круговые функции

1. Определение 41
2. Знаки и предельные значения; особые значения . . . . —
3. Соотношения между функциями дополнительных углов . . 42
4. Зависимость между функциями одного угла . . . . . —
5. Соотношения между функциями двух углов . . . . . —
Зависимость между функциями трех углов α, β, γ, составляющих в сумме 180° 43
Б. Гиперболические функции . . . 44
Эллиптические функции (см. стр. 478) . . . . . .
В. Решение треугольника 45

IV. Планиметрия и стереометрия

А. Периметры и площади плоских фигур 48
1. Треугольник . . . . . —
2. Четырехугольник . . . . . —
3. Многоугольник . . . . . —
4. Круг 49
5. Парабола, эллипс . . . . . —
6. Произвольная площадь . . . —
Б. Поверхности и объемы тел . . 51
1. Призма . . . . . —
2. Цилиндр . . . . . —
3. Пирамида, конус 52
4. Призмоид . . . . . —
5. Шар 53
6. Тела с эллиптическим и параболическим сечением . . . 54
7. Свод 55
8. Цилиндрическое кольцо . . . —

V. Диференциальное и интегральное исчисление

А. Предел, непрерывность, диференцируемость 55
Б. Производные и диференциалы . 56
1. Правила диференцирования . —
2. Производные элементарных функций . . . . . —
3. Формулы для диференцирования . . . . . —
4. Производные и диференциалы высшего порядка 57
5. Функции нескольких переменных 58
6. Неявные функции 59
В. Ряды Тайлора и Маклорена . . —
Г. Раскрытие неопределенностей 60
Д. Maxima и minima 61
1. Функции одной переменной . —

2. Функции двух независимых переменных 61
Е. Неопределенные интегралы . . —
1. Общие правила . . . . . —
2. Примеры 62
Ж. Формулы для интегрирования —
1. Определение . . . . . —
2. Общие формулы . . . . . —
3. Основные интегралы 63
4. Интегрирование рацион. функций 64
5. Интегралы некоторых иррациональных функций 66
6. Некоторые интегралы трансцендентных функций 68
7. Определенные интегралы . . 70
8. Некоторые интегралы, не сводящиеся к элементарным функциям. Интегрирование посредством разложения в ряды 72
9. Приближенное вычисление определенных интегралов . . 74
10. Криволинейные интегралы, кратные интегралы 76
З. Диференциальные уравнения . . 77
1. Диференциальное уравнение первого порядка 78
2. Диференциальное уравнение второго порядка 79
3. Приближенное решение диференциальных уравнений первого порядка 81

VI. Аналитическая геометрия на плоскости

А. Точка 82
Б. Прямая линия 84
В. Круг 86
Г. Парабола 87
Д. Эллипс 88
Е. Гипербола 90
Ж. Общее уравнение конических сечений 92
З. Цепная линия 93
И. Некоторые другие технически важные кривые 94
1. Архимедова спираль . . . . . —
2. Логарифмич. спираль 95
К. Исследование и построение кривых 96

VII. Аналитическая геометрия пространства

А. Точка, прямая линия и плоскость в пространстве 97
Б. Кривые двойной кривизны . . . 103
1. Общие положения . . . . . —
2. Цилиндрическая винтовая линия 105
В. Кривые поверхности 106
1. Общие положения . . . . . —
2. Поверхности второго порядка 109
3. Винтовые поверхности 111

VIII. Векториальный анализ

Шаровые полярные координаты . . 121
Аффиноры (тензоры) 124

IX. Комплексные числа и векторы плоскости, функции комплексной переменной, конформное изображение

А. Комплексные числа и векторы плоскости 127
Б. Аналитические функции комплексной переменной 130
Конформное изображение . . . —
В. Некоторые частные виды конформных изображений 131

X. Практическая математика

1. Пользование логарифмической линейкой 133
2. Графическое сложение и вычитание 136
3. Графическое умножение и деление. . . . . —
4. Графическое возвышение в степень и извлечение корня . . . —
5. Графическое диференцирование 137
6. Графическое интегрирование . —
7. Произвольно точное определение действительных корней алгебраического или трансцендентного уравнения 139
8. Произвольно точное определение корней двух алгебраических или трансцендентных уравнений с двумя неизвестными . . . . . —

XI. Взаимный перевод мер метрических, английских и русских (старых) . . . 140

XII. Приложения теории вероятностей

А. Понятие о вероятности . . 142
Б. Функции распределения . . 144
1. Основные понятия и обозначения . . . . . —
2. Метод моментов 147
3. Кривые Пирсона 150
4. Нормальное распределение . 152
5. Кривая III типа. Метод Фостера 155
6. Правило трех сигма 157
В. Теория ошибок . . . . . —
1. Распределение случайных ошибок . . . . . —

2. Вычисление ошибок из наблюдений 159
3. Вес наблюдений 160
4. Средняя ошибка функции . 161
5. Способ наименьших квадратов 162
6. Уравновешивание наблюдений 163
7. Вычисление параметров эмпирических кривых 166
Г. Корреляция 167
1. Определения . . . . . —
2. Линейная корреляция между двумя переменными 168
3. Нелинейная корреляция между двумя переменными . . . 172
4. Линейная корреляция между тремя и более переменными 176
5. Корреляция при малом числе наблюдений 178
Таблица — значения интеграла вероятности 179
Таблица — Фостера 181
Таблица — вероятности значений 182

XIII. Номография . . . . . —

XIV. Законы подобия 199

1. Закон подобия Ньютона (в отношении силы тяжести) . . 199
2. Закон подобия по Рейнольдсу 200
3. Моделирование шероховатости . . . . . —
4. Искажение масштаба 201

XV. Классы гидротехнических сооружений 201

ГИДРАВЛИКА

Раздел I. Общие сведения о жидкостях

А. Обозначения важнейших величин, входящих в формулы, и их размерность 202
Б. Главнейшие физические свойства некоторых тяжелых жидкостей . . . . . —

Раздел II. Гидростатика

1. Гидростатическое давление . 209
2. Основные законы равновесия жидкой среды . . . . . —
3. Закон Паскаля . . . . . —
4. Общие уравнения гидростатики или уравнения Эйлера . —
5. Поверхности уровня и их свойства 210
6. Равновесие жидкости . . . . —
7. Гидростатическое давление в данной точке тяжелой покоящейся жидкости . . . . —
8. Измерение гидростатического давления 211
9. Приборы, измеряющие гидростатическое давление . . . . —
10. Гидростатическое давление на плоские щиты или стенки 212
11. Гидростатическое давление на криволинейную поверхность 215
12. Закон Архимеда и плавание тел 221
13. Относительное равновесие жидкости 222

Раздел III. Динамика жидкости (гидродинамика)

1. Уравнения движения частицы идеальной жидкости Леонарда Эйлера 223
2. Исследование движения жидкости 225
3. Уравнения движения в функции компонентов вихря . . . 226
4. Уравнения движения жидкости в функции компонентов вихря в случае внешних сил, имеющих потенциал и $\rho = f(p)$ 229

А. Безвихревое движение жидкости

1. Общие данные . . . . . —
2. Уравнение Д. Бернулли . . . 231
3. Предельная скорость . . . . —
4. Физический смысл уравнения Бернулли 232
5. Уравнения Д. Бернулли для реальных потоков конечных размеров поперечного сечения —
6. Истечения из отверстий . . . 233
А. Истечение при постоянном напоре . . . . . —
Свободные или незатопленные отверстия . . . . . —
а) Основные формулы 233
б) Большие отверстия . . . . —
в) Опытные данные, формулы для расчетов и величины коэфициентов 235
г) Предварительные расчетные формулы 239
д) Пределы применимости формул для расчета отверстий . 240
е) Коэфициент сжатия струи . —
ж) Истечение через насадки . —
Затопленные отверстия или истечение под уровень 243
Б. Истечения при переменном уровне . . . . . —
а) Свободное истечение при переменном уровне . . . . . —
б) Истечение при переменном напоре под переменный уровень 244

7. Водосливы
а) Терминология, определения и основные формулы . . . 245
б) Типы струи 246
в) Общая формула для расчета водосливов 248
I. Незатопленные водосливы . . . 249
А. Водослив с тонкой стенкой . . —
1. Водослив Базена . . . . . —
2. Треугольный водослив Томсона. 250
3. Трапецоидальные водосливы Чиполетти . . . . . —
4. Таблицы для определения расходов воды при гидромодульных работах в л/мин . 253
5. Водослив параболический, или Греве 280
Б. Водослив с широким порогом —
В. Водослив с толстой стенкой и практических профилей 281
1. Прямоугольный профиль . 282
2. Прямоугольный водослив с закругленным входным ребром . . . . . —
3. Прямоугольный водослив с наклонным верхом . . . . —
4. Водосливы трапецоидальных профилей 283
5. Водосливы полигональных профилей . . . . . —
6. Водосливы криволинейных профилей 284
7. Построение безвакуумных очертаний водосливов . . . 287
Г. Боковой водослив 291
II. Затопленные водосливы
1. Водослив с острой и толстой стенкой и практич. профилей 296
А. Формула Базена . . . . . .
Б. Данные Морица и Гершеля для водосливов практических форм 297
2. Водосливы с широким порогом . . . . . —

Раздел IV. Равномерное движение жидкости в напорных трубопроводах

А. Местные сопротивления . . . 299
Б. Деревянные трубопроводы . . 305
Г. Пожарные рукава 307
Д. Расчет простого водопровода (без ответвлений) . . . . . —
Е. Полные потери напора в трубопроводе 308
Ж. Коэфициент расхода в трубопроводе . . . . . —
З. Расчет системы трубопроводов 308
а. Последовательное соединение труб . . . . . —
б. Параллельное соединение трубопроводов 310
И. Расчет дренажных труб . . . —

Раздел V. Равномерное движение жидкости в открытых руслах и каналах

А. Общие формулы 312
Б. Формулы для определения коэфициента С и таблицы коэфициентов шероховатости . . . —
а) Формула Базена 313
б) Формулы Гангилье и Куттера —
в) Формула акад. Павловского 315
г) Формула Маннинга . . . . . —
д) Формула Форхгеймера . . . —
В. Формулы для подсчета гидравлич. элементов каналов 323
а) Основные формулы . . . . —
б) Наивыгоднейшие сечения . —
в) Пользование основными формулами . . . . . —
Г. Допускаемая скорость и условия неразмываемости русел . . 325
Д. Устойчивые профили каналов . 329

Раздел VI. Неравномерное движение жидкости в открытых руслах и каналах

1. Диференциальное уравнение неравномерного движения 332
2. Нормальные и критические глубины, критический уклон 334
3. Форма свободной поверхности водотоков при неравномерном движении 335
4. Способы интегрирования общего уравнения неравномерного движения 338
Таблицы проф. Бахметева для прямого уклона 342
Таблицы проф. Бахметева для обратного уклона 352
Таблицы проф. Бахметева для $i=o$ 363
5. Построение кривых свободных поверхностей для естествен. русел 374
6. Приближенное вычисление свободной поверхности 380
а) Метод проф. Чарномского и Хестеда . . . . . —
б) Способ приближенного интегрирования 381
Прямолинейная форма свободных поверхностей (лотки переменного сечения) 382
Примеры расчета кривых свободных поверхностей 384
7. Теория прыжка 393
8. Расчет водобойных колодцев . . 395
а) Расчет сжатого сечения . . 397
б) Определение сопряженных глубин 400
в) Определение точки падения струи на дно нижнего бьефа —
г) Длина водобойного колодца (длина колодцев, перепадов, длины колодцев, быстротоков, расчет водобойных колодцев с использованием теории вихрей) 402
9. Примеры расчета 406

Раздел VII. Силы сопротивления при относительном движении жидкости и твердого тела

А. Сопротивление движению тел в жидкости 406
Б. Давление струи на препятствие 416

Раздел VIII. Неустановившееся движение жидкости

Скорость движения волны наполнения 416
А. Вихревое движение жидкости 419
Б. Линия токов и вихрей в случае конечного прямолинейного вихря по данным проф. Миловича и Дмитровского 423

Раздел IX. Движение грунтовых вод

1. Скважность и гранулометрические показатели грунта . . . 425
2. Различные степени влажности грунта и виды движения грунтовых вод 429
3. Движение парообразной воды в грунте 431
4. Пленочное движение грунтовой воды 432
5. Капиллярное поднятие воды в грунте . . . . . —
6. Общие положения о движении гравитационной воды 435
7. Равномерно-ламинарное движение . . . . . —
8. Неравномерное ламинарное движение грунтовой воды 437
9. Коэфициент фильтрации . . . 440

Раздел X. Гидротехнический расчет

1. Общие данные 449
2. Расчет в условиях напорного потока . . . . . —
А. Давление подземного потока на флютбет 451
Б. Теория струйного движения грунтовой воды 456
1. Работа ак. Павловского, Форхгеймера и проф. Замарина . —
2. Номограммы и таблицы проф. Замарина 458
3. Флютбеты шлюзов в условиях свободного потока 470
4. Расчет сквозных флютбетов по проф. Замарину 471
5. Гидротехнический расчет в условиях свободного движения грунтовых вод 473
6. Конструкции флютбетов . . . 477
Эллиптические интегралы 478

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

I. Общие сведения, опытные данные и допускаемые напряжения

1. Измерение давления и нормальное напряжение 480
2. Угловые изменения и напряжения среза (сдвиг) 483
3. Допускаемое напряжение и запас прочности на разрыв . . . 484
1. Коэфициенты прочности . . . —
2. Допускаемые напряжения . . . 485
А. Камни и каменная кладка . . —
4. Допускаемые напряжения для камней . . . . . —
а) Естественные камни (подферменники и штучные камни) . —
б) Искусственные камни (кирпич) 486
2. Допускаемые напряжения для кладки . . . . . —
а) Кладка на цементном растворе . . . . . —
б) Кладка бутовая . . . . . —
в) Кладка из кирпича 487
г) Допускаемые напряжения в бетонных сооружениях. . . —
д) Допускаемые напряжения в железобетонных конструкциях 488
Б. Допускаемые напряжения металлов 489
Допускаемые напряжения для литой стали и литья 491

Допускаемые напряжения на фосфористую бронзу и красную медь 492
Допускаемые напряжения на катки в шарнирах, считая на диаметральное сечение *кг/см²* . 493
Допускаемые напряжения для нарезки винтов . . . . . —
В. Допускаемые напряжения для дерева . . . . . —
Г. Допускаемые напряжения на грунты 496

II. Сопротивление прямых брусьев

А. Сопротивление растяжению и сжатию 496
Б. Сопротивление продольному изгибу . . . . . —
1. Нагрузка, вызывающая продольный изгиб 497
2. Таблица для различных материалов по Тетмайеру . . . 504
3. Коэфициенты уменьшения допускаемых напряжений при продольном изгибе по нормам СССР 505
а) для металлич. конструкций —
б) для железобетонных конструкций . . . . . —
4. Формулы Эйлера для различных способов укрепления концов бруса 506
5. Полые цилиндры . . . . . —
6. Сочлененные стойки (подпоры) 507
В. Сжатие тел с криволинейным очертанием поверхности . . . 508
а) Давление двух шаров . . . 509
б) Давление шара на плоскую плиту . . . . . —
в) Давление цилиндра на цилиндр 510
г) Давление цилиндра на плоскую плиту . . . . . —
Г. Сопротивление срезу (сдвигу) . —
Д. Сопротивление изгибу 512
а) Общие данные . . . . . —
б) Напряжения 513
1. Нормальные напряжения . . —
2. Скалывающие напряжения . 514
3. Главные напряжения . . . . —
4. Траектории напряжений . . 516
в) Упругие деформации прямых балок . . . . . —
1. Упругая деформация от изгибающихся моментов . . . . . —
а) Угол наклона, б) упругая линия, ... 516
в) Способ Мора 516
2. Механическая работа при изгибе 518
3. Упругая деформация от действия срезывающих сил 519
Моменты инерции и моменты сопротивления сечений различных форм 520
Круглое сечение 524
Круглое кольцевое сечение . . . 525
Прямоугольное и квадратное сечение 527
Таблица фасонного железа . . . 530
г) Балки с одинаковым по всей длине сечением лежащих на различных опорах и с различными видами нагрузок 536
Е. Многократная нагрузка . . . 550
Неподвижные нагрузки 550
Подвижные нагрузки 551
Ж. Неразрезные балки 553
1. Изгибающие моменты над точками опор . . . . . —
2. Реакции опор 554
Таблицы к неразрезным балкам (моменты реакций опор) . . . 555
Опорные моменты для неразрезных балок с неравными пролетами 559
1. Равномерно распределенная нагрузка . . . . . —
2. Уравнения линий влияния для опорных моментов . . . 560
Е. Сопротивление кручению . . . 562
Ж. Сложное сопротивление 563
а) Брус подвержен действию нормальных напряжений . . . —
1. Определение нулевой линии для точки приложения силы —
Допускаемые крутящие моменты напряжения кручения и относительные углы скручивания 564
2. Определение напряжений . . 567
3. Ядро сечения 568
4. Определение предельных напряжений с помощью точек ядра 569
5. Взаимодействие напряжений 570
6. Площадь влияния напряжения —
7. Формула Навье 570
б) Брус испытывает нормальные и срезывающие напряжения . . . 571
1. Растяжение (или сжатие) и срез. 572
2. Изгиб и срез . . . . . —
3. Растяжение (или сжатие) и кручение . . . . . —

4. Изгиб и кручение (круглое и круглое кольцевое сечение, эллиптическое сечение, прямоугольное сечение) . . 572
Значения ξ 574

III. Расчет тонких плит 576
а) Четырехугольные плиты . . —
Формула Баха . . . . . —
Формулы Тимошенко . . . . . —
Формулы Маркуса 577
I. Свободно лежащая прямоугольная плита . . . . . —
II. Прямоугольная плита, свободно лежащая тремя сторонами и закрепленная на четвертой 579
III. Прямоугольная плита с заделанными двумя ребрами 581
IV. Прямоугольная плита с тремя заделанными ребрами 583
V. Прямоугольная плита с заделанными краями 585
Таблицы проф. Галеркина 586
Способ Киршгофа 592
б) Круглые плиты по Баху . . . 593

IV. Статически неопределимые системы

А. Лишние неизвестные 594
1. Статически неопределимая конструкция . . . . . —
2. Инфлюэнтные линии лишних неизвестных 595
3. Определение лишних неизвестных по теореме Кастильяно 596
4. Независимое определение отдельных лишних неизвестных в дважды и трижды статически неопределимых системах 597
Б. Расчет труб . . . . . —
а) Расчет давления грунта на трубы, уложенные на определенной глубине . . . . . —
б) Статический расчет жестких труб 599
в) Расчет деревянных трубопроводов 600
В. Расчет рам (таблицы для расчета рам) 603

V. Подпорные стенки 642
А. Общие данные . . . . . —
Б. Активное давление земли . . . 644
В. Пассивное давление земли . . . 653
Расчет фундаментов . . . . . —
а) Напряжение на грунт . . . . . —
б) Глубина заложения фундамента. 655

VI. Расчет балок на сплошном упругом основании . . 656
А. Короткие балки 651
Б. Жесткие балки 677
В. Длинные балки 678
Г. Комбинированный случай . . . 681
Д. Исключение из расчета отрицательных реакций грунта . . 683

VII. Кривые брусья 686
1. Общие формулы . . . . . —
2. Деформация кривого бруса . . —
3. Возможные перемещения . . . 687
4. Работа деформации и теорема Кастильяно 688
5. Взаимность деформаций . . . 689
6. Трехшарнирная арка 690
7. Двухшарнирная арка 692
8. Арка с заделанными пятами . 695
9. Очертание сводов 700

VIII. Учет сейсмических сил 705
Раздел I. Характер и величина сейсмических сил . . . . . —
Раздел II. Расчет сооружений на сейсмостойкость 711

I. ТАБЛИЦЫ

Таблица 1. Степени, корни, бригговы логарифмы, обратные числа, длины окружностей и площади кругов

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1,0000	1,0000	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1.2599	0,30103	2,8284	1,5874	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712	5,1963	2,0801	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1.5874	0,60206	8,0000	2,5198	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	0 69897	11,1805	2,9239	19,6850	5
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815	14,6970	3,3019	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510	18,5206	3 6593	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309	22,6272	4,0000	50.2655	8
9	81	729	3,0000	2,0801	0,95424	27,0000	4,3267	63,6173	9
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	1,00000	31.6230	4,6416	78,5398	**10**
11	1 21	1 331	3,3166	2,2240	1,04139	36,4826	4,9460	95,0332	11
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	1,07918	41,5692	5,2415	113,097	12
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	1,11394	46,8728	5,5288	132,732	13
14	1 96	2 744	3,7417	2,4101	1,14613	52,3838	5,8088	153.938	14
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	1,17609	58,0950	6,0822	176.715	15
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	1,20412	64,0000	6,3497	201,062	16
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	1,23045	70,0927	6,6114	226,980	17
18	3 24	5 832	4,2426	2,6027	1,25527	76,3668	6,9158	254,469	18
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	1,27875	82,8191	7,1203	283,529	19
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	1,30103	89,4420	7,3681	314,159	**20**
21	4 41	9 261	4,5826	2,7859	1,32222	96 2346	7,5379	346,361	21
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	1,34242	103,1888	7,8515	380,133	22
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	1,36173	110,3034	8,0874	415,476	23
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	1,38021	117,5760	8,3203	452,389	24
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	1,39794	125,0000	8,5499	490,874	25
26	6 76	17 576	5,0990	2,9625	1,41497	132,5740	8,7763	530,929	26
27	7 29	19 683	5,1962	3,0000	1,43136	140,2974	9,0000	572,555	27
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	1,44716	148,1620	9,2208	615,752	28
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	1,46240	156,1708	9,4391	660,520	29
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	1,47712	164,3160	9,6549	706,858	**30**
31	9 61	29 791	5,5678	3,1414	1,49136	172,6018	9,8682	754,768	31
32	10 24	32 768	5,6569	3,1748	1,50515	181.0208	10,0793	804.248	32
33	10 89	35 937	5,7446	3,2075	1,51851	189,5718	10,2883	855,299	33
34	11 56	39 304	5,8310	3,2396	1,53148	198,2540	10,4951	907,920	34
35	12 25	42 875	5,9161	3,2711	1.54407	207,0635	10,6997	962.113	35
36	12 96	46 656	6,0000	3,3019	1,55630	216,0000	10,9028	1017,88	36
37	13 69	50 653	6,0828	3,3322	1,56820	225,0636	11,1037	1075,21	37
38	14 44	54 872	6,1644	3,3620	1,57978	234,2472	11,3027	1134,11	38
39	15 21	59 319	6,2450	3,3912	1,59106	243,5550	11,5003	1194,59	39
40	16 00	64 000	6,3246	3,4200	1,60206	252,9840	11,6959	1256,64	**40**
41	16 81	68 921	6,4031	3,4482	1,61278	262,5271	11,8902	1320,25	41
42	17 64	74 088	6,4807	3,4760	1,62325	272,1894	12,0828	1385,44	42
43	18 49	79 507	6,5574	3,5034	1,63347	281,9682	12,2737	1452,20	43
44	19 36	85 184	6,6332	3,5303	1,64345	291.8608	12,4635	1520,53	44
45	20 25	91 125	6,7082	3,5569	1,65321	301,8690	12.6514	1590,43	45
46	21 16	97 336	6,7823	3,5830	1,66276	311,9858	12,8384	1661,90	46
47	22 09	103 823	6,8557	3,6088	1.67210	322,2179	13,0237	1734,94	47
48	23 04	110 592	6,9282	3,6342	1,68124	332,5536	13,2078	18,0956	48
49	24 01	117 649	7,0000	3,6593	1,69020	343,0000	13,3905	1885,74	49
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	1,69897	353 5550	13,5722	1963,50	**50**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	1,69897	353,550	13,5722	1963,50	50
51	26 01	132 651	7,1414	3,7084	1,70757	364,2114	13,7525	2042,82	51
52	27 04	140 608	7,2111	3,7325	1,71600	374,9772	13,9376	2123,72	52
53	28 09	148 877	7,2801	3,7563	1,72428	385,8453	14,1096	2206,18	53
54	29 16	157 464	7,3485	3,7798	1,73239	396,8190	14,2864	2290,22	54
55	30 25	166 375	7,4162	3,8030	1,74036	407,8910	14,4622	2375,83	55
56	31 36	175 616	7,4833	3,8259	1,74819	416,2648	14,6370	2463,01	56
57	32 49	185 143	7,5498	3,8485	1,75587	430,3386	14,8109	2551,76	57
58	33 64	195 112	7,6158	3,8700	1,76343	441,7164	14,9878	2642,08	58
59	34 81	205 379	7,6811	3,8980	1,77085	453,1849	15,155	2733,97	59
60	36 00	216 000	7,7460	3,9149	1,77815	464,7600	15,3260	2827,48	60
61	37 21	226 981	7,8102	3,9365	1,78533	476,4222	15,4959	2922,47	61
62	38 44	238 328	7,8740	3,9579	1,79239	488,1880	15,6648	3019,07	62
63	39 69	250 047	7,9373	3,9791	1,79934	500,0499	15,8327	3117,25	63
64	40 96	262 144	8,0000	4,0000	1,80618	512,0000	16,0000	3216,99	64
65	42 25	274 625	8,0623	4,0207	1,81291	524,0495	16,1663	3318.31	65
66	43 56	287 496	8,1240	4,0412	1,81954	536,1840	16,3317	3421,19	66
67	44 89	300 763	8,1854	4,0615	1,82607	548,4218	16,4963	3525,65	67
68	46 24	314 432	8,2462	4,0817	1,83251	260,7416	16,6597	3631,68	68
69	47 61	328 509	8,3066	4,1016	1,83885	573,1554	16,8227	3739,28	69
70	49 00	343 000	8,3666	4,1213	1,84510	585,6620	16,9849	3848,45	70
71	50 41	357 911	8,4261	4,1408	1,85126	598,2531	17,1464	3959,19	71
72	51 84	373 248	8,4853	4,1602	1,85733	610,9416	17,3068	4071,50	72
73	53 29	389 017	8,5440	4,1793	1,86332	623 7120	17,4670	4185,39	73
74	54 76	405 224	8,6023	4,1983	1,86923	636.5702	17.6261	4300,84	74
75	56 25	421 875	8,6603	4,2172	1,87506	649,5225	17,7843	4427,86	75
76	57 76	438 976	8,7178	4,2358	1,88081	662,5528	17,9423	4536,46	76
77	59 29	456 533	8,7750	4,2543	1,88619	675,6750	18,0993	4656,63	77
78	60 84	474 552	8,8318	4,2727	1,89209	688 8804	18,2554	4778,36	78
79	62 41	493 039	8,8882	4,2903	1,89763	702,1678	18,4114	4901,67	79
80	64 00	512 000	8,9443	4,3080	1,90309	715,5440	18,5662	5026 55	80
81	65 61	531 441	9,0000	4,3267	1,90849	729,0000	18,7209	5153,00	81
82	67 24	551 368	9,0554	4,3445	1,91381	742,5428	18,8744	5281,02	82
83	68 89	571 787	9,1104	4,3621	1,91908	756,1632	19,0275	5410,61	83
84	70 56	592 704	9,1652	4,3795	1,92428	769,8763	19,1802	5541,77	84
85	72 25	614 125	9,2195	4,3968	1,92942	783,6575	19,3322	5674,50	85
86	73 96	636 056	9,2736	4,4140	1,93450	797,5296	19,4834	5808,80	86
87	75 69	658 503	9,3274	4,4310	1,93952	811,4838	19,6343	5944,68	87
88	77 44	681 472	9,3808	4,4480	1,94448	825,5104	19,7841	6082,12	88
89	79 21	704 969	9,4340	4,4647	1,94939	839,6260	19,9341	6221,14	89
90	81 00	769 000	9,4868	4,4814	1,95424	853,8120	20,0830	6361,73	90
91	82 81	753 571	9,5394	4,4979	1,95904	868,0854	20,2316	6503,88	91
92	84 64	778 638	9 5917	4,5144	1,96379	882.4364	20,3792	6647,61	92
93	86 49	804 357	9,6137	4,5307	1,96848	896.8641	20,5266	6792,91	93
94	88 36	830 584	9,6954	4,5468	1.97313	911,3676	20,6738	6939,78	94
95	90 25	857 375	9,7468	4,5629	1,97772	925,9460	20,8200	7088,22	95
96	92 16	884 736	9,7980	4,5789	1,98227	940,6080	20,9657	7238,23	96
97	94 09	912 673	9,8489	4,5947	1,98677	955,3433	21,1112	7389,81	97
98	96 04	941 192	9,8995	4,6104	1,99123	970,1510	21.2562	7542,96	98
99	98 01	970 299	9,9499	4,6261	1,99564	985,0410	21,4003	7697,69	99
100	10 000	1 000 000	10,0000	4.6416	20,0000	1000,0000	21,5442	7853,98	100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
100	10 000	1 000 000	10,0000	4,6416	2,00000	100 ,0000	21,5442	7853,93	100
101	10 201	1 030 301	10,0499	4,6570	2,00432	1015.0399	21,6877	8011,85	101
102	10 404	1 061 208	10.0995	4,6723	2,00860	1030,1490	21,8307	8171,28	102
103	10 609	1 092 727	10,1489	4,6875	2,01284	1045,3367	20,9733	8332,29	103
104	10 816	1 124 864	10.1980	4,7027	2,01703	1060,6920	22,1149	8494,87	104
105	11 025	1 157 625	10,2470	4,7177	2,02119	1075,9350	22,2566	8659,01	105
106	11 236	1 191 016	10,2956	4,7326	2,02531	1091,3336	22,3978	8824,73	106
107	11 449	1 225 043	10,3441	4,7475	2,02938	1106,8187	22,5381	8992,02	107
108	11 664	1 259 712	10,3923	4,7622	2.03342	1122,3684	22,6785	9160,88	108
109	11 881	1 295 029	10,4403	4,7769	2,03743	1137,9927	22,8181	9331,32	109
110	12 100	1 331 000	10,4881	4.7914	2,04139	1153.6910	22,9577	9503,32	110
111	12 321	1 367 631	10.5357	4,8059	2,04532	1169,4627	23,0966	9676,89	111
112	12 544	1 404 928	10.5830	4,8203	2,04922	1185,2960	23,2350	9852,03	112
113	12 769	1 442 897	10,6301	4,8346	2,05308	1201,2013	23,3731	10028,7	113
114	12 996	1 481 544	10,6771	4,8488	2,05690	1217,1894	23,5109	10207,0	114
115	13 225	1 520 875	10,7238	4,8629	2,06070	1233,2370	23,6484	10386,9	115
116	13 456	1 560 896	10,7703	4,8770	2,06446	1249,3548	23,7851	10568,3	116
117	13 689	1 601 613	10,8167	4,8910	2,06819	1265,5539	23,9214	10751,3	118
118	13 924	1 643 032	10,8628	4,9049	2,07188	1281,8104	24,0575	10935,9	117
119	14 161	1 685 159	10,9087	4,9187	2,07555	1298,1353	24,1933	11122,0	119
120	14 400	1 728 000	10.9545	4,9324	2,07918	1314,5400	24,3289	11309,7	120
121	14 641	1 771 561	11,0000	4,9461	2,08279	1331,0000	24,4637	11499,0	121
122	14 884	1 815 848	11,0454	4,9597	2,08636	1347,5388	24,5982	11689.9	122
123	15 129	1 860 867	11,0905	4,9732	2,08991	1364,1315	24,7325	11882,3	123
124	15 376	1 906 624	11.1355	4,9866	2,09342	1380,8020	24,8666	12076,3	124
125	15 625	1 953 125	11,1803	5,0000	2,09691	1397,5375	25,0000	12271,8	125
126	15 876	2 000 376	11,2250	5,0133	2,10037	1414,3500	25,1331	12469,0	126
127	16 129	2 048 383	11 2694	5,0265	2,10380	1431,2138	25,2660	12667,7	127
128	16 384	2 097 152	11,3137	5,0397	2,10721	1448,1536	25,3983	12868,0	128
129	16 641	2 146 689	11.3578	5,0528	2,11059	1465,1562	25,5308	13069,8	129
130	16 900	2 197 000	11,4018	5,0658	2,11394	1482,2340	25,6622	13273,2	130
131	17 161	2 248 091	11,4455	5,0788	2,11727	1499,3605	25,7934	13478,2	131
132	17 424	2 299 968	11 4891	5,0916	2,12057	1516,5612	25,9250	13684,8	132
133	17 689	2 352 637	11,5326	5,1045	2,12385	1533,8358	26,0554	13892,9	133
134	17 956	2 406 104	11,5758	5,1172	2,12710	1551,1572	26,1861	14102,6	134
135	18 225	2 460 375	11,6190	5,1299	2,13033	1568,5650	26,3163	14313,9	135
136	18 496	2 515 456	11,6619	5,1426	2,13354	1586,0184	26,4457	14526,7	136
137	18 769	2 571 353	11,7047	5,1551	2,13672	1603,5439	26,5756	14741,1	137
138	19 044	2 628 072	11,7473	5,1676	2,13988	1621,1274	26,7048	14957,1	138
139	19 321	2 685 619	11,7898	5,1801	2,14301	1638,7822	26,8334	15174,7	139
140	19 600	2 744 000	11.8322	5,1925	2,14613	1656,5080	26,9619	15393,8	140
141	19 881	2 803 221	11 8743	5,2048	2,14922	1674,2763	27,0903	15614,5	141
142	20 164	2 863 288	11,9164	5,2171	2,15229	1692,1288	27,2181	15836,8	142
143	20 449	2 924 207	11,9583	5,2293	2,15534	1710,0369	27,3459	16060,6	143
144	20 736	2 985 984	12,0000	5,2415	2,15836	1728,0000	27,4730	16286,0	144
145	21 025	3 048 625	12,0416	5,2536	2.16137	1746,0320	27,6001	16513.0	145
146	21 316	3 112 136	12,0830	5,2656	2,16433	1764,1180	27,7271	16741,5	146
147	21 609	3 176 523	12,1244	5,2776	2,16732	1782,2868	27,8535	16971,7	147
148	21 904	3 241 792	12,1655	5,2896	2,17026	1800.4940	27,9794	17203,4	148
149	22 201	3 307 949	12,2066	5,3015	2,17319	1818,7834	28,1052	17436,6	149
150	22 500	3 375 000	12,2474	5,3133	2,17609	1837,1100	28,2310	17671,5	150

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
150	22 500	3 375 000	12,2474	5,3133	2,17609	1837,1100	28 2310	17671,5	**150**
151	22 801	3 442 951	12,2882	5,3251	2,17898	1855,5182	28,3562	17907,9	151
152	23 104	3 511 808	12,3283	5,3368	2,18184	1873,9776	28,4814	18145,8	152
153	23 409	3 581 577	12,3693	5,3185	2,18469	1892,5029	28,6061	18835,4	153
154	23 716	3 652 264	12,4097	5,3601	2,18752	1911,0938	28,7308	18626,5	154
155	24 025	3 723 875	12,4499	5,3717	2,19033	1929,7345	28,8549	18869,2	155
156	24 336	3 796 416	12,4900	5,3832	2,19312	1948,4400	28,9790	19113,4	156
157	24 649	3 869 893	12,5300	5,3947	2,19590	1967,2100	29,1026	19359,3	157
158	24 964	3 944 312	12,5698	5,4061	2,19866	1986,0284	29,2262	19606,7	158
159	25 281	4 019 679	12,6095	5,4175	2,20140	2004,9105	29,3493	19855,7	159
160	25 600	4 096 000	12,6491	5,4288	2,20412	2023,8560	29,4724	20106,2	**160**
161	25 921	4 173 281	12,6886	5,4401	2,20683	2042,8646	29,5950	20358,3	161
162	26 244	4 251 528	12,7279	5,4514	2,20952	2031,9198	29,7171	20612,0	162
163	26 569	4 330 747	12,7671	5,4626	2,21219	2081,0373	29,8392	20367,2	163
164	26 896	4 410 944	12,8062	5,4737	2,21484	2100,2168	29,9614	21124,1	164
165	27 225	4 492 125	12,8452	5,4848	2,21748	2119,4580	30,0831	21382,5	165
166	27 556	4 564 296	12,8841	5,4959	2,22011	2138,7606	30,2043	21642,4	166
167	27 889	4 657 463	12,9228	5,5069	2,22272	2158,1076	30,3255	21904,0	167
168	28 224	4 741 632	12,9615	5,5178	2,22531	2177,5320	30,4469	22167,1	168
169	28 561	4 826 809	13,0000	5,5288	2,22789	2197,0000	30,5672	22431,8	169
170	28 900	4 918 000	13,0384	5,5397	2,23045	2216,5280	30,6875	22698,0	**170**
171	29 241	5 000 211	13,0767	5,5505	2,23300	2236,1157	30,8080	23965,8	171
172	29 584	5 088 448	13,1149	5,5613	2,23558	2255,7628	30,9280	23235,2	172
173	29 929	5 177 717	13,1529	5,5721	2,23805	2275,4517	31,0475	23506,2	173
174	30 276	5 268 024	13,1909	5,5828	2,24055	2295,2166	31,1671	23778,7	174
175	30 625	5 359 375	13,2288	5,5934	2,24304	2315,0400	31,2863	24052,8	175
176	30 976	5 451 776	13,2665	5,6041	2,24551	2334,9040	31,4055	24328,5	176
177	31 329	5 545 233	13,3041	5,6147	2,24797	2354,8257	31,5243	24605,7	177
178	31 684	5 639 752	13,3417	5,6252	2,25042	2374,8226	31,6433	24884,6	178
179	32 041	5 735 339	13,3791	5,6357	2,25285	2394,8589	31,7618	25164,9	179
180	32 400	5 832 000	13,4164	5,6452	2,25527	2414,9520	31,8793	25446,9	**180**
181	32 761	5 929 741	13,4536	5,6567	2,25768	2435,1016	31,9974	25730,4	181
182	33 124	6 028 568	13,4907	5,6671	2,26007	2455,3074	32,1151	26015,5	182
183	33 489	6 128 487	13,5277	5,6774	2,26245	2475,5691	32,2330	26302,2	183
184	33 856	6 229 504	13,5647	5,6877	2,26482	2495,9048	32,3505	26590,4	184
185	34 225	6 331 625	13,6015	5,6980	2,26717	2516,2775	32,4675	26380,3	185
186	34 596	6 434 856	13,6382	5,7033	2,26951	2536,7052	32,5841	27171,6	186
187	34 969	6 539 203	13,6748	5,7185	2,27184	2557,1876	32,7008	27464,6	187
188	35 344	6 644 672	13,7113	5,7287	2,27416	2577,7244	32,8172	27759,1	188
189	35 721	6 751 269	13,7477	5,7388	2,27646	2593.3153	32,9337	28055,2	189
190	36 100	6 859 000	13,7840	5,7489	2,27875	2318.9600	33,0493	28352,9	**190**
191	36 481	6 967 871	13,8203	5,7590	2,28103	2639,6773	33,1654	28652,1	191
192	36 864	7 077 888	13,8564	5,7690	2,28330	2660,4288	33,2813	28952,9	192
193	37 249	7 189 057	13,8924	5,7790	2,28556	2681,2332	33,3967	29256,3	193
194	37 636	7 301 384	13,9284	5,7890	2,28780	2702,1096	33,5118	29559,2	194
195	38 025	7 414 875	13,9642	5,7939	2,29003	2723,0190	33,6270	29864,8	195
196	38 416	7 529 536	14,0000	5,8088	2,29226	2744,0000	33,7419	30171,9	196
197	38 809	7 645 373	14,0357	5,8186	2,29447	2765,0329	33,8569	30480,5	197
198	39 204	7 762 392	14,0712	5,8285	2,29667	2786,0376	33,9710	30790,7	198
199	39 601	7 880 599	14,1067	5,8383	2,29885	2807,2333	34,0852	31102,6	199
200	40 000	8 000 000	14.1421	5,8480	2,30103	2828,4200	4,1997	31415,9	**200**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
200	40 000	8 000 000	14,1421	5.8480	2,30103	2828,420	4,1997	31415,9	**200**
201	40 401	8 120 601	14,1774	5,8578	2,30320	2849,6574	34,3132	31730,9	201
202	40 804	8 242 408	14,2127	5,8675	2,30535	2870,9654	34,4269	32047,4	202
203	41 209	8 365 427	14,2478	5,8771	2,30759	2892,3034	34,3468	32365,5	203
204	41 616	8 489 664	14,2829	5,8868	2,30963	2913,7116	34,6538	32685,1	204
205	42 025	8 615 125	14,3178	5,8964	2,31175	2935,1490	34,8669	33006,4	205
206	42 436	8 741 816	14,3527	5,9059	2,31387	2956,6562	34,8803	33329,2	206
207	42 849	8 869 743	14,3875	5,9155	2,31597	2978,2125	34,9928	33653,5	207
208	43 264	8 998 912	14,4222	5,9250	2,31806	2999,8176	35,1054	33979,5	208
209	43 681	9 129 329	14,4568	5,9345	2,32015	3021,4712	35,2177	34307,0	209
210	44 100	9 261 000	14,4914	5,9439	2,32222	3043,1940	35,3303	34636,1	**210**
211	44 521	9 393 931	14,5258	5,9533	2,32428	3064,9438	35,4425	34966,7	211
212	44 944	9 528 128	14,5602	5,9627	2,32634	3086,7624	35,5543	35298,9	212
213	45 369	9 663 597	14,5945	5,9721	2,32838	3108,6285	35,6658	35832,7	213
214	45 796	9 800 344	14,6287	5,9814	2,33041	3130,5418	35,7775	35968,1	214
215	46 225	9 938 375	14,6629	5,9907	2,33244	3152,5235	35,8889	36305,0	215
216	46 656	10 077 696	14,6969	6,0000	2,33445	3174,5304	36,0000	36643,5	216
217	47 089	10 218 313	14,7309	6,0092	2,33646	3196,6053	36,1112	36973,6	217
218	47 524	10 360 232	14,7648	6,0185	2,33846	3218,7264	36,2216	37325,3	218
219	47 961	10 503 459	14,7986	6,0277	2,34044	3240,8934	36,3322	37668,5	219
220	48 400	10 648 000	14,8324	6,0368	2,34242	3263,1280	36,4431	38013,3	**220**
221	48 841	10 793 861	14,8661	6,0459	2,34439	3285,4081	36,5536	38359,6	221
222	49 284	10 941 048	14,8997	6,0550	2,34635	3307,7334	36,6639	38707,6	222
223	49 729	11 089 567	14,9332	6,0641	2,34830	3330,1036	36,7737	39057,1	223
224	50 176	11 239 424	14,9666	6,0732	2,35025	3352,5184	36,8833	39408,1	224
225	50 625	11 390 625	15,0000	6,0822	2,35218	3375,0000	36,9931	39760,8	225
226	51 076	11 543 176	15,0333	6,0912	2,35411	3397,5258	37,1027	40115,0	226
227	51 529	11 697 083	15,0665	6,1002	2,35603	3420,0955	37,2118	40470,8	227
228	51 984	11 852 352	15.0997	6,1091	2,35793	3442,7316	37,3213	40828,1	228
229	52 441	12 008 989	15,1327	6,1180	2,35934	3465,3883	37,4305	41187,1	229
230	52 900	12 167 000	15,1658	6,1269	2,36173	3488,1240	37,5393	41547,6	**230**
231	53 361	12 326 391	15,1987	6,1358	2,36361	3510,8997	37,6479	41909,6	231
232	53 824	12 487 168	15,2315	6,1446	2,36549	3533,7080	37,7567	42273,3	232
233	54 289	12 649 337	15,2643	6,1534	2,36736	3556,5819	37,8652	42638,5	233
234	54 756	12 812 904	15,2971	6,1622	2,36922	3579,5214	37,9734	43005,3	234
235	55 225	12 977 875	15,3297	6,1710	2,37107	3602,4795	38,0813	43373,6	235
236	55 696	13 144 256	15,3623	6,1797	2,37291	3625,5028	38,1895	43743,5	236
237	56 169	13 312 013	15,3948	6,1885	2,37475	3648,5676	38,2968	44115,0	237
238	56 644	13 481 272	15,4272	6,1972	2,37658	3671,6736	38,4044	44388,1	238
239	57 121	13 651 919	15,4596	6,2058	2,37840	3694,8444	38,5123	44862,7	239
240	57 600	13 824 000	15,4919	6,2145	2,38021	3718,0560	38,6193	45238,9	**240**
241	58 081	13 997 521	15,5242	6,2231	2,38202	3741,3222	38,7266	45616,7	241
242	58 564	14 172 488	15,5563	6,2317	2,38382	3764,6246	38,8337	45996,1	242
243	59 049	14 348 907	15,5885	6,2403	2,38561	3788,0055	38,9404	46377,0	243
244	59 536	14 526 784	15,6205	6,2488	2,38739	3811,4020	39,0474	46759,5	244
245	60 025	14 706 125	15,6525	6,2573	2,38917	3834,8625	39,1542	47143,5	245
246	60 516	14 886 936	15,6844	6,2658	2,39094	3858,3624	39,2607	47529,2	246
247	61 009	15 069 223	15,7162	6,2743	2,39270	3881,9014	39,3669	47916,4	247
248	61 504	15 252 992	15,7480	6,2828	2,39445	3905,5040	39,4728	48305,1	248
249	62 001	15 438 249	15,7797	6,2912	2,39620	3929,1453	39,5790	48695,5	249
250	62 500	15 625 000	15,8114	6,2996	2,39794	3952,8500	39,6850	49087,4	**250**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
250	62 500	15 625 000	15,8114	6,2996	2,39794	3952,8500	39,6850	49087.4	250
251	63 001	15 813 251	15,8430	6,3080	2,39967	3976,5930	39,7907	49480,9	251
252	63 504	16 003 008	15,8745	6,3164	2,40140	4000,3740	39,8963	49875,9	252
253	64 009	16 194 277	15,9060	6,3247	2,40312	4024,2180	40,0018	50272,6	253
254	64 516	16 387 064	15,9374	6,3330	2,40483	4048,0996	40,1073	50670,7	254
255	65 025	16 581 375	15,9687	6,3413	2,40654	4072.0185	40,2125	51070,5	255
256	65 536	16 777 216	16,0000	6,3496	2,40824	4096,0000	40,3175	51471,9	256
257	66 049	16 974 593	16,0312	6,3579	2,40993	4120,0184	40.4221	51874,8	257
258	66 564	17 173 512	16,0624	6,3661	2,41162	4144,0992	40,5271	52279,2	258
259	67 081	17 373 979	16,0935	6,3743	2,41330	4168,2165	40,6319	52635,3	259
260	67 600	17 576 000	16,1245	6,3825	2,41497	4192,3700	40,7363	53092,9	260
261	68 121	17 779 581	16,1555	6,3907	2,41664	4216,5855	40,8405	53502,1	261
262	68 644	17 984 728	16,1864	6,3988	2,41830	4240,8368	40,9451	53912,9	262
263	69 169	18 191 447	16,2173	6,4070	2,41996	4265,1499	41,0488	54325,2	263
264	69 696	18 399 744	16,2481	6,4151	2,42160	4289,4984	41,1529	54739,1	264
265	70 225	18 609 625	16,2788	6,4232	2,42325	4313,8820	41,2566	55154,6	265
266	70 756	18 821 096	16,3095	6,4312	2,42488	4338,3270	41,3608	55571,6	266
267	71 289	19 034 163	16,3401	6,4393	2,42651	4362,8067	41,4641	55990,2	267
268	71 824	19 248 832	16,3707	6,4473	2,42813	4387,3476	41,5677	56410,4	268
269	72 361	19 465 109	16,4012	6,4553	2,42975	4411,9228	41,6711	56832,2	269
270	72 900	19 683 000	16,4317	6,4633	2,43136	4436.5590	41,7743	57255,5	270
271	73 441	19 902 511	16,4621	6,4713	2,43297	4461,2291	41,8772	57680,4	271
272	73 984	20 123 648	16,4924	6,4792	2,43157	4485,9328	41,9804	58106,9	272
273	74 529	20 346 417	16,5227	6,4872	2,43616	4510,6971	42,0828	58534,9	273
274	75 076	20 570 824	16,5529	6,4951	2,43775	4535,4946	42,1856	58964,6	274
275	75 625	20 796 875	16,5831	6,5030	2,43933	4560,3525	42 2881	59395,7	275
276	76 176	21 024 576	16,6132	6,5108	2,44091	4585,2432	42,3911	59828,5	276
277	76 729	21 253 933	16,6433	6,5187	2,44248	4610,1941	42,4931	60262,8	277
278	77 284	21 484 952	16,6733	6,5265	2,44404	4635,1774	42,5955	60693,7	278
279	77 841	21 717 639	16,7033	6,5343	2,44560	4660,2207	42,6977	61136,2	279
280	78 400	21 952 000	16,7362	6,5421	2,44716	4686.6960	42,7997	61575,2	280
281	79 961	22 188 041	16,7631	6,5499	2,44871	4710,4311	42,9014	62015,8	281
282	78 524	22 425 768	16,7929	6,5577	2,45025	4735,5978	43,0028	62458,0	282
283	80 089	22 665 187	16,8226	6,5654	2,45179	4760,7958	43,1047	62901,8	283
284	80 656	22 906 304	16,8523	6,5731	2,45332	4786,0532	43,2064	63347,1	284
285	81 225	23 149 125	16 8819	6,5808	2.45484	4811,3415	43,3078	63794,0	285
286	81 796	23 393 656	16,9115	6,5885	2,45637	4836,6890	43,4089	64242,4	286
287	82 369	23 639 903	16,9411	6,5962	2,45788	4862,0957	43,5164	64692,5	287
288	82 944	23 887 872	16,9706	6,6039	2,45939	4887,5328	43,6105	65144,4	288
289	83 521	24 137 569	17,0000	6,6115	2,46090	4913,0000	43,7117	65597,2	289
290	84 100	24 389 000	17,0294	6,6191	2,46240	4938.5260	43,8126	66052.0	290
291	84 681	24 642 171	17,0587	6,6267	2,46389	4964,0817	43,9132	66508,3	291
292	85 264	24 897 088	17,0880	6,6343	2,46538	4989,6960	44,0136	66966,2	292
293	85 849	25 153 757	17,1172	6,6419	2,46687	5015,3396	44,1138	67425,6	293
294	86 436	25 412 184	17,1464	6,6494	2,46835	5041,0416	44,2145	67886,7	294
295	87 025	25 672 375	17,1756	6,6569	2,46982	5066.8020	44,3149	68349,3	295
296	87 616	25 934 336	17,2047	6,6644	2,47129	5092,5912	44,4151	68813,4	296
297	88 209	26 198 073	17,2337	6,6719	2,47276	5118,4089	44,5150	69279,2	297
298	88 804	26 463 592	17,2627	6,6794	2,47422	5144,2846	44,6147	69746,5	298
299	89 401	26 730 899	17,2916	6,6869	2,47567	5170,1884	44,7142	70215,4	299
300	90 000	27 000 000	17,3205	6,6943	2,47712	5196,1500	44.8142	70685.8	300

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
300	90 000	27 000 000	17,3205	6.6943	2,47712	5196,1500	44,8142	70685,8	300
301	90 601	27 270 901	17,3494	6,7018	2,47857	5222,1694	44,9133	71157,9	301
302	91 204	27 543 608	17,3781	6,7092	2,48001	5248,1862	45,0128	71631,5	302
303	91 809	27 818 127	17,4069	6,7166	2,48144	5274,2907	45,1121	72106,6	303
304	92 416	28 094 464	17,4356	6,7240	2,48287	5300,4224	45,2111	72583,4	304
305	93 025	28 372 625	17,4642	6,7313	2,48430	5326,5810	45,3107	72061,7	305
306	93 636	28 652 616	17,4929	6 7337	2,48572	5352,8274	45,4093	73541,5	306
307	94 249	28 934 443	17,5214	6,7460	2,48714	5379,0698	45,5084	74023,0	307
308	94 864	29 218 112	17,5499	6,7533	2,48855	5405,3692	45.6073	74506,0	308
309	95 481	29 503 629	17,5784	6,7606	2,48996	5431,7256	45,7060	74990,6	309
310	96 100	28 791 000	17.6068	6,7679	2,49136	5458,1080	45,8044	75476,8	310
311	96 721	30 080 231	17,6352	6,7752	2,49276	5484,5472	45,9027	75964,5	311
312	97 344	30 371 328	17,6635	6,7824	2,49415	5511.0120	46,0014	76453,8	312
313	97 969	30 664 297	17,6918	6,7897	2,49554	5537,5334	46,0992	76944,7	313
314	98 596	30 959 144	17,7200	6,7969	2,49693	5564,0800	46,1975	77437,1	314
315	99 225	31 255 875	17,7482	6,8041	2,49831	5590,6830	46,2956	77931,1	315
316	99 856	31 554 496	17,7764	6,8113	2,49969	5617,3424	46,3934	78426,7	316
317	100 489	31 855 013	17,8045	6,8185	2,50106	5644,0265	46,4911	78923,9	317
318	101 124	32 157 432	17,8326	6,8256	2,50243	5670,7668	46,5893	79422,6	318
319	101 761	32 461 759	17,8606	6,8328	2,50379	5697,5314	46,6865	79922,9	319
320	102 400	32 768 000	17,8885	6,8399	2,50515	5724,3200	46,7843	80424,8	320
321	103 041	33 076 161	17,9165	6,8470	2,50651	5751,1965	46,8818	80928,2	321
322	103 684	33 386 248	17,9444	6,8541	2,50786	5778,0968	46,9791	81433,2	322
323	104 329	33 698 267	17,9722	6,8612	2,50320	5805,0206	47,0763	81939,8	323
324	104 976	34 012 224	18,0000	6,8683	2,51055	5832,0000	47,1732	82448,0	324
325	105 625	34 328 125	18,0278	6,8753	2,51188	5859,0350	47,2706	82957,7	325
326	106 276	34 645 976	18,0555	6,8824	2,51322	5886,0930	47,3686	83460,0	326
327	106 929	34 965 783	18,0831	6,8894	2,51455	5913,1737	47,4642	83981,8	327
328	107 584	35 287 552	18,1106	6,8964	2,51587	5940,3424	47,5610	84496,3	328
329	108 241	35 611 289	18,1384	6,9034	2,51720	5967,5336	47,6576	85012,3	329
330	108 900	35 937 000	18.1659	6,9104	2,51351	5994,7470	47,7541	85529,9	330
331	109 561	36 264 691	18,1934	6,9174	2,51983	6022,0154	47,8503	86049,9	331
332	110 224	36 594 368	18,2209	6,9244	2,52114	6049,3388	47,9463	86569,7	332
333	110 889	36 926 037	18,2483	6,9313	2,52244	6076,6839	48,0429	87002,0	333
334	111 556	37 259 704	18.2757	6,9382	2,52375	6104,0838	48,1392	87615,9	334
335	112 225	37 595 375	18,3030	6,9451	2,52504	6131,5050	48,2354	88141,3	335
336	112 896	37 983 056	18,3303	6,9521	2,52634	6158,9808	48,3307	88063,3	336
337	113 569	38 272 753	18,3576	6,9589	2,52763	6186,5112	48.4271	89196,9	337
338	114 244	38 614 472	18,3848	6,9658	2,52892	6214,0624	48,5227	89727,0	338
339	114 921	38 958 921	18,4120	6,9727	2,53020	6241,6680	48,6181	90258,7	339
340	115 600	39 304 000	18,4391	6,9795	2,53148	6269 2940	48,7140	90792,0	340
341	116 281	39 651 821	18,4662	6,9864	2,53275	6296.9742	48,8091	91326,9	341
342	116 964	40 001 688	18,4932	6,9932	2,53403	6324,6744	48,9046	91863,3	342
343	117 649	40 353 607	18,5203	7,0000	2,53529	6352,4629	49,0000	92401,3	343
344	118 336	40 707 584	18,5472	7,0068	2,53656	6380,2368	49,0951	92240,9	344
345	119 025	41 063 625	18,5742	7,0136	2,53782	6408,0990	49,1901	93482,0	345
346	119 716	41 421 736	18,6011	7,0203	2,53908	6435,9806	49,2856	94024,7	346
347	120 409	41 781 923	18,6279	7,0271	2,54033	6463,8813	49,3802	94559,0	347
348	121 104	42 144 192	18,6548	7,0338	2,54158	6491,8704	49,4753	95114,9	348
349	121 801	42 508 549	18,6815	7,0406	2,54283	6519,8435	49,5696	95662,3	349
350	122 500	42 875 000	13.7083	7.0473	2.54407	6547.9050	49,6644	96211,3	350

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
350	122 500	42 875 000	18,7083	7,0473	2,54407	6547,9050	49,6644	96211,3	350
351	123 201	43 243 551	18,7350	7,0540	2,54531	6575,9850	49,7604	96761,8	351
352	123 904	43 614 208	18,7617	7,0607	2,54654	6604,1184	49,8534	97314,0	352
353	124 609	43 986 977	18,7883	7,0674	2,54777	6632,2699	49,9476	97867,7	353
354	125 316	44 361 864	18 8149	7,0740	2,54900	6660,4746	50,0424	98423,0	354
355	126 025	44 738 875	18,8414	7,0807	2,55023	6668,6970	50,1362	98979,8	355
356	126 736	45 118 016	18,8680	7,0873	2,55145	6717,0080	50,2306	99538,2	356
357	127 449	45 499 293	18,8944	7,0940	2,55267	6745,3008	50,3242	100 098	357
358	128 164	45 882 712	18,9209	7,1006	2,55388	6773,6822	50,4182	100 660	358
359	128 881	46 268 279	18,9473	7,1072	2,55509	6802,0807	50,5121	101 223	359
360	129 600	46 656 000	18,9737	7,1138	2,55630	6830,5320	50,6058	101 788	360
361	130 321	47 045 881	19,0000	7,1204	2,55751	6859,0000	50,6993	102 354	361
362	131 044	47 437 928	19,0263	7,1269	2,55871	6887,5206	50,7934	102 922	362
363	131 769	47 832 147	19,0526	7,1335	2,55991	6916,0938	50,8866	103 491	363
364	132 496	48 228 544	19,0788	7,1400	2,56110	6944,6832	50,9803	104 062	364
365	133 225	48 627 125	19,1050	7,1466	2,56229	6973,3250	51,0732	104 635	365
366	133 956	49 027 896	19,1311	7,1531	2,56348	7001,9626	51,1666	105 209	366
367	134 689	49 430 863	19,1572	7,1596	2,56467	7030,6924	51,2598	105 785	367
368	135 424	49 836 032	19,1833	7,1661	2,56585	7059,4544	51,3528	106 362	368
369	136 161	50 243 409	19,2094	7,1726	2,56703	7088,2686	51,4457	106 941	369
370	136 900	50 653 000	19,2354	7,1791	2,56820	7117,0980	51,5384	107 521	370
371	137 641	51 064 811	19,2614	7,1855	2,56937	7145,9794	51,6317	108 103	371
372	138 384	51 478 848	19,2873	7,1920	2,57054	7174,8756	51,7241	108 687	372
373	139 129	51 895 117	19,3132	7,1984	2,57171	7203,8236	51,8170	109 272	373
374	139 876	52 313 624	19,3391	7,2048	2,57287	7232,8234	51,9098	109 858	374
375	140 625	52 734 375	19,3649	7,2112	2,57403	7261,8375	52,0024	110 447	375
376	141 376	53 157 376	19,3907	7,2177	2,57519	7290,9032	52,0941	111 036	376
377	142 129	53 582 633	19,4165	7,2240	2,57634	7320,0205	52,1871	111 628	377
378	142 884	54 010 152	19,4422	7,2304	2,57749	7349,1516	52,2792	112 221	378
379	143 641	54 439 939	16,4679	7,2368	2,57864	7378,3341	52,3712	112 815	379
380	144 400	54 872 000	19,4936	7,2432	2,57978	7407,5680	52,4629	113 411	380
381	145 161	55 306 341	19,5192	7,2495	2,58092	7436,8152	52,5553	114 009	381
382	145 924	55 742 968	19,5448	7,2558	2,58206	7466,1136	52,6475	114 608	382
383	146 689	56 181 887	19,5704	7,2622	2,58320	7495,4632	52,7388	115 209	383
384	147 456	56 623 104	19,5959	7,2685	2,58433	7524,8256	52,8307	115 812	384
385	148 225	57 066 625	19,6214	7,2748	2,58546	7554,2390	52,9224	116 416	385
386	148 996	57 512 456	19,6469	7,2811	2,58659	7583,7034	53,0139	117 021	386
387	149 769	57 960 603	19,6723	7,2874	2,58771	7613,1801	53,1053	117 628	387
388	150 544	58 411 072	19,6977	7,2936	2,58883	7642,7076	53,1973	118 237	388
389	151 321	58 863 869	19,7231	7,2999	2,58995	7672,2859	53,2884	118 847	389
390	152 100	59 319 000	19,7484	7,3061	2,59106	7701,8760	53,3800	119 459	390
391	152 881	59 776 471	19,7737	7,3124	2,59218	7731,5167	53,4708	120 072	391
392	153 664	60 236 288	19,7990	7,3186	6,59329	7761,2080	53,5621	120 687	392
393	154 449	60 698 457	19,8242	7,3248	2,59439	7790,9106	53,6533	121 304	393
394	155 236	61 162 984	19,8494	7,3310	2,59550	7820,6636	53,7443	121 922	394
395	156 025	61 629 875	19,8746	7,3372	2,59660	7850,4670	53,8352	122 542	395
396	156 816	62 099 136	19,8997	7,3434	2,59770	7880,2812	53,9259	123 163	396
397	157 609	62 570 773	19,9249	7,3496	2,59879	7910,1853	54,0165	123 786	397
398	158 404	63 044 792	19,9499	7,3658	2,59988	7940,0602	54,1069	124 410	398
399	159 201	63 521 199	19,9750	7,3619	2,60097	7970,0250	54,1979	125 036	399
400	160 000	64 000 000	20,0000	7,3681	2,60206	8000,0000	54,2880	125 664	400

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
400	160 000	64 000 000	20,0000	7,3681	2,60206	8000,0000	54,2880	125 664	400
401	160 801	64 481 201	20,0250	7,3742	2,60314	8030,0250	54,3787	126 293	401
402	161 604	64 964 808	20,0499	7 3803	2,60423	8060,0598	54,4693	126 923	402
403	162 409	65 450 827	20,0749	7,3864	2,60531	8090,1847	54,5597	127 556	403
404	163 216	65 939 264	20,0998	7,3925	2,60638	8120,3192	54,6499	128 190	404
405	164 025	66 430 125	20,1246	7,3986	2,60746	8150,4630	54,7400	128 825	405
406	164 836	66 923 416	20,1494	7,4047	2,60853	8180,6564	54,8300	129 462	406
407	165 649	67 419 143	20,1742	7,4108	2,60959	8210,8994	54,9198	130 100	407
408	166 464	67 917 312	20,1990	7,4169	2,61066	8241,1920	55,0095	130 741	408
409	167 281	68 417 929	20,2237	7,4229	2,61172	8271,4933	55,0997	131 382	409
410	168 100	68 921 000	20,2485	7,4290	2,61278	8301,8850	55,1891	132 025	410
411	168 921	69 426 531	20,2731	7,4350	2,61384	8332,2441	55,2790	132 670	411
412	169 744	69 934 528	20,2978	7,4410	2,61490	8362,6936	55,3689	133 317	412
413	170 569	70 444 997	20,3224	7,4470	2,61595	8393,1512	55,4585	133 965	413
414	171 396	70 957 944	20,3470	7,4530	2,61700	8423,6580	55,5481	134 614	414
415	172 225	71 473 375	20,3715	7,4590	2,61805	8454,1725	55,6374	135 265	415
416	173 056	71 991 296	20,3961	7,4650	2,61909	8484,7776	55,7267	135 918	416
417	173 889	72 511 713	20,4206	7,4710	2,62014	8515,3902	55,8158	136 572	417
418	174 724	73 034 632	20,4450	7,4770	2,62118	8546,0100	55,9047	137 228	418
419	175 561	73 560 059	20,4695	7,4829	2,62221	8576,7205	55,9943	137 885	419
420	176 400	74 088 000	20,4939	7,4889	2,62325	8607,4380	56,0830	138 544	420
421	177 241	74 618 461	20,5183	7,4948	2,62428	8638,2043	56,1722	139 205	421
422	179 084	75 151 448	20,5426	7,5007	2,62531	8668,9772	56,2614	139 867	422
423	178 929	75 686 967	20,5670	7,5067	2,62634	8699,8410	56,3496	140 531	423
424	179 776	76 225 024	20,5913	7,5126	2,62737	8730,7112	56,4385	141 196	424
425	180 625	76 765 625	20,6155	7,5185	2,62839	8761,5875	56,5272	141 863	425
426	181 476	77 308 776	20,6398	7,5244	2,62941	8792,5548	56,6158	142 531	426
427	182 329	77 854 483	20,6640	7,5302	2,63043	8823,5280	56,7050	143 201	427
428	183 184	78 402 752	20,6882	7,5361	2,63144	8854,5496	56,7933	143 872	428
429	184 041	78 953 589	20,7123	7,5420	2,63246	8885,5767	56,8814	144 545	429
430	184 900	79 507 000	20,7364	7,5478	2,63347	8916,6520	56,9702	145 220	430
431	185 761	80 062 991	20,7605	7,5537	2,63448	8947,7755	57,0581	145 896	431
432	186 624	80 621 568	20,7846	7,5595	2,63548	8978,9472	57,1466	146 574	432
433	187 489	81 182 737	20,8087	7,5654	2,63649	9010,1671	57,2342	147 254	433
434	188 356	81 746 504	20,8327	7,5712	2,63749	9041,3918	57,3224	147 934	434
435	189 225	82 312 875	20,8567	7,5770	2,63849	9072,6645	57,4105	148 617	435
436	190 096	82 881 856	20,8806	7,5828	2,63949	9103,9416	57,4985	149 301	436
437	190 969	83 453 453	20,9045	7,5886	2,64048	9135,2665	57,5863	149 987	437
438	191 844	84 027 672	20,9284	7,5944	2,64147	9166,6392	57,6740	150 674	438
439	192 721	84 604 519	20,9523	7,6001	2,64246	9193,0597	57,7623	151 363	439
440	193 600	85 184 000	20,9762	7,6059	2,64345	9229,5280	57,8498	152 053	440
441	194 481	85 766 121	21,0000	7,6117	2,64444	9261,0000	57,9371	152 745	441
442	195 364	86 350 886	21,0238	7,6174	2,64542	9292,5196	58,0250	153 439	442
443	196 249	86 938 307	21,0476	7,6232	2,64640	9324,0868	58,1120	154 134	443
444	197 136	87 528 384	21,0713	7,6289	2,64738	9355,6572	58,1997	154 830	444
445	198 025	88 121 125	21,0950	7,6346	2,64836	9387,2750	58,2872	155 528	445
446	198 916	88 716 536	21,1187	7,6403	2,64933	9418,9402	58,3746	156 228	446
447	199 809	89 314 623	21,1424	7,6460	2 65031	9450,6528	58,4619	156 930	447
448	200 704	89 915 392	21,1660	7,6517	2,65128	9482,3680	58,5503	157 633	448
449	201 601	90 518 849	21,1896	7,6574	2,65225	9514,1304	58,6373	158 337	449
450	202 500	91 125 000	21,2132	7,6631	2,65321	9545,94 0	58.7229	159 043	450

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
450	202 500	91 125 000	21,2132	7,6631	2,65321	9545,9400	58,7229	159 043	**450**
451	203 401	91 733 851	21,2368	7,6688	2,65418	9577,7968	58,8097	159 751	451
452	204 304	92 345 408	21,2603	7,6744	2,65514	9609,6556	58,8971	160 460	452
453	205 209	92 959 677	21,2838	7,6801	2,65610	9641,5614	58,9836	161 171	453
454	206 116	93 576 664	21,3073	7,6857	2,65706	9673,5142	59,0707	161 883	454
455	207 025	94 196 375	21,3307	7,6914	2,65801	9705,4685	59,1595	162 597	455
456	207 936	94 818 816	21,3542	7,6970	2,65896	9737,5152	59,2438	163 313	456
457	208 849	95 443 993	21,3776	7,7026	2,65992	9769,5632	59,3306	164 030	457
458	209 764	96 071 912	21,4009	7,7082	2,66087	9801,6122	59,4172	164 748	458
459	210 681	96 702 579	21,4243	7,7138	2,66181	9833,7537	59,5037	165 468	459
460	211 600	97 336 000	21,4476	7,7194	2,66276	9865,8960	59,5901	166 190	**460**
461	212 521	97 972 181	21,4709	7,7250	2,66370	9898,0849	59,6763	166 914	461
462	213 444	98 611 128	21,4942	7,7306	2,66464	9930,3204	59,7625	167 639	462
463	214 369	99 252 847	21,5174	7,7362	2,66558	9962,5562	59,8485	168 365	463
464	215 296	99 897 344	21,5407	7,7418	2,66652	9994,8848	59,9343	169 093	464
465	216 225	100 544 625	21,5639	7,7473	2,66745	10027,2135	60,0209	169 823	465
466	217 156	101 194 696	21,5870	7,7529	2,66839	10059,5420	60,1065	170 554	466
467	218 089	101 847 563	21,6102	7,7584	2,66932	10091,9634	60,1928	171 287	467
468	219 024	102 503 232	21,6333	7,7639	2,67025	10124,3844	60,2789	172 021	468
469	219 961	103 161 709	21,6564	7,7695	2,67117	10156,8516	60,3642	172 757	469
470	220 900	103 823 000	21,6795	7,7750	2,67210	10189,3650	60,4501	173 494	**470**
471	221 841	104 487 111	21,7025	7,7805	2,67302	10221,8775	60,5359	174 284	471
472	222 784	105 154 048	21,7256	7,7860	2,67394	10254,4832	60,6216	174 974	472
473	223 729	105 823 817	21,7486	7,7915	2,67486	10287,0878	60,7071	175 716	473
474	224 676	106 496 424	21,7715	7,7970	2,67578	10319,6910	60,7926	176 460	474
475	225 625	107 171 875	21,7945	7,8025	2,67669	10352,3875	60,8779	177 205	475
476	226 576	107 850 176	21,8174	7,8079	2,67761	10385,0824	60,9638	177 952	476
477	227 529	108 531 333	21,8403	7,8134	2,67852	10417,8231	61,0489	178 701	477
478	228 484	109 215 352	21,8632	7,8188	2,67943	10450,6096	61,1347	179 451	478
479	229 441	109 902 239	21,8861	7,8243	2,68034	10483,4419	61,2195	180 203	479
480	230 400	110 592 000	21,9089	7,8297	2,68124	10516,2720	61,3050	180 956	**480**
481	231 361	111 284 641	21,9317	7,8352	2,68215	10549,1477	61,3896	181 711	481
482	232 324	111 980 168	21,9545	7,8406	2,68305	10582,0690	61,4748	182 467	482
483	233 289	112 678 587	21,9773	7,8460	2,68395	10615,0359	61,5600	183 225	483
484	234 256	113 379 904	22,0000	7,8514	2,68485	10658,9868	61,6450	183 984	484
485	235 225	114 084 125	22,0227	7,8568	2,68574	10681,0495	61,7299	184 745	485
486	236 196	114 791 256	22,0454	7,8622	2,68664	10714,0644	61,8147	185 503	486
487	237 169	115 501 303	22,0681	7,8676	2,68753	10747,1647	61,8994	186 272	487
488	238 144	116 214 272	22,0907	7,8730	2,68842	10780,2616	61,9839	187 038	488
489	239 121	116 930 169	22,1133	7,8784	2,68931	10313,4037	62,0684	187 805	489
490	240 100	117 649 000	22,1359	7,8837	2,69020	10846,5910	62,1535	188 574	**490**
491	241 081	118 370 771	22,1585	7,8891	2,69103	10879,8235	62,2377	189 345	491
492	242 064	119 095 488	22,1811	7,8944	2,69197	10913,1012	62,3226	190 117	492
493	243 049	119 823 157	22,2036	7,8998	2,69285	10946,3748	62,4066	190 890	493
494	244 036	120 553 784	22,2261	7,9051	2,69373	10979,6934	62,4913	191 665	494
495	245 025	121 287 375	22,2486	7,9105	2,69461	11013,0570	62,5750	192 442	495
496	246 016	122 023 936	22,2711	7,9158	2,69548	11046,4656	62,6594	193 221	496
497	247 009	122 763 473	22,2935	7,9211	2,69636	11079,8695	627,438	194 000	497
498	248 004	123 505 992	22,3159	7,9264	2,69723	11113,3182	628,280	194 782	498
499	249 001	124 251 499	22,3383	7,9317	2,69810	11146,8117	629,121	195 565	499
500	250 000	125 000 000	22,3607	7,9370	2,69897	11180,3500	62,9960	196 350	**500**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
500	250 000	125 000 000	22,3607	7,9370	2,69897	11180,3500	62,9960	196 350	**500**
501	251 001	125 751 501	22,3830	7,9423	2,69984	11213,8830	63,0799	197 136	501
502	252 004	126 506 008	22,4054	7,9476	2,70070	11247,5108	63,1637	197 923	502
503	253 009	127 263 527	22,4277	7,9528	2,70157	11281,1331	63,2481	198 713	503
504	254 016	128 024 064	22,4499	7,9581	2,70243	11314,7496	63,3316	199 504	504
505	255 025	128 787 625	22,4722	7,9634	2,70329	11348,4610	63,4151	200 296	505
506	256 036	129 554 216	22,4944	7,9686	2,70415	11382,1664	63,4992	201 090	506
507	257 049	130 323 843	22,5167	7,9739	2,70501	11415,9669	63,5824	201 886	507
508	258 064	131 095 512	22,5389	7,9791	2,70586	11449,7612	63,6653	202 683	508
509	2590 81	131 872 229	22,5610	7,9843	2,70372	11483,5490	63,7501	203 482	509
510	260 100	132 651 000	22,5832	7,9896	2,70757	11517,4320	63,8329	204 282	**510**
511	261 121	133 432 831	22,6053	7,9948	2,70842	11551,3033	63,9163	205 084	511
512	262 144	134 217 728	22,6274	8,0000	2,70927	11585,2288	64,0000	205 887	512
513	263 169	135 005 697	22,6495	8,0052	2,71012	11619,1935	64,0833	206 692	513
514	264 196	135 796 744	22,6716	8,0104	2,71096	11653,2024	64,1665	207 499	514
515	265 225	136 590 875	22,6936	8,0156	2,71181	11687,2040	64,2497	208 307	515
516	266 256	137 388 096	22,7156	8,0208	2,71265	11721,2496	64,3327	209 117	516
517	267 289	138 188 413	22,7376	8,0260	2,71349	11755,3392	64,4156	209 928	517
518	268 324	138 991 832	22,7596	8,0311	2,71433	11789,4728	64,4992	210 741	518
519	269 361	139 798 359	22,7816	8,0363	2,71517	11823,6504	64,5819	211 556	519
520	270 400	140 608 000	22,8035	8,0415	2,71600	11857,8200	64,6645	212 372	**520**
521	271 441	141 420 761	22,8254	8,0466	2,71684	11892,0334	64,7478	213 189	521
522	272 484	142 236 648	22,8473	8,0517	2,71767	11926,2906	64,8310	214 008	522
523	273 529	143 055 667	22,8692	8,0569	2,71850	11930,5916	64,9133	214 829	523
524	274 576	143 877 824	22,8910	8,0620	2,71933	11934,8840	64,9963	215 651	524
525	275 625	144 703 125	22,9129	8,0671	2,72016	12029,2725	65,0791	216 475	525
526	276 676	145 531 576	22,9347	8,0723	2,72099	12063,6522	65,1611	217 301	526
527	277 729	146 363 183	22,9565	8,0774	2,72181	12098,0755	65,2437	213 128	527
528	278 784	147 197 952	22,9783	8,0825	2,72263	12132,5424	65,3263	218 956	528
529	279 841	148 035 889	23,0000	8,0876	2,72346	12167,0000	65,4087	219 787	529
530	280 900	148 877 000	23,0217	8,0927	2,72428	12201,5010	65,4911	220 618	**530**
531	281 961	149 721 291	23,0434	8,0978	2,72509	12236,0454	65,5733	221 452	531
532	283 024	150 568 768	23,0651	8,1028	2,72591	12270,6332	65,6563	222 287	532
533	284 039	151 419 437	23,0868	8,1079	2,72673	12305,2644	65,7383	223 123	533
534	285 156	152 273 304	23,1084	8,1130	2,72754	12339,8856	65,8202	223 961	534
535	286 225	153 130 375	23,1301	8,1180	2,72835	12374,6035	65,9029	224 801	535
536	287 296	153 990 656	23,1517	8,1231	2,72916	12409,3112	65,9846	225 642	536
537	288 369	154 854 153	23,1733	8,1281	2,72997	12444 0621	66,0671	226 484	537
538	289 444	155 720 872	23,1948	8,1332	2,73078	12478,8024	66,1486	227 329	538
539	290 521	156 590 819	23,2164	8,1382	2,73159	12513,6396	66,2303	228 175	539
540	291 600	157 464 000	23,2379	8,1433	2,73239	12548,4660	66,3121	229 022	**540**
541	292 681	158 340 421	23,2594	8,1483	2,73320	12583,3354	66,3942	229 871	541
542	293 764	159 220 088	23,2809	8,1533	2,73400	12618,2478	66,4761	230 722	542
543	294 849	160 103 007	23,3024	8,1583	2,73480	12653,2032	66,5579	231 574	543
544	295 936	160 939 184	23,3238	8,1633	2,73560	12688,1472	66,6397	232 428	544
545	297 025	161 878 625	23,3452	8,1683	2,73640	12723,1340	66,7213	233 283	545
546	298 116	162 771 336	23,3666	8,1733	2,73719	12753,1636	66,8028	234 140	546
547	299 209	163 667 323	23,3880	8,1783	2,73799	12793,2360	66,8843	234 998	547
548	300 304	164 566 592	23,4094	8,1833	2,73878	12828,3512	66,9656	235 853	548
549	301 401	165 469 149	23,4307	8,1882	2,73957	12863,4543	67,0477	236 720	549
550	302 500	166 375 000	23,4521	8,1932	2,74036	12898,6550	67,1288	237 583	**550**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
550	302 500	166 375 000	23,4521	8,1932	2,74036	12898,6550	67,1288	237 583	550
551	303 601	167 284 151	23,4734	8,1982	2,74115	12933,8434	67,2098	238 448	551
552	304 704	168 196 608	23,4947	8,2031	2,74194	12969,0744	67,2916	239 314	552
553	305 809	169 112 377	23,5160	8,2081	2,74273	13004,3480	67,3724	240 182	553
554	306 916	170 031 464	23,5372	8,2130	2,74351	13039,6088	67,4540	241 051	554
555	308 025	170 953 875	23,5584	8,2180	2,74429	13074,9120	67,5346	241 922	555
556	309 136	171 879 616	23,5797	8,2229	2,74507	13110,3132	67,6160	242 795	556
557	310 249	172 808 693	23,6008	8,2278	2,74586	13145,6456	67,6973	243 669	557
558	311 364	173 741 112	23,6220	8,2327	2,74663	13181,0760	67,7784	244 545	558
559	312 481	174 676 879	23,6432	8,2377	2,74741	13216,5488	67,8587	245 422	559
560	313 600	175 616 000	23,6643	8,2426	2,74819	13252,0080	67.9397	246 301	560
561	314 721	176 558 481	23,6854	8,2475	2,74896	13287,5094	68,0206	247 181	561
562	315 844	177 504 328	23,7065	8,2524	2,74974	13323,0530	68,1014	248 063	562
563	316 969	178 453 547	23.7276	8,2573	2,75051	13358,6388	68,1820	248 947	563
564	318 096	179 406 144	23,7487	8.2621	2,75128	13394,2668	68,2635	249 832	564
565	319 225	180 362 125	23,7697	8,2670	2,75205	13429,8805	68,3440	250 719	565
566	320 356	181 321 496	23,7908	8,2719	2,75282	13465,5928	68,4244	251 607	566
567	321 489	182 284 263	23,8118	8.2768	2.75358	13501,2906	68,5047	252 497	567
568	322 624	183 250 432	23,8328	8,2816	2,75435	13537,0304	68,5857	253 388	568
569	323 761	184 220 009	23,8537	8,2865	2,75511	13572,7553	68,6659	254 281	569
570	324 900	185 193 000	23,8747	8,2913	2,75587	13608,5790	68,7467	255 176	570
571	326 041	186 169 411	23,8956	8,2962	2,75664	13644,3876	68,8266	256,072	571
572	327 184	187 149 248	23,9165	8,3010	2,75740	13680,2380	68,9073	256 970	572
573	328 329	188 132 517	23,9374	8,3059	2,75815	13716,1302	68,9871	257 869	573
574	329 476	189 119 224	23,9583	8,3107	2,75891	13752,0642	69,0675	258 770	574
575	330 625	190 109 375	23,9792	8,3155	2,75967	13788,0400	69,1479	259 672	575
576	331 776	191 102 976	24,0000	8,3203	2,76042	13824,0000	69,2282	260 576	576
577	332 929	192 100 033	24,0208	8,3251	2,76118	13860 0016	69,3084	261 482	577
578	334 084	193 100 552	24,0416	8,3800	2,76193	13896,0448	69,3877	262 389	578
579	335 241	194 104 539	24,0624	8,3348	2,76268	13932,1296	69,4677	263 293	579
580	336 400	195 112 000	24,0832	8,3396	2,76343	13968,2560	69,5477	264 208	580
581	337 561	196 122 941	24,1039	8,3443	2,76418	14004,3659	69,6283	265 120	581
582	338 724	197 137 368	24,1247	8,3491	2,76492	14040,5754	69,7081	266 033	582
583	339 839	198 155 287	24.1454	8,3539	2,76567	14076,7682	69,7877	266 948	583
584	341 056	199 176 704	24,1661	8,3587	2,76641	14113,0024	69,8673	267 865	584
585	342 225	200 201 625	24,1868	8,3634	2,76716	14149,2780	69,9476	268 783	585
586	343 396	201 230 056	24 2074	8,3682	2,76790	14185,5364	70,0270	269 703	586
587	344 569	202 262 003	24,2281	8,3730	2,76864	14221,8947	70,1062	270 624	587
588	345 744	203 297 472	24,2487	8,3777	2,76938	14258,2356	70,1863	271 547	588
589	346 921	204 336 469	24,2693	8,3825	2,77012	14294,6177	70,2654	272 471	589
590	348 100	205 379 000	24,2899	8,3872	2,77085	14331,0410	70,3452	273 397	590
591	349 281	206 425 071	24,3105	8,3919	2,77159	14367,5055	70,4250	274 325	591
592	350 464	207 474 688	24,3311	8,3967	2,77232	14404,0112	70,5038	275 254	592
593	351 649	208 527 857	24,3516	8,4014	2,77305	14440,4988	70,5834	276 184	593
594	352 836	209 584 584	24,3721	8,4061	2,77379	14477,0274	70,6629	277 117	594
595	354 025	210 644 875	24,3926	8,4108	2,77452	14513,6970	70,7425	278 051	595
596	355 216	211 708 736	24 4131	8,4155	2,77525	14550,2076	70,8216	278 986	596
597	356 409	212 776 173	24,4336	8,4202	2.77597	14586,8592	70,9009	279 923	597
598	357 604	213 847 192	24,4540	8,4249	3,77670	14623,4920	70,9800	280 862	598
599	358 801	214 921 799	24,4745	8,4296	2,77743	14660,2255	71,0591	281 802	599
600	360 000	216 000 000	24.4949	8,4343	2,77815	14696,9400	71,1380	282 743	600

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
600	360 000	216 000 000	24,4949	8 4343	2,77815	14696,9400	71,1380	282 743	600
601	361 201	217 081 801	24,5153	8,4390	2,77887	14733,6953	71,2169	283 687	601
602	362,404	218 167 208	24.5357	8,4437	2,77960	14770 4914	71 2957	284 631	602
603	363 609	219 256 227	24,5561	8,4484	2,78032	14807,3283	71,3744	285 578	603
604	364 816	220 348 864	24,5764	8,4530	2,78104	14844,1456	71,4539	286 526	604
605	366 025	221 445 125	24,5967	8 4577	2,78176	14881,0035	71,5324	287 475	605
606	367 236	222 545 016	24,6171	8,4623	2,78424	14917,9626	71 6117	288 426	606
607	368 449	223 648 543	24 6374	8,4670	2,78319	14954,9018	71,6900	289 379	607
608	369 664	227 755 712	24,6577	8,4716	2,78390	14991,8816	71,7692	290 333	608
609	370 881	225 866 529	24,6779	8,4763	2,78462	15028,8411	71,8473	291 289	609
610	372 100	226 981 000	24,6982	8,4809	2 78533	15065 9020	71,9263	292 247	610
611	373 321	228 099 131	24,7184	8,4856	2,78604	15102,9424	72,0043	293 206	611
612	374 544	229 220 928	24,7386	8 4902	2,78675	15140 0232	72,0831	294 166	612
613	375 769	230 346 397	24,7588	8,4948	2,78746	15177,1444	72,1617	295 128	613
614	376 996	231 475 544	24,7790	8,4994	2 78817	15214,3060	72,2403	296 092	614
615	378 225	232 608 375	24,7992	8,5040	2,78888	15251 5080	72,3189	297 057	615
616	379 456	233 744 896	24,8193	8,5086	2,78958	15288,6888	72,3973	298 024	616
617	380 689	234 885 113	24,8395	8,5132	2,79029	15325,9715	72,4756	298 992	617
618	381 924	236 029 032	24,8596	8 5178	2,79099	15363 2328	72,5539	299 962	618
619	383 161	237 176 659	24,8797	8,5224	2,79169	15400,5343	72,6321	300 934	619
620	384 400	238 328 000	24,8998	8,5270	2,79239	15437,8760	72,7102	301 907	620
621	385 641	263 483 061	24,9199	8,5316	2,79309	15475,2579	72,7882	302 882	621
622	386 884	240 641 848	24,9399	8,5362	2,79379	15512 6178	72,8661	303 858	622
623	388 129	241 804 367	24,9600	8,5408	2,79449	15550 0800	72 9439	304 836	623
624	389 376	242 970 624	24,9300	8 5453	2,79518	15587,5200	73,0225	305 815	624
625	390 625	244 140 625	25,0000	8,5499	2,79588	15625,0000	73,1002	306 796	625
626	391 876	245 314 376	25,0200	8,5544	2,79657	15662,5200	73,1787	307 779	626
627	393 129	246 491 883	25 0400	8,5590	2,79727	15700 0800	73,2562	308 763	627
628	394 384	247 673 152	25 0599	8,5635	2,79796	15737,6172	73 3345	309 748	628
629	395 641	248 858 189	25,0799	8,5681	2,79865	15775,2571	73,4118	310 736	629
630	396 900	250 047 000	25 0998	8,5726	2,79934	15812,8740	73,4899	311 725	630
631	398 161	251 239 591	25,1197	8,5772	2,80003	15850,5307	73,5671	312 715	631
632	399 424	252 435 963	25,1396	8,5817	2 80072	15588 2272	73 6450	313 707	632
633	400 689	253 636 137	25,1596	8 5862	2,80140	15925,9635	73,7229	314 700	633
634	401 956	254 840 104	25,1794	8,5907	2,80209	15963,7396	73,8007	315 696	634
635	403 225	256 047 875	25,1992	8 5952	2,80277	16001,4920	73,8784	316 692	635
636	404 496	257 259 456	25 2190	8 5997	2 80346	16039,2840	73,9560	317 690	636
637	405 769	258 474 853	25,2389	8,6043	2,80414	16077,1793	74,0327	318 690	637
638	407 044	259 694 072	25,2587	8 6088	2,80482	16115,0506	74,1102	319 692	638
639	408 321	260 917 119	25,2784	8,6132	2,80550	16152,8976	74,1884	320 695	639
640	409 600	262 144 000	25,2982	8,6177	2,80618	16190,8480	74 2657	321 699	640
641	410 881	263 374 721	25,3180	8 6222	2,80686	16228,8380	74,3429	322 705	641
642	412 164	264 609 288	25,3377	8,6267	2,80754	16266,8034	74,4201	323 713	642
643	413 449	265 847 707	25,3574	8,6312	2,80821	16304,8082	74,4871	324 722	643
644	414 736	267 089 984	25,3772	8 6357	2,80889	16342,9168	74,5741	325 733	644
645	416 025	268 336 125	25,3969	8,6401	2 80956	16381,0005	74,6519	326 745	645
646	417 316	269 586 136	25,4165	8,6446	2,81023	16419,0590	74,7287	327 759	646
647	418 609	270 840 023	25,4362	8 6490	2,81090	16457,2214	74,8063	328 775	647
648	419 904	272 097 792	25 4558	8,6535	2,81158	16495,3584	74,8829	329 792	648
649	421 201	273 359 449	25,4755	8,6579	2,81224	16533 5995	74,9604	380 810	649
650	422 500	274 625 000	25,4951	8 6624	2.81291	16571,8150	75,0369	331 631	650

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
650	422 500	274 625 000	25,4951	8,6624	2,81291	16571,8150	75,0369	331 831	**650**
651	423 801	275 894 451	25,5147	8,6668	2,81358	16610,0697	75,1142	332 853	651
652	425 104	277 167 808	25,5343	8,6713	2,81425	16648,3636	75,1905	333 876	652
653	426 409	278 445 077	25,5539	8,6757	2,81419	16686,6967	75,2677	334 901	653
654	427 716	279 726 264	25,5734	8,6801	2,81558	16725,0036	75,3447	335 927	654
655	429 025	281 011 375	25,5930	8,6845	2,81624	16763,4150	75,4218	336 955	655
656	430 336	282 300 416	25,6125	8,6890	2,81690	16801,8000	75,4977	337 985	656
657	431 649	283 593 393	25,6320	8,6934	2,81757	16840,2240	75,5745	339 016	657
658	432 964	284 890 312	25,6515	8,6978	2,81823	16878,6870	75,6513	340 049	658
659	434 281	286 191 179	25,6710	8,7022	2,81889	16917,1890	75,7279	341 084	659
660	435 600	287 496 000	25,6905	8,7066	2,81954	16955,7300	75,8045	342 119	**660**
661	436 921	288 804 781	25,7099	8,7110	2,82020	16994,2439	75,8810	343 157	661
662	438 244	290 117 528	25,7294	8,7154	2,82086	17032,8628	75,9575	344 196	662
663	439 569	291 434 247	25,7488	8,7198	2,82151	17071,4544	76,0338	345 237	663
664	440 896	292 754 944	25,7682	8,7241	2,82217	17110,0848	76,1110	346 279	664
665	442 225	294 079 625	25,7876	8,7285	2,82282	17148,7540	76,1872	347 323	665
666	443 556	295 408 296	25,8070	8,7329	2,82347	17187,4620	76,2633	348 368	666
667	444 889	296 740 963	25,8263	8,7373	2,82413	17226,1421	76,3393	349 415	667
668	446 224	298 077 632	21,8457	8,7416	2,82478	17264,9276	76,4162	350 464	668
669	447 561	299 418 309	25,8650	8,7460	2,82543	17303,6850	76,4921	351 514	669
670	448 900	300 763 000	25,8844	8,7503	2,82607	17342,5480	76,5688	352 565	**670**
671	450 241	302 171 711	25,9027	8,7547	2,82672	17381,3827	76,6445	353 618	671
672	451 584	303 464 448	25,9230	8,7590	2,82737	17420,2560	76,7210	354 673	672
673	452 929	304 821 217	25,9422	8,7634	2,82802	17459,1006	76,7966	355 780	673
674	454 276	306 182 024	25,9615	8,7677	2,82866	17498,0510	76,8730	356 788	674
675	455 625	307 546 875	25,9808	8,7721	2,82930	17537,0400	76,9485	357 847	675
676	456 970	308 915 776	26,0000	8,7764	2,82995	17576,0000	77,0247	358 908	676
677	458 329	310 288 733	26,0192	8,7807	2,83059	17614,9984	77,1009	359 971	677
678	459 684	311 665 752	26,0384	8,7850	2,83123	17654,0352	77,1770	361 035	678
679	461 041	313 046 839	26,0576	8,7893	2,83187	17693,1104	77,2530	362 101	679
680	462 400	314 432 000	26,0768	8,7937	2,83251	17732,2240	77,3280	363 168	**680**
681	463 761	315 821 241	26,0960	8,7980	2,83315	17771,3760	77,4039	364 237	681
682	465 124	317 214 568	26,1151	8,8023	2,83373	17810,4982	77,4797	365 308	682
683	466 489	318 611 987	26,1343	8,8066	2,83442	17849,7269	77,5554	366 380	683
684	467 856	320 013 504	26,1534	8,8109	2,83506	17888,9256	77,6311	367 453	684
685	469 225	321 419 125	26,1725	8,8152	2,83569	17928,1625	77,7066	368 528	685
686	470 596	322 828 856	26,1916	8,8194	2,83632	17967,4376	77,7830	369 605	686
687	471 969	324 242 703	26,2107	8,8237	2,83996	18006,7509	77,8584	370 684	687
688	473 344	325 660 672	26,2298	8,8280	2,83759	18046,1024	77,9336	371 764	688
689	474 721	327 082 769	26,2488	8,8323	2,83822	18085,4232	78,0091	372 845	689
690	476 100	328 509 000	26,2679	8,8366	2,83885	18124,8510	78,0843	373 928	690
691	477 481	329 939 371	26,2869	8,8408	2,83948	18164,2479	78,1603	375 013	691
692	478 864	331 373 888	26,3059	8,8451	2,84011	18203,6828	78,2354	376 099	692
693	480 249	332 812 557	26,3249	8,8493	2,84073	18243,1557	78,3112	377 187	693
694	481 636	334 255 384	26,3439	8,8536	2,84136	18282,6666	78,3861	378 276	694
695	483 025	335 702 375	26,3629	8,8578	2,84198	18322,2155	78,4619	379 367	695
696	484 416	337 153 536	26,3818	8,8621	2,84261	18361,7328	78,5366	380 459	696
697	485 809	338 608 873	26,4008	8,8663	2,84323	18401,3576	78,6122	381 553	697
698	487 204	340 068 392	26,4197	8,8703	2,84386	18440,9506	78,6868	382 645	698
699	488 601	341 532 099	26,4386	8,7748	2,84448	18480,5814	78,7624	383 746	699
700	490 000	343 000 000	26,4575	8,8790	2,84510	18520,2500	78,8377	384 845	**700**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
700	490 000	343 000 000	26,4575	8,8790	2,84510	18520,2500	78,8377	384 845	**700**
701	491 401	344 472 101	26,4764	8,8833	2,84572	18559,9564	78,9121	385 945	701
702	492 804	345 948 408	26,4953	8,8875	2,84634	18599,7006	78,9873	387 047	702
703	494 209	347 428 927	26,5141	8,8917	2,84696	18639,4123	79,0624	388 151	703
704	495 616	348 913 664	26,5330	8,8959	2,84757	18679,2320	79,1375	389 256	704
705	497 025	350 402 625	26,5518	8,9001	2,84819	18719,0190	79,2125	390 363	705
706	498 436	351 895 816	26,5707	8,9043	2,84880	18758,9142	79,2875	391 471	706
707	499 849	353 393 243	26,5895	8,9085	2,84942	18798,7765	79,3624	392 580	707
708	501 264	354 894 912	26,6083	8,9127	2,85003	18838,6764	79,4372	393 692	708
709	502 681	356 400 829	26,6271	8,9169	2,85065	18878,6139	79, 119	394 805	709
710	504 100	357 911 000	26,6458	8,9211	2,85126	18918 5180	79,5865	395 919	**710**
711	505 521	359 425 431	26,6646	8,9253	2,85187	18958,5306	79,6611	397 035	711
712	506 944	360 944 128	26,6833	8,9295	2,85248	18998,5096	79,7357	398 153	712
713	508 369	362 467 097	26,7021	8,9337	2,85309	19038,5973	79,7989	399 272	713
714	509 796	363 994 344	26,7208	8,9378	2,85370	19078,6512	79,8854	400 393	714
715	511 225	365 525 875	26,7395	8,9420	2,85431	19118,7425	79,9597	401 515	715
716	512 656	367 061 696	26,7582	8,9462	2,85491	19157,6532	80,0339	402 639	716
717	514 089	368 601 813	26,7769	8,9503	2,85552	19199,0373	80,1090	403 765	717
718	515 524	370 146 232	26,7955	8,9545	2,85612	19239,1690	80,1831	404 892	718
719	516 961	371 694 959	26,8142	8,9587	2,85673	19279,4093	80,2571	406 020	719
720	518 400	373 248 000	26,8328	8,9628	2,85733	19319,6160	80,3320	407 150	**720**
721	519 841	374 805 361	26,8514	8,9670	2,85794	19359,8594	80,4059	408 282	721
722	521 284	376 367 048	26,8701	8,9711	2,85854	19400,2122	80,4806	409 115	722
723	522 729	377 933 067	26,8887	8,9752	2,85914	19440,5301	80,5553	410 550	723
724	524 176	379 503 424	26,9072	8,9794	2,85974	19480,8128	80,6289	411 687	724
725	525 625	381 078 125	26,9258	8,9835	2,86034	19521,2050	80,7035	412 825	725
726	527 076	382 657 176	26,9444	8,9876	2,86094	19561,6344	80,7779	413 965	726
727	523 529	384 240 583	26,9629	8,9918	2,86153	19602,0283	80,8514	415 106	727
728	529 984	385 828 352	26,9815	8,9959	2,86213	19642,5320	80,9257	415 248	728
729	531 441	387 420 489	27,0000	9,0000	2,86273	19683,0000	81,0000	417 393	729
730	532 900	389 017 000	27,0185	9,0941	0,86332	19723,5050	81,0741	418 539	**730**
731	534 361	390 617 891	27,0370	9,0082	2,86392	19764,0470	81,1482	419 686	731
732	535 824	392 223 168	27,0555	9,0123	2,86451	19804,6260	81,2235	420 835	732
733	537 289	393 832 837	27,0740	9,0164	2,86510	19845,2420	81,2963	421 986	733
734	538 756	395 446 904	27,0924	9,0205	2,86570	19885,8216	81,3702	423 138	734
735	540 225	397 065 375	27,1109	9,0246	2,86629	19926,5115	81,4440	424 293	735
736	541 696	398 688 256	27,1293	9,0287	2,86688	19967,1648	81,5178	425 447	736
737	543 169	400 315 553	27,1477	9,0328	2,85747	20007,8549	81,5915	426 604	737
738	544 644	401 947 272	27,1662	9,0369	2,86806	20048,6556	81,6651	427 762	738
739	546 121	403 583 419	27,1846	9,0410	2,86864	20089,4194	81,7387	428 922	739
740	547 600	405 224 000	27,2029	9,0450	2,86923	20130,1460	81,8131	430 084	**740**
741	549 031	406 869 021	27,2213	9,0491	2,86982	20170,9833	81,8865	431 247	741
742	550 564	408 518 488	27,2397	9,0532	2,87040	20211,8574	81,9599	432 412	742
743	552 049	410 172 407	27,2580	9,0572	2,87099	20252,6940	82,0341	433 578	743
744	553 536	411 830 784	27,2764	9,0613	2,87157	20293,6416	82,1074	434 746	744
745	555 025	413 493 625	27,2947	9,0654	2,87216	20334,5515	82,1805	435 916	745
746	556 516	415 160 936	27,3130	9,0694	2,87274	20375,4980	82,2546	437 087	746
747	558 009	416 832 723	27,3313	9,0735	2,87322	20416,4811	82,3276	438 259	747
748	559 504	418 508 992	27,3496	9,0775	2,87390	20457,5008	82,4015	439 433	748
749	561 001	420 189 749	27,3679	9,0818	2,87448	20498,5571	82,4744	440 609	749
750	562 500	421 875 000	27,3861	9,0856	2,87506	20539,5750	82,5482	441 786	**750**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
750	562 500	421 875 000	27,3861	9,0856	2,87506	20539,5750	82,5482	441 786	**750**
751	564 001	423 564 751	27,4044	9,0896	2,87564	20580,7044	82,6218	442 965	751
752	565 504	425 259 008	27,4226	9,0937	2,87622	20621,7952	82,6946	444 146	752
753	567 009	426 957 777	27,4408	9,0977	2,87679	20662,9224	82,7681	445 328	753
754	568 516	428 661 064	27,4591	9,1017	2,87737	20704,1614	82,8416	446 511	754
755	570 025	430 368 875	27,4773	9,1057	2 87795	20745,3615	82,9150	447 697	755
756	571 536	432 081 216	27,4955	9,1098	2,87852	20786,5980	82,9875	448 883	756
757	573 049	433 798 093	27,5136	9,1138	2,87910	20827,7952	83 0608	450 072	757
758	574 564	435 519 512	27,5318	9,1178	2,87967	20869,1044	83,1340	451 262	758
759	576 081	437 245 479	27,5500	9,1218	2,88024	20910,4500	83 2072	452 453	759
760	577 600	438 976 000	27,5681	9,1258	2,88081	20951,7560	83,2803	453 643	**760**
761	579 121	440 711 081	27,5862	9,1298	2,88138	20993,0982	83 3534	454 841	761
762	580 644	442 450 728	27,6043	9,1338	2,88195	21034,4766	83,4263	456 037	762
763	582 169	444 194 947	27,6225	9,1378	2,88252	21075,9675	83,4993	457 234	763
764	583 696	445 943 744	27,6405	9,1418	2,88309	21117,3420	83 5721	458 434	764
765	585 225	447 697 125	27,6586	9,1458	2,88366	21158 8290	83,6449	459 635	765
766	586 756	449 455 096	27,6767	9,1498	2,88423	21200,3522	83,7176	460 837	766
767	588 289	451 217 663	27,6948	9,1537	2,88480	21241,9116	83 7912	462 041	767
768	589 824	452 984 832	27,7128	9,1577	2,88536	21283,4304	83 8638	463 247	768
769	591 361	454 756 609	27,7308	9 1617	2,88593	21324,9852	83,9363	464 454	769
770	592 900	456 533 000	27,7489	9,1657	2,88649	21366,6330	84 0088	465 663	**770**
771	594 441	458 314 011	27,7669	9,1696	2,88705	21408,2799	84,0821	466 873	771
772	595 984	460 099 648	27,7849	9,1736	2,88762	21449,9428	84,1545	468 085	772
773	597 520	461 889 917	27,8029	9,1775	2,88818	21491,6417	84,2277	469 298	773
774	539 076	463 684 824	27,8209	9,1815	2,88874	21533,3766	84 2999	470 513	774
775	600 625	465 484 375	27,8388	9 1855	2,88930	21575,0700	84,3721	471 730	775
776	602 176	467 288 576	27,8568	9 1894	2,88986	21616,8768	84,4451	472 948	776
777	603 729	469 097 433	27,8747	9,1933	2 89042	21658,6419	84,5180	474 168	777
778	605 284	470 910 952	27,8927	9,1973	2 89098	21700,5206	84,5900	475 389	778
779	606 841	472 729 139	27,9106	9,2012	2,89154	21742,3574	84,6628	476 612	779
780	608 400	474 552 000	27,9235	9,2052	2,89209	21784,2300	84,7347	477 836	**780**
781	609 961	476 379 541	27,9464	9;2091	2,89265	21826,1384	84,8074	479 062	781
782	611 524	478 211 768	27,9643	9,2130	2,89321	21868,0826	84,8800	480 290	782
783	613 089	480 048 687	27,9821	9,2170	2,89376	21909 9843	84,9517	481 519	783
784	614 656	481 890 304	28,0000	9,2209	2,89432	21952 0000	85,0242	482 750	784
785	616 225	483 736 625	28 0179	9,2248	2,89487	21994 0515	85,0966	483 982	785
786	617 796	485 587 656	28,0357	9,2287	2,89542	22036,0602	85 1690	485 216	786
787	619 369	487 443 403	28,0535	9,2326	2,89597	22078 1045	85,2414	486 451	787
788	620 944	489 303 872	28 0713	9,2365	2,89653	22120,1844	85,3137	487 688	788
789	622 521	491 169 069	28,0891	9,2404	2,89708	22162,2999	85,3859	488 927	789
790	624 100	493 039 000	28 1069	9,2443	2 89763	22204,4510	85 4580	490 167	**790**
791	625 681	494 913 671	28,1247	9,2462	2,89818	22246,6377	85,5301	491 409	791
792	627 264	496 793 088	28,1425	9,2521	2,89873	22288,8600	85,6021	492 652	792
793	628 849	498 677 257	28,1603	9,2560	2 89927	22331,1179	85,6741	493 897	793
794	630 436	500 366 184	28,1780	9,2599	2,89982	22373,3320	85,7460	495 143	794
795	632 025	502 459 875	28,1957	9 2638	2,90037	22415 5815	85,8179	496 391	795
796	633 616	504 358 336	28,2135	9,2677	2,90091	22457,9460	85,8897	497 641	796
797	635 209	506 261 573	28,2312	9,2716	2 90146	22500,2664	85,9614	498 892	797
798	636 804	508 169 592	28 2489	9,2754	2,90200	22542,6222	86 0340	500 145	798
799	638 401	510 082 399	28,2666	9,2793	2,90255	22585,0134	86,1056	501 399	799
800	640 000	512 000 000	28,2843	9,2832	2 90309	22627,4400	86,1771	502 655	**800**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
800	640 000	512 000 000	28 2843	9,2832	2,90309	22627,4400	86,1771	502 655	**800**
801	641 601	513 922 401	28,3019	9,2870	2,90363	22669,8219	86,2495	503 912	801
802	643 204	515 849 108	28,3196	9,2909	2,90417	22712,3192	86,3210	505 171	802
803	644 809	517 781 627	28,3373	9,2948	2,90472	22754,8519	86,3923	506 432	803
804	646 416	519 718 464	28,3549	9,2986	2,90526	22797,3396	86,4646	507 694	804
805	648 025	524 660 125	28 3725	9,3025	2,90580	22839,8625	86,5358	508 958	805
806	649 636	523 606 616	28,3901	9,3063	2,90634	22882,4206	86,6079	510 223	806
807	651 249	525 557 943	28,4077	9,3102	2,90687	22925,0139	86,6791	511 490	807
808	652 864	527 514 112	28,4253	9,3140	2,90741	22967,6424	86,7511	512 758	808
809	654 481	529 475 129	28,4429	9,3179	2,90795	23010,3061	86,8221	514 028	809
810	656 100	531 441 000	28,4605	9,3217	2,90849	23053,0050	86,8940	515 300	**810**
811	657 721	533 411 731	28 4781	9,3255	2,90902	23095,7391	86,9658	516 573	811
812	659 344	535 387 328	28 4956	9,3294	2,90956	23138,4272	87,0366	517 848	812
813	660 969	537 367 797	28,5132	9,3332	2,91009	23181,2316	87,1083	519 124	813
814	662 596	539 353 144	28 5307	9,3370	2,91062	23223,9898	87,1800	520 402	814
815	664 225	541 343 375	28,5482	9,3408	2,91116	23266,7830	87,2516	521 681	815
816	665 856	543 333 496	28,5657	9,3447	2,91169	23309,6112	87,3222	522 962	816
817	667 489	545 338 513	28,5832	9,3485	2,91222	23352,4744	87,3936	524 245	817
818	669 124	547 343 432	28,6007	9,3523	2,91275	23395,3726	87,4661	525 529	818
819	670 761	549 353 259	28,6182	9,3561	2,91328	23438,3058	87,5364	526 814	819
820	672 400	551 368 000	28 6356	9,3599	2,91381	23481,1920	87,6077	528 102	**820**
821	674 041	553 337 661	28 6531	9,3637	2,91434	23524,1951	87,6790	529 391	821
822	675 684	555 412 248	28,6705	9,3675	2,91487	23567,1510	87,7502	530 681	822
823	677 329	557 441 767	28,6880	9,3713	2,91540	23610,2240	87,8213	531 973	823
824	678 976	559 476 224	28,7054	9,3751	2,91593	23653,2496	87,8923	533 267	824
825	680 625	561 515 625	28,7228	9,3789	2,91645	23696,3100	87,9634	534 562	825
826	632 276	563 559 976	28,7402	9,3827	2,91698	23739,4052	88,0343	535 858	826
827	683 929	565 609 283	28,7576	9,3865	2,91751	23782,5352	88,1052	537 157	827
828	635 584	567 663 552	28,7750	9,3902	2,91803	23825,7000	88,1770	538 456	828
829	687 241	569 722 789	28,7924	9,3940	2,91855	23868,8996	88,2478	539 758	829
830	688 900	571 787 000	28,8097	9,3978	2,91908	23912,0510	88,3185	541 061	**830**
831	690 561	573 856 191	28,8271	9,4016	2,91960	23955,3201	88,3892	542 365	831
832	692 224	575 930 368	28,8444	9,4053	2,92012	23998,5408	88,4607	543 671	832
833	693 889	578 009 537	28,8617	9,4091	2,92065	24041,7961	88,5313	544 979	833
834	695 556	580 093 704	28,8791	9,4129	2,92117	24085,1694	88,6018	546 288	834
835	697 225	582 182 875	28,8964	9,4166	2,92169	24128,4940	88,6731	547 599	835
836	698 896	584 277 056	28,9137	9,4204	2,92221	24171,8532	88,7435	548 912	836
837	700 569	586 376 253	28,9310	9,4241	2,92273	24215,2470	88,8148	550 226	837
838	702 244	588 480 472	28,9482	9,4279	2,92324	24258,5916	88,8851	551 541	838
839	703 921	590 589 719	28,9655	9,4316	2,92376	24302,0545	88,9562	552 858	839
840	705 600	592 704 000	29,9828	9,4354	2,92428	24345,5520	89,0264	554 177	**840**
841	707 281	594 823 321	29 0000	9,4391	2,92480	24389,0000	89,0974	555 497	841
842	708 964	596 947 688	29,0172	9,4429	2,92531	24432,4824	89,1675	556 819	842
843	710 649	599 077 107	29,0345	9,4466	2,92583	24476,0835	89,2384	558 142	843
844	712 336	601 211 584	29,0517	9,4503	2,92634	24519,6348	89,3093	559 467	844
845	714 025	603 351 125	29,0689	9,4541	2,92686	24563,2205	89,3792	560 794	845
846	715 716	605 495 736	29,0861	9,4578	2,92737	24606,8406	89,4499	562 122	846
847	717 409	607 645 423	29,1033	9,4615	2,92788	24650,4951	89,5206	563 452	847
848	719 104	609 800 192	29,1204	9,4652	2,92840	24694,0992	89,5913	564 783	848
849	720 801	611 960 049	29,1376	9,4690	2,92891	24737,8224	89,6608	566 116	849
850	722 500	614 125 000	29 1548	9,4727	2,92942	24781,5800	89,7315	567 450	**850**

Гидроэлектропроект

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
850	722 500	614 125 000	29,1548	9,4727	2,92942	24781,5800	89,7315	567 450	**850**
851	724 201	616 295 051	29,1719	9,4764	2,92993	24825,2369	89,8020	568 786	851
852	725 904	618 470 208	29,1890	9,4801	2 93044	24869,0280	89,8724	570 124	852
853	727 609	620 650 477	29,2062	9,4838	2,93095	24912,8886	89,9428	571 463	853
854	729 316	622 835 864	29,2233	9,4875	2,93146	24956,6982	90,0131	572 803	854
855	731 025	625 026 375	29,2404	9,4912	2,93197	25000,5420	90,0834	574 146	855
856	732 736	627 222 016	29,2575	9,4949	2 93247	2 044,4200	90,1536	575 490	856
857	734 449	629 422 793	29,2746	9,4986	2,93298	25088 3322	90,2238	576 835	857
858	736 164	631 628 712	29,2916	9,5023	2,93349	25132,1928	90,2939	578 182	858
859	737 881	633 839 779	29,3087	9,5060	2,93399	25176,1733	90,3639	579 530	859
860	739 600	636 056 000	29,3258	9,5097	2,93450	25220,1880	90,4339	580 880	**860**
861	741 321	638 277 381	29,3428	9,5134	2,93500	25264,1508	90,5039	582 232	861
862	743 044	640 503 928	29,3598	9,5171	2,93551	25308,1476	90,5738	583 585	862
863	744 769	642 735 647	29,3769	9,5207	2,93601	25352 2647	90,6445	584 940	863
864	746 496	644 972 544	29,3939	9,5244	2,93651	25396,3296	90 7143	586 297	864
865	748 225	647 214 625	29 4109	9,5281	2,93702	25440,4285	90,7841	587 655	865
866	749 956	649 461 896	29,4279	9,5317	2,93752	25484,5614	90 8547	589 014	866
867	751 689	651 714 363	29,4449	9 5354	2,93802	25528,7283	90 9243	590 375	867
868	753 424	653 972 032	29,4618	9,5391	2,93852	25572,8424	90,9939	591 738	868
869	755 161	656 234 909	29,4788	9,5427	2,93902	25617,0772	91,0643	593 102	869
870	756 900	658 503 000	29,4958	9,5464	2,93952	25661 3460	91,1333	594 468	**870**
871	753 641	660 776 311	29,5127	9,5501	2,94002	25705,5617	91,2032	595 835	871
872	760 384	663 054 848	29 5296	9 5537	2,94052	25749,8112	91 2736	597 204	872
873	762 129	665 338 617	29 5466	9,5574	2,94101	25794,1818	91,3428	598 575	873
874	763 876	667 627 624	29,5635	9,5610	2,94151	25838,4990	91,4130	599 947	874
875	765 625	669 221 875	29,5804	9,5647	2,94201	25882,8500	91 4822	601 320	875
876	767 376	672 221 376	29,5973	9,5683	2,94250	25927,2348	91,5523	602 696	876
877	769 129	674 526 133	29,6142	9 5719	2,94300	25971,6534	91,6223	604 073	877
878	770 884	676 836 152	29,6311	9,5756	2,94349	26016,1058	91,6913	605 451	878
879	772 641	679 151 439	29,6479	9,5792	2,94399	26060,5041	91,7613	606 831	879
880	774 400	681 472 000	29 6648	9 5828	2,94448	26105 0240	91,8311	608 212	**880**
881	776 161	683 797 841	29,6816	9,5865	2 94498	26149,4896	91,9000	609 595	881
882	777 924	686 128 968	29 6985	9,5901	2,94547	26194,0770	91 9698	610 980	882
883	779 689	688 465 387	29,7153	9 5937	2,94596	26238 6099	92,0395	612 366	883
884	781 456	690 807 104	29,7321	9 5973	2,94645	26283,1764	92,1092	613 754	884
885	783 225	693 154 125	29,7489	9,6010	2,94694	26327,7765	92,1778	615 143	885
886	784 996	695 506 456	29,7658	9 6046	2,04743	26372,4988	92,2474	616 534	886
887	786 769	697 864 103	29,7825	9,6082	2,94792	26417 0775	92,3169	617 927	887
888	788 544	700 227 072	29,7993	9 6118	2,94841	26461,7784	92,3864	619 321	888
889	790 321	702 595 369	29,8161	9,6154	2,94890	26506,5129	92,4558	620 717	889
890	792 100	704 969 000	29,8329	9,6190	2,94939	26551,2810	92,5252	622 114	**890**
891	793 881	707 347 971	29,8496	9,6226	2 94988	26595,9936	92,5945	623 513	891
892	795 664	709 732 288	29,8664	9,6262	2,95036	26640 8288	92,6637	624 913	892
893	797 449	712 121 957	29,8831	9,6298	2 95085	26685,6083	92,7329	626 315	893
894	799 236	714 516 984	29,8998	9 6334	2,95134	26730 4212	92,8021	627 718	894
895	801 025	716 917 375	29,9166	9 6370	2 95182	26775,3570	92,8712	629 124	895
896	702 816	719 323 136	29,9333	9,6406	2,95231	26820,2368	92,9402	630 530	896
897	804 609	721 734 273	29,9500	9,6442	2,95279	26865,1500	93,0092	631 938	897
898	806 404	724 150 792	29,9666	9,6477	2,95328	26910,0068	93,0791	633 348	898
899	808 201	726 572 699	29,9833	9,6513	2,95376	26954,9867	93,1480	634 760	899
900	810 000	729 000 000	30,0000	9,6549	2,95424	27000,0000	93.2169	636 173	900

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{2/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
900	810 000	729 000 000	30,0000	9,6549	2,95424	27000,0000	93,2169	636 173	**900**
901	811 801	731 432 701	30,0167	9,6585	2,95472	27045,0467	93,2857	637 587	901
902	813 604	733 870 808	30,0333	9,6620	2,95521	27090,0366	93,3554	639 003	902
903	815 409	736 314 327	30,0500	9,6656	2,95569	27135,1500	93,4241	640 421	903
904	817 216	738 763 264	30,0666	9,6692	2,95617	27180,2064	93 4927	641 840	904
905	819 025	741 217 625	30,0832	9 6727	2,95665	27225,2960	93,5622	643 261	905
906	820 836	743 677 416	30,0998	9,6763	2,95713	27270,4188	93,6308	644 683	906
907	822 649	746 142 643	30,1164	9,6709	2,95761	27315,5748	93,6896	646 107	907
908	824 464	748 613 312	30,1330	9,6834	2 95809	27360,7640	93 7687	647 533	908
909	826 281	751 089 429	30,1496	9,6870	2,95856	27405,9864	93,8371	648 960	909
910	828 100	753 571 000	30,1662	9 6905	2,95904	27451 2420	93,9064	650 338	**910**
911	829 921	756 058 031	30,1828	9,6941	2,95952	27496,5308	93,9746	651 818	911
912	831 744	758 550 528	30,1993	9,6976	2,95999	27541,7616	94,0438	653 250	912
913	833 569	761 048 497	30,2159	9,7012	2,96047	27587,1167	94,1120	654 684	913
914	835 396	763 551 944	30 2324	9,7047	2,96095	27632,4136	94,1811	656 118	914
915	837 225	766 060 875	30 2490	9,7082	2,96142	27677,8350	94,2502	657 555	915
916	839 056	768 575 296	30,2655	9,7118	2 96190	27723,1980	94 3182	658 993	916
917	840 889	771 095 213	30,2820	9,7153	2,96237	27768,5940	94,3872	660 443	917
918	842 724	773 620 632	30,2985	9,7188	2,96284	27814,0230	94,4561	661 874	918
919	844 561	776 151 559	30 3150	9,7224	2,96332	27859,4850	94,5239	663 317	919
920	846 400	778 688 000	30 3315	9 7259	2,96379	27904,9800	94 5927	664 761	**920**
921	848 241	781 229 961	30,3480	9 7294	2,96426	27950 5080	94,6718	666 207	921
922	850 084	783 777 448	30,3645	9 7329	2,96473	27996,0690	94,7302	667 654	922
923	851 929	786 330 467	30,3809	9,7364	2 96520	28041,5707	94,7988	669 103	923
924	853 776	788 889 024	30,3974	9,7400	2 96567	28087,1976	94,8665	670 554	924
925	855 625	791 453 125	30 4138	9,7435	2,96614	28132 7650	94,8350	672 006	925
926	857 476	794 022 776	30,4302	9,7470	2 96661	28178,3652	95,0035	673 460	926
927	859 329	796 597 983	30 4467	9,7505	2,96708	28224,0909	95,0720	674 915	927
928	861 184	799 178 752	30,4631	9,7540	2 96755	28 69.7568	95,1404	676 372	928
929	863 041	801 765 089	30,4795	9,7575	2 96802	28315,4555	95,2088	677 831	929
930	864 900	804 357 000	30 4959	9,7610	2,96848	28361,1870	95,2771	679 291	**930**
931	866 761	806 954 491	30,5123	9,7645	2,96895	28406,9513	95,3453	680 752	931
932	868 624	809 557 563	30 5287	9 7680	2 96942	28452,7484	95,4135	682 216	932
933	870 489	812 166 237	30,5450	9,7715	2,96988	28498,4850	95,4817	683 680	933
934	872 356	814 780 504	30 5614	9,7750	2,97035	28544,3476	95,5498	685 147	934
935	874 225	817 400 375	30,5778	9 7785	2,97081	28590 2430	95,6179	686 615	935
936	876 096	820 025 856	30,5941	9,7819	2,97128	28636,0776	95,6869	688 084	936
937	877 969	822 656 953	30,6105	9,7854	2,97174	28682 0385	95,7549	689 555	937
938	879 844	825 293 672	30,6268	9,7889	2,97220	28727 9384	95,8228	691 028	938
939	881 721	827 936 019	30,6431	9,7924	2,97267	28773,8709	95,8906	692 502	939
940	883 600	830 584 000	30,6594	9,7959	2,97313	28819 8360	95 9585	693 978	**940**
941	885 481	833 237 621	30 6757	9,7993	2,97359	28865,8337	96,0272	695 455	941
942	887 364	835 896 888	30 6920	9,8028	2,97405	28911 8640	96,0949	696 934	942
943	889 249	838 561 807	30,7083	9,8063	2,97451	28957,9269	96,1626	698 415	943
944	891 136	841 232 384	30 7246	9,8097	2 97497	29004,0224	96,2312	699 897	944
945	893 025	843 908 625	30,7409	9 8132	2,97543	29050,1505	96,2988	701 380	945
946	894 916	846 590 536	30,7571	9,8167	2,97589	29096 2166	96 3663	702 865	946
947	896 809	849 278 123	30,7734	9,8201	2 97635	29142,4098	96,4348	704 352	947
948	898 704	851 971 392	30,7896	9 8236	2,97681	29188,5408	96,5023	705 840	948
949	900 601	854 670 349	30,8058	9,8270	2,97727	29234,7042	96,5706	707 330	949
950	902 500	857 375 000	30,8221	9,8305	2,97772	29280,9950	96,6380	708 822	**950**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$n^{3/2}$	$n^{3/3}$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
950	902 500	857 375 000	30.8221	9.8305	2 97772	29280,9950	96,6380	708 822	**950**
951	904 401	860 085 351	30,8383	9,8339	2,97818	29327,2233	96,7062	710 315	951
952	906 304	862 801 408	30,8545	9,8374	2,97864	29373,4840	96,7735	711 809	952
953	908 209	865 523 177	30,8707	9,8408	2,97909	29419,7771	96,8417	713 306	953
954	910 116	868 250 664	30,8869	9,8443	2 97955	29466,1026	96,9088	714 803	954
955	912 025	870 983 875	30,9031	9,8477	2,98000	29512 4605	96,9769	716 303	955
956	913 936	873 722 816	30 9192	9,8511	2,98046	29558,7552	97,0450	717 804	956
957	915 849	876 467 493	30,9354	9 8546	2,98091	29605,1778	97,1120	719 306	957
958	917 764	879 217 912	30,9516	9,8580	2,98137	29651,6328	97,1799	720 810	958
959	919 681	881 974 079	30,9377	9,8614	2,98182	29698,0243	97,2478	722 316	959
960	921 600	884 736 000	30 9839	9,8618	2,98227	29744 5440	97,3157	723 823	**960**
961	923 521	887 503 631	31,0000	9,8683	2,98272	29791,0000	97,3825	725 332	961
962	925 444	890 277 128	31 0161	9,8717	2,98318	29837,4882	97,4502	726 842	962
963	927 369	893 056 347	31,0322	9,8751	2,98363	29884,0086	97,5179	728 354	963
964	929 296	895 841 344	31,0483	9,8785	2,98408	29930,5612	97,5856	729 867	964
965	931 225	898 632 125	31.0644	9,8819	2,98453	29977,1460	97 6532	731 382	965
966	933 156	901 428 696	31,0805	9,8854	2,98493	30023,7630	97,7198	732 899	966
967	935 089	904 231 063	31,0966	9,8888	2,98543	30070,4122	97,7873	734 417	967
968	937 024	907 039 232	31,1127	9,8922	2,98588	30117.0936	97,8548	735 937	968
969	938 961	909 853 209	31,1288	9,8956	2,93632	30163,8072	97,9223	737 458	969
970	940 900	912 673 000	31,1448	9,8990	2,98677	30210.4560	97,9396	738 981	**970**
971	942 841	915 498 611	31,1609	9 9024	2,98722	30257,2339	98,0570	740 506	971
972	944 784	918 330 048	31,1769	9 9058	2,98767	30303 9468	98,1243	742 032	972
973	946 729	921 167 317	31,1929	9,9092	2,98811	30350,6917	93,1915	743 559	973
974	948 676	924 010 424	31,2090	9,9126	2,98856	30397,5660	98.2587	745 088	974
975	950 625	926 859 375	31,2250	9,9160	2,98900	30444.3750	98.3259	746 619	975
976	952 576	929 714 176	31,2410	9,9194	2,98945	30491,2160	98,3930	748 151	976
977	954 529	932 574 833	31,2570	9,9227	2,93989	30538 0890	98.4611	749 685	977
978	956 484	935 441 352	31,2730	9 9261	2,99034	30584,9940	98 5281	751 221	978
979	958 441	933 313 739	31,2890	9,9295	2,99078	30631 9810	98,5950	752 758	979
980	960 400	941 192 000	31,3050	9,9329	2 99123	30678 9000	98,6620	754 296	**980**
981	962 361	944 076 141	31,3200	9,9363	2,99167	30725,8029	98,7289	755 837	981
982	964 324	946 966 168	31,3369	9 9396	2,99211	30772,8358	93,7967	757 378	982
983	966 289	949 862 087	31,3528	9,9430	2,99255	30819,8024	93,8735	758 922	983
984	963 256	952 763 904	31,3638	9,9464	2,99300	30866,8992	98,9302	760 466	984
985	970 225	955 671 625	31,3847	9 9497	2,99344	30913 9295	98,9979	762 013	935
986	972 196	958 585 256	31,4006	9 9531	2,99388	30960,9916	99,0646	763 561	986
987	974 169	961 504 803	31,4166	9,9565	2,99432	31008,1842	99 1312	765 111	987
988	976 144	964 430 272	31,4325	9,9593	2,99476	31055,3100	99,1987	766 662	938
989	978 121	967 361 669	31,4484	9,9632	2,99520	31102,4676	99,2652	768 214	989
990	980 100	970 299 000	31,4643	9,9666	2,99564	31149 6570	99,3317	769 769	**990**
991	982 081	973 242 271	31,4802	9 9699	2 99607	31196,8782	99 3991	771 325	991
992	984 064	976 191 488	31,4960	9 9733	2,99651	31244,0320	99,4655	772 882	992
993	986 049	979 146 657	31,5119	9,9766	2,99695	31291,3167	99 5329	774 441	993
994	988 036	982 107 754	31,5278	9,9800	2.99739	31338,6332	99 5990	776 002	994
995	990 025	985 074 875	31.5436	9 9833	2.99782	31385,8820	99,6664	777 564	995
996	992 016	983 047 936	31,5595	9,9866	2,99826	31433,2620	99 7336	779 128	996
997	994 009	991 026 973	31,5753	9,9900	2,99870	31480,5741	99,7997	780 693	997
998	996 004	994 011 992	31,5911	9,9933	2,99913	31527,9178	99,8659	782 260	998
999	998 001	997 002 999	31,6070	9 9967	2,99957	31575,3930	99 9329	783 828	999
1000									

Таблица 2. Числа для перехода от радиан к градусам и обратно для выражения дуги

arc 1° = 0,0174532925 log arc 1° = 0,2418774 − 2
arc 1′ = 0,0002908882 log arc 1′ = 0,4637261 − 4
arc 1″ = 0,0000048481 log arc 1″ = 0,6855749 − 6

$$\rho = \frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}3^\circ = 3438' = 206265'' = \alpha^\circ \text{ для } \alpha = 1.$$

arc α	α		
	°	′	″
1,0	57	17	44,806 = ρ
0,9	51	33	58,33
0,8	45	50	11,84
0,7	40	6	25,36
0 6	34	22	38,88
0,5	28	38	52 40
0,4	22	55	5,92
0 3	17	11	19,44
0,2	11	27	32,96
0,1	5	43	46,48
0,09	5	0	23,83
0 08	4	35	1,18
0 07	4	0	38,54
0,06	3	26	15,89
0,05	2	51	53,24
0,04	2	17	30,59
0 03	1	43	7,94
0,02	1	8	45,30
0,01	0	34	22,65
0,009	0	30	56,38
0,008	0	27	30,12
0,007	0	24	3,85
0,006	0	20	37,59

arc α	α		
	°	′	″
0 005	0	17	11,32
0,004	0	13	45,06
0,003	0	10	18,79
0,002	0	6	52,53
0 001	0	3	26,26
0,0009	0	3	5,64
0,0008	0	2	45,01
0,0007	0	2	24,39
0,0006	0	2	3 76
0,0005	0	1	43,13
0,0004	0	1	22,51
0 0003	0	1	1,88
0,0002	0	0	41,25
0,0001	0	0	20,63
0,00009	0	0	18,56
0,00008	0	0	16 50
0,00007	0	0	14,44
0,00006	0	0	12,38
0,00005	0	0	10,31
0,00004	0	0	8,25
0 00003	0	0	6,19
0,00002	0	0	4,14
0,00001	0	0	2,06

Таблица 3. Круговые функции

°	Sinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0 01745	89
1	0,01745	0,02036	0 02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0 03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05284	0,05524	0 05814	0,06105	0,06395	0 06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0 08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0 10164	0,10453	84
6	0,10453	0 10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0 12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0 14781	0,15069	0,15356	0 15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	**80**
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0 19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0 21076	0,21360	0,21644	0 21928	0,22212	0,22495	77
13	0 22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0 26443	0,26724	0 27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0 29515	0,29793	0 30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0 32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	**70**
20	0,34202	0,34475	0 34748	0,35021	0 35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0 37191	0 37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0 40141	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0 43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	**60**
30	0,50000	0 50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0 51504	0 51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0 52992	0 58238	0,53484	0,53730	0,53975	0 54220	0,54464	57
33	0,54464	0 54708	0,54951	0,55194	0,55436	0 55678	0,55919	56
34	0,55919	0 56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0 58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0 59014	0,59248	0,59482	0 59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0 61337	0,61566	52
38	0,61566	0 61795	0,62024	0 62251	0 62479	0 62706	0,62932	51
39	0,62932	0 63158	0,63383	0,63608	0,63832	0 64056	0,64279	**50**
40	0,64279	0,64501	0 64723	0,64945	0 65166	0,65386	0 65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°
	Cosinus							

°	Cosinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0 99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0 99939	0,99929	0 99917	0 99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0 99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0 99567	0,99540	0 99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0 99324	0,99290	0 99255	83
7	0,99255	0,99219	0 99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0 99027	0,98986	0,98944	0 98902	0 98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	**80**
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0 97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0 97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0 97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0 96593	75
15	0,96593	0,96517	0 96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0 95964	0,95882	0 95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0 95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	**70**
20	0,93969	0 93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0 93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0 92609	0,92499	0 92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0 92050	0,91936	0 91822	0 91706	0,91590	0,91472	0 91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0 90753	0,90631	65
25	0,90681	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0 89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0 89101	0,88968	0,88835	0 88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0 88295	0 88158	0 88020	0,87882	0,87743	0 87603	0 87462	61
29	0 87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	**60**
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0 85717	0,85567	0 85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0 84805	0,84650	0,84495	0 84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0 82741	0,82577	0,82413	0 82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0 81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0 79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0 78801	0,78622	0,78442	0,78261	0 78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	**50**
40	0,76604	0,76417	0 76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0 75471	0,75280	0 75088	0 74896	0 74702	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0 74120	0 73924	0 73728	0 73531	0,73333	0 73135	47
43	0 73135	0 72937	0,72737	0,72537	0 72337	0,72136	0,71934	46
44	0 71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°
	Sinus							

°	Tangens 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,11064	0,01445	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	9,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	**80**
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	9,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	9,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	**70**
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	9,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0 48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54637	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	**60**
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0 61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0 64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	**50**
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0 85912	0,86419	0,86929	4.
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0 91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°
	Cotangens							

°	Cotangens 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,98114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	**80**
10	8,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,48969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,70083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	**70**
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99216	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	**60**
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,26994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1 23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	**50**
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15 37	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°
	Tangens							

Таблица 4. Круговые, показательные и гиперболические функции

(Аргумент в дуговых единицах и градусах) [1]

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{tgh} x$	x в градусах
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00
01	0,01000	0,99995	0,01000	1,01005	0,99005	0,01000	1,00005	0,01000	0,57
02	0,02000	0,99980	0,02000	1,02020	0,98020	0,02000	1,00020	0,02000	1,15
03	0,03000	0,99955	0,03001	1,03045	0,97045	0,03000	1,00045	0,02999	1,72
04	0,03999	0,99920	0,04002	1,04081	0,96079	0,04001	1,00080	0,03998	2,29
05	0,04998	0,99875	0,05004	1,05127	0,95123	0,05002	1,00125	0,04996	2,86
06	0,05996	0,99820	0,06007	1,06184	0,94176	0,06004	1,00180	0,05993	3,44
07	0,06994	0,99755	0,07011	1,07251	0,93239	0,07006	1,00245	0,06989	4,01
08	0,07991	0,99680	0,08017	1,08329	0,92312	0,08009	1,00320	0,07983	4,58
09	0,08988	0,99595	0,09024	1,09417	0,91393	0,09012	1,00405	0,08976	5,16
0,10	0,09983	0,99500	0,10033	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967	5,73
11	0,10978	0,99396	0,11045	1,11628	0,89583	0,11022	1,00606	0,10956	6,30
12	0,11971	0,99281	0,12058	1,12750	0,88692	0,12029	1,00721	0,11943	6,88
13	0,12963	0,99156	0,13074	1,13883	0,87810	0,13037	1,00846	0,12927	7,45
14	0,13954	0,99022	0,14092	1,15027	0,86936	0,14046	1,00982	0,13909	8,02
15	0,14944	0,98877	0,15114	1,16183	0,86071	0,15056	1,01127	0,14889	8,59
16	0,15932	0,98723	0,16138	1,17351	0,85214	0,16068	1,01283	0,15865	9,17
17	0,16918	0,98558	0,17166	1,18530	0,84366	0,17082	1,01448	0,16838	9,74
18	0,17903	0,98384	0,18197	1,19722	0,83527	0,18097	1,01624	0,17808	10,31
19	0,18886	0,98200	0,19232	1,20925	0,82696	0,19115	1,01810	0,18775	10,89
0,20	0,19867	0,98007	0,20271	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738	11,46
21	0,20846	0,97803	0,21314	1,23368	0,81058	0,21155	1,02213	0,20697	12,03
22	0,21823	0,97590	0,22362	1,24608	0,80252	0,22178	1,02430	0,21652	12,61
23	0,22798	0,97367	0,23114	1,25860	0,79453	0,23203	1,02657	0,22603	13,18
24	0,23770	0,97134	0,24472	1,27125	0,78663	0,24231	1,02894	0,23550	13,75
25	0,24740	0,96891	0,25534	1,28403	0,77880	0,25261	1,03141	0,24492	14,32
26	0,25708	0,96639	0,26602	1,29693	0,77105	0,26294	1,03399	0,25430	14,90
27	0,26673	0,96377	0,27676	1,30996	0,76338	0,27329	1,03667	0,26362	15,47
28	0,27636	0,96106	0,28755	1,32313	0,75578	0,28367	1,03946	0,27291	16,04
29	0,28595	0,95824	0,29841	1,33643	0,74826	0,29408	1,04235	0,28213	16,62
0,30	0,29552	0,95534	0,30934	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131	17,19
31	0,30506	0,95233	0,32033	1,36343	0,73345	0,31499	1,04844	0,30044	17,76
32	0,31457	0,94924	0,33139	1,37713	0,72615	0,32549	1,05164	0,30951	18,33
33	0,32404	0,94604	0,34252	1,39097	0,71892	0,33602	1,05495	0,31852	18,91
34	0,33349	0,94275	0,35374	1,40495	0,71177	0,34659	1,05836	0,32748	19,48
35	0,34290	0,93937	0,36503	1,41907	0,70469	0,35719	1,06188	0,33638	20,05
36	0,35227	0,93590	0,37640	1,43333	0,69768	0,36783	1,06550	0,34521	20,63
37	0,36162	0,93233	0,38786	1,44773	0,69073	0,37850	1,06923	0,35399	21,20
38	0,37092	0,92866	0,39941	1,46228	0,68386	0,38921	1,07307	0,36271	21,77
39	0,38019	0,92491	0,41105	1,47698	0,67706	0,39996	1,07702	0,37136	22,35
0,40	0,38942	0,92106	0,42279	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995	22,92
41	0,39861	0,91712	0,43463	1,50682	0,66365	0,42158	1,08523	0,38847	23,49
42	0,40776	0,91309	0,44657	1,52196	0,65705	0,43246	1,08950	0,39693	24,06
43	0,41687	0,90897	0,45862	1,53726	0,65051	0,44337	1,09388	0,40532	24,64
44	0,42594	0,90475	0,47078	1,55271	0,64404	0,45434	1,09837	0,41364	25,21
45	0,43497	0,90045	0,48306	1,56831	0,63763	0,46534	1,10297	0,42189	25,78
46	0,44395	0,89605	0,49545	1,58407	0,63128	0,47640	1,10768	0,43008	26,36
47	0,45289	0,89157	0,50797	1,59999	0,62500	0,48750	1,11250	0,43820	26,93
48	0,46178	0,88699	0,52061	1,61607	0,61878	0,49865	1,11743	0,44624	27,50
49	0,47063	0,88233	0,53339	1,63232	0,61263	0,50984	1,12247	0,45422	28,07
0,50	0,47943	0,87758	0,54630	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	28,65

[1] Дополнительная таблица значений $\pi/4$, $\pi/2$, $3/4\pi$, π, $5/4\pi$, $3/2\pi$, $7/4\pi$, 2π (стр. 30).

Примечание. Для значений $x > 6{,}3$ будет 1) (по меньшей мере на 3 десят. знака) $\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx {}^1/_2 e^x$; 2) $\operatorname{th} x \approx 1{,}000\,00$; 3) $\sin x$, $\cos x$ $\operatorname{tg} x$ равны соответственным значениям функций аргументов $x - 2\pi$.

Продолжение

Таблица 4. Круговые, показательные и гиперболические функции

(Аргумент в дуговых единицах и градусах) [1]

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x в градусах
0,50	0,47943	0,87758	0,54630	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	28,65
51	0,48818	0,87274	0,55936	1,66529	0,60050	0,53240	1,13289	0,46995	29,22
52	0,49688	0,86782	0,57256	1,68203	0,59452	0,54375	1,13827	0,47770	29,79
53	0,50553	0,86281	0,58592	1,69893	0,58860	0,55516	1,14377	0,48538	30,37
54	0,51414	0,85771	0,59943	1,71601	0,58275	0,56663	1,14938	0,49299	30,94
55	0,52269	0,85252	0,61311	1,73325	0,57695	0,57815	1,15510	0,50052	31,51
56	0,53119	0,84726	0,62695	1,75067	0,57121	0,58973	1,16094	0,50798	32,09
57	0,53963	0,84190	0,64097	1,76827	0,56553	0,60137	1,16690	0,51536	32,66
58	0,54802	0,83646	0,65517	1,78604	0,55990	0,61307	1,17297	0,52267	33,23
59	0,55636	0,83094	0,66956	1,80399	0,55433	0,62483	1,17916	0,52990	33,80
0,60	0,56464	0,82534	0,68414	1,82212	0,54881	0,63665	1,18547	0,53705	34,38
61	0,57287	0,81965	0,69892	1,84043	0,54335	0,64854	1,19189	0,54413	34,95
62	0,58104	0,81388	0,71391	1,85893	0,53794	0,66049	1,19844	0,55113	35,52
63	0,58914	0,80803	0,72911	1,87761	0,53259	0,67251	1,20510	0,55805	36,10
64	0,59720	0,80210	0,74454	1,89648	0,52729	0,68459	1,21189	0,56490	36,67
65	0,60519	0,79608	0,76020	1,91554	0,52205	0,69675	1,21879	0,57167	37,24
66	0,61312	0,78999	0,77610	1,93479	0,51685	0,70897	1,22582	0,57836	37,82
67	0,62099	0,78382	0,79225	1,95424	0,51171	0,72126	1,23297	0,58498	38,39
68	0,62879	0,77757	0,80866	1,97388	0,50662	0,73363	1,24025	0,59152	38,96
69	0,63654	0,77125	0,82534	1,99372	0,50158	0,74607	1,24765	0,59798	39,53
0,70	0,64422	0,76484	0,84229	2,01375	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437	40,11
71	0,65183	0,75836	0,85953	2,03399	0,49164	0,77117	1,26282	0,61068	40,68
72	0,65938	0,75181	0,87707	2,05443	0,48675	0,78384	1,27059	0,61691	41,25
73	0,66687	0,74517	0,89492	2,07508	0,48191	0,79659	1,27849	0,62307	41,83
74	0,67429	0,73847	0,91309	2,09594	0,47711	0,80941	1,28652	0,62915	42,40
75	0,68164	0,73169	0,93160	2,11700	0,47237	0,82232	1,29468	0,63515	42,97
76	0,68892	0,72484	0,95045	2,13828	0,46767	0,83530	1,30297	0,64108	43,54
77	0,69614	0,71791	0,96967	2,15977	0,46301	0,84838	1,31139	0,64693	44,12
78	0,70328	0,71091	0,98926	2,18147	0,45841	0,86153	1,31994	0,65271	44,69
79	0,71035	0,70385	1,00925	2,20340	0,45384	0,87478	1,32862	0,65841	45,26
0,80	0,71736	0,69671	1,02964	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404	45,84
81	0,72429	0,68950	1,05046	2,24791	0,44486	0,90152	1,34638	0,66959	46,41
82	0,73115	0,68222	1,07171	2,27050	0,44043	0,91503	1,35547	0,67507	46,98
83	0,73793	0,67488	1,09343	2,29332	0,43605	0,92863	1,36468	0,68048	47,56
84	0,74464	0,66746	1,11563	2,31637	0,43171	0,94233	1,37404	0,68581	48,13
85	0,75128	0,65998	1,13833	2,33965	0,42741	0,95612	1,38353	0,69107	48,70
86	0,75784	0,65244	1,16156	2,36316	0,42316	0,97000	1,39316	0,69626	49,27
87	0,76433	0,64483	1,18532	2,38691	0,41895	0,98398	1,40293	0,70137	49,85
88	0,77074	0,63715	1,20966	2,41090	0,41478	0,99806	1,41284	0,70642	50,42
89	0,77707	0,62941	1,23460	2,43513	0,41066	1,01224	1,42289	0,71139	50,99
0,90	0,78333	0,62161	1,26016	2,45960	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630	51,57
91	0,78950	0,61375	1,28637	2,48432	0,40252	1,04090	1,44342	0,72113	52,14
92	0,79560	0,60582	1,31326	2,50929	0,39852	1,05539	1,45390	0,72590	52,71
93	0,80162	0,59783	1,34087	2,53451	0,39455	1,06998	1,46453	0,73059	53,29
94	0,80756	0,58979	1,36923	2,55998	0,39063	1,08468	1,47530	0,73522	53,86
95	0,81342	0,58168	1,39838	2,58571	0,38674	1,09948	1,48623	0,73978	54,43
96	0,81919	0,57352	1,42836	2,61170	0,38289	1,11440	1,49729	0,74428	55,00
97	0,82489	0,56530	1,45920	2,63794	0,37908	1,12943	1,50851	0,74870	55,58
98	0,83050	0,55702	1,49096	2,66446	0,37531	1,14457	1,51988	0,75307	56,16
99	0,83603	0,54869	1,52368	2,69123	0,37158	1,15983	1,53141	0,75736	56,72
1,00	0,84147	0,54030	1,55741	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159	57,30

[1] Дополнительная таблица значений $\pi/4$, $\pi/2$, $3/4\pi$, π, $5/4\pi$, $3/2\pi$, $7/4\pi$, 2π (стр. 31).

$x = -4\pi$, $x = 6\pi$ . . . . . лежащие между 0,0 и 6,3. — Следует $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e^{\pm x}$.

Продолжение

Таблица 4. Круговые, показательные и гиперболические функции

(Аргумент в дуговых единицах и градусах) [1]

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{tg} x$	x в градусах
1,00	0,84147	0,54030	1,55741	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159	57,30
01	0,84683	0,53186	1,59221	2,74560	0,36422	1,19069	1,55491	0,76576	57,87
02	0,85211	0,52337	1,62813	2,77319	0,36059	1,20630	1,56689	0,76987	58,44
03	0,85730	0,51482	1,66524	2,80107	0,35701	1,22203	1,57904	0,77391	59,01
04	0,86240	0,50622	1,70361	2,82922	0,35345	1,23788	1,59134	0,77789	59,59
05	0,86742	0,49757	1,74332	2,85765	0,34994	1,25386	1,60379	0,78181	60 16
06	0,87236	0,48887	1,78442	2,88637	0,34646	1,26996	1,61641	0,78566	60 73
07	0,87720	0,48012	1,82703	2,91538	0,34301	1,28619	1,62919	0,78946	61,31
08	0,88196	0,47133	1,87122	2,94468	0,33960	1,30254	1,64214	0,79320	61,88
09	0,88663	0,46249	1,91709	2,97427	0,33622	1,31903	1,65525	0,79688	62,45
1,10	0,89121	0,45360	1,96476	3,00417	0,33287	1,33565	1,66852	0,80050	63,03
11	0,89570	0,44466	2,01434	3,03436	0,32956	1,35240	1,68196	0,80406	63,60
12	0,90010	0,43568	2,06596	3,06485	0,32628	1,36929	1,69557	0,80757	64,17
13	0,90441	0,42666	2,11975	3,09566	0,32303	1,38631	1,70934	0,81102	64,74
14	0,90863	0,41759	2,17588	3,12677	0,31982	1,40347	1,72329	0,81441	65,32
15	0,91276	0,40849	2,23450	3,15819	0,31664	1,42078	1,73741	0,81775	65,89
16	0,91680	0,39934	2,29580	3,18993	0,31349	1,43822	1 75171	0,82104	66,46
17	0,92075	0,39015	2,35998	3,22199	0,31037	1,45581	1,76618	0,82427	67,04
18	0,92461	0,38092	2,42727	3,25437	0,30728	1,47355	1,78083	0,82745	67,61
19	0,92837	0,37166	2,49790	3,28708	0,30422	1,49143	1,79565	0,83058	68,18
1,20	0,93204	0,36236	2,57215	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365	68,75
21	0,93562	0,35302	2,65033	3,35348	0,29820	1,52764	1,82584	0,83668	69,33
22	0,93910	0,34365	2,73275	3,38719	0,29523	1,54598	1,84121	0,83965	69,90
23	0,94249	0,33424	2,81982	3,42123	0,29229	1,56447	1,85676	0,84258	70,47
24	0,94578	0,32480	2,91193	3,45561	0,28938	1,58311	1,87250	0,84546	71,05
25	0,94898	0,31532	3,00957	3,49034	0,28650	1,60192	1,88842	0,84828	71,62
26	0,95209	0,30582	3,11327	3,52542	0,28365	1,62088	1,90454	0,85106	72,19
27	0,95510	0,29628	3,22363	3,56085	0,28083	1,64001	1,92084	0,85380	72,77
28	0,95802	0,28672	3,34135	3,59664	0,27804	1,65930	1,93734	0,85648	73,34
29	0,96084	0,27712	3,46721	3,63279	0,27527	1,67876	1,95403	0,85913	73,91
1,30	0,96356	0,26750	3,60210	3,66960	0,27253	1,69838	1,97091	0,86172	74,48
31	0,96618	0,25785	3,74708	3,70617	0,26982	1,71818	1,98800	0,86428	75,06
32	0,96872	0,24818	3,90335	3,74342	0,26714	1,73814	2,00528	0,86678	75,63
33	0,97115	0,23848	4,07231	3,78104	0,26448	1,75828	2,02276	0,86925	76,20
34	0,97348	0,22875	4,25562	3,81904	0,26185	1,77860	2,04044	0,87167	76,78
35	0,97572	0,21901	4,45522	3,85743	0,25924	1,79909	2,05833	0,87405	77,35
36	0,97786	0,20924	4,67344	3,89619	0,25666	1,81977	2,07643	0,87639	77,92
37	0,97991	0,19945	4,91306	3,93535	0,25411	1,84062	2,09473	0,87869	78,50
38	0,98185	0,18964	5,17744	3,97490	0,25158	1,86166	2,11324	0,88095	79,07
39	0,98370	0,17981	5,47069	4,01485	0,24908	1,88289	2,13196	0,88317	79,64
1,40	0,98545	0,16997	5,79789	4,05520	0,24660	1,90430	2,15090	0,88535	80,21
41	0,98710	0,16010	6,16536	4,09596	0,24414	1,92591	2 17005	0,88749	80,79
42	0,98865	0,15023	6,68112	4,13712	0,24171	1,94770	2,18942	0,88960	81,36
43	0,99010	0,14033	7,05547	4,17870	0,23931	1,96970	2,20900	0,89167	81,93
44	0,99146	0,13042	7,60183	4,22070	0,23693	1,99188	2,22881	0,89370	82,51
45	0,99271	0,12050	8,23810	4,26311	0,23457	2,01427	2,24884	0,89569	83,08
46	0,99387	0,11057	8,98861	4,30596	0,23224	2,03686	2,26910	0,89765	83,65
47	0,99492	0,10063	9,91550	4,34924	0,22993	2,05965	2,28958	0,89958	84,22
48	0,99588	0,09067	10,98338	4,39295	0,22764	2,08265	2,31029	0,90147	84,80
49	0,99674	0,08071	12,34986	4,43710	0,22537	2,10586	2 33123	0,90332	85,37
1,50	0,99749	0,07074	14,10142	4,48169	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515	85,94

[1] Дополнительная таблица значений $\pi/4$, $\pi/2$, $3/4\pi$, π, $5/4\pi$, $3/2\pi$, $7/4\pi$, 2π (стр. 30).

Для определения промежуточных значений рекомендуется пользоваться подробными ...ицами K. Hayashi, пятизначные таблицы круговых и гиперболических функций, ...нкций e^x и e^{-x} с натуральными числами как аргументом, Берлин и (Verein wiss. Verleger).

Продолжение

Таблица 4. Круговые, показательные и гиперболические функции

(Аргумент в дуговых единицах и градусах) [1]

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{tg} x$	x в градусах
1,50	0,99749	0,07074	14,10142	4,48169	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515	
51	0,99815	0,06076	16.4 809	4,52673	0,22091	2,15291	2,37382	0,90694	
52	0,99871	0,05077	19,66366	4,57223	0,21871	2,17675	2,39547	0,90870	
53	0,99917	0,04079	24,49841	4,61818	0,21654	2,20083	2,41736	0,91042	
54	0,99953	0,03079	32,46114	4,66459	0,21438	2,22510	2,43949	0,91212	
55	0,99978	0,02079	48,07849	4,71147	0,21225	2,24961	2,46486	0,91379	[illegible]
56	0,99994	0,01080	92,62050	4,75882	0,21014	2,27434	2,48448	0,91542	89,33
*57	1,00000	+0,00080	+1255,766	4,80665	0,20805	2,29930	2,50735	0,91703	89,95
1,69	0,99957	−0,02920	−34,23254	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167	91,5[illegible]
70	0,99166	−0,12884	− 7,69660	5,47395	0,18268	2,64563	2,82832	0,93541	97,46
80	0,97385	−0,22720	− 4,28626	6,04965	0,16530	2,94217	3,10747	0,94681	103,13
90	0,94630	−0,32329	− 2,92710	6,68589	0,14957	3,26816	3,41773	0,95624	108,86
2,00	0,90930	−0,41615	− 2,18504	7,38906	0,13534	3,62686	3,76220	0,96403	114,59
10	0,86321	−0,50485	− 1,70985	8,16617	0,12246	4,02186	4,14431	0,97045	120,32
20	0,80850	−0,58850	− 1,37382	9,02501	0,11080	4,45711	4,56791	0,97574	126,05
*30	0,74571	−0,66628	− 1,11921	9,97418	0,10026	4,93696	5,03722	0,98010	131,78
40	0,67546	−0,73739	− 0,91601	11,02318	0,09072	5,46623	5,55695	0,98367	137,51
50	0,59847	−0,80114	− 0,74702	12,18249	0,08208	6,05020	6,13229	0,98661	143,24
60	0,51550	−0,85689	− 0,60160	13,46374	0,07427	6,69473	6,76901	0,98903	148,97
70	0,42738	−0,90407	− 0,47273	14,87973	0,06721	7,40626	7,47347	0,99101	154,70
80	0,33499	−0,94222	− 0,35553	16,44465	0,06081	8,19192	8,25273	0,99263	160,43
90	0,23925	−0,97096	− 0,24641	18,17415	0,05502	9,05956	9,11458	0,99396	166,16
3,00	0,14112	−0,98999	− 0,14255	20,03554	0,04979	10,01787	10,06766	0,99505	171,89
*10	+0,14158	−0,99914	− 0,04162	22,19795	0,04505	11,07645	11,12150	0,99595	177,62
20	−0,05837	−0,99829	+ 0,05847	24,53253	0,04076	12,24588	12,28565	0,99668	183,35
30	−0,15775	−0,98748	0,15975	27,11264	0,03688	13,53788	13,57476	0,99728	189,08
40	−0,25554	−0,96680	0,26442	29,96410	0,03337	14,96533	14,99874	0,99777	194,81
50	−0,35078	−0,93646	0,37470	33,11545	0,03020	16,54263	16,57282	0,99818	200,54
60	−0,44252	−0,89676	0,49347	36,59823	0,02732	18,28546	18,31278	0,99851	206,26
70	−0,52984	−0,84810	0,62473	40,44730	0,02472	20,21129	20,23601	0,99878	211,99
80	−0,61186	−0,79097	0,77356	44,70118	0,02237	22,33941	22,36178	0,99900	217,72
*90	−0,68777	−0,72593	0,94742	43,40245	0,02024	24,69110	24,71135	0,99918	223,45
4,00	−0,75680	−0,65364	1,15782	54,59815	0,01832	27,28992	27,30823	0,99933	229,18
10	−0,81828	−0,57482	1,42353	60,34029	0,01657	30,16186	30,17843	0,99945	234,91
20	−0,87158	−0,49026	1,77778	66,68633	0,01500	33,33567	33,35066	0,99955	240,64
30	−0,91617	−0,40030	2,28585	73,69979	0,01357	36,84311	36,85668	0,99963	246,37
40	−0,95160	−0,30733	3,09632	81,45087	0,01228	40,71930	40,73157	0,99970	252,10
50	−0,97753	−0,21080	4,63733	90,01713	0,01111	45,00301	45,01412	0,99975	257,83
60	−0,99369	−0,11215	8,86018	99,48432	0,01005	49,73713	49,74718	0,99980	263,56
*70	−0,99992	−0,01239	+80,71280	109,9472	0,00910	54,96904	54,97813	0,99983	269,29
80	−0,99616	+0,08750	−11,38487	121,5104	0,00823	60,75109	60,75932	0,99936	275,02
90	−0,98245	0,18651	− 5,26749	134,2898	0,00745	67,14117	67,14861	0,99989	280,75
5,00	−0,95892	0,28363	− 3,38052	148,4132	0,00674	74,20321	74 20995	0,99991	286,48
10	−0,92581	0,37798	− 2,44939	164,0219	0,00610	82,00791	82,01400	0,99993	292,21
20	−0,88345	0,46852	− 1,88564	181,2722	0,00552	90,63336	90,63888	0,99994	297,94
30	−0,83227	0,55437	− 1,50128	200,3338	0,00499	100,1659	100,1709	0,99995	303,67
*40	−0,77276	0,63469	− 1,21754	221,4064	0,00452	110,7009	110,7055	0,99996	309,40
50	−0,70554	0,70867	− 0,99558	244,6919	0,00409	122,3439	122,3480	0,99997	315,13
60	−0,63127	0,77557	− 0,81394	270,4264	0,00370	135,2114	135,2150	0,99997	320,86
70	−0,55069	0,83471	− 0,65973	298,8674	0,00335	149,4320	149,4354	0,99998	326,59
80	−0,46460	0,88552	− 0,52467	330,2996	0,00303	165,1483	165,1513	0,99998	332,32
90	−0,37388	0,92748	− 0,40311	365,0375	0,00274	182,5174	182,5201	0,99999	[illegible]
6,00	−0,27942	0,96017	− 0,29101	403,4288	0,00248	201,7132	201,7156	0,99999	
*30	+0,01681	0,99986	+0.[illegible]	[illegible]	0,00184	272,2350	272,2369	0,99999	

[illegible] таблица значений $\pi/4$, $\pi/2$, $3/4\pi$, π, $5/4\pi$

Окончание

Таблица 4. Круговые, показательные и гиперболические функции

Дополнительная таблица для значений аргумента $\pi/4$, $\pi/2$, $3/4\pi$, π, $5/4\pi$, $3/2\pi$, $7/4\pi$, 2π.

(Аргумент в дуговых единицах и градусах)

	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	tg x	x в градусах
$\frac{1}{4}\pi = 0{,}7854$	0,70711	0,70711	1	2,19328	0,45594	0,86867	1,32461	0,65579	45,00
$\frac{1}{2}\pi = 1{,}5708$	1,00000	0,00000	$\pm\infty$	4,81049	0,20788	2,30130	2,50918	0,91717	90,00
$\frac{3}{4}\pi = 2{,}3562$	0,70711	− 0,70711	− 1	10,55072	0,09478	5,22797	5,32275	0,98219	135,00
$\pi = 3{,}1416$	0,00000	− 1,00000	0	23,14069	0,04321	11,54874	11,59195	0,99627	180,00
$\frac{5}{4}\pi = 3{,}9270$	− 0,70711	− 0,70711	1	50,75402	0,01970	25,36716	25,38686	0,99922	225,00
$\frac{3}{2}\pi = 4{,}7124$	− 1,00000	0,00000	$\pm\infty$	111,3178	0,00898	55,65440	55,66338	0,39984	270,00
$\frac{7}{4}\pi = 5{,}4978$	− 0,70711	0,70711	− 1	244,1511	0,00410	122,0735	122,0776	0,99997	315,00
$2\pi = 6{,}2832$	0,00000	1,00000	0	535,4917	0,00187	267,7449	267,7468	0,99999	360,00

Таблица 5. Часто встречающиеся числовые значения

Величина	n	lg n	Величина	n	lg n
π	3,1415927	0,49715	$\sqrt[3]{\pi:2}$	1,162447	0,06537
$\pi:2$	1,5707963	0,19612			
$\pi:3$	1,0471976	0,02003	$\sqrt[3]{\pi:4}$	0,922635	0,93503 − 1
$\pi:4$	0,7853982	0,89509 − 1			
π^2	9,8696044	0,99450	$\sqrt[3]{2:\pi}$	0,860254	0,93463 − 1
π^3	31,006277	1,49145			
$1:\pi$	0,3183099	0,50285 − 1	$\sqrt[3]{3:\pi}$	0,984745	0,99332 − 1
$1:\pi^2$	0,1013212	0,00570 − 1			
$1:\pi^3$	0,0322515	0,50855 − 2	M	0,434294	0,63778 − 1
$\sqrt{\pi}$	1,7724539	0,24857	$1:M$	2,302585	0,36222
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464 919	0,16572	g	9,81	0,99167
			g^2	96,2361	1,98334
$\pi\sqrt{\pi}$	5,5632230	0,74572	$\sqrt{g}$	3,1320919	0,49583
$\sqrt[3]{\pi}$	4,6011511	0,66287	$1:2g$	0,050968	0,70730 − 2
π^2	39,478418	1,59636	$\sqrt{2g}$	4,429447	0,64635
$\pi^2:4$	2,4674011	0,39224	$\pi\sqrt{g}$	9,839757	0,99298
$\sqrt{2}$	4,4428829	0,64766	$\pi\sqrt{2g}$	13,91536	1,14350
$\pi:\sqrt{2}$	2,221442	0,34663	$\pi:\sqrt{g}$	1,003033	0,00132
$\sqrt{2\pi}$	2,506623	0,39909	$\pi:\sqrt{2g}$	0,709252	0,85080 − 1
$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806	e	2,718232	0,43429
$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	0,90194 − 1	e^2	7,389 56	0,86859
$\sqrt{3:\pi}$	0,977205	0,98998 − 1	$1:e$	0,367879	0,56571 − 1
			$1:e^2$	0,135335	0,13141 − 1
$\sqrt{\pi}$	1,845261	0,23606	$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715
				1,395612	0,14476

Таблица 6. Длина дуги, стрелка, длина хорды и площадь сегмента для радиуса равного 1

Центр. уг. в град.	Длина дуги i	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента	Центр. уг. в град.	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента
1	0,0175	0,0000	453,36	0,0175	0,00000	46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	0,04176
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	0,00000	47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	0,04448
3	0,0524	0,0003	152,79	0,0524	0,00001	48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	0,04731
4	0,0693	0,0006	114,60	0,0698	0,00003	49	0 8552	0,0900	9,50	0,8294	0,05025
5	0,0373	0,0010	91,69	0,0872	0,00006	50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	0,05331
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	0,00010	51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	0,05649
7	0,1222	0,0019	64,01	0,1221	0,00015	52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	0 05978
8	0,1396	0,0024	53,01	0,1395	0,00023	53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	0,06319
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	0,00032	54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	0,06673
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	0,00044	55	0,9599	0,1130	8,49	0,9235	0,07039
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	0,00059	56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	0,07417
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	0,00076	57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	0,07808
13	0,2269	0,0064	35,28	0,2264	0,00097	58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	0,08212
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	0,00121	59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	0,08629
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	0,00149	60	1,0472	0,1340	7,81	1,0000	0,09059
16	0,2793	0,0097	28,04	0,2783	0,00181	61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	0,09502
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2953	0,00217	62	1,0821	0,1428	7,56	1,0301	0,09953
18	0,3142	0,0123	25,35	0,3129	0,00257	63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	0,10428
19	0,3316	0,0137	24,17	0,3301	0,00302	64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	0,10911
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	0,00352	65	1,1345	0,1563	7,24	1,0746	0,11408
21	0,3665	0,0167	21,95	0,3645	0,00408	66	1,1519	0 1613	7,14	1,0893	0,11919
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	0,00468	67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	0,12443
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	0,00535	68	1,1868	0 1710	6,94	1,1184	0,12982
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	0,00607	69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	0,13535
25	0,4363	0,0237	18,47	0,4329	0,00686	70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	0,14102
26	0,4538	0,0255	17,71	0,4499	0,00771	71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	0,14683
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	0,00862	72	1,2566	0,1910	6 58	1,1756	0 15279
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	0,00961	73	1,2741	0 1961	6,50	1,1896	0,15889
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	0,01067	74	1,2915	0 2014	6,41	1,2038	0,16514
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	0,01180	75	1,3090	0,2066	6,34	1,2175	0,17154
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	0,01301	76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	0,17308
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	0,01429	77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	0 18477
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	0,01566	78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	0,19160
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	0,01711	79	1,3788	0,2284	6,04	1 2722	0,19859
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	0,01864	80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	0,20573
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	0,02027	81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	0,21301
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	0,02198	82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	0.22045
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	0,02378	83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	0,22804
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	0,02568	84	1,4661	0,2569	5,71	1,3333	0,23578
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	0,02767	85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	0,24367
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	0,02976	86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	0,25171
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	0,03195	87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	0,25990
43	0,7505	0,0696	10,78	0,7330	0,03425	88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	0.26825
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	0,03664	89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	0,27675
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	0,03915	90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	0,28540

Примечание к табл. 6. Радиус r для данной длины дуги l и стрелки h определяется из $r = l/l_0$, где l_0 та длина дуги, которая при радиусе 1 соответствует заданному $l:h$, помещенному в графе 1 таблицы. Если r радиус круга а φ центральный угол в градусах, то получим:

1) Длина хорды $s = 2r \sin\frac{\varphi}{2}$,

2) Стрелка $h = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} = 2r\sin^2\frac{\varphi}{4}$,

3) Длина дуги $l = \pi r\frac{\varphi^\circ}{180^\circ} = 0{,}017453\, r\varphi \approx \sqrt{s^2 + \frac{16}{3}h^2}$,

Продолжение

Таблица 6. Длина дуги, стрелка, длина хорды и площадь сегмента для радиуса равного 1

Центр. уг. в град.	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента	Центр. уг. в град.	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды s	Площадь сегмента
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	0,29420	136	2,3736	0,6251	3,80	1,8544	0,83949
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	0,30316	137	2,3911	0,6335	3,77	1,8603	0,85455
93	1,6232	0 3116	5,21	1,4507	0,31226	138	2,4086	0,6416	3,75	1,8372	0,86971
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	0,32152	139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	0,88497
95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	0,33093	140	2,4435	0,6530	3,71	1,8794	0,90034
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	0,34050	141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	0,91580
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	0,35021	142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	0,93135
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	0,36008	143	2,4958	0,6827	3,66	1,8936	0,94700
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5203	0,37009	144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	0,96274
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	0,38026	145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	0,97853
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	0,39058	146	2,5482	0,7076	3,60	1,9123	0,99449
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5513	0,40104	147	2,5656	0,7160	3,53	1,9176	1,01050
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	0,41166	148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	1,02658
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	0,42242	149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	1,04275
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	0,43333	150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	1,15900
106	1 8500	0,3982	4,65	1,5973	0,44439	151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	1,07532
107	1,8675	0,4052	4 61	1,6077	0,45560	152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	1,09171
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	0,46695	153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	1,10818
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6283	0,47845	154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	1,12472
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	0,49008	155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	1,14132
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	0,50187	156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	1,15799
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	0,51379	157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	1,17472
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	0,52586	158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	1,19151
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	0,53806	159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	1,20835
115	2 0071	0,4627	4,34	1,6868	0,55041	160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	1,22525
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	0,56289	161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	1,24221
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	0 57551	162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	1,25921
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	0,58827	163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	1,27626
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	0,60116	164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	1,29335
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	0,61418	165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	1,31049
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	0,62734	166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	1,32766
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	0,64063	167	2,9147	0,8868	3,28	1,9871	1,34487
123	2,1468	9,5228	4,11	1,7576	0,65104	168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	1,36212
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	0,66759	169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	1,37940
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	0,68125	170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	1,39671
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	0,69505	171	2,9845	0,9215	3 24	1,9938	1,41404
127	2,2166	0 5538	4,00	1,7899	0,70897	172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	1,43140
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7975	0,72301	173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	1,41878
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	0,73716	174	3,0369	0 9477	3,20	1,9973	1,46617
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	0,75144	175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	1,48359
131	2,2834	0,5853	3,91	1,8199	0,76584	176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	1,50101
132	2,3033	0,5933	3,88	1,8271	0,78034	177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	1,51845
133	2,3213	0;6013	3,86	1,8341	0,79497	178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	1,53589
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	0,80970	179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	1,55334
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	0,82454	180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	1,57080

4) Площадь сегмента $= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{180^\circ}\varphi^\circ - \sin\varphi\right)$,

5) Площадь сектора $= \frac{\varphi^\circ}{360^\circ}\pi r^2 = 0{,}008\,726\,65\,\varphi\, r^2$,

6) $l = r$ соотв. $\varphi = 57^\circ\,17'\,44{,}806'' = 57{,}295\,779\,5^\circ = 203\,264{,}806''$,

7) arc $1^\circ = \pi : 180 = 0{,}017\,453\,292\,52$; lg arc $1^\circ = 0{,}241\,877\,367\,6 - 2$,

8) arc $1' = \pi : 10\,800 = 0{,}000\,290\,888\,21$; lg arc $1' = 0{,}463\,726\,117\,2 - 4$,

9) arc $1'' = \pi : 648\,000 = 0{,}000\,004\,848\,14$; lg arc $1'' = 0{,}685\,574\,866\,8 - 6$.

II. АЛГЕБРА.

A. Степени, корни, логарифмы.

Степени.

1. $(+x)^n = +x^n$. 2. $(-x)^n = \pm x^n$ в зависимости от того, будет ли n четное или нечетное. 3. $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$. 4. $x^a : x^b = x^{a-b}$. 5. $(x^a)^b = x^{a \cdot b} = (x^b)^a$. 6. $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$. 7. $x^a : y^a = (x:y)^a$. 8. $1 : x^m = x^{-m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$.

9. $x^0 = 1$; $1 \pm m = 1$; $0^m = 0$; 0° — неопределенность, см. стр. 60. 10. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. 11. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$. 12. $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$. 13. $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$.

Если $x < 1$, то:

14. $(1 \pm x)^n = 1 \pm \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)x^2 \pm \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)x^4 \pm \left(\frac{n}{5}\right)x^5 + \ldots$,

где

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}.$$

15. $\frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + \ldots$

Корни.

1. $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$.
2. $\sqrt[m]{x \cdot y} = \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y}$.
3. $\sqrt[m]{x:y} = \sqrt[m]{x} : \sqrt[m]{y}$.
4. $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}} = \left(\sqrt[a]{x}\right)^b$.
5. $\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \sqrt[a \cdot b]{x} = x^{\frac{1}{a \cdot b}} = \sqrt[b]{\sqrt[a]{x}}$.

6. Корень из отрицательного числа может быть действительной величиной только при условии, что показатель степени корня — нечетное число.

7. $\sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \ldots$

8. $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x \mp \ldots$

Пример извлечения квадратного и кубического корней:

$$\sqrt{217,|34|21} = 14{,}7425$$

$14^2 = 196$	a^2	
$21\,34$		
$2\cdot140\cdot7 + 7^2 = 20\,09$	$2ab + b^2$	
$1\,2521$		
$2\cdot1470\cdot4 + 4^2 = 1\,1776$	$2ab + b^2$	
74500		
$2\cdot14740\cdot2 + 2^2 = 58961$	$2ab + b^2$	
1553600		
$2\cdot147420\cdot5 + 5^2 = 1474225$	„	
79375		

Остаток 0,00079

$$\sqrt[3]{217,|342|1} = 6{,}0124$$

$6^3 = 216$	a^3	
$1\,3$		
$3\cdot6^2\cdot0 = 0$	$3a^2b$	
$1\,34$		
$3\cdot6\cdot0^2 = 0$	$3ab^2$	
1342		
$0^3 = 0$	b^3	
$1\,3421$		
$3\cdot60^2\cdot1 = 1\,0800$	$3a^2b$	
26210		
$3\cdot60\cdot1^2 = 180$	$3ba^2$	
260300		
$1^3 = 1$	b^3	и т. д.

Комплексные числа.

9. $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$, $i^3 = -i = -\sqrt{-1}$; $i^4 = +1$; $\frac{1}{i} = -i$.

10. Если $a + bi = c + di$, то должно быть $a = c$, $b = d$.

11. $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)\,i$;
аналогично при умножении и делении. Употребительно соотношение:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Величины $a + bi$ и $a - bi$ называются сопряженными комплексными величинами.

12. Нормальная форма комплексного числа:

$$a \pm bi = r\left\{\cos(\varphi + 2n\pi) \pm i\sin(\varphi + 2n\pi)\right\},$$

φ — амплитуда; модуль $r = +\sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$;
n — целое число.

Произведение (частное) двух комплексных величин есть комплексная величина, модуль которой равен произведению (частному) обоих модулей, а амплитуда равна сумме (разности) обеих амплитуд.

Пример:

$$\left\{r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)\right\}^m = r^m\left\{\cos(m\cdot\varphi) \pm i\sin(m\cdot\varphi)\right\}$$

или

$$\sqrt[m]{r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)} = \sqrt[m]{r}\left\{\cos\frac{n\cdot360 + \varphi}{m} \pm i\sin\frac{n\cdot360 + \varphi}{m}\right\}.$$

n может принимать значения ряда: 0, 1, 2, 3, ... $(m-1)$; для $n=m$ амплитуда получает то же значение, что для $n=0$.

Логарифмы.

Логарифм c числа b есть показатель степени, в которую надо возвести основание a системы логарифмов, чтобы получить число b:

$$\lg_a b = c \text{ или } a^c = b.$$

Логарифмы при основании 10 называются бригговыми; обозначаются $\lg b$ (см. табл. стр. 1—20).

Логарифмы при основании $e = 2{,}718281828459\ldots = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

называются натуральными или неперовыми; обозначаются $\lg\text{nat}\,b$ или $\ln b$.

Общие свойства:

$$\lg(a\cdot b) = \lg a + \lg b,\quad \lg(a:c) = \lg a - \lg c,$$

$$\lg a^n = n\cdot\lg a,\quad \lg\sqrt[m]{b} = \frac{1}{m}\lg b.$$

Положительная или отрицательная целая часть логарифма называется характеристикой его, десятичные знаки — мантиссой.

$$\lg 10^{\pm n} = \pm n;\ \lg(b\cdot10^n) = n + \lg b;\ \lg(a:10^n) = -n + \lg a;\ \ln e^{\pm n} = \pm n;$$
$$\ln(b\cdot10^n) = n\cdot\ln 10 + \ln b;\quad \ln(a:10^n) = -n\cdot\ln 10 + \ln a.$$

Для перехода от одной системы логарифмов к другой служат формулы:

$$\lg x = \lg e\cdot\ln x = 0{,}43429\cdot\ln x,\quad \ln x = \ln 10\cdot\lg x = 2{,}30259\cdot\lg x.$$

Б. Теория соединений.

1. Число возможных перестановок (соединение всех элементов в любом возможном порядке) из n различных элементов составляет

$$1, 2, 3, \ldots n = n!$$

Если между n элементами находится p одинаковых элементов одного рода, q одинаковых элементов другого рода, r одинаковых третьего рода и т. д., то число всевозможных перестановок

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\ldots}.$$

2. Число возможных сочетаний из n элементов по r (не взирая на порядок) равно:

a) $\left(\frac{n}{r}\right)$ без повторений, т. е. когда каждый элемент входит в соединение только один раз,

b) $\left(\frac{n+r-1}{r}\right)$ с повторениями, т. е. когда каждый элемент может входить в соединение r раз.

Число же вообще всех возможных сочетаний без повторений из n различных элементов равно:

$$\left(\frac{n}{1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right) + \ldots\left(\frac{n}{n}\right) = 2^n - 1.$$

3. Число возможных размещений (получаемых путем всех возможных перестановок в каждом сочетании) из n элементов по r элементов равно:

a) $\left(\frac{n}{r}\right)\cdot r! = n!:(n-r)!$ без повторений (соответств. как в п. 2a),

b) n^r с повторениями (соответств. как в п. 2b).

В. Определители.

Горизонтальные ряды определителя называются строками, вертикальные — столбцами (колоннами).

Вычисление определителя состоит в разложении его на подопределители (миноры) соответственно какой-либо строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= c_3 \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}.$$

Подопределитель, например к элементу a_2, получается, если зачеркнуть строку и столбец, содержащие a_2 (в данном случае — вторую строку и первый столбец); незачеркнутые элементы составят подопределитель. Знак подопределителя будет положительный или отрицательный, в зависимости от того, нечетное или четное число элементов определителя имеется от первого элемента (в данном случае a_1) до данного элемента a_2 (здесь имеются 2 члена, следовательно знак отрицательный).

Г. Ряды.

1. Арифметический ряд первого порядка.

$$y_1 = a, \quad y_2 = a + d, \quad y_3 = a + 2d, \ldots, \quad y_n = z;$$

n-й член: $z = a + (n-1)\,d$; сумма n первых членов:

$$S = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} y_\alpha = \frac{a+z}{2} \cdot n = \frac{[2a + (n-1)\,d] \cdot n}{2}.$$

Применение:

$$\sum_{x=1}^{x=n} x = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

2. Ряды высшего порядка.

$$\sum_{x=1}^{x=n} x^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \quad \sum_{x=1}^{x=n} x^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

3. Геометрический ряд.

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots,\ aq^{n-1}.$$

n-й член: $z = aq^{n-1}$. Сумма n первых членов:

$$S = \frac{qz - a}{q-1} = \frac{a\,(q^n - 1)}{q-1}.$$

При $\pm q < 1$ и $n = \infty$: $\quad S = \dfrac{a}{1-q}$.

Пример: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$.

4. Особые ряды.

1. $a^x = 1 + \dfrac{x \ln a}{1} + \dfrac{(x \ln a)^2}{2!} + \dfrac{(x \ln a)^3}{3!} + \ldots$ *.
2. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$, см. также 14 и 15.
3. $e = 1 + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots = \lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; см. стр. 34.
4. $\ln(1 \pm x) = \pm x - \dfrac{x^2}{2} \pm \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} \pm \ldots, \quad -1 < x < +1.$
5. $\ln \dfrac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\right), \quad -1 < x < +1.$
6. $\ln \dfrac{x+1}{x-1} = 2\left(x^{-1} + \dfrac{x^{-3}}{3} + \dfrac{x^{-5}}{5} + \ldots\right), \quad +1 < x$ или $x < -1.$
7. $\ln x = 2\left\{\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^7 + \ldots\right\},$ $0 < x < +\infty.$
8. $\ln(a+x) = \ln a + 2\left\{\dfrac{x}{2a+x} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2a+x}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{x}{2a+x}\right)^5 + \ldots\right\}.$
9. $\sin x = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$
10. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$
11. $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{3 \cdot 5} + \dfrac{17x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \dfrac{62x^9}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < +\dfrac{\pi}{2}.$
12. $\arcsin x = x + \dfrac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots, \quad -1 \leqslant x \leqslant +1.$
13. $\operatorname{arc\,tg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots, \quad -1 \leqslant x \leqslant +1.$

Отсюда $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \ldots$

14. $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \ldots = -\operatorname{sh}(-x)$
15. $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots = \operatorname{ch}(-x)$

} см. также 2.

* $p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p$; см. также № 14, стр. 33.

Д. Вычисление сложных процентов.

Население города через n лет при ежегодном приросте в $p\,{}^0\!/_0$ обратится в:

1. $$S_n = S \cdot q^n,$$

если проценты присчитываются ежегодно; ежегодный коэфициент роста

$$q = 1 + \frac{p}{100}.$$

2. $$S_n = S \cdot q^{2n},$$

если проценты присчитываются по полугодиям; полугодичный коэфициент роста

$$q = 1 + \frac{p}{200}.$$

3. $$S_n = S \cdot e^{\frac{p \cdot n}{100}},$$

если проценты присчитываются непрерывно.

При годовых сложных процентах:

4. Если в конце каждого года вносят сумму r, то к концу n-го года образуется капитал:

$$S_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}.$$

5. Если в начале каждого года вносят сумму r, то к концу n-го года образуется капитал:

$$S_n = \frac{rq \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

6. Списывание, возобновление. Если стоимость S (строения, машины) в течение n лет погашается или утрачивается (так что потом должна быть восстановлена), то для этого ежегодно списывают или соответственно отчисляют:

$$r = S \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

или $\alpha\,{}^0\!/_0$ от S:

$$\alpha = 100 \cdot \frac{r}{S} = 100 \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1};$$

α определяется через q и n.

Е. Уравнения.

Общее правило.

1. Уравнения первой степени.

С одним неизвестным:

$x \pm b = a$ дает $x = a \mp b$, $\quad bx = a$ дает $x = \frac{a}{b}$,

$x^n = a$ дает $x = \sqrt[n]{a}$, $\quad \sqrt[n]{x} = b$ дает $x = b^n$,

С двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \left|\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right|$$

$$y = \frac{c_1a_2 - a_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \left|\begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right|.$$

С тремя неизвестными: два однородных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x:y:z = \left|\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right| =$$
$$= (b_1c_2 - c_1b_2) : (c_1a_2 - a_1c_2) : (a_1b_2 - b_1a_2).$$

Три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\} \quad \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| = D.$$

$$x = \left|\begin{matrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| : D, \qquad y = \left|\begin{matrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{matrix}\right| : D, \qquad z = \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{matrix}\right| : D.$$

Три однородные уравнения имеют решение, отличное от нуля ($x \neq 0$; $y \neq 0$, $z \neq 0$), если $\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| = 0$.

Определитель знаменателей составляется из коэфициентов членов, содержащих неизвестные, в том порядке, как они стоят в уравнении. Способ составления определителей числителей состоит в замене a или b, или c через d в зависимости от того, составляется ли определитель для x, для y или для z.

С n неизвестными: или предыдущий способ решения посредством определителей или исключение неизвестных по обычному способу.

2. Уравнения второй степени.

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x^2 + b_1x + c_1 = 0, \qquad x = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - c_1}.$$

Проверка обоих корней уравнения:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -b_1, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = c_1.$$

3. Уравнения третьей степени.

В уравнении $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ принимают $x = y - \frac{a}{3}$; новое уравнение примет вид:

$$y^3 + (3p) \cdot y + (2q) = 0.$$

По формуле Кардана:

$$u=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}. \qquad v=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$$

и

$$y_1=u+v, \qquad y_{2\atop 3}=-\frac{1}{2}(u+v)\pm\frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\,(u-v);$$

$+$ для y_2, $-$ для y_3. Эта формула непригодна, если $q^2+p^3<0$; тогда применяют приведенную в B, 3.

Решение при помощи гиперболических и круговых функций (табл. на стр. 22–30).

A. $y^3+(3p)\,y\pm(2q)=0$, p и q — абсолютные значения.

С помощью φ из $\operatorname{sh}\varphi=q:p\sqrt{p}$.

$$y_1=\mp 2\sqrt{p}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}, \qquad y_2=\pm\sqrt{p}\cdot\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}+i\sqrt{3}\cdot\sqrt{p}\cdot\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3},$$

$$y_3=\pm\sqrt{p}\cdot\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}-i\sqrt{3}\cdot\sqrt{p}\cdot\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}.$$

B. $y^3-(3p)\,y\pm(2q)=0$, p и q — абсолютные значения.

1. $p^3<q^2$. Из $\operatorname{ch}\varphi=q:p\sqrt{p}$:

$$y_1=\mp 2\sqrt{p}\cdot\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}, \qquad y_2=\pm\sqrt{p}\cdot\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}+i\sqrt{3}\cdot\sqrt{p}\cdot\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3},$$

$$y_3=\pm\sqrt{p}\cdot\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}-i\sqrt{3}\cdot\sqrt{p}\cdot\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}.$$

2. $p^3=q^2$; $\quad y_1=\mp 2\sqrt{p}$. $\quad y_2=y_3=\pm\sqrt{p}$.

3. $p^3>q^2$. Из $\cos\varphi=q:p\sqrt{p}$:

$$y_1=\mp 2\sqrt{p}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}, \qquad y_2=\pm\sqrt{p}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{p}\cdot\sin\frac{\varphi}{3}.$$

$$y_3=\pm\sqrt{p}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{p}\cdot\sin\frac{\varphi}{3}.$$

Пример:

$$x^3+6x^2+9x-2=0.$$

После замены $x=y-2$:

$$x^3-3y-4=0, \qquad p=-1, \qquad q=-2.$$

По формуле Кардана:

$$u=\sqrt[3]{+2+\sqrt{4-1}}=\sqrt[3]{3{,}7321}=1{,}55115.$$

$$v=\sqrt[3]{+2-\sqrt{4-1}}=\sqrt[3]{0{,}2679}=0{,}64465.$$

$$y_1=2{,}1958, \qquad y_2=-\frac{1}{2}\cdot 2{,}19580+\frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\cdot 0{,}90650=-1{,}0979+0{,}45325\cdot i\cdot\sqrt{3},$$

$$x_1=0{,}1958, \qquad y_3=-1{,}0979-0{,}45325\cdot i\cdot\sqrt{3}.$$

Тригонометрически для случая: B, $1:p^3=1^3=1<q^2=4$.

$$\operatorname{ch}\varphi=\frac{2}{1\sqrt{1}}=2, \text{ табл. } F, \text{ стр. } 36\varphi=1{,}31694.$$

$$\frac{\varphi}{3}=0{,}43898, \quad \operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}=1{,}0979, \quad \operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}=0{,}4532.$$

$$y_1=2{,}1958, \quad x_1=0{,}1958,$$

$$y_2=-1{,}0979+i\cdot\sqrt{3}\cdot 0{,}4532,$$

$$y_3=-1{,}0979-i\cdot\sqrt{3}\cdot 0{,}4532.$$

Решение с помощью гиперболических функций в общем сложнее, чем по формулам Кардана, особенно при многозначных числах и логарифмических вычислениях.

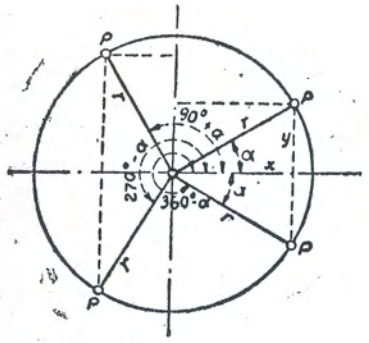
III. ТРИГОНОМЕТРИЯ.

A. Круговые функции.

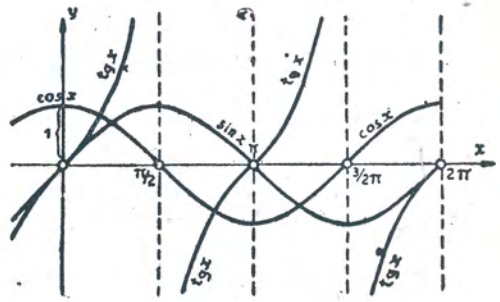
1. Определение. На черт. 1.

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}; \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}; \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}; \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

Период круговых функций см. черт. 2.



Черт. 1.



Черт. 2.

2. Знаки и предельные значения; особые значения

°	0		90		180		270		360	30	45	60
вадрант . . .		I		II		III		IV				
sin	0	+	+1	+	0	−	−1	−	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos	+1	+	0	−	−1	−	0	+	+1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	+	$\pm\infty$	−	0	+	$\pm\infty$	−	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$+\infty$	+	0	−	$\mp\infty$	+	0	−	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$		$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

3. Соотношения между функциями дополнительных углов

$\varphi =$	$90 \pm \alpha$	$180 \pm \alpha$	$270 \pm \alpha$	$(n \cdot 360 \pm \alpha)$ или $\pm \alpha$
$\sin \varphi$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
$\cos \varphi$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \varphi$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \varphi$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$

4. Зависимость между функциями одного угла.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

5. Соотношения между функциями двух углов.

a) 1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$,
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$,
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta) : (1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$,
4. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1) : (\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha)$.

b) 5. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,

6. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$,

7. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,

8. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$,

9. $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \sin(\alpha \pm \beta) : (\cos \alpha \cdot \cos \beta)$,
10. $\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \sin(\alpha \pm \beta) : (\sin \alpha \cdot \sin \beta)$.

c) 11. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$,
12. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$.

d) 13. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}$,

14. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$,

15. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$,

16. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}$.

e) 17. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin \alpha}$,

18. $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin \alpha}$,

19. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{csec} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$,

20. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$,
21. $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$.

f) 22. $\sin(45 \pm \alpha) = \cos(45 \mp \alpha)$,
23. $\operatorname{tg}(45 + \alpha) = (1 + \operatorname{tg} \alpha) : (1 - \operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{ctg}(45 - \alpha)$,

24. $\left.\begin{matrix} \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ \operatorname{ctg}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) \end{matrix}\right\} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha$,

25. $\left.\begin{matrix} \operatorname{ctg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) \end{matrix}\right\} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha$.

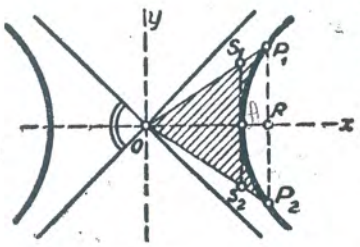
6. Зависимость между функциями трех углов α, β, γ, составляющих в сумме 180°.

1. $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$,
2. $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$,
3. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$,
4. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma$,
5. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + 2$,
6. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$,
7. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$,
8. $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

7. Для получения **зависимостей** между arc различных функций пользуются формулами отделов 4 и 5 и принимают, что $\arcsin n$ есть выраженная в радианах дуга, sin которой равен n, так что например cos этой дуги равен $\sqrt{1 - n^2}$, и таким образом $\arcsin n = \arccos \sqrt{1 - n^2}$.

Б. Гиперболические функции.

В гиперболических функциях вместо круга берется равносторонняя гипербола, вместо угла α площадь $OP_1AP_2O=\varphi$, ограниченная лучами OP_1 и OP_2 и отрезком кривой P_1AP_2 (черт. 3). Пусть действительная полуось OA равна 1. Отрезки RP_1, OR и AS_1 принимают за функции площади φ гиперболы и обозначают следующим образом:



Черт. 3.

$$RP_1=RP_2=y=\operatorname{sh}\varphi, \qquad OR=x=\operatorname{ch}\varphi,$$
$$AS_1=AS_2=\frac{1\cdot y}{x}=\operatorname{th}\varphi=\frac{1}{\operatorname{cth}\varphi}=\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}.$$

Из уравнения равносторонней гиперболы $x^2-y^2=a^2=1$ следует непосредственно $\operatorname{ch}^2\varphi-\operatorname{sh}^2\varphi=1$. Так как площадь φ гиперболы в данном случае вычисляется

$$\varphi=\ln(x+y)=\ln(\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi),$$

то

$$x+y=\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi=e^{\varphi}$$

и соответственно

$$-\varphi=\ln(x-y)=\ln(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{sh}\varphi)$$

или

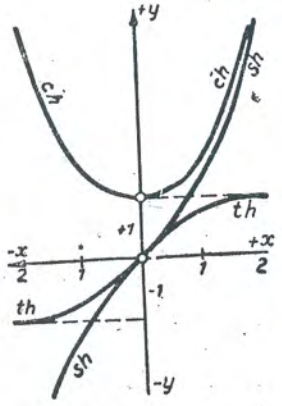
$$e^{-\varphi}=\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{sh}\varphi.$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{sh}\varphi=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2};\quad \operatorname{ch}\varphi=\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2};$$
$$\operatorname{th}\varphi=\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}.$$

Для действительных значений φ, $\operatorname{sh}\varphi$ может принимать любые положительные или отрицательные действительные числовые значения, $\operatorname{ch}\varphi$ — любые положительные действительные числовые значения >1, $\operatorname{th}\varphi$ изменяется в пределах -1 и $+1$, $\operatorname{cth}\varphi$ — вне этих пределов до $\pm\infty$ (см. черт. 4). Период гиперболических функций мнимый; для sh и ch

$$\operatorname{sh}(-\varphi)=-\operatorname{sh}\varphi;\quad \operatorname{ch}(-\varphi)=+\operatorname{ch}\varphi;$$
$$\operatorname{th}(-\varphi)=-\operatorname{th}\varphi.$$



Черт. 4.

При обозначении $\operatorname{sh}x=z$ имеют место соотношения:

$$\operatorname{ch}x=\sqrt{1+z^2},\quad e^x=\sqrt{1+z^2}+z,\quad x=\ln(\sqrt{1+z^2}+z)=\operatorname{arc\,sh}z.$$

При обозначении $\operatorname{ch}x=z$:

$$\operatorname{sh}x=\sqrt{z^2-1},\quad e^x=z+\sqrt{z^2-1},\quad x=\ln(z+\sqrt{z^2-1})=\operatorname{arc\,ch}z.$$

Если $\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x=z$, то:

$$e^x=z,\quad x=\ln z,\quad \operatorname{sh}x=\frac{z^2-1}{2z},\quad \operatorname{ch}x=\frac{z^2+1}{2z},\quad \operatorname{th}\frac{x}{2}=\frac{z-1}{z+1}.$$

При обозначении $\operatorname{th}x=z$:

$$e^{2x}=\frac{1+z}{1-z},\quad x=\operatorname{arc\,th}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

Ar соответствует arc круговых функций, например arc sh y — площадь OP_1AP_2O гиперболы, sh который равен y, т. е. для которой $RP_1=RP_2=y$ (Ar $\equiv$ area $=$ площадь).

Чтобы вывести зависимости между круговыми и гиперболическими функциями, пользуются следующими полученными из рядов 2, 9, 10 стр. 37 уравнениями:

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x,\quad e^{-xi}=\cos x-i\sin x,$$

откуда следует:

$$\cos x=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i},$$

таким образом

$$\cos x=\operatorname{ch}ix,\quad \sin x=-i\operatorname{sh}ix,\quad \operatorname{tg}x=-i\operatorname{th}ix,\quad \operatorname{ctg}x=i\operatorname{cth}ix;$$
$$\cos ix=\operatorname{ch}x,\quad \sin ix=i\operatorname{sh}x,\quad \operatorname{tg}ix=i\operatorname{th}x,\quad \operatorname{ctg}ix=-i\operatorname{cth}x.$$

С помощью этих уравнений можно для гиперболических функций вывести те же или подобные зависимости, как и для круговых функций.

В. Решение треугольника.

а) **Плоский треугольник.** Для решения прямоугольного (и равнобедренного) треугольника достаточно основных уравнений круговых функций и теоремы Пифагора.

б) Для решения косоугольного треугольника имеем еще следующие формулы:

1. Закон синуса:
$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma.$$

2. Формулы высот:
$$h_b=c\sin\alpha=a\sin\gamma,\quad h_a=c\sin\beta=b\sin\gamma,\quad h_c=b\sin\alpha=a\sin\beta.$$

3. Теорема проекций:
$$a=b\cos\gamma+c\cos\beta,\quad b=c\cos\alpha+a\cos\gamma,\quad c=b\cos\alpha+a\cos\beta.$$

4. Закон тангенсов:
$$(a+b):(a-b)=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

5. Уравнения Мольвейде:
$$(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}=a\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2},\quad (b-c)\cos\frac{\alpha}{2}=a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

6. Закон косинуса:
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha.$$

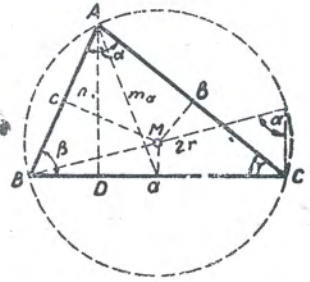
(Пифагорова теорема для косоугольного треугольника) или в виде:

$$a^2=(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

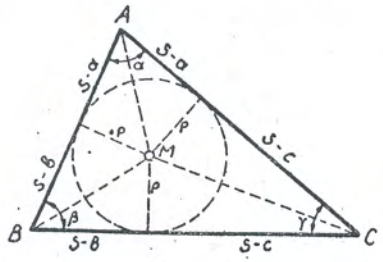
7. Если $a+b+c=2s$, то (см. черт. 5)

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\cdot c}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{b\cdot c}}\ \text{(черт. 5)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$



Черт. 5.



Черт. 6.

8. Вписанный и описанный круги; площадь треугольника (черт. 6):

а) $\rho=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=(s-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=$

$=(s-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$

б) $2r=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$

в) $\rho=4r\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2},\quad s=4r\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$

г) $2J=ab\cdot\sin\gamma=bc\cdot\sin\alpha=ca\cdot\sin\beta=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha};$

$$J=2r^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{a\cdot b\cdot c}{4r}=\rho\cdot s=\rho^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

9. Биссектриса и медиана треугольника.

Биссектриса угла C: $\frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}=\frac{\sqrt{ab\{(a+b)^2-c^2\}}}{a+b}.$

Медиана стороны c равна $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$

10. Если Δa, Δb, Δc, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$ — соответственные малые изменения сторон и углов и h_a, h_b, h_c высоты, опущенные на стороны a, b, c, то

$$\Delta a=\Delta b\cdot\cos\gamma+\Delta c\cdot\cos\beta+h_a\cdot\Delta\alpha\cdot\sin 1'';$$

для Δb и Δc аналогичные выражения получаются круговой заменой; далее

$$\Delta\alpha+\Delta\beta+\Delta\gamma=0.$$

Дальнейшие формулы получаются из вышеприведенных уравнений 1–9.

Решения:

1. Даны: a, β, γ (сторона и прилежащие к ней углы).

$$b=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha},\quad c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha},\quad \alpha=180^\circ-\beta-\gamma.$$

2. Даны: b, c, α (две стороны и угол между ними).
Или β и γ из:

$$\frac{\beta+\gamma}{2}=90-\frac{\alpha}{2}$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

или из:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b\sin\alpha}{c-b\cos\alpha},$$

$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{c-b\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)};$$

или a по закону косинуса, или из:

$$a=(b-c):\cos\varphi,$$

если

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc}}{b-c}.$$

3. Даны a, b, β (две стороны и угол, противолежащий одной из них).
$b>a$: одно решение:

$$\sin\alpha=\frac{a\cdot\sin\beta}{b},\quad c=\frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

$$\alpha<90^\circ,\quad \gamma=180^\circ-\alpha-\beta.$$

$b<a$: два решения.

Из $\sin\alpha=\frac{a\cdot\sin\beta}{b}$ получаются для α два пригодных значения: одно <90, другое $>90^\circ$.

Решения не существует, если $a\cdot\sin\beta>b$.

4. Даны a, b, c.
Углы — или по закону косинуса или из соотношений:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\rho}{s-a}$$

(относительно ρ и s см. предыдущие №№ 7 и 8).

IV. ПЛАНИМЕТРИЯ И СТЕРЕОМЕТРИЯ.

A. Периметры и площади плоских фигур.

1. Треугольник (см. также фиг. 5 и 6).
Стороны a, b, c; углы α, β, γ; высоты h_a, h_b, h_c; медианы m_a, m_b, m_c;

$$2s = a + b + c; \quad 2\delta = m_a + m_b + m_c:$$

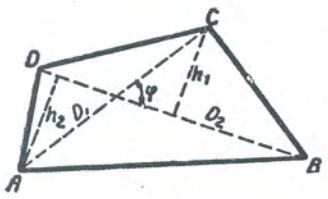
$$\omega = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma =$$

$$= \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = 2r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma =$$

$$= \frac{abc}{4r} = \rho^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} =$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{\delta(\delta - m_a)(\delta - m_b)(\delta - m_c)} = \rho \cdot s$$



Черт. 7.

2. Четырехугольник (черт. 7). Диагонали D_1 и D_2, высоты на D_2: h_1 и h_2; угол между диагоналями φ:

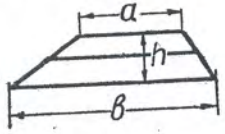
$$\omega = \frac{1}{2} \cdot D_2 \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot \sin\varphi.$$

2a. Трапеция (см. черт. 8): a и b — параллельные стороны, h — высота, m — средняя линия, равная $\frac{a+b}{2}$:

$$\omega = \frac{1}{2} h \cdot (a + b) = m \cdot h.$$

2b. Параллелограмм, прямоугольник: a — основание, h — высота:

$$\omega = ah.$$



Черт. 8.

3. Многоугольник. Разложение на треугольники или определение по координатам x_1, y_1, x_2, y_2, ... вершин:

$$F = \frac{1}{2}\{(x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3) +$$
$$+ (x_4 y_3 - x_3 y_4) + \ldots + (x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) + (x_1 y_n - x_n y_1)\}.$$

3a. Правильный многоугольник (n-угольник). Длина стороны $= a$, радиус описанного круга $= R$, радиус вписанного круга $= r$, половина центрального угла $= \varphi$, периметр $= U$, площадь $= F$.
Угол многоугольника $180° - 2\varphi$.

$$\varphi = \frac{180°}{n}, \quad a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\varphi = 2r\operatorname{tg}\varphi, \quad U = n \cdot a = 2nR\sin\varphi =$$
$$= 2nr\operatorname{tg}\varphi; \quad F = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{2} nR^2 \sin 2\varphi = nr^2 \operatorname{tg}\varphi.$$

Для шестиугольника:

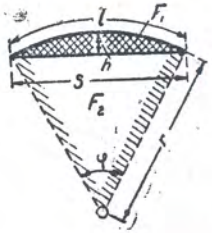
$$\varphi = 30°, \quad a = R = 1{,}155\ r, \quad r = 0{,}8658 \cdot a,$$
$$F = 2{,}598 \cdot R^2 = 3{,}464\ r^2; \quad R = 0{,}3849 \cdot \sqrt{F}, \quad r = 0{,}2886 \cdot \sqrt{F}.$$

Для восьмиугольника:

$$\varphi = 22{,}5°; \quad a = 0{,}765 \cdot R = 0{,}828 \cdot r;$$
$$r = 1{,}307 \cdot a, \quad R = 1{,}208 \cdot a$$
$$F = 2{,}828 \cdot R^2 = 3{,}314 \cdot r^2; \quad R = 0{,}3536\sqrt{F},$$
$$r = 0{,}3017\sqrt{F}.$$

4. Круг. Радиус $= r$, диаметр $= d$, окружность $= U$:

$$U = 2r\pi = \pi d; \quad F = r^2\pi = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4} Ud =$$
$$= 0{,}78539816 d^2.$$



Черт. 9.

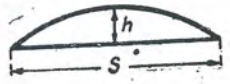
Таблицу для U и F см. стр. 1—20.
4a. Круговое кольцо. R — внешний радиус, r — внутренний, D и d — внешний и внутренний диаметры, ρ — средний радиус, δ — ширина кольца:

$$F = \pi(R^2 - r^2) = \frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2) \quad 2\pi \cdot \rho \cdot \delta.$$

F как разность площадей определяется из таблиц.
4b. Круговой сегмент (F_1) и круговой сектор (F_2). Центральный угол; $\varphi°$ — в градусах, φ — в радианах (черт. 9):

$$F_1 = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\varphi° \cdot \pi}{180} - \sin\varphi\right) = \frac{r(l - s) + s \cdot h}{2},$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r = \frac{\varphi° \cdot \pi \cdot r^2}{360} = 0{,}00873 \cdot r^2 \cdot \varphi° = \frac{1}{2}\varphi r^2.$$



Черт. 10.

5. Парабола, эллипс (черт. 10).

Парабола:

$$F = \frac{2}{3} \cdot s \cdot h. \quad U \approx s\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{s}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{s}\right)^4\right],$$

если $\frac{h}{s}$ мало. То же приближенно для любой плоской дуги.

Эллипс: вся площадь $F = a \cdot b \cdot \pi$; U см. следующую таблицу.

$b:a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$U:a$	4,0640	4,2020	4,3860	4,6026	4,8442	5,1054	5,3824	5,6723	5,9732.

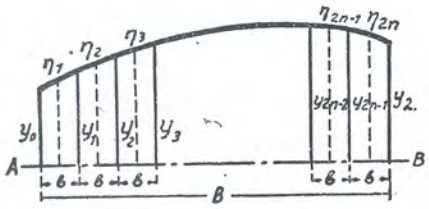
6. Произвольная площадь. Если площадь ограничена преимущественно кривыми линиями, то ее делят прямой линией на две части и каждую из них определяют следующим образом (черт. 11). Делят площадь на четное число полос одинаковой ширины перпендикулярно к оси AC; если ширина каждой полосы b, высоты ограничивающих их прямых y_0, y_1, ..., средние высоты η_1, η_2, ..., то площадь фигуры приблизительно определится:

$$1.\ F = b\left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{2n-2} + y_{2n-1} + \frac{1}{2} y_{2n}\right),$$

2. $F = b\sum\eta$

3. $F = \frac{1}{3}\,b\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$,

4. $F = \frac{3}{8}\,b\,(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + \ldots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)$.



Черт. 11.

Предыдущие четыре формулы расположены в порядке возрастающей точности; формула 4-я наиболее точная: при ее применении число полос должно быть кратным трех. 3-я и 4-я формулы называются правилами Симпсона.

Суммы в формулах 1—4 могут быть просто определены при помощи циркуля. Если искомые площади нанесены на миллиметровую бумагу, то для разделения площади на полосы пользуются имеющимися на бумаге делениями, в зависимости от желаемой точности, на сантиметры, полусантиметры или даже миллиметры. Удобно также покрывать рисунок прозрачной миллиметровой бумагой.

Если кривая, ограничивающая площадь, не выше третьей степени, то площадь вполне точно вычисляется по формуле:

5. $F = \frac{1}{6}\cdot B\cdot(y_0 + 4\cdot y_n + y_{2n})$;

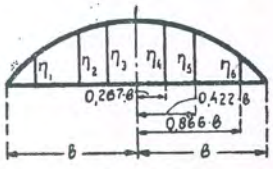
если кривая не выше 5-й степени, то точно:

6. $F = \frac{2}{45}\,b\,\{7\,(y_0 + y_4) + 32\,(y_1 + y_3) + 12y_2\}$,

если $b = \frac{1}{5}B$ и $y_0, \ldots, y_4$ суть пять ординат, расположенных в равных расстояниях b.

Правило Чебышева (черт. 12):

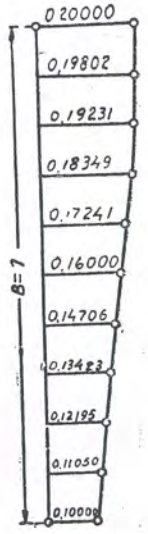
7. $F = \frac{1}{3}\cdot b\,(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_6)$.



Черт. 12.

Пример применения предыдущих формул и выяснения их точности. Требуется определить представленную на фиг. 13 площадь. В то время как на практике ординаты большей частью определяются из чертежа, здесь они для испытания точности формул вычислены (уравнение ограничивающей кривой: $y = \frac{1}{5 + 5x^2}$).

Расстояние $B = 1$ разделено на 10 частей, так что $b = 0{,}1$; ординаты нанесены на черт. 13, и их значения помещены в нижеследующей таблице. Применение формул 1—3 и 5 ясно; формула 4-я может быть применена только в интервале от $x = 0$ до $x = 0{,}9$, так как число полос должно быть кратным трем; для вычисления площади в интервале 0,9—1,0 служит еще раз 5-я формула. Точное значение площади определено интегрированием.



Черт. 13.

x	$f(x)$	Определение площади фиг. 13 по: формуле 1	формуле 2	формуле 3	формуле 4	формуле 5
0,0	0,20000	0,10000		1 0,20000	1 0,20000	$F = \frac{1}{6}\cdot 1{,}0\cdot(0{,}20 + 4\cdot 0{,}16 + 0{,}10) = 0{,}15667$
0,1	0,19802	0,19802	0,19950	4 0,79208	3 0,59406	
0,2	0,19231	0,19231	0,19560	2 0,38462	3 0,57693	
0,3	0,18349	0,18349	0,18824	4 0,73396	2 0,36698	
0,4	0,17241	0,17241	0,17517	2 0,34482	3 0,51723	
0,5	0,16000	0,16000	0,16632	4 0,64000	3 0,48000	
0,6	0,14706	0,14706	0,15355	2 0,29412	2 0,29412	
0,7	0,13423	0,13423	0,14060	4 0,53692	3 0,40269	
0,8	0,12195	0,12195	0,12800	2 0,24390	3 0,36585	
0,9	0,11050	0,11050	0,11611	4 0,44200	1 0,11050	1 0,11050
1,0	0,10000	0,05000	0,10512	1 0,10000		4 0,42048
						1 0,10000
	$\Sigma =$	1,56997	1,57121	4,71442	3,90836	0,63098
	$F =$	$\frac{1}{10}\cdot 1{,}56997$	$\frac{1}{10}\cdot 1{,}57121$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}\cdot 4{,}71442$	$\frac{1}{10}\left(\frac{3}{8}\cdot 3{,}90836 + \frac{1}{6}\cdot 0{,}63098\right)$	
	$=$	**0,156997**	**0,157121**	**0,157088**	**0,1570798**	

Точное значение 0,15707963...

Б. Поверхности и объемы тел.

V — объем, M — боковая поверхность, O — полная поверхность.

1. Призма. Площадь основания G, высота h; $V = G\cdot h$ (см. также 1d).

1a. Куб. Ребро a; $V = a^3$; $O = 6a^2$; диагональ $d = a\sqrt{3}$.

1b. Прямоугольный параллелепипед: ребра a, b, c; $V = a\cdot b\cdot c$:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},\quad O = 2\,(ab + bc + ac).$$

1c. Усеченная трехгранная призма: боковые ребра a, b, c; площадь нормального сечения N; $V = \frac{1}{3}\,(a + b + c)\cdot N$ (см. также 1d).

1d. Усеченная многогранная призма: l — длина прямой, соединяющей центры тяжести оснований, площадь нормального сечения N; $V = N\cdot l$.

2. Цилиндр. Площадь основания G, высота h; $V = G\cdot h$. Боковая поверхность равна произведению окружности нормального сечения на образующую.

2a. Прямой круговой цилиндр: R — радиус основания, h — высота:

$$V = R^2\cdot\pi\cdot h;\quad M = 2R\pi\cdot h;\quad O = 2R\pi\,(R + h).$$

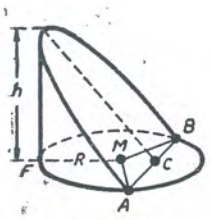
2b. Усеченный прямой круговой цилиндр: наибольшая и наименьшая образующие a и b:

$$V = R^2\pi\cdot\frac{a + b}{2},\quad M = R\pi\,(a + b).$$

2c. Цилиндрическая подкова (черт. 14):

$$FC = a,\quad AC = BC = b,$$

$\angle FMB = \varphi$ (в дуговом измерении).



Черт. 14.

$$V=\frac{h}{3a}\left\{b\,(3R^2-b^2)+3R^2(a-R)\,\varphi\right\},$$

$$M=\frac{2hR}{a}\left\{(a-R)\,\varphi+b\right\}.$$

Если C совпадает с M ($FC=AC=BC=a=b=R$):

$$V=\frac{2}{3}R^2\cdot h,\quad M=2R\cdot h.$$

2d. Полый цилиндр: радиусы: R — наружный и r — внутренний, ρ — средний; толщина стенки $\delta=R-r$, высота h:

$$V=\pi\cdot h\,(R^2-r^2)=\pi\cdot h\cdot s\,(2R-s)=\pi\cdot h\cdot s\,(2r+s)=2\pi\cdot\rho\cdot h\cdot s.$$

3. Пирамида, конус. Площадь основания G, высота h; $V=\frac{1}{3}G\cdot h$.

3a. Усеченная пирамида: G и g — площади оснований, h — высота:

$$V=\frac{1}{3}h\,(G+g+\sqrt{Gg}).$$

3b. Круговой конус: R — радиус основания, h — высота:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h.$$

Боковая поверхность прямого кругового конуса:

$$M=\pi R\sqrt{R^2+h^2}=\pi R\cdot s$$

(s — образующая).

3c. Усеченный круговой конус: радиусы оснований: верхнего — r, нижнего — R, высота — h:

$$S=R+r,\qquad D=R-r,\qquad s=\sqrt{h^2+D^2}.$$

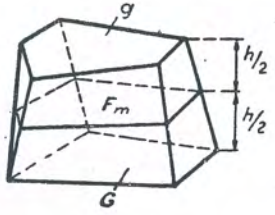
$$V=\frac{1}{3}\pi h\,(R^2+Rr+r^2)=\frac{1}{6}h\,(\pi\cdot R^2+$$

$$+\pi\cdot S^2+\pi\cdot r^2)=\frac{h}{4}\left(\pi S^2+\frac{\pi D^2}{3}\right).$$

πR^2, πr^2, πS^2 и πD^2 — из таблиц.

Боковая поверхность усеченного прямого кругового конуса:

$$M=S\cdot\pi\cdot s.$$



Черт. 15.

4. Призмоид (тело, основания которого лежат в параллельных плоскостях, а боковые грани — треугольники, трапеции, параллелограмы) (черт. 15).

Объем призмоида вычисляется по правилу Симпсона (см. стр. 50 № 3):

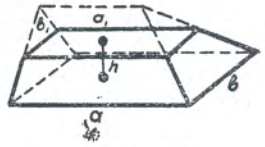
$$V=\frac{1}{6}\cdot h\,(G+4F_m+g),$$

G и g площади оснований, F_m — сечение через середину высоты.

4a. Обелиск с прямоугольными основаниями, клин срезан (черт. 16):

$$V=\frac{h}{6}\left\{(2a+a_1)\,b+(2a_1+a)\,b_1\right\}=$$

$$=\frac{h}{6}\left\{ab+(a+a_1)(b+b_1)+a_1b_1\right\}.$$

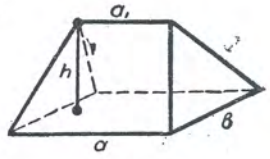


Черт. 16.

4b. Обелиск, основания которого трапеции: то же, что в случае 4a, если a и a_1 — средние линии трапеций, b и b_1 — высоты трапеций.

4c. Клин, крыша (черт. 17):

$$V=\frac{h\cdot b}{6}(2a+a_1)$$

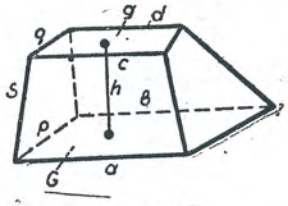


Черт. 17.

(см. также 1c). Формула пригодна и для клина, основанием которого служит трапеция с средней линией a и высотой b.

4b. Призмоид со скошенной гранью (черт. 18). Основания G и g — трапеции, перпендикулярные к боковой грани s; параллельные стороны оснований:

$a,\ b,\ c,\ d;\qquad p,\ q;\qquad a,\ b,\ c,\ d\perp p,\ q.$



Черт. 18.

$$V=\frac{h}{12}\left\{(a+b)\,p+(a+b+c+d)(p+q)+\right.$$

$$\left.+(c+d)\,q\right\}.$$

Если $a=c$ и $b=d$, то: $V=$

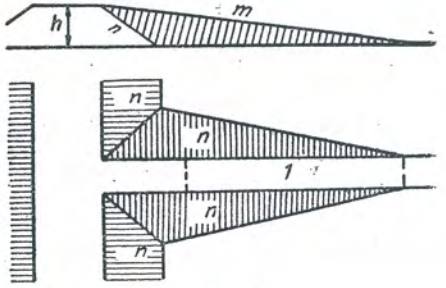
$$=\frac{1}{4}h\,(a+b)\,(p+q).$$

4e. Рампа (черт. 19)

$$V=\frac{1}{6}h^2\left\{3b+2nh\frac{m-n}{m}\right\}(m-n).$$

Если рампа прислоняется к отвесной стене, т. е. только для сопряжения со стенкой ($n=0$):

$$V=\frac{1}{6}h^2\,(3b+2hn)\,m.$$



Черт. 19.

5. Шар. R — радиус.

$$V=\frac{4}{3}R^3\pi=$$

$$=\frac{1}{3}OR=4{,}18879\cdot R^3,$$

$$O=4R^2\pi=\frac{3V}{R},\quad R=0{,}620351\cdot\sqrt[3]{V}.$$

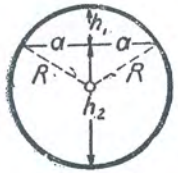
5a. Шаровой сегмент, (черт. 20): R — радиус шара, $h\,(=h_1$

или h_2) – высота сегмента, радиус основания $a=\sqrt{h(2R-h)}$:

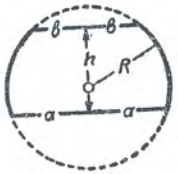
$$V=h^2\pi\left(R-\frac{h}{3}\right)=\frac{1}{6}\cdot\pi h(3x^2+h^2),\quad M=2R\pi h=\pi(a^2+h^2).$$

5b. Шаровой пояс (черт. 21). Радиусы кругов оснований a и b:

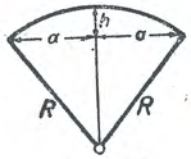
$$V=\frac{\pi\cdot h}{6}(3a^2+3b^2+h^2),\quad M=2R\pi\cdot h,$$



Черт. 20.



Черт. 21.



Черт. 22.

$$R^2=a^2+\left(\frac{a^2-b^2-h^2}{2h}\right)^2,\quad a>b.$$

Если $a=R$, то $V=h\cdot\pi\left(R^2-\frac{h^2}{3}\right)$.

5c. Шаровой сектор (черт. 22) $V=\frac{2}{3}\pi R^2\cdot h=2{,}0944\cdot R^2\cdot h$, $O=$

$$=\pi R(2h+a).$$

6. Тела с эллиптическим и параболическим сечением.

6a. Эллипсоид: полуоси a, b, c.

$$V=\frac{4}{3}\pi a\cdot b\cdot c.$$

6b. Эллипсоид вращения: $2a$ — ось вращения

$$V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot a\cdot b^2,$$

$2b$ — ось вращения:

$$V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot a^2\cdot b.$$

6c. Параболоид вращения: h — высота, R — радиус основания:

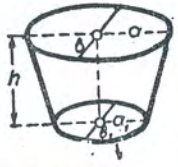
$$V=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot R^2\cdot h=1{,}570796R^2\cdot h.$$

6d. Усеченный параболоид вращения: h — высота, R и r — радиусы оснований:

$$V=\frac{1}{2}\pi\cdot(R^2+r^2)\cdot h.$$

6e. Чан, кадка (черт. 23): основания — эллипсы с полуосями a, b и a_1, b_1; высота h:

$$V=\frac{\pi h}{6}\left\{(2a+a_1)b+(2a_1+a)b_1\right\}.$$



Черт. 23.

6f. Бочка: радиус обоих доньев — r, радиус среднего сечения — R длина (высота) — h (черт. 24). Для параболической клепки точно:

$$V=0{,}837758\cdot h(2R^2+Rr+0{,}75r^2);$$

для круговой клепки приближенно:

$$V=1{,}0471976\cdot h(2R^2+r^2).$$

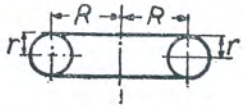
7. Свод.

7a. Цилиндрический свод: пролет — $2s$, радиус внутренней образующей свода — r, толщина свода — δ, высота — f, длина свода — l:

$$V=\frac{\varphi^\circ\pi}{180^\circ}\left(r+\frac{\delta}{2}\right)\delta\cdot l,\ \text{если}\ \sin\varphi/2=\frac{s}{r};$$

или приближенно:

$$V=2\delta l\cdot\sqrt{s^2+\frac{4}{3}f^2}.$$



Черт. 24.

8. Цилиндрическое кольцо (черт. 24)

$$V=2\pi^2Rr^2=19{,}739Rr^2$$
$$O=4\pi^2Rr=39{,}478Rr.$$

V. ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

A. Предел, непрерывность, диференцируемость.

1. $x\to a$ или $\lim x=a$ означает, что переменная x беспредельно стремится к постоянному значению a, не достигая последнего; a называется пределом (limes) x;
x становится бесконечно малым, означает то же, что $x\to 0$.
x становится бесконечно большим, $x\to\infty$, означает, что абсолютная величина x превосходит любое постоянное значение.
Если $f(x)$ является функцией действительной переменной (аргумента) x, то $\lim f(x)$ означает то же, что и $f(x)\to b$, если $x\to a$, или практически: тем больше $x\to a$ $f(x)\approx b$, чем больше $x\approx a$.

2. Некоторые особые предельные значения (n целое число >0).
$\lim a^n=\infty$ для $a>1$; $=1$ для $a=+1$; $=0$ для $|a|<1$; не существует, если $a\leqq -1$.
$n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0;\qquad \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1};$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}a^x=1;$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e;\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x;$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^ne^{-n}\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}\ \text{(Формула Stirling'a)}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}\right]^2\frac{1}{2n}=\frac{\pi}{2}\ \text{(Произведение Wallis'a).}$$

3. Δx является приращением x.
$f(x)$ называется непрерывной в точке x, если $f(x)$ имеет определенное конечное значение и

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x).$$

4. $f(x)$ называется диференцируемой в точке x, если предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

имеет определенное значение; $f'(x)$ наз. производной $f(x)$.

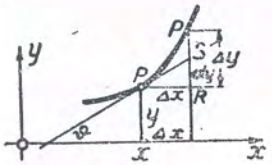
5. Геометрическое значение $f'(x)$:

$$f'(x)=\operatorname{tg}\vartheta,$$

т. е. равно восхождению тангенса кривой $y=f(x)$ в точке соприкасания $P=(x, y)$; (черт. 25).

6. Разность значений функций

$$RP_1=\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$



Черт. 25.

7. Дифференциал от $y=f(x)$:

$$RS=dy=df(x)=f'(x)\,dx, \quad \text{где } dx=\Delta x.$$

Частное диференциалов равно производной;

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

8. Каждая диференцируемая функция одновременно и непрерывна, но не обратно. Непрерывная кривая не имеет ни скачков, ни перерывов; диференцируемая не имеет кроме того никаких углов.

Б. Производные и диференциалы.

1. Правила диференцирования.

($a, b \dots m, n$ обозначают независимые от x постоянные, $u, v, w \dots$ диференцируемые функции от x).

1. $(a)'=0$
2. $(au)'=au'$
3. $(u+v+w+\dots)'=u'+v'+w'+\dots$ вообще действительно только для конечного числа слагаемых.
4. $(uv)'=u'v+uv'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
6. $(u\,v\,w\dots)'=(u\,v\,w\dots)\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}+\dots\right)$, вообще действительно только для конечного числа множителей.
7. $\frac{df(u)}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$. [Цепное правило для сложных функций; $f=f(u)$, $u=u(v)$, $v=v(w)$, $w=w(x)$.]
8. Если $x=g(y)$ есть обратная функция от $y=f(x)$, то имеем $g'(y)=1:f'(x)$.

2. Производные элементарных функций.

9. $(x^m)'=mx^{m-1}$
10. $(e^x)'=e^x$
11. $(a^x)'=a^x\ln a$
12. $(\ln x)'=1:x$
13. $(a\log x)=1:x\ln a$
14. $(\sin x)'=\cos x$
15. $(\operatorname{tg} x)'=1:\cos^2 x$
16. $(\cos x)'=-\sin x$
17. $(\operatorname{ctg} x)'=-1:\sin^2 x$
18. $(\operatorname{arc\,sin} x)'=1:\sqrt{1-x^2}$
19. $(\operatorname{arc\,tg} x)'=1:(1+x^2)$
20. $(\operatorname{arc\,cos} x)'=-1:\sqrt{1-x^2}$
21. $(\operatorname{arc\,ctg} x)'=-1:(1+x^2)$
22. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$
23. $(\operatorname{th} x)'=1:\operatorname{th}^2 x$
24. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$
25. $(\operatorname{cth} x)'=-1:\operatorname{sh}^2 x$.

3. Формулы для диференцирования.

Согласно п. А 7 каждой упомянутой выше формуле для $f'(x)$ соответствует формула для диференциала $df(x)$, получающаяся от умножения первой на dx.

В нижеслезующем пополненном перечне $x, y, z, u \dots$ могут однако обозначать либо независимые переменные, либо функции тех же переменных.

1. $da=0$, где a постоянная.
2. $d(ax)=a\,dx$.

3. $d(x+y+z+u\dots)=dx=dy+dz+du+\dots$ вообще действительно только для конечного числа слагаемых.
4. $d(xy)=x\,dy+y\,dx$.
5. $d(xyzu\dots)=\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}+\frac{du}{u}+\dots\right)xyzu\dots$.
6. $d\frac{x}{y}=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$.
7. $d(x^m)=mx^{m-1}\,dx$.
8. $d\sqrt{x}=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.
9. $d\frac{1}{x}=-\frac{dx}{x^2}$.
10. $de^x=e^x\,dx$.
11. $da^x=a^x\ln a\,dx$.
12. $d\ln x=\frac{dx}{x}$.
13. $da\log x=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{dx}{x}$.
14. $d\sin x=\cos x\,dx$.
15. $d\frac{1}{\sin x}=-\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$.
16. $d\cos x=-\sin x\,dx$.
17. $d\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$.
18. $d\operatorname{tg} x=\frac{dx}{\cos^2 x}$.
19. $d\operatorname{ctg} x=-\frac{dx}{\sin^2 x}$.
20. $d\operatorname{arc\,sin} x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
21. $d\operatorname{arc\,cos} x=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
22. $d\operatorname{arc\,tg} x=\frac{dx}{1+x^2}$.
23. $d\operatorname{arc\,ctg} x=-\frac{dx}{1+x^2}$.
24. $d\ln\sin x=\operatorname{ctg} x\,dx$,
25. $d\ln\cos x=-\operatorname{tg} x\,dx$.
26. $d\ln\operatorname{tg} x=\frac{2\,dx}{\sin 2x}$.
27. $d\ln\operatorname{ctg} x=-\frac{2\,dx}{\sin 2x}$.
28. $d\operatorname{sh} x=\operatorname{ch} x\,dx$.
29. $d\operatorname{ch} x=\operatorname{sh} x\,dx$.
30. $d\operatorname{th} x=\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.
31. $d\operatorname{cth} x=-\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$.
32. $d(xy)=xy^{-1}(x\ln x\,dy+y\,dx)$.

4. Производные и диференциалы высшего порядка.

1. Пояснение: $f''(x)=[f'(x)]'$; $d^2f(x)=d[df(x)]$;
вообще: $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$; $d^nf(x)=d[d^{n-1}f(x)]$.

Если x независимая переменная, то

$$d^2f(x)=f''(x)\,dx^2\dots, \quad d^nf(x)=f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

2. $(x^m)^{(n)}=\binom{m}{n}n!\,x^{m-n}=m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)\,x^{m-n}$.
3. $(e^x)^{(n)}=e^x$.
4. $(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$.
5. $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!:x^n$.
6. $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\pi/2)$.

7. $(\cos x)^{(n)} = \cos\,(x + n\pi/2)$.

8. $$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \ldots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} = (u+v)^{(n)},$$

где правая часть означает результат, получающийся, если n-ая степень образована по правилу бинома Ньютона при условии, что вместо степеней подставлены производные, однако вместо u^0 не 1, а $u^{(0)} = u$; вместо v^0 не 1, а $v^{(0)} = v$.

9. Если

$$y = f(u) \quad \text{и} \quad u = u(x),$$

то имеем

$$d^2f = f'(u)\,d^2u + f''(u)\,du^2,$$

$$d^3f = f'(u)\,d^3u + 3f''(u)\,d^2u\,du + f'''(u)\,du^3 \text{ и т. д.}$$

5. Функции нескольких переменных.

1. Если $f(x, y)$ функция двух или нескольких переменных, то $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ ... частные производные, т. е. такие, при образовании которых только x или y или ... рассматриваются в качестве переменных. Далее, при определенных предпосылках о непрерывности, имеем $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ или $f_{xy} = f_{yx}$ и т. д.; т. е. при образовании производных высшего порядка порядок дифференцирования различных переменных не имеет значения.

2. Полный дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots$$

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \ldots$$

вообще для двух переменных x, y

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} f,$$

где после формального вычисления степени по правилу бинома Ньютона произведение $\partial^n f$ понимается как числитель частных производных n-го порядка.

3. Чтобы дифференциальное выражение $P\,dx + Q\,dy$ было бы полным дифференциалом функции двух переменных, необходимо и достаточно

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ (условие интегрируемости).}$$

При трех переменных соответственно для $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

См. также стр. 76, 122.

6. Неявные функции.

Для $F(x, y) = 0$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right] : \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3.$$

B. Ряды Тайлора и Маклорена.

1. Теорема среднего значения. Если $f(x)$ однозначна, непрерывна для $x = a$ и $x = b$ и дифференцируема для всех значений x в промежутке a и b, то имеем

$$f(b) - f(a) = (b - a)\,f'(\xi),$$

где ξ промежуточное значение между a и b:

$$\xi = a + \vartheta(b - a), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Другой вид формулы:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(\xi), \quad \xi = x + \vartheta h, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

2. Формула Тайлора. Если $f(x)$ n-раз дифференцируется между a (включ.) и x (включ.), то

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + R_n$$

где

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n, \quad \xi = a + \vartheta(x - a), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Другой вид:

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + R_n$$

где

$$R_n = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \quad \xi = x + \vartheta h, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Форма Маклорена для формулы Тайлора (для $a = 0$):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

где

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n, \quad \xi = \vartheta x, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

3. Формула Тайлора переходит в ряд Тайлора, если $f(x)$ как угодно часто диференцируема и $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ действительно для каждого ϑ между 0 и 1. Маклоренова форма тайлоровского ряда представляет разложение $f(x)$ по степеням x. Что не всякую функцию можно разложить по степеням x, видно из примеров: $f(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^n}$ ($n > 0$, целое число), $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$, $\ln x$, $\operatorname{ctg} x$ и т. д.

4. Ряд Тайлора для двух переменных:

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(1)} f(x,y) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(2)} f(x,y) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(n-1)} f(x,y) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{(n)} f(x+\vartheta h, y+\vartheta k), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

См. еще 2, стр. 59.

Г. Раскрытие неопределенностей.

Если функция $f(x)$ для $x=a$ (где также может быть $a=\infty$) не имеет никакого определенного значения, а принимает неопределенный вид

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty,$$

то все же может оказаться, что существует предельное значение $\lim_{x\to a} f(x)$. Для отыскания этого предельного значения можно пользоваться следующими правилами:

$\frac{0}{0}$. Если $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = 0$, то $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

В случае необходимости метод можно повторить.

$\frac{\infty}{\infty}$. Поступают как в случае $\frac{0}{0}$.

$0\cdot\infty$. Если $f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x)$, $\varphi(a) = 0$ и $\psi(a) = \infty$, то, подставив $\frac{1}{\psi(x)} = \chi(x)$, получают случай $\frac{0}{0}$.

$\infty - \infty$. $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, $\varphi(a) = \infty$, $\psi(a) = \infty$. Приходят к случаю $\frac{0}{0}$, для чего подставляют $\varphi(x) = 1 : u(x)$, $\psi(x) = 1 : v(x)$ и $f(x) = \frac{v(x) - u(x)}{u(x)\,v(x)}$ принимает вид $\frac{0}{0}$.

0^0, 1^∞, ∞^0. Если выражение $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$ для $x = a$ принимает один из этих видов, то сначала определяют истинное значение $\ln f(x)$ как выше.

Д. Maxima и Minima.

1. Функции одной переменной.

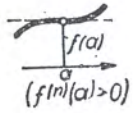
Для отыскания max. и min. непрерывной функции $f(x)$, кривая которой не имеет углов, необходимо прежде всего решить уравнение

$$f'(x) = 0.$$



Черт. 26.

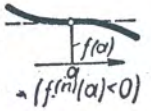
Пусть $x = a$ является решением уравнения. Составляем высшие производные от $f(x)$, пока не отыщется производная, не исчезающая для $x = a$: $f^{(n)}(a) \neq 0$. Если порядок ее n четный, то существует max. или min, смотря по тому, будет ли $f^{(n)}(a) < 0$ или > 0; при n нечетном нет ни max. ни min. (см. черт. 26, 27, 28, 29).



Черт. 28.



Черт. 27.



Черт. 29.

2. Функции двух независимых переменных.

Значения x и y, дающие max. и min. функции $f(x, y)$, удовлетворяют уравнениям $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Если же $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0$, то при $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ меньших 0 имеют max., а при $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ больших 0 — min.

Е. Неопределенные интегралы.

1. Общие правила.

Пояснение: $\int f(x)\,dx = J(x) + C$ означает то же, что и $f(x) = J'(x)$

$d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx$; $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

В формулах 1 до 3 величины u и v суть функции переменной x.

1. $\int a\,du = a\int du = au + C$.

2. $\int (u+v)\,dx = \int u dx + \int v\,dx + C$ (Способ разложения).

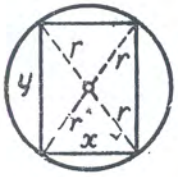
2. Примеры.

1. Из бревна с круглым сечением (радиуса r) нужно приготовить балку прямоугольного сечения с наибольшим моментом сопротивления (черт. 30).

Стороны x и y; $x^2+y^2=(2r)^2=4r^2$; $y^2=4r^2-x^2$.

По теории сопротивления материалов момент сопротивления при прямоугольной форме сечения:

$$W=\frac{1}{6}\,xy^2=\frac{1}{6}\,x(4r^2-x^2);$$



Черт. 30.

на основании 1:

$$\frac{dW}{dx}=\frac{4r^2}{6}-\frac{3}{6}\,x^2=0;\quad x=r\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

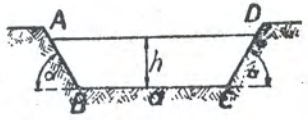
$\frac{d^2W}{dx^2}=0-\frac{3}{6}\cdot 2x$ имеет при $x=r\sqrt{\frac{4}{3}}$ отрицательное значение, следовательно W для $r=r\sqrt{\frac{4}{3}}$ имеет максимум.

2. Канал трапецоидального сечения ω шириной b по дну должен иметь наименьший смоченный периметр x. Какие размеры надо выбрать для h и α (черт. 31)?

$$\omega=\frac{1}{2}\,(b+b+2h\operatorname{ctg}\alpha)\cdot h=ah+h^2\operatorname{ctg}\alpha,$$

смоченный

$$x=b+2\cdot\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{\omega}{h}-h-n=n+\frac{2h}{\sin\alpha}.$$



Черт. 31.

Так как x должен иметь минимум, то должен иметь:

$$\frac{dx}{d\alpha}=0\quad\text{и}\quad\frac{dx}{dh}=0,$$

$$\frac{dx}{d\alpha}=\frac{h}{\sin^2\alpha}-\frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=0,\quad h=0\quad\text{или}\quad\cos\alpha=\frac{1}{2};\quad\alpha=60^\circ;$$

$$\frac{dx}{dh}=-\frac{\omega}{h^2}-\operatorname{ctg}\alpha+\frac{2}{\sin\alpha}=0,\quad\frac{\omega}{h^2}=\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},\quad h=\sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{3}}}.$$

Ж. Формулы для интегрирования.

1. Определение:

$\varphi(x)$ называется интегралом от $f(x)$, если $\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x)$:

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x)+C.$$

Интеграл выражает площадь, ограниченную кривой $y=f(x)$ и осью x-ов. Постоянное интегрирование (C) определяется пограничными условиями.

2. Общие формулы.

Если $\int f(x)\,dx=\varphi(x)$, то имеют место 1—3:

1. $\int f(x+b)\,dx=\varphi(x+b)+C$
2. $\int f(ax)\,dx=\frac{1}{a}\cdot\varphi(ax)+C$
3. $\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\cdot\varphi(ax+b)+C$

Если $f(x)=\varphi'(x)$, т. е. $=\frac{d\varphi(x)}{dx}$, то:

4. $\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx=\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx=\ln\varphi(x)+C$
5. $\int a\cdot f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx+C$ (вынесение вперед постоянного множителя).
6. $\int[\varphi(x)+\psi(x)]\,dx=\int\varphi(x)\,dx+\int\psi(x)\,dx+C$ (интегрирование суммы).
7. $\int u\,dv=uv-\int v\,du+C$ (интегрирование по частям).
8. $\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy+C$, где $x=\varphi(y)$ (способ подстановки).
9. $\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\,dx=\int\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx+C$ (диференцирование под знаком интеграла).

3. Основные интегралы.

1. $\left.\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right\}$ n какое угодно целое или дробное число, за исключением $n=-1$ (см. 2).
2. $\int\frac{dx}{x}=\lg x+C=\ln cx.$
3. $\int e^x\,dx=e^x+C.$
4. $\int a^x\,dx=a^x/\ln a+C.$
5. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C.$
6. $\int\cos x\,dx=\sin x+C.$
7. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C.$
8. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C.$
9. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+c.$
10. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C=-\operatorname{arc\,ctg}x+c.$
11. $\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C.$
12. $\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C.$
13. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th}x+C.$
14. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth}x+C.$
15. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arc\,sh}x+C=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$
16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{arc\,ch}x+C=\lg(x+\sqrt{x^2-1})+C.$

17. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arc\,th} x + C = \frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x} + C =$
$= \operatorname{arc\,cth} x + c = \frac{1}{2}\lg\frac{x+1}{x-1} + c.$

18. $\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{6}\lg\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

19. $\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\lg\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$

4. Интегрирование рациональных функций.

1. Если $R(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ подлежащая интегрированию функция, где, след., $\varphi(x)$ и $f(x)$ являются целыми функциями многочлена, то при степени числителя $\varphi(x)$ не ниже степени знаменателя $f(x)$ — такую дробь сначала разлагают посредством деления $R(x)$ на целую функцию и остаток, являющийся правильной дробной функцией (у которой степень числителя меньше степени знаменателя). Интегрирование целой функции не представляет труда, интегрирование же правильной рациональной функции основывается на разложении на частные дроби. Если

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-m)^\mu,$$

т. е. $a, b \dots m$ различные корни уравнения $f(x) = 0$, причем a есть α-кратный, b — β-кратный ... m — μ-кратный корни, то приемлемо разложение на частные дроби правильной рациональной функции:

$$R(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} +$$
$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)_\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \dots$$
$$\dots + \frac{M_\mu}{(x-m)^\mu} + \frac{M_{\mu-1}}{(x-m)^{\mu-1}} + \dots + \frac{M_1}{x-m}.$$

Для определения постоянных $A_\alpha, A_{\alpha-1} \dots M_1$ правую часть приводят к общему знаменателю $f(x)$ и прибегают к сравнению коэфициентов обеих частей при одинаковых степенях x. Это дает достаточное число уравнений первой степени, из которых находят $A_\alpha, A_{\alpha-1} \dots M_1$.

В случае простых корней ($\alpha = \beta = \dots = \mu = 1$) $A_1, B_1 \dots M_1$ определяются из уравнений

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad B_1 = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad \dots M_1 = \frac{\varphi(m)}{f'(m)}.$$

Корни $a, b \dots m$ могут быть действительными или мнимыми. Если знаменатель $f(x)$ имеет только действительные коэфициенты, то мнимые корни встречаются попарно сопряженными. В этом случае разложение можно представить через частные дроби действительного вида

$$\frac{Mx+N}{(A+2Bx+Cx^2)^p}.$$

Интегрирование правильных рациональных действительно дробных функций приводит, следовательно, к интегралам вида

$$\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \text{ или } \int \frac{Mx+N}{(A+2Bx+Cx^2)^p}\,dx.$$

Первые вновь дают для $\alpha > 1$ рациональные функции, для $\alpha = 1$ логарифмы; вторые — рациональные функции и логарифмы или arcus-тангенсы.

2. Особые интегралы рациональных функций.

1. $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)\,b} + C \quad (n \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C = \frac{1}{b}\ln c(a+bx).$

3. $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C.$

4. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + C.$

5. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C = \operatorname{arc\,th} x + C,$ если $|x| < 1.$

6. $\frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + C = -\operatorname{arc\,cth} x + C,$ если $|x| > 1.$

7. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C,$ если $ab > 0.$

8. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx} + C =$
$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,cth}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C,$ если $ab > 0.$

9. $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arc\,tg}\frac{b+cx}{\sqrt{\Delta}} + C,$ если $\Delta > 0.$

$\Delta = ac - b^2 = \frac{1}{2\sqrt{-\Delta}}\ln\frac{\sqrt{-\Delta}-b-cx}{\sqrt{-\Delta}+b+cx} + C =$
$= -\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arc\,th}\frac{b+cx}{\sqrt{-\Delta}} + C,$ } если $-\Delta > 0.$

$\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = -\frac{1}{b+cx} + C,$ если $\Delta = 0.$

10. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{\beta}{2c}\ln(a+2bx+cx^2) + \frac{2c\alpha-\beta b}{c}\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}.$

11. $\int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^p} = \frac{1}{2(ac-b^2)(p-1)} \cdot \frac{b+cx}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}} +$
$+ \frac{(2p-3)\,c}{2(ac-b^2)(p-1)} \cdot \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}}.$

12. $$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{(a+2bx+cx^2)^p} = -\frac{\beta}{2c(p-1)} \cdot \frac{1}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}} + \frac{ac-\beta b}{c} \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^p}.$$

13. $$\int x^{m-1}(a+bx)^n dx = \frac{x^{m-1}(a+bx)^{n+1}}{(m+n)\,b} - \frac{(m-1)\,a}{(m+n)\,b} \int x^{m-2}(a+bx)^n\,dx = \frac{x^m(a+bx)^n}{m+n} + \frac{na}{m+n} \int x^{m-1}(a+bx)^{n-1}\,dx.$$

5. Интегралы некоторых иррациональных функций.

1. $$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}(\sqrt{a+bx})^3 + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C.$$

3. $$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{3b^2}(3\alpha b - 2a\beta + \beta bx)\sqrt{a+bx} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx}}$ с помощью подстановки $y = \sqrt{a+bx}$ приводится к виду с 7 или 8 (стр. 66).

5. $\int \frac{f(x, \sqrt[n]{a+\alpha x})}{\varphi(x, \sqrt[n]{a+bx})}\,dx$, где f и φ означают целые функции. Подставляем $\sqrt[n]{a+bx} = y$.

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C' = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + c.$$

7. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{-x+\sqrt{a^2+x^2}} + C' = \arcsin\frac{x}{a} + C''.$$

В следующих формулах подставлено $\sqrt{a+2bx+cx^2} = X$.

8. $$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln(b+cx-\sqrt{c}X) + C, \quad \text{если } c>0;$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,sh}\frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} + C, \quad \text{если } ac-b^2>0;$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,ch}\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C, \quad \text{если } b^2-ac>0;$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arc\,sh}\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C, \quad \text{если } c<0.$$

9. $$\int \frac{(\alpha+\beta x)dx}{X} = \frac{\beta}{c}X + \frac{ac-\beta b}{c}\int \frac{dx}{X} + C.$$

10. $$\int \frac{x^m dx}{X} = \frac{x^{m-1}X}{mc} - \frac{(m-1)a}{mc}\int \frac{x^{m-2}dx}{X} - \frac{(2m-1)\,b}{mc}\int \frac{x^{m-1}dx}{X}.$$

11. $$\int \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{X}\,dx = (A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots A_{n-1}\cdot x^{n-1})\,X + A\int \frac{dx}{X},$$

где постоянные A_0, A_1, $A_2 \ldots A_{n-1}$ и A определяются диференцированием и сравнением коэфициентов.

12. $$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C'.$$

13. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

14. $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}\,\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + C'.$$

15. $$\int X dx = \frac{b+cx}{2c}X + \frac{ac-b^2}{2c}\int \frac{dx}{X} + C.$$

16. $\int \frac{dx}{(x-a)^p X}$ подстановкой $\frac{1}{x-a} = y$ приводится к виду 10 (см. выше).

17. $\int \frac{A+Bx}{\alpha+2\beta x+\gamma x^2}\frac{dx}{X}$, подстановкой $x = \frac{py+q}{y+1}$, если p и q определить из уравнений

$$\gamma pq + \beta(p+q) + \alpha = 0 \text{ и } cpq + b(p+q) + a = 0$$

и положить затем $y^2 = z$, разбивается на два интеграла

$$\int \frac{dz}{(a_1+\gamma_1 z)\sqrt{a_1+c_1 z}} \text{ и } \int \frac{dz}{(a_2+\gamma_2 z)\sqrt{a_1 z + c_1 z^2}},$$

которые определяются по 4 и 16 (см. выше).

18. Для определения $\int \frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{X}$ разлагают $\frac{f(x)}{F(x)}$ на частные дроби (выделив в случае надобности целую функцию) и интегрирование производят по формуле 16; а если имеются мнимые дроби, то, соединив их, интегрирование производим по формуле 17.

19. $$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{X^3} = \frac{(a\beta-b\alpha)+(b\beta-c\alpha)x}{(b^2-ac)X} + C.$$

6. Некоторые интегралы трансцендентных функций.

1. $\int x^n e^x dx = e^x (x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - + \ldots + (-1)^n n!)$.
2. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$.
3. $\int (\ln x)^n dx = \int y^n e^y dy$ для $y = \ln x$.
4. $\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \quad (n \neq -1)$.

4a. $\int \frac{1}{x} \ln x\, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$.

5. $\int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.

5a. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln (\ln x) + C$.

6. $\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C$.

7. $\int \cos^2 x dx + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C$.

8. $\int \sin mx\, dx = -\frac{\cos mx}{m} + C$.

9. $\int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m} + C$.

10. $\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n)$

11. $\int \sin mx \sin nx dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + C \quad (m \neq n)$.

12. $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + C \quad (m \neq n)$.

13. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$.

14. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$.

15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$.

15a. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = -2 \operatorname{arc\,th} (e^x) + C$.

16. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$.

16a. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{arc\,tg} (e^x) + C$.

17. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$.

18. $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C$.

19. $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$.

20. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x + C$.

21*. $\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$.

22*. $\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$.

* Если n нечетное число, то рекомендуется применить подстановку $\cos x = z$ или $\sin x = z$.

23. $\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx$.

24. $\int \operatorname{ctg}^n x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx$.

25. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$.

26. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$.

27*. $\int \sin^p x \cos^q x dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p x \cos^{q-2} x dx =$

$= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \int \sin^{p-2} x \cos^q x dx$.

28*. $\int \sin^{-p} x \cos^q x dx = -\frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} + \frac{p-q-2}{p-1} \int \sin^{-p+2} x \cos^q x dx$.

29*. $\int \sin^p x \cos^{-q} x dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+1} x}{q-1} + \frac{q-p-2}{q-1} \int \sin^p x \cos^{-q+2} x dx$.

29a. $\int x^m \sin x dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x dx$.

29b. $\int x^m \cos x dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x dx$.

30. $\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right) + C$, если $a^2 > b^2$

$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} + C$

$= \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arc\,th} \left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right) + C$.

} если $a^2 < b$

31. $\int \frac{\cos x dx}{a + b \cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b \cos x} + C$.

32. $\int \frac{\sin x dx}{a + b \cos x} = -\frac{1}{b} \ln (a + b \cos x) + C$.

33. $\int \frac{A + B \cos x + C \sin x}{a + b \cos x + c \sin x} dx = A \int \frac{d\varphi}{a + p \cos \varphi} +$

$+ (B \cos \alpha + C \sin \alpha) \int \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{a + p \cos \varphi} - (B \sin \alpha - C \cos \alpha) \int \frac{\sin \varphi\, d\varphi}{a + p \cos \varphi}$,

если принять $b = p \cos \alpha$, $c = p \sin \alpha$ и $x - \alpha = \varphi$.

34. $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$.

* Если p или q нечетные положительные числа, то рекомендуется применить подстановку $\cos x = z$ или $\sin x = z$.

35. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$

36. $\int \operatorname{arc\,sin} x\,dx = x\operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} + C.$

37. $\int \operatorname{arc\,cos} x\,dx = x\operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2} + C.$

38. $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

39. $\int \operatorname{arc\,ctg} x\,dx = x\operatorname{arc\,ctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

В следующих интегралах R означает рациональную функцию.

40. $\int R(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)\,dx$. Если положить $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$,

$$dx = 2dt:(1+t^2),\quad \sin x = 2t:(1+t^2),\quad \cos x = (1-t^2):(1+t^2)$$

$\operatorname{tg} x = 2t:(1-t^2)$, $\operatorname{ctg} x = (1-t^2):2t$, то интеграл переходит в таковой рациональной функции от t.

41. $\int R(e^x)\,dx$; подставим $e^x = t$, $dx = dt:t$.

42. $\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ \operatorname{th} x,\ \operatorname{cth} x)\,dx$ заключается в 41.

Гиперболические функции можно рассматривать как круговые функции с мнимыми аргументами и интегрировать по 40.

7. Определенные интегралы.

Определение:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{\lambda=1}^{n} f(\xi_\lambda)\delta_\lambda;$$

здесь пределы интегрируемости надо разделить на n любых частей $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$, так, чтобы $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n = b-a$; ξ_λ — любое значение x в пределах δ_λ, lim надо брать для $n\to\infty$ и всех $\delta_\lambda \to 0$.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(u)\,du.$$

Средние значения: ξ — значение в промежутке от a до b, $\xi = a+\vartheta(b-a)$, $0<\vartheta<1$.

a) $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ (арифметическое среднее)

b) $f(\xi) = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^2\,dx}$ (квадратное среднее)

c) $f(\xi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx : \int_a^b \varphi(x)\,dx$, если $\varphi(x)$ непрерывна и в промежутке от a до b не меняет своего знака (первая теорема среднего значения в интегральном исчислении).

1. $\int_a^b = -\int_b^a \qquad \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c \qquad \int_a^c - \int_a^b = \int_b^c,$

причем везде $f(x)\,dx$ надо дополнить.

2. $\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}.$

3. $\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{a+bx^2} = \int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}.$

4. $\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}.$

5. $\int_0^{\pi} \ln\cos x\,dx = \int_0^{\pi} \ln\sin x\,dx = -\pi\ln 2.$

6. $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, при $b>0$.

7. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}x\,dx = \frac{2\cdot4\cdot6\ \ldots 2n}{3\cdot5\cdot7\ldots(2n+1)}$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}x\,dx = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots 2r}\cdot\frac{\pi}{2}$

$n>0$, целое.

10. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$

11. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$

12. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}\ a>0,\quad n=1,\ 2.\ 3\ldots$

13. $\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin n\pi},\quad$ при $0<n<1.$

14. $\int_0^\pi \ln(1 \pm 2a\cos x + a^2)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{при } 0<a<1 \\ 2\pi\ln a, & \text{„ } a<1. \end{cases}$

8. Некоторые интегралы, не сводящиеся к элементарным функциям. Интегрирование посредством разложения в ряды.

Если $f(x)$ разлагается в сходящийся степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

то в пределах этой сходимости имеет место

$$\int f(x)\,dx = A + a_0\,x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\frac{a_3}{4}x^4+\ldots$$

1. Интеграл-синус:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{5!}-+\ldots,\quad |x|<\infty.$$

2. Интеграл-логарифм:

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = C+\ln|\ln x|+\ln x+\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{2!}+\frac{1}{3}\frac{(\ln x)^3}{3!}+\ldots,\quad 0<x<\infty,$$

где $C=0{,}577\,215\,665$ (постоянная Эйлера).

3. Интеграл вероятности появления ошибки Гаусса:

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ \Phi(x)=\frac{x}{1}-\frac{1}{1!}\ \frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5}-+\ldots,\quad |x|<\infty$$

4. Функция Гамма или Π-функция Гаусса:

$$\Gamma(x+1)=\Pi(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt.$$

$$\Pi(n)=n!\ (n>0,\ \text{целое}),\quad \Pi(x)=x\,\Pi(x-1),$$

$$\Pi(x-1)\cdot\Pi(-x)=\pi:\sin\pi x$$

$$\Pi(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,x^x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

$$1:\Pi(x)=e^{Cx}\cdot\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{\frac{x}{3}}\cdot\ .$$

(Произведение Вейерштрасса)

$$\ln\Pi(x)=-Cx+\frac{1}{2}S_2x^2-\frac{1}{3}S_3x^3+\frac{1}{4}S_4x^4-+\ldots\ |x|<1.$$

Здесь C постоянная Эйлера (2) и

$$S_\lambda=\frac{1}{1^\lambda}+\frac{1}{2^\lambda}+\frac{1}{3^\lambda}+\ldots\ (\lambda=2,\ 3,\ 4\ldots)$$

$$S_2=\frac{\pi^2}{6}=1{,}644\,93;\ S_3=1{,}202\,06;\ S_4=\frac{\pi^4}{90}=1{,}082\,32;\ S_5=1{,}036\,93\ldots$$

5. Эллиптические интегралы и функции. Эллиптический интеграл имеет вид

$$\int R(x,\sqrt{f(x)})\,dx,$$

где R – рациональная функция $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ — целая функция 3 или 4-й степени. Простейшими эллиптическими интегралами являются:

I. вид $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi,k)$

II. вид $\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(\varphi,k).$

(Нормальные формы Legendre-Jacobi).

При этом $x=\sin\varphi$; k называется „модулем“ интеграла.

„Полные интегралы“ суть

$$K=F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right) \qquad E=E\left(\frac{\pi}{2},\ k\right)$$

$$K'=F\left(\frac{\pi}{2},\ \sqrt{1-k^2}\right) \qquad E'=E\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{1-k^2}\right).$$

$$KE' + EK' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ldots\right]$$

$$E = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right] \quad k^2 < 1$$

Обратная функция от $u = F(\varphi, k)$ обозначается $\varphi = \operatorname{am} u$ (амплитуда). Имеем:

$$x = \sin\operatorname{am} u = \operatorname{sn} u = u - (1 + k^2)\frac{u^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4)\frac{u^5}{5!} - + \ldots$$

$$\cos\operatorname{am} u = \operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1 + 4k^2)\frac{u^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\frac{u^6}{6!} + - \ldots$$

$$\sqrt{1 - k^2x^2} = \Delta\operatorname{am} u = \operatorname{dn} u = 1 - k^2\frac{u^2}{2!} + k^2(4 + k^2)\frac{u^4}{4!}$$

$$- k^2(16 + 44k^2 + k^4)\frac{u^6}{6!} + - \ldots$$

Нормальная форма Вейерштрасса для интеграла вида 1:

$$u = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} \quad (g_2, g_3 \text{ данные постоянные}),$$

а обратная функция:

$$s = \rho\, u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \frac{g_2^2}{1200}u^6 + \frac{3g_2g_3}{6160}u^8 + \ldots$$

9. Приближенное вычисление определенных интегралов.

Предел интегрирования $(a \ldots b)$ делим на n равных частей $\frac{b-a}{n} = h$, $x\lambda = a + \lambda h$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots n)$, следовательно $x_0 = a$, $x_n = b$, далее предполагаем $y\lambda = f(x\lambda)$. Если $f(x)$ $2r$-раз непрерывно диференцируема, то приемлема формула Эйлеровского ряда

$$1.\quad \int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

$$- B_2\frac{h^2}{2!}[f'(b) - f'(a)] - B_4\frac{h^4}{4!}[f'''(b) - f'''(a)] - \ldots$$

$$- B_{2r-2}\frac{h^{2r-2}}{(2r-2)!}[f^{(2r-3)}(b) - f^{(2r-3)}(a)] + R,$$

где

$$R = -B_{2r}\cdot n\frac{h^{2r+1}}{(2r)!}f^{(2r)}(\xi), \quad \xi = a + \vartheta(b-a), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Здесь B_1, B_2, B_3, ... так наз. Бернуллиевы числа.
Для $r = 2$ имеем:

$$2.\quad \int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

$$- \frac{1}{12}h^2[f'(b) - f'(a)] + R, \quad R = \frac{1}{720}\cdot\frac{(b-a)^5}{n^4}f^{(4)}(\xi).$$

3. Правило Симпсона:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n) + R,$$

$$R = -\frac{1}{2880}\cdot\frac{(b-a)^5}{n^4}f^{(4)}(\xi).$$

n должно быть четное число. Для $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ правило Симпсона оказывается точным без последнего (остаточного) члена R, вследствие $f^{(4)}(x) = 0$.

4. Формула Гаусса для квадратуры. Из нижеприведенной таблицы берем для определенного значения n значения t_1, t_2 ... t_n и A_1, A_2 ... A_n, затем подсчитываем $Y_\lambda = f[a + (b-a)\,t_\lambda]$, $(\lambda = 1, 2 \ldots n)$; тогда имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)(A_1Y_1 + A_2Y_2 + \ldots + A_nY_n) + R,$$

где

$$R = \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[\frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}\right]^2 f^{(2n)}(\xi),$$

при

$$\xi = a + \vartheta(b-a), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Числовые значения для формулы Гаусса для квадратуры

n	t	A	n	t	A
1	$t_1 = 0.5$	$A_1 = 1$	5	$t_1 = 0{,}04691$	$A_1 = 0{,}11846$
				$t_2 = 0{,}23077$	$A_2 = 0{,}23931$
2	$t_1 = 0{,}21132$	$A_1 = 1/2$		$t_3 = 0{,}5$	$A_3 = 0{,}28444$
	$t_2 = 0{,}78868$	$A_2 = 1/2$		$t_4 = 0{,}76923$	$A_4 = 0{,}23931$
3	$t_1 = 0{,}11270$	$A_1 = 5/18$		$t_5 = 0{,}95309$	$A_5 = 0{,}11846$
	$t_2 = 0{,}5$	$A_2 = 4/9$	6	$t_1 = 0{,}03377$	$A_1 = 0{,}08566$
	$t_3 = 0{,}88730$	$A_3 = 5/18$		$t_2 = 0{,}16940$	$A_2 = 0{,}18033$
4	$t_1 = 0{,}06943$	$A_1 = 0{,}17393$		$t_3 = 0{,}38069$	$A_3 = 0{,}23396$
	$t_2 = 0{,}33001$	$A_2 = 0{,}32607$		$t_4 = 0{,}61931$	$A_4 = 0{,}23396$
	$t_3 = 0{,}66999$	$A_3 = 0{,}32607$		$t_5 = 0{,}83060$	$A_5 = 0{,}18038$
	$t_4 = 0{,}93057$	$A_4 = 0{,}17393$		$t_6 = 0{,}96623$	$A_6 = 0{,}08566$

Здесь $t_1, t_2 \dots t_n$ являются корнями уравнения $[(t-1)^n]^{(n)} = 0$, тогда как

$$A_\lambda = \int_0^1 \frac{(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_{\lambda-1})(t-t_{\lambda+1})\dots(t-t_n)}{(t_\lambda-t_1)(t_\lambda-t_2)\dots(t_\lambda-t_{\lambda-1})(t_\lambda-t_{\lambda+1})\dots(t_\lambda-t_n)}\,dt.$$

Остаточный член во всех этих формулах служит для оценки погрешности, практически однако остается без употребления.

10. Криволинейные интегралы, кратные интегралы.

1. Пусть $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ три непрерывные функции координат точки в пространстве; далее имеем три дифференцируемых функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ для $a \leqq t \leqq b$, каковыми определяется в пространстве отрезок кривой $AB=(\mathfrak{C})$.

Определение криволинейного интеграла:

$$\int_{A(\mathfrak{C})}^{B} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int_{t=a}^{b} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)]\,dt; \qquad (1)$$

при этом в P, Q, R должны быть подставлены $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вместо x, y, z. Криволинейный интеграл, помимо подлежащего интегрированию дифференциального выражения $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ и пределов, зависит еще от пути интегрирования $(\mathfrak{C})$.

Если

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

т. е. $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является полным дифференциалом $d\varphi$ (стр. 58 и 59), то

$$\int_A^B (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \varphi_b - \varphi_a \qquad (2)$$

при постоянных конечных точках A и B не зависит от пути интегрирования; φ есть соответствующий потенциал, имеющий определенное значение, за исключением одного коэфициента. То же действительно и для $\int (P\,dx + Q\,dy)$; надо лишь принять $z=0$, $R=0$.

2. Двойной интеграл. Пусть $f(x,y)$ непрерывна в области ограниченной замкнутой плоской кривой $\mathfrak{B}$, тогда

$$\iint_{(\mathfrak{R})} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_1}^{a_2}\left[\int_{a_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx = \int_{b_1}^{b_2}\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy. \qquad (3)$$

Здесь a_1 наименьшее, a_2 наибольшее значение x; b_1 наименьшее, b_2 наибольшее значение y для краевых точек; $y=y_1(x)$ есть уравнение кривой $A_1B_1A_2$, $y=y_2(x)$ — кривой $A_1B_2A_2$, $x=x_1(y)$ — кривой $B_1A_1B_2$, $x=x_2(y)$ — кривой $B_1A_2B_2$ (см. черт. 32).

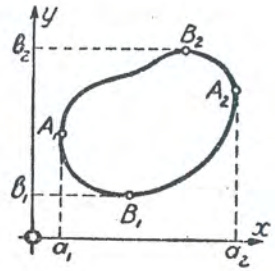
3. Формула Dirichlet:

$$\int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=a}^{x} f(x,y)\,dy\right]dx = \int_{y=a}^{b}\left[\int_{x=y}^{b} f(x,y)\,dx\right]dy.$$

4. Тройной интеграл, распространенный на часть объема $(\mathfrak{R})$, соответственно подсчитывается:

$$\iiint_{(\mathfrak{R})} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{z=c_1}^{c_2}\left[\int_{y=y_1(z)}^{y_2(z)}\left(\int_{x=x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right)dy\right]dz.$$

Здесь c_1, c_2 крайние значения z; $y_1(z)$, $y_2(z)$ — крайние значения y на высоте z; $x_1(y,z)$, $x_2(y,z)$ — крайние значения x на параллели к оси x при постоянных y и z. Интегрирование можно производить также и при другом порядке переменных, если выбрать соответствующие пределы.



Черт. 32.

5. Замечание: в $\iint f(x,y)\,dxdy$ последняя часть, $dx\,dy$, означает элемент площади do данной плоскости; применяя вместо прямолинейных координат другую, например полярную систему координат r, φ, надо для do подставить соответствующее выражение элемента площади (здесь $r\,dr\,d\varphi$, стр. 106).

В $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, последняя часть, $dx\,dy\,dz$, означает объемный элемент dV пространства; применяя вместо пространственных координат x, y, z другие, например цилиндрические координаты, надо для dV подставить соответствующее выражение объемного элемента (стр. 120 и след.).

6. Теоремы Стокса и Гаусса, а также формулу Green'a см. в гл. „Векториальный анализ“ стр. 112 и след.

7. Дифференцирование интеграла по параметру α.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial\alpha}\,dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}.$$

Если пределы a и b постоянны, то в правой части отпадают оба последних члена.

8. Относительно графических методов интегрирования и применения математических измерительных приборов см. в главе „Практическая математика“ стр. 139 и след.

3. Дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение есть уравнение между x и y, в которое кроме этих обоих переменных входят также производные от y по x. Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной, в него входящей. Дифференциальное уравнение называется линейным уравнением первого порядка, если неизвестная функция и ее производная входят только в первых степенях и не перемножаются.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

1. Нормальный вид: $M\cdot dx + N\cdot dy = 0$; если M и N — функции соответственно от x и от y, то решение:

$$\int M\cdot dx + \int N\cdot dy = \text{Const.}$$

Пример:

$$ax^2(1+y) + \frac{dy}{dx} = 0; \quad ax^2\cdot dx + \frac{1}{1+y}\,dy = 0. \quad \frac{ax^3}{3} + \ln(1+y) = \text{Const.}$$

2. Общий вид: $f(x)\cdot F(y)\,dx + \varphi(x)\cdot\psi(y)\cdot dy = 0$.

Решение посредством отделения переменных:

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx + \int \frac{\psi(y)}{F(y)}\,dy = \text{Const.}$$

Пример:

$$(a+x)(b+y) + (a-x)(b-y)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad \int \frac{a+x}{a-x}\,dx + \int \frac{b-y}{b+y}\,dy = \text{Const.}$$

3. Однородные дифференциальные уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

В нормальной форме M и N должны быть однородными функциями x и y одного измерения.

Решение посредством подстановки $y = tx$, $dy = x\,dt + t\,dx$.

Пример:

$$x + y\frac{dy}{dx} = 2y.$$

Решение:

$$y = x\cdot t \text{ и } dy = x\,dt + t\,dx; \quad x + xt\cdot\left(x\frac{dt}{dx} + t\right) = 2xt, \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{2t-1}{t} - t,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-dt\cdot t}{t^2+1-2t}, \quad \ln x = -\int \frac{t\,dt}{(t-1)^2} + C = -\frac{1}{2}\ln(t-1)^2 - \int \frac{dt}{(t-1)^2} + C =$$

$$= -\ln(t-1) + \frac{1}{t-1} + C, \quad \ln[x\cdot(t-1)] = \frac{1}{t-1} + C, \quad \ln(y-x) = \frac{x}{y-x} + C,$$

$$y - x = e^{\frac{x}{y-x}} + C.$$

3a. Уравнения вида:

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$$

приводятся к случаю 3 заменой $x = v + m$, $y = w + n$, причем m и n выбираются так, чтобы пол чилось однородное уравнение.

Пример:

$$(3y - 7x + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0.$$

Решение:

$$x = v + m, \quad y = w + n, \quad dx = dv, \quad dy = dw,$$

$$(3w + 3n - 7v - 7m + 7)\,dv + (7w + 7n - 3v - 3m + 3)\,dw = 0;$$

выбираем m и n так, чтобы

$$3n - 7m + 7 = 0 \quad \text{и} \quad 7n - 3m + 3 = 0,$$

т. е.

$$m = 1, \quad n = 0$$

теперь уравнение принимает вид:

$$(3w - 7v)\,dv + (7w - 3v)\,dw = 0.$$

4. Линейные дифференциальные уравнения общего и особого вида.

Общая форма:

$$\frac{dy}{dx} + My = N,$$

где M и N — любые функции только от x. Подставляют для краткости

$$\int M\,dx = J,$$

тогда решение общего уравнения:

$$y = e^{-J}\left(\int N\cdot e^{J}\,dx + C\right),$$

C — постоянная интегрирования.

Особые случаи как примеры:

4a. $\frac{dy}{dx} - ay = 0$, $M = \text{Const} = -a$, $N = 0$.

Решение на основании 4:

$$J = \int M\,dx = -\int a\,dx = -ax, \quad y = e^{ax}(0 + C) = C\cdot e^{ax}$$

4b. $\frac{dy}{dx} - 2axy - bx^3 = 0$, $M = -2ax$, $N = +bx^3$,

$$J = \int M\,dx = -2a\int x\,dx = -ax^2; \quad y = e^{ax^2}\left(\int bx^3e^{-ax^2}\,dx + C\right)$$

$$y = e^{ax^2}\left[-\frac{b}{2a}\left(x^2 + \frac{1}{a}\right)e^{-ax^2} + C\right] = -\frac{b}{2a}\left(x^2 + \frac{1}{a}\right) + C\cdot e^{ax^2}.$$

2. Дифференциальные уравнения второго порядка.

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)$. Решение посредством двукратного последовательного интегрирования.

Пример:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ax + \frac{b}{x} + c,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax^2}{2} + b\ln x + cx + C_1, \quad y = \frac{ax^3}{6} + bx(\ln x - 1) + \frac{cx^2}{2} + C_1x + C_2.$$

6. $\frac{d^2y}{dx^2} = \psi(y)$.

Умножают на $2\frac{dy}{dx}\cdot dx = 2dy$, — тогда левая часть уравнения

$$2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx = 2\psi(y)\,dy$$

представляет собой диференциал от $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; интегрирование даст:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int \phi(y)\,dy + C_1.$$

Получают следующее диференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int \phi(y)\,dy + C_1}$$

и отсюда

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int \phi(y)\,dy + C_1}} + C_2.$$

Пример:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay + b, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int (ay+b)\,dy + C_1 = ay^2 + 2by + C_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{ay^2 + 2by + C_1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + 2by + C_1}} = dx,$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{b}{a} + y + \sqrt{y^2 + 2\frac{b}{a}y + \frac{C_1}{a}}\right) + C_2.$$

7. Уравнения вида $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$, в которые неизвестная функция входит только своими производными, посредством подстановки

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$$

приводятся к уравнению первого порядка.

Пример:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Если положить

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx},$$

то

$$\frac{dz}{dx} - 4z = e^x.$$

Это линейное уравнение решается на основании приема п. 4:

$$z = -\frac{1}{3}e^x + C_1 \cdot e^{4x} = \frac{dy}{dx}, \quad y = -\frac{1}{3}e^x + \frac{1}{4}C_1 \cdot e^{4x} + C_2.$$

8. Если $\frac{d^2y}{dx^2}$ дана как функция $\frac{dy}{dx}$ и y, то, приняв y за независимое переменное, вводят подстановку:

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = z \cdot \frac{dz}{dy}.$$

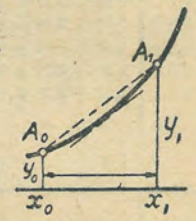
3. Приближенное решение диференциальных уравнений первого порядка.

Дано диференциальное уравнение $F\left(\frac{dy}{dx}, x, y\right) = 0$; соответствующая ему интегральная кривая проходит через точку $A_0(x_0, y_0)$. Определяют эту интегральную кривую по точкам, исходя из следующих соображений (черт. 33): приближенно вычисляют ординату y_1 точки A_1 ближайшей к A:

$$y_1 = y_0 + dx \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right).$$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)$ определяется из диференциального уравнения, если туда подставить x_0 и y_0; теперь находят y_1, соответствующее $x_1 = x_0 + dx$, и вычисляют значение производной в A_1. Взяв среднее значение обеих производных, получают более точное значение y_1 и т. д. Геометрическое значение употребления средней арифметической видно из черт. 33. Этот прием особенно прост и точен для уравнений вида

$$f\left(\frac{dy}{dx}, x\right) = 0.$$



Черт. 33.

Далее приведены два легко интегрируемые и дающие простое числовое решение примера с целью сделать возможным исследование достигнутой точности.

1. Пример:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x; \quad \text{для } x = 0 \text{ пусть } y = C.$$

Приняв $dx = \frac{1}{10}$, получаем $dy = 0{,}2x$. Все остальное дает таблица 1.

Интегральная кривая: $y = C + x^2$; с помощью средней арифметической получается точное значение.

2. Пример:

$$x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2 + y^2}\,dx = 0,$$

или

$$dy = \left[\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right] dx;$$

пусть $y = 0$ для $x = C = 1$.

Снов принимаем $dx = 0{,}1$; дальнейшее ясно из приложенной таблицы.

Уравнение интегральной кривой:

$$x^2 = C^2 + 2Cy$$

а при $C = 1$

$$y = \frac{x^2 - 1}{2};$$

найденные отсюда значения y приложены в таблице 2 (стр. 82).

Таблица 1

x	dy	1-е значение y	Среднее от dy	Более точное y
0	0	c		c
0,1	0,02	$c + 0{,}02$	0,01	$c + 0{,}01$
0,2	0,04	$c + 0{,}06$	0,03	$c + 0{,}04$
0,3	0,06	$c + 0{,}12$	0,05	$c + 0{,}09$
0,4	0,08	$c + 0{,}20$	0,07	$c + 0{,}16$
0,5	0,10	$c + 0{,}30$	0,09	$c + 0{,}25$
0,6	0,12	$c + 0{,}42$	0,11	$c + 0{,}36$
0,7	0,14	$c + 0{,}56$	0,13	$c + 0{,}49$
0,8	0,16	$c + 0{,}72$	0,15	$c + 0{,}64$
0,9	0,18	$c + 0{,}90$	0,17	$c + 0{,}81$
1,0	0,20	$c + 1{,}10$	0,19	$c + 1{,}00$

Таблица 2

x	$y_0 + dy = y_1$	1-е значение $dy = dy_0$	Среднее от dy_0 и dy_1	1-е уточнение y
1,0	0,00	(1.0) $dx = 0,1000$		0
1,1	$0 + 0,100 = 0,10$	$(0,091 + \sqrt{1.0083})\ dx = 0,1095$	0,1055	0,105
1,2	$0,1 + 0,11 = 0,21$	$(0,175 + \sqrt{1.0306})\ dx = 0,1190$	0,115	0,220
1,3	$0,21 + 0,12 = 0,33$	$(0,254 + \sqrt{1.0645})\ dx = 0,1287$	0,124	0,344
1,4	$0,33 + 0,13 = 0,46$	$(0,329 + \sqrt{1.1082})\ dx = 0,1382$	0,1335	0,478
1,5	$0,46 + 0,14 = 0,60$	$(0,400 + \sqrt{1.1600})\ dx = 0,1473$	0,1425	0,621
1,6	$0,60 + 0,15 = 0,75$	$(0,468 + \sqrt{1.219})\ dx = 0,1572$	0,1522	0,773
1,7	$0,75 + 0,16 = 0,91$	$(0,530 + \sqrt{1,281})\ dx = 0,1662$	0,1622	0,935
1,8	$0,91 + 0,17 = 1,08$	$(0,593 + \sqrt{1,3416})\ dx = 0,1758$	0,1710	1,106
1,9	$1,08 + 0,18 = 1,26$	$(0,655 + \sqrt{1.423})\ dx = 0,1850$	0,1804	1,286
2,0	$1,26 + 0,19 = 1,43$	$(0,714 + \sqrt{1,51})\ dx = 0,1941$	0,1897	1,476
2,1	$1,43 + 0,20 = 1,63$	и т. д.	0,1990	1,675

x	2-е значение dy	Среднее от dy	2-е уточнение y	Точное значение
1,0	(1.0) $dx = 0,100$	0,105	0	0
1,1	$(0,095 + \sqrt{1,009})\ dx = 0,110$	0,1150	0,105	0,105
1,2	$(0,184 + \sqrt{1,0338})\ dx = 0,1200$	0,1250	0,220	0,220
1,3	$(0,264 + \sqrt{1,0697})\ dx = 0,1298$	0,1350	0,345	0,345
1,4	$(0,342 + \sqrt{1.117}\ \ dx = 0,1400$	0,1449	0,480	0,480
1,5	$(0,414 + \sqrt{1.1714})\ dx = 0,1497$	0,1546	0,6249	0,625
1,6	$(0,484 + \sqrt{1.234})\ dx = 0,1595$	0,1643	0,7795	0,780
1,7	$(0,550 + \sqrt{1,025})\ dx = 0,1691$	0,1740	0,9438	0,945
1,8	$(0,615 + \sqrt{1,378})\ dx = 0,1789$	0,1838	1,1178	1,120
1,9	$(0,678 + \sqrt{1,4597})\ dx = 0,1887$	0,1935	1,3016	1,305
2,0	$(0,739 + \sqrt{1,546})\ dx = 0,1983$	0,2031	1,4951	1,500
2,1	и т. д.		1,6986	1,705

VI. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.

(Если не сделано особого указания, то формулы относятся к прямоугольной системе координат.)

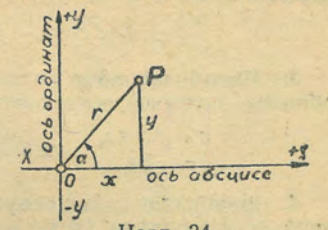
A. Точка.

Положение точки P (черт. 34) относительно плоской системы координат определяется при прямолинейных координатах двумя отрезками x и y, абсциссой и ординатой; при полярных координатах — отрезком r (радиус-вектор) и углом α (полярный угол или амплитуда*). Эти величины в аналитической геометрии выражаются числами, а самые геометрические соотношения алгебраическими уравнениями между этими числами.

1. Расстояние s между двумя точками (A_1 и A_2):

$$A_1(x_1, y_1);\quad A_2(x_2, y_2);$$

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Черт. 34.

2. Угол наклона прямой (A_1A_2) к оси x-ов:

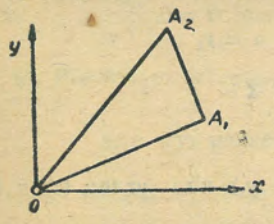
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\quad \cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{s},\quad \sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{s}.$$

3. Площадь (F) треугольника (OA_1A_2) (черт. 35):

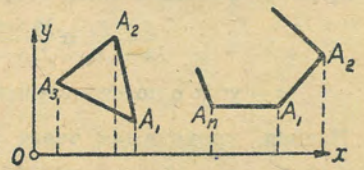
$$2F = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

4. Площадь (F) треугольника ($A_1A_2A_3$) (черт. 36):

$$2F = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3.$$



Черт. 35.



Черт. 36.

5. Площадь (F) n-угольника ($A_1A_2 \ldots A_n$) (черт. 36):

$$2F = y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \ldots + y_n(x_{n-1} - x_1).$$

(Ордината каждой вершины умножается на разность абсцисс соседних вершин.)

Изменение системы координат; преобразование координат.

Координаты точки P в старой системе; x, y, в новой: x', y'.

1. Параллельное перенесение осей; a, b — координаты нового начала:

$$x = a + x',\quad y = b + y'.$$

* Положительное вращение: от положительного направления оси x-ов к положительному направлению оси y-ов (против часовой стрелки).

2. Вращение; α — угол между старым и новым положительными направлениями оси x-ов, полученный вращением против часовой стрелки.

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

3. Преобразование прямоугольных координат в полярные и обратно (полярной осью служит ось x-ов). См. В 18, стр. 86.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha, \\ y &= r\sin\alpha, \end{aligned} \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

4. Преобразование косоугольных прямолинейных координат в полярные и обратно (полярной осью служит ось x-ов; ω — координатный угол прямолинейной системы координат).

$$x = \frac{r\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}, \quad y = \frac{r\sin\alpha}{\sin\omega}, \quad \cos\alpha = \frac{x + y\cos\omega}{r},$$

$$\sin\alpha = \frac{y\sin\omega}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\omega}.$$

Б. Прямая линия.

Всякое уравнение первой степени с двумя переменными определяет прямую, если оба этих переменных рассматривать как координаты точки.

1. Общий вид: $Ax + By + C = 0$; сокращенно: $G = 0$.

2. Прямая, проходящая через точки x_1y_1 и x_2y_2:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \mu = \operatorname{tg}\alpha.$$

α — угол с положительным направлением оси x-ов.

3. Прямая, проходящая через точку (x_1y_1) **под углом** (α) **к оси** x**-ов:**

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \mu = \operatorname{tg}\alpha.$$

4. Прямая, отсекающая на осях координат отрезки ($x = a$ и $y = b$):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

5. Прямая, отсекающая на оси y**-ов отрезок** $(y = b)$ **и образующая угол** α **с осью** x**-ов:**

$$y = x\operatorname{tg}\alpha + b = \mu x + b.$$

6. Нормальное уравнение прямой:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - d = 0;$$

кратко:

$$g = 0$$

(d — длина перпендикуляра из начала координат на прямую, φ — угол наклона этого перпендикуляра к оси x-ов (см. также черт. 37).

7. Существуют следующие **соотношения:**

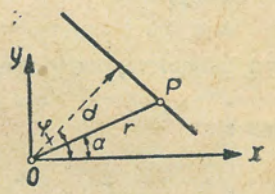
$$\operatorname{tg}\alpha = \mu = -\frac{A}{B} = -\frac{b}{a} = -\operatorname{ctg}\varphi, \quad a = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{\mu}; \quad b = -\frac{C}{B};$$

$$\cos\varphi = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}; \quad d = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Знак квадратного корня должен быть противоположен знаку C.

8. Особые случаи:

$x = a$ — прямая параллельна оси y-ов,
$y = b$ „ „ „ x-ов,
$y = \mu x$ „ проходит через начало координат.



Черт. 37.

9. Два уравнения: $G = 0$ и $nG = 0$ обозначают одну и ту же прямую.

10. Параллельные прямые:

$$G_1 = 0$$

и

$$G_2 = 0$$

— параллельны, если

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2,$$

или

$$\mu_1 = \mu_2$$

или

$$\alpha_1 = 180 + \alpha_2.$$

11. Перпендикулярные прямые:

$$G_1 = 0$$

и

$$G_2 = 0$$

взаимно перпендикулярны, если

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = -1$$

или

$$A_1A_2 = B_1B_2 = 0$$

или

$$A_1 : B_1 = -B_2 : A_2.$$

Если прямая должна проходить через точку x_0y_0 перпендикулярно к прямой $y = \mu x + b$, то ее уравнение:

$$y - y_0 = -\frac{1}{\mu}(x - x_0).$$

12. Угол между двумя прямыми:

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + \mu_1\mu_2}.$$

13. Уравнение прямой, образующей угол φ с прямою $y = \mu x + b$ и проходящей через точку x_1y_1:

$$y - y_1 = \frac{\mu + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \mu\operatorname{tg}\varphi}\cdot(x - x_1).$$

14. Точка пересечения прямых $G_1=0$ и $G_2=0$.

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\quad y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

15. Прямая $G_3=0$ проходит через **точку пересечения** прямых $G_1=0$ и $G_2=0$, если ее уравнение может быть выражено через уравнения тех же прямых:

$$G_1+\lambda G_2=0$$

при соответствующем значении λ или если

$$\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+\lambda_3G_3=0$$

или если

$$\begin{vmatrix}A_1B_1C_1\\A_2B_2C_2\\A_3B_3C_3\end{vmatrix}=0.$$

16. Равноделящая угла между прямыми $g_1=0$ и $g_2=0$ (нормальные уравнения): $g_1\pm g_2=0$.

17. Расстояние точки $P_0(x_0,\ y_0)$ от прямой $x\cos\alpha+y\sin\alpha-d=0$ выражается в виде:

$$n=\mp(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-d);$$

знак — для случая когда P_0 и O лежат по одну сторону прямой.

18. Уравнение прямой в **полярных координатах** (черт. 37).

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-d=0;\quad x=r\cos\alpha,\quad y=r\sin\alpha;$$

$$r\cos(\varphi-\alpha)=d.$$

В. Круг.

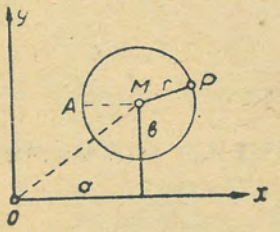
1. Общее уравнение (черт. 38): $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

2. Центр в начале координат: $x^2+y^2=r^2$ (M и O совпадают).

3. Центр на оси y**-ов, ось** x**-ов — касательная:** $x^2+y^2-2rx=0$.

4. Полярное уравнение (OM — полярная ось, $OM=c$, ρ — радиус-вектор):

$$\rho^2-2\rho c\cos\alpha+c^2=r^2.$$



Черт. 38.

5. Касательная в точке x_1y_1 имеет уравнение:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$$

(к уравнению 1),

$$xx_1+yy_1=r^2$$

(к уравнению 2).

6. Поляра точки x_0y_0 проходит через точки касания обеих касательных, проведенных из точки x_0y_0 к кругу; ее уравнение:

$$xx_0+yy_0=r^2$$

(к уравнению 2).

7. Длина окружности и площадь круга и его частей см. стр. 1—32, 49.

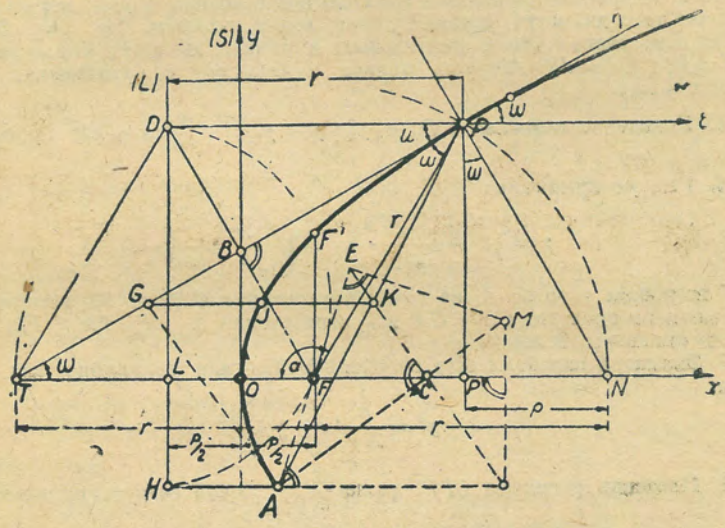
Г. Парабола.

1. Уравнение нормального вида: $y^2=2px$ ($2p$ — параметр, p — полупараметр). O — вершина, F — фокус, LL — директриса (черт. 39).

$$LO=OF=\frac{1}{2}p.$$

Ордината FF' в фокусе равна p.

2. Прямая, параллельная оси x-ов, называется диаметром; $P\xi$ делит пополам все хорды, параллельные касательной в P.



Черт. 39.

Уравнение параболы, отнесенной к осям: диаметру в точке $P(x,\ y)$ (ось ξ) и касательной в точке P (ось η), выразится:

$$\eta^2=2q\xi,$$

где

$$q=2\left(x+\frac{p}{2}\right)=\frac{p}{\sin^2\omega}=2r$$

и

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{p}{y}.$$

3. Полярное уравнение (F — полюс, FOL — полярная ось):

$$r=\frac{p}{1+\cos\alpha}.$$

4. Уравнение **касательной** в $P_0(x_0\,y_0)$ (к нормальному уравнению 1):

$$yy_0=p(x+x_0),$$

в $P_0(\xi_0\,\eta_0)$ (к уравнению вида 2):

$$\eta\cdot\eta_0 = q(\xi+\xi_0).$$

Проекция отрезка BT касательной в точке P на ось x-ов: $OT=-x$, т. е $OT=OP'$, проекция на ось y-ов: $OB=\frac{1}{2}y$ способ построения касательной в P); далее: $BT=BP_0$ (см. также 9,*e*). Касательная делит пополам угол между диаметром и радиусом-вектором соединяющим фокус с точкой касания $\angle DPB=\angle BPF=\omega$ прямая FBD перпендикулярна к касательной (способ построения параболы). Касательные в концах хорды пересекаются в точке того диаметра, который делит хорду пополам. На фиг. 39 G — точка пересечения обеих касательных в точках A и P; GK — диаметр, $AK=KP$, $GJ=JK$; AP есть поляра к $G(x_0\,y_0)$; ее уравнение: $y_0 y = p(x+x_0)$.

5. Уравнение нормали в $P_0(x_0\,y_0$: $y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0)$; субнормаль $P'N=p$ $FN=r$.

6. Радиус кривизны:

$$\rho=\sqrt{\frac{(p+2x)^3}{p}}=2r\sqrt{\frac{2r}{p}}=\frac{p}{\sin^3\omega}.$$

Построение в точке A: из точки пересечения C (фиг. 39) нормали AC с осью x-ов проводят $CE\perp CA$ до пересечения с AF; $EM\perp FE$; M — центр кривизны В вершине $\rho=p$.

7. Эволюта параболы есть парабола Нейля, или полукубическая парабола.

$$y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3.$$

8. Площадь сегмента OPP' равна $\frac{2}{3}xy$; любой сегмент: произведение $\frac{2}{3}$ основания на высоту.

Длина дуги:

$$OP=\frac{p}{2}\{ab+\ln(a+b)\},$$

где

$$a=\sqrt{2x:p}$$

$$b=\sqrt{1+(2x:p)}.$$

Если y велико по сравнению с x (плоская дуга), то приближенно:

$$Op=y\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right\}.$$

Д. Эллипс.

1. Уравнение обычного вида (черт. 40):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Полуоси $MA=a$ и $MB=b$; расстояние фокуса от центра

$$MF=c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Ордината в фокусе: полупараметр

$$p=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}=\frac{b^2}{a}=a(1-\varepsilon^2).$$

Отношение $\frac{c}{a}=\varepsilon$ называется эксцентриситетом.

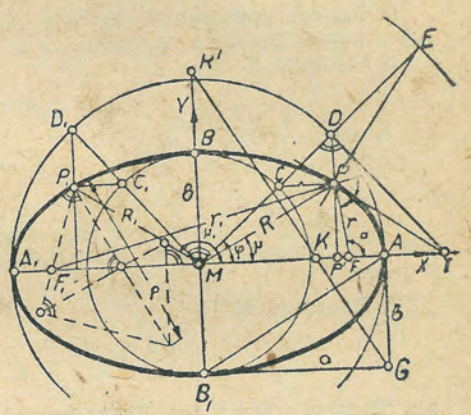
2. Полярное уравнение. По отношению к центру M:

$$R^2=\frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos\mu},$$

по отношению к фокусу F (черт. 40):

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\alpha}.$$

Сумма радиусов-векторов (соединяющих точку P с фокусами) — величина постоянная: $r_1+r_2=2a$ построение кривой при помощи нитки).



Черт. 40.

3. Параметрические уравнения (черт. 40). Точка P:

$$x=a\cos\varphi;\qquad y=b\sin\varphi.$$

4. Сопряженные диаметры эллипса — диаметры, аналогичные паре взаимно перпендикулярных диаметров круга, например MP и MP_1 на черт. 40 Один из них делит пополам хорды, параллельные другому; касательные в концах одного диаметра параллельны другому. Если μ и μ_1 — углы обоих сопряженных диаметров с положительным направлением оси x-ов, то

$$\operatorname{tg}\mu\cdot\operatorname{tg}\mu_1=-\frac{b^2}{a^2},$$

далее:

$$R^2+R_1^2=a^2+b^2.$$

Уравнение эллипса, отнесенное к сопряженным диаметрам, принятым за косоугольные оси ξ и η:

$$\frac{\xi^2}{R^2}+\frac{\eta^2}{R_1^2}=1.$$

5. Уравнение касательной в точке $P_0(x_0,\,y_0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Касательная к эллипсу в точке P_0 отсекает на оси x ов тот же отрезок, что и касательная в соответствующей точке P_0 круга; отсюда способ построения касательной (ср. черт. 40, точка P). Касательная в точке P делит пополам угол между радиусами-векторами той же точки. Касательные в концах хорды пересекаются в точке того диаметра, который сопряжен с направлением хорды.

Хорда есть поляра точки пересечения касательных; если координаты последней x_1, y_1, то уравнение поляры выразится:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

6. Радиус кривизны. См. оба построения для точки P_1 на фиг. 40 (пунктирные линии) и пояснение D 6, стр. 88.

В вершине A:

$$\rho=p=\frac{b^2}{a};$$

в вершине B:

$$\rho'=\frac{a^2}{b}.$$

Построение обоих центров кривизны K и K' для вершин A и B на фиг. 39; перпендикуляр из G на B_1A; точки пересечения с осями x-ов и y-ов.

7. Площадь $MBPP'$:

$$\frac{1}{2}\,x\cdot y+\frac{1}{2}\,a\cdot b\cdot\arcsin\frac{x}{a};$$

вся площадь эллипса πab. Длина кривой см. стр. 49.

Е. Гипербола.

1. Обычное уравнение: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Полуоси (черт. 41) $MA=a$, $AB=b$; фокусное расстояние $MF=c=\sqrt{a^2+b^2}$; ордината в фокусе: полупараметр $p=\frac{b^2}{a}=a(\varepsilon^2-1)$; $\varepsilon=\frac{c}{a}$ — эксцентриситет.

2. Полярное уравнение. По отношению к центру M:

$$R^2=\frac{b^2}{\varepsilon^2\cos^2\mu-1},$$

по отношению к фокусу F:

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\alpha}.$$

Разность радиусов-векторов — величина постоянная:

$$r_1-r=2a \text{ (способ построения).}$$

3. Для сопряженных диаметров, касательной, поляры и радиуса кривизны см. пояснения к эллипсу (E, 4, 5, 6), но с гиперболой не связаны никакие окружности.

Соответствующие уравнения таковы:

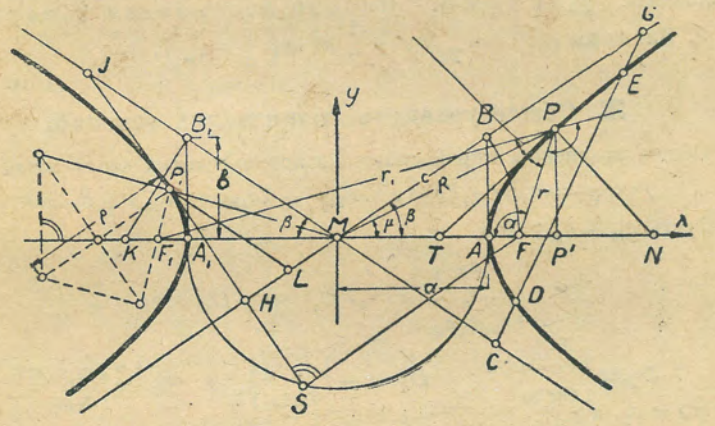
$$\operatorname{tg}\mu\cdot\operatorname{tg}\mu_1=\frac{b^2}{a^2},\qquad R^2-R_1^2=a^2-b^2;\qquad \frac{\xi^2}{R^2}-\frac{\gamma_1^2}{R_1^2}=1;$$

касательная:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1;$$

поляра:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1.$$



Черт. 41.

Радиус кривизны: построение для точки P_1 см. черт. 41 в вершине:

$$\rho=p=\frac{b^2}{a};$$

перпендикуляр в точке B_1 асимптоты пересекает ось x-ов в центре кривизны K.

4. Асимптоты касаются гиперболы в бесконечно удаленных точках; уравнения асимптот:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \quad\text{и}\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

Угол наклона их:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}.$$

Уравнение гиперболы, отнесенное к асимптотам как косоугольным осям

$$x'\cdot y'=\frac{1}{4}\,c^2.$$

(Построение гиперболы: из $y'=\frac{c^2}{4x'}$, вычислением или, если найдена одна точка гиперболы, делением пополам абсциссы и удваиванием ординаты и обратно.)

Отрезки хорды между гиперболой и асимптотой равны друг другу, $CD=EG$. (Построение, если дана точка кривой.)

Отрезок касательной, лежащий между асимптотами, делится пополам в точке касания: $JP_1=HP_1$. Построение касательной в P_1: проводят через P_1 параллельные к асимптотам и полученные на последних отрезки удваивают: $MH=2ML$.

Площадь треугольника между касательной и асимптотами — величина постоянная: $\triangle JMH=a\cdot b$. (Способ построения гиперболы.)

5. Площадь $APP'=\frac{1}{2}x\cdot y-\frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$.

Ж. Общее уравнение конических сечений.

Общее уравнение второй степени в прямоугольных координатах:

$$f(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Пусть $a_{11}+a_{22}\geqslant 0$ и

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}=a_{13}\cdot D_{13}+a_{23}\cdot D_{23}+a_{33}\cdot D_{33},$$

$$D_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}a_{22}\\ a_{31}a_{32}\end{vmatrix},\qquad D_{23}=-\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\\ a_{31}a_{32}\end{vmatrix},\qquad D_{33}=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{vmatrix},$$

где $a_{12}=a_{21}$ и т. д.

Если $D\gtrless 0$, то приведенное выше уравнение представляет коническое сечение, а именно:

для $D_{33}<0$ гипербола,
» $D_{33}=0$ парабола,
» $D_{33}>0$ действительный или мнимый эллипс.

1. $D_{33}\gtrless 0$. Центр M конического сечения имеет координаты:

$$x_0=\frac{D_{13}}{D_{33}},\qquad y_0=\frac{D_{23}}{D_{33}}.$$

Если начало координат поместить в M, то уравнение конического сечения выразится:

$$a_{11}x'^2+2a_{12}\cdot x'y'+a_{22}y'^2+\frac{D}{D_{33}}=0.$$

Если положить

$$R=+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2},$$

то ось $2a$ конического сечения образует с осью x-ов угол φ:

$$\sin 2\varphi=-\frac{2a_{12}}{R},\qquad \cos 2\varphi=-\frac{a_{11}-a_{22}}{R}.$$

Длина полуосей получается из

$$a^2=-\frac{2D}{D_{33}(a_{11}+a_{22}-R)},\qquad b^2=-\frac{2D}{D_{33}(a_{11}+a_{22}+R)}.$$

2. $D_{33}=0$. В уравнении $f(x,\ y)=0$ делают еще a_{12} положительным, вводя в случае надобности $-y$ вместо y. Если положить

$$k=\frac{a_{13}\sqrt{a_{11}}+a_{23}\sqrt{a_{22}}}{a_{11}+a_{22}},$$

то уравнение оси:

$$L(x,\ y)\equiv\sqrt{a_{11}}\cdot x+\sqrt{a_{22}}\cdot y+k=0,$$

уравнение касательной в вершине:

$$f(x,\ y)-L^2(x,\ y)=0,$$

параметр

$$p=\sqrt{-D}:\sqrt{(a_{11}+a_{22})^3}.$$

З. Цепная линия.

1. Общее уравнение $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ ордината есть средняя арифметическая ординат обеих логарифмических кривых

$$y=a\cdot e^{\frac{x}{a}}\quad\text{и}\quad y=a\cdot e^{-\frac{x}{a}}.$$

См. стр. 96. Цепная линия симметрична по отношению к оси y-ов; ее вершина (низшая точка имеет ординату a (фиг. 42). Уравнение может быть также дано в виде:

$$\sqrt{y^2-a^2}=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

2. Уравнение касательной в точке $P_0(x_0,\ y_0)$:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y_0^2-a^2}}{a}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x_0}{a}}-e^{-\frac{x_0}{a}})=\operatorname{sh}\frac{x_0}{a}.$$

Построение точки P (черт. 42): строят на PP' полуокружность, откладывают от P' хорду $P'T$, равную a; PT — касательная (T — точка эвольвенты).

3. Радиус кривизны:

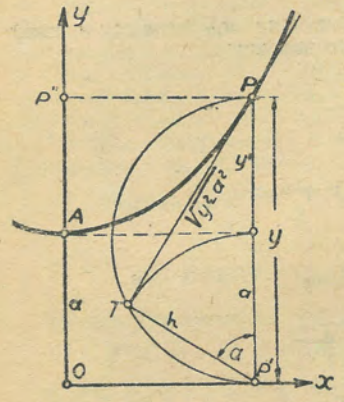
$$\rho=\frac{y^2}{a}.$$

4. Площадь $OAPP'$:

$$F=\frac{1}{2}a^2(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})=a^2\operatorname{sh}\frac{x}{a}=a\sqrt{y^2-a^2}=2\cdot\triangle PP'T=a\cdot L;$$

длина дуги AP:

$$L=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}=\sqrt{y^2-a^2}=PT.$$



Черт. 42.

5. Параметрические уравнения. Если ввести в качестве параметра угол α наклона касательной к оси x-ов, то предыдущие уравнения примут вид:

$$x=a\operatorname{Ar\,Sh}(\operatorname{tg}\alpha),\qquad y=\frac{a}{\cos\alpha},$$

$$\rho=\frac{a}{\cos^2\alpha}=\frac{y}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{Sh}\frac{x}{a},\qquad F=a^2\operatorname{tg}\alpha.\qquad L=a\operatorname{tg}$$

Далее еще:

$$AP''=y'=y-a=\frac{a}{\cos\alpha}-a=$$

$$=a\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=L\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

И. Некоторые другие технически важные кривые.

1. Архимедова спираль.

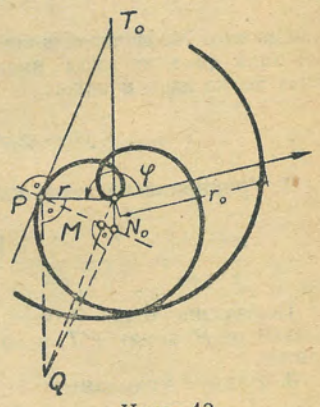
1. Архимедова спираль есть геометрическое место точки P, радиус-вектор которой $OP=r$ изменяется пропорционально углу вращения φ, измеряемому от определенного постоянного начального луча. Ее уравнение в полярной системе координат (чертеж 43):

$$r=a\varphi.$$

Архимедова спираль состоит из двух отраженных частей.

2. Кривая эта получается также, если точка P движется с равномерной скоростью по лучу OP, который в свою очередь равномерно вращается около постоянного полюса 0. Если одному обороту луча OP соответствует путь точки P по $OP=r_0$, то при $\frac{1}{n}$ оборота величина радиуса-вектора $r=\frac{r_0}{n}$, на чем и основано построение этой спирали:

$$r_0=2\pi a.$$



Черт. 43.

Полярная подкасательная $OT_0=\frac{r^2}{a}$; полярная поднормальная $ON_0=a=$ постоянное.; на этом и основано проведение касательной к спирали.

Радиус кривизны:

$$\rho=\frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}.$$

Построение: Проведя к PN_0 в N_0 и к OP в P перпендикуляры, пересекающиеся в точке Q, соединим затем O с Q; пересечение OQ с нормалью PN_0 дает центр кривизны M (черт, 43).

Длина дуги:

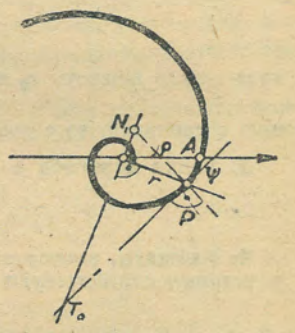
$$s=\frac{1}{2}a[\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\operatorname{ar\ sh}\varphi],$$

приблизительно (для многих оборотов): $s\approx\frac{1}{2}a\varphi^2$.

2. Логарифмическая спираль.

Уравнение: $r=ae^{m\varphi}(m>0)$. При $\varphi=0$, $r=OA=a$ (черт. 44). Так как при $\varphi\to-\infty$, $r\to0$, то полюс O есть асимптотическая точка, к которой при отрицательном φ спираль все более и более приближается, никогда ее не достигая.

Касательная PT образует в любой точке P с радиусом-вектором OP постоянный угол $\varphi=\operatorname{arc\,ctg}m$.



Черт. 44.

Полярная поднормальная

$$ON_0=r\operatorname{ctg}\varphi=rm.$$

Полярная нормальная

$$PN_0=r\sqrt{1+m^2}=r\sin\varphi;$$

полярная нормальная равна радиусу кривизны ρ в точке P.

Эволюта спирали представляет такую же кривую, но повернутую относительно данной на угол $\frac{1}{2}\pi-\frac{(\ln m)}{m}$.

Площадь сектора, описываемая радиусом-вектором, начиная от точки $P=$ половине площади треугольника OPT_0, составленного радиусом-вектором касательной и полярной подкасательной

$$S=\frac{r^2}{4m}.$$

Длина дуги, считая от полюса до точки P

$$s=\frac{r}{\cos\varphi}=\sqrt{1+m^{-2}}\cdot r,$$

т. е. длине полярной касательной PT_0.

Если логарифмическая спираль катится по прямой без скольжения, то ее асимптотическая точка описывает другую прямую, наклоненную к первой под углом $\frac{1}{2}\pi-\varphi$.

К. Исследование и построение кривых.

(Пример построения кривых расхода).

Уравнение $y=f(x)$ или $F(x, y)=0$ или параметрические уравнения: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Для исследования данных функций и представления о соответствующей кривой необходимо выяснить вопрос о симметричности кривой, определить точки пересечения ее с осями ($y=0$ и $x=0$) и могущие быть maxima и minima кривой.

1. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0):

$$(y-y_0)=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0(x-x_0)$$

или

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(x-x_0)=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(y-y_0).$$

2. Радиус кривизны в точке (x_0, y_0):

$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

куда нужно вставить x_0 и y_0. Если, как чаще всего, $\frac{dy}{dx}$ мало по сравнению с единицей, то с достаточным приближением принимают $\rho\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=1$.

3. Точка перегиба вообще определяется из условия:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0; \qquad \rho=\infty.$$

4. Площадь, заключенная между осью x-ов, кривой и ординатами y_0 и y, которым соответствуют x_0 и x:

$$F=\int_{x_0}^{x} y\,dx.$$

5. Длина дуги:

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

6. Логарифмические шкалы.

Во многих случаях при нанесении кривых пользуются бумагой с логарифмической сеткой, т. е. такой, где по образцу миллиметровой бумаги нанесены деления по логарифмической шкале в одном или в обоих направлениях. Получается большая выгода в том, что два рода кривых, весьма употребительных в технике, могут быть представлены в виде прямых, а именно: на сетке с логарифмическим делением в одном направлении — все кривые вида $y=a\cdot e^{kx}$ или $ky=\ln\frac{x}{a}$, и на сетке с логарифмическим делением в обоих направлениях — все кривые вида $y=a\cdot x^k$, следовательно все простые и высшие параболы и гиперболы.

VII. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА.

(Предполагаются прямоугольные координаты.)

А. Точка, прямая линия и плоскость в пространстве.

В нижеследующем под x, y, z разумеются Декартовы взаимно перпендикулярные координатные оси в пространстве. Прямые линии следует рассматривать, как имеющие определенное направление, то же относится к плоскостям.

1. Пусть $P_1(x_1y_1z_1)$ и $P_2(x_2y_2z_2)$ какие-либо две точки, l расстояние между ними, α, β, γ три угла, образуемые вектором $\overline{P_1P_2}=\overline{V}$ с тремя осями координат, тогда

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{l}, \qquad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{l}, \qquad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{l};$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Разности координат x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 суть три координаты вектора $\overline{V}$, где $\overline{V}=|\overline{V}|$ его длина, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ координаты соответственного единичного вектора $\overline{V}^0$.

2. Разделив вектор P_1P_2 в отношении $m:n$ (>0 при внутреннем делении, <0 при внешнем делении) и называя координаты делящей точки через x, y, z, имеем:

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \qquad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n},$$

$$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}.$$

3. Угол φ, образуемый двумя заданными направлениями α_1, β_1, γ_1 и α_2 β_2, γ_2, определяется из:

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

Если оба направления взаимно перпендикулярны ($\varphi=90°$), то:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0.$$

Если единичные векторы, соответствующие данным направлениям, равны V_1^0 и V_2^0, то $\cos\varphi=V_1^0\,V_2^0$ есть внутреннее (скалярное) произведение. Условие перпендикулярности: $\overline{V}_1^0\,\overline{V}_2^0=0$.

4. Пусть λ, μ, ν углы, образуемые нормалью к обоим заданным в 3 (не параллельным) направлениям, т. е. к плоскости угла φ, тогда

$$\cos\lambda=(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)/\sin\varphi;$$

$$\cos\mu=(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)/\sin\varphi;$$

$$\cos\nu=(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)/\sin\varphi.$$

Числители этих трех выражений — компоненты внешнего (векторного) произведения $[\overline{V}_1^0\,\overline{V}_2^0]$. Если $0<\varphi<\pi$, то $\sin\varphi>0$ и направление нормалей таково, что $\overline{V}_1^0$, $\overline{V}_2^0$ и направление нормали образуют при этой последовательности правую систему.

Кратчайшее расстояние между двумя прямыми заданными направлениями $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, проходящими соответственно через точки P_1 и P_2, равно абсолютной величине выражения

$$p=(x_2-x_1)\cos\lambda+(y_2-y_1)\cos\mu+(z_2-z_1)\cos\nu.$$

Так как $p=(\overline{V}\overline{V}_1^0\overline{V}_2^0)/\sin\varphi$, где—числитель есть тройное скалярное произведение, то $p>0$, если $\overline{V}$, $\overline{V}_1^0$, V_2^0 в этой последовательности образуют правую систему.

5. Прямая линия в пространстве определяется двумя уравнениями первой степени:

$$y=m_1x+b_1, \qquad z=m_2x+b_2.$$

Уравнения прямой, проходящей через точку P_1 и составляющей с координатными осями углы α, β, γ:

$$(x-x_1)/\cos\alpha=(y-y_1)/\cos\beta=(z-z_1)/\cos\gamma.$$

Отсюда, в предыдущих уравнениях:

$$m_1=\cos\beta/\cos\alpha, \qquad m_2=\cos\gamma/\cos\alpha.$$

Общее значение этих трех отношений есть длина s вектора $\overline{P_1P}$. Если O начало координат, $\overline{OP}=\overline{r}$, $\overline{OP_1}=\overline{r_1}$ и $\overline{V}^0$ единичный вектор с координатами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, направление которых определяет направление данной прямой, то пара уравнений этой прямой может быть заменена векторным уравнением

$$\overline{r}=\overline{r_1}+\overline{V}^0 s$$

с параметром s.

Уравнения прямой, проходящей через две данные точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2):

$$(x-x_1)/(x_2-x_1)=(y-y_1)/(y_2-y_1)=(z-z_1)/(z_2-z_1).$$

Если t есть общее значение трех отношений, а $\overline{P_1P_2}=\overline{V}$, то пара уравнений может быть заменена векторным уравнением прямой

$$\overline{r}=\overline{r_1}+\overline{V}t$$

с параметром t. Имеем $s=\overline{V}\,t$.

6. Две прямые пересекаются между собой, если определитель 4 уравнений (приведенных к виду $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$) данных прямых равен нулю.

7. Уравнения плоскости. Плоскость определяется уравнением первой степени:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

и все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению первой степени, лежат в одной и той же плоскости.

$By+Cz+D=0$: уравнение плоскости, параллельной оси x-ов
$Ax+Cz+D=0$ » » » » y-ов
$Ax+By+D=0$ » » » » z-ов
$Ax+By+Cz=0$ » » проходящей через начало координат.

Если $\overline{r}$ есть радиус-вектор, а $\overline{A}$ — вектор с координатами A, B, C, то вышеприведенное общее уравнение плоскости может быть представлено в векторном виде

$$\overline{A}\overline{r}+D=0.$$

Вектор $\overline{A}$ перпендикулярен к плоскости, притом так, что его положительное направление исходит из положительной стороны плоскости, и вместе они определяют правое вращение. Пусть P_1 точка на плоскости, $\overline{r_1}=\overline{OP_1}$, тогда $D=-\overline{A}\overline{r_1}$. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку P и перпендикулярной к заданному вектору $\overline{A}$, будет, следовательно:

$$\overline{A}(\overline{r}-\overline{r_1})=0 \text{ или } A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Уравнение плоскости, пересекающей координатные оси в расстояниях a, b, c от начала координат: $xa+yb+zc=1$.

$x=a$: уравнение плоскости // плоскости yz,
$y=b$ » » // » zx,
$z=c$ » » // » xy.

Уравнение плоскости, перпендикулярной к проходящему через начало координат вектору $\overline{l}$, имеющему длину l и составляющему с осями координат углы α, β, γ:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+r\cos\gamma-l=0 \text{ или } \overline{l^0}\overline{r}-l=0$$

(нормальный вид Гессе)

Плоскость так направлена, что вместе с вектором $\overline{l}$ она определяет правое вращение.

Для приведения общего уравнения плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

к нормальному виду, делят левую часть на то значение

$$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\pm|\overline{A}|,$$

при котором постоянный член полученной левой части примет отрицательное значение (нормирование уравнения) и подставляют

$$\cos\alpha=A:\pm|\overline{A}|,\ \cos\beta=B:\pm|\overline{A}|,\ \cos\gamma=C:\pm|\overline{A}|,\ \ l=-D:\pm|\overline{A}|>0.$$

Тогда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ суть координаты единичного вектора $\overline{l^0}$, являющегося «вектором положения» плоскости.

8. Расстояние точки P_1 от плоскости, заданной уравнением нормального вида (см. выше), выражается абсолютной величиной

$$p=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-l \text{ или } p=\overline{l^0}\overline{r}_1-l;$$

причем знак + или — для p получается в зависимости от того, находится ли заданная точка и начало координат на различных сторонах или соответственно на одной и той же стороне плоскости.

9. Если через точку P_1, взятую на плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, провести к ней нормаль, то уравнения последней будут

$$(x-x_1)/A=(y-y_1)/B=(z-z_1)/C;$$

при параметре t получают векторное уравнение:

$$\bar{r}=\bar{r}_1+\bar{A}t;$$

этот перпендикуляр параллелен и одинаково направлен с вектором положения $\bar{A}^0$ плоскости.

10. Уравнени плоскости, проходящей через два пересекающиеся в точке P_1 направления (α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2), выражается

$$(x-x_1)(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)+(y-y_1)(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)+$$
$$+(z-z_1)(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)=0$$

или

$$(\bar{r}-\bar{r}_1)\ [\bar{V}_1^0\ \bar{V}_2^0]=0,$$

где $\bar{V}_1^0$, $\bar{V}_2^0$ единичные векторы, определяемые направлениями.

11. Уравнение всякой плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ или } \bar{A}_1\bar{r}+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \text{ или } \bar{A}_2\bar{r}+D_2=0$$

будет

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

или

$$(\bar{A}_1+k\bar{A}_2)\bar{r}+D_1+kD_2=0,$$

где k произвольное число (пучок плоскостей). Уравнение проекции этой линии пересечения на плоскость xy и yz, или zx получится исключением z, или x, или y, из уравнений обеих плоскостей.

12. Угол φ, образуемый двумя плоскостями определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)\ (A_2^2+B_2^2+C_2)}}$$

или

$$\cos\varphi=\frac{\bar{A}_1\bar{A}_2}{|\bar{A}_1|\cdot|\bar{A}_2|}=\bar{A}_1^0\ \bar{A}_2^0.$$

φ есть также угол, образуемый обоими векторами $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ ($0\leqq\varphi\leqq\pi$).

Плоскости параллельны ($\varphi=0$), если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$. Уравнения двух $\parallel$-ных плоскостей:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ или } \bar{A}_1\bar{r}+D_1=0$$

и

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_2=0 \text{ или } \bar{A}_2\bar{r}+D_2=0.$$

Плоскости перпендикулярны одна к другой ($\varphi=90°$), если:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \text{ или } \bar{A}_1\bar{A}_2=0.$$

13. Уравнения плоскостей, делящих пополам углы между двумя данными плоскостями (см. 11), имеют вид:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=0,$$

или

$$\frac{\bar{A}_1\bar{r}+D_1}{|A_1|}\pm\frac{\bar{A}_2\bar{r}+D_2}{|A_2|}=0.$$

Если

$$x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-l_1=0 \text{ или } \bar{l}_1^0\bar{r}-l_1=0$$

и

$$x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-l_2=0 \text{ или } \bar{l}_2^0\bar{r}-l_2=0$$

являются уравнениями обеих заданных плоскостей в нормальной форме Гессе, то для уравнений обеих плоскостей, делящих углы пополам, получаем

$$x(\cos\alpha_1\pm\cos\alpha_2)+y(\cos\beta_1\pm\cos\beta_2)+z(\cos\gamma_1\pm\cos\gamma_2)-(l_1\pm l_2)=0$$

или

$$(\bar{l}_1^0\pm\bar{l}_2^0)\bar{r}-(l_1\pm l_2)=0.$$

14. Точки P, P_1, P_2, P_3 лежат в одной плоскости, когда

$$\begin{vmatrix}1&x&y&z\\1&x_1&y_1&z_1\\1&x_2&y_2&z_2\\1&x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=0$$

или

$$(\bar{r}_1-\bar{r})\ (\bar{r}_2-\bar{r})\ (\bar{r}_3-\bar{r})=0.$$

Это является одновременно и уравнениями плоскости, определяемой тремя не на одной прямой лежащими точками P_1, P_2, P_3.

15. Четыре точки P, P_1, P_2, P_3, не лежащие в одной плоскости, определяют тетраэдр, объем которого равен абсолютному значению

$$T=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&x&y&z\\1&x_1&y_1&z_1\\1&x_2&y_2&z_2\\1&x_3&y_3&z_3\end{vmatrix} \text{ или } T=\frac{1}{6}(\bar{r}_1-\bar{r})\ (\bar{r}_2-\bar{r})\ (\bar{r}_3-\bar{r})$$

T — положительно или отрицательно смотря по тому, образуют ли три вектора $PP_1=\bar{r}_1$, $PP_2=\bar{r}_2$ и $PP_3=\bar{r}_3$ правую или левую систему.

Если даны длины шести ребер $PP_1=a$, $PP_2=b$, $PP_3=c$, $P_2P_3=p$, $P_3P_1=q$ и $P_1P_2=r$, то объем тетраэдра вычисляют из формулы:

$$T_2=\frac{1}{288}\begin{vmatrix}0&r^2&q^2&a^2&1\\r^2&0&p^2&b^2&1\\q^2&p^2&0&c^2&1\\a^2&b^2&c^2&0&1\\1&1&1&1&0\end{vmatrix}$$

16. Четыре плоскости $A_\lambda x + B_\lambda y + C_\lambda z + D_\lambda = 0$ или $\overline{A_\lambda}\overline{r} + D\lambda = 0$ ($\lambda = 1, 2, 3, 4$) проходят через одну и ту же точку, если

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

17. Преобразование прямоугольных координат. Координаты точки P в старой системе обозначим через x, y, z, а в новой — через x', y', z'.

Параллельный сдвиг осей. Если x_0, y_0, z_0 — координаты нового начала координат, то

$$x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0, \qquad z' = z - z_0.$$

Вращение осей около начала координат. Косинусы углов, образуемых новыми координатными осями x', y', z',

с осью x-ов будут a', b', c',
" " y-ов " a'', b'', c'',
" " z-ов " a''', b''', c'''

тогда имеем

$$\begin{aligned} x &= a'x' + b'y' + c'z' \\ y &= a''x' + b''y' + c''z' \\ z &= a'''x' + b'''y' + c'''z' \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} x' &= a'x + a''y + a'''z \\ y' &= b'x + b''y + b'''z \\ z' &= c'x + c''y + c'''z \end{aligned} \right.$$

Между коэфициентами имеют место следующие соотношения:

1. $\begin{aligned} a'^2 + a''^2 + a'''^2 &= 1 \\ b'^2 + b''^2 + b'''^2 &= 1 \\ c'^2 + c''^2 + c'''^2 &= 1 \end{aligned}$ | 2. $\begin{aligned} a'b' + a''b'' + a'''b''' &= 0 \\ b'c' + b''c'' + b'''c''' &= 0 \\ c'a' + c''a'' + c'''a''' &= 0 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 \\ a'''^2 + b'''^2 + c'''^2 &= 1 \end{aligned}$ | 4. $\begin{aligned} a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a''a''' + b''b''' + c''c''' &= 0 \\ a'''a' + b'b''' + c'''c' &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} a' &= b''c''' - c''b''' \\ b' &= c''a''' - a''c''' \\ c' &= a''b''' - b''a''' \end{aligned}$ | 6. $\begin{aligned} a'' &= c'b''' - b'c''' \\ b'' &= a'c''' - c'a''' \\ c'' &= b'a''' - a'b''' \end{aligned}$ | 7. $\begin{aligned} a''' &= b'c'' - c'b'' \\ b''' &= c'a'' - a'c'' \\ c''' &= a'b'' - b'a'' \end{aligned}$

8. $\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = +1$

При одновременном сдвиге и вращении координатных осей соединяем соответственные формулы параллельного сдвига и вращения.

Применяя векторы, можно короче изобразить вращение прямоугольной системы координатных осей следующим образом: i, j, κ единичные векторы на положительных осях x-ов, y-ов и z-ов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — на положительных осях x', y', z', тогда имеем

$$xi + yj + zk = x'\overline{a} + y'\overline{b} + z'\overline{c}$$

$$\overline{a} = a'i + a''j + a'''k, \quad \overline{b} = b'i + b''j + b'''k, \quad \overline{c} = c'i + c''j + c'''k$$

$$i = \overline{a}a' + \overline{b}b' + \overline{c}c', \quad j = \overline{a}a'' + \overline{b}b'' + \overline{c}c'', \quad k = \overline{a}a''' + \overline{b}b''' + \overline{c}c'''$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1, \quad ij = jk = ki = 0, \quad i = [jk], \quad j = [kj], \quad k = [ij],$$

$$ij\kappa = +1,$$

$$\overline{a}^2 = \overline{b}^2 = \overline{c}^2 = 1, \quad \overline{ab} = \overline{bc} = \overline{ca} = 0, \quad \overline{a} = [\overline{bc}], \quad \overline{b} = [\overline{ca}], \quad \overline{c} = [\overline{ab}]$$

$$\overline{abc} = +1.$$

18. Для преобразования прямоугольных координат x, y, z точки в пространственные полярные, r, ϕ, Θ, находим сначала координаты точки x', y' z', отнесенные к прямоугольной системе координат, начало которых совпадает с полюсом, плоскость $x'y'$ — с экваториальной плоскостью, а ось x-ов — с полярной осью, от которой отсчитывают угол ϕ; тогда

$$x' = r\cos\phi\sin\vartheta; \quad y' = r\sin\phi\sin\vartheta; \quad z' = r\cos\vartheta.$$

Для точек оси z'-ов $\vartheta = 0$.

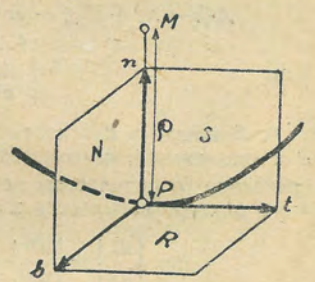
Б. Кривые двойной кривизны.

1. Общие положения.

1. Если прямоугольные координаты x, y, z точки P в пространстве представляют непрерывные функции переменной t (параметр), то когда t изменяется, P вообще описывает пространственную кривую. Эти три функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ по предположению могут быть достаточное число раз диференцируемы; они могут быть выражены в виде радиуса вектора $\overline{r} = \overline{r}(t)$, конечные точки которого описывают кривую. Всякое уравнение вида $F(x, y, z) = 0$, получаемое посредством исключения t, представляет собой поверхность, на которой расположена кривая. Во многих случаях достаточны такие два уравнения поверхностей

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad F_2(x, y, z) = 0$$

для определения кривой, как пересечения этих поверхностей.



Черт. 45.

Кривая определяется также уравнениями ее проекций на плоскости xy и xz: $y = \varphi_1(x)$; $z = \varphi_2(x)$, т. е. как пересечение обеих вертикальных проектирующих на этих плоскостях цилиндров.

2. Углы α, β, γ, образуемые касательной в точке P с координатными осями, определяются по:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}; \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

где ds обозначает диференциал дуги:

$$ds = [\overline{dr}] = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\ (> 0).$$

3. Косинусы направления касательной являются координатами единичного вектора (вектора касательной) (черт. 45). Принимая за параметр t (см. п. 1) длину дуги кривой s, имеем:

$$\overline{t} = \frac{d\overline{r}}{ds} = \left\{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \right\} \qquad \overline{t}^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Уравнения касательной в точке P:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}$$

или для $\bar{R}=\{\xi, \eta, \zeta\}$ как радиус-вектор для любой точки касательной $\bar{R}-\bar{r}=\lambda d\bar{r}$, где λ обозначает переменный вдоль по касательной скалярный параметр.

4. Уравнение нормальной плоскости (N):

$$(\xi-x)\,dx+(\eta-y)\,dy+(\zeta-z)\,dz=0 \text{ или } (\bar{R}-\bar{r})\,d\bar{r}=0.$$

5. Плоскостью кривизны (S) в точке P называется плоскость, имеющая с кривой касание по меньшей мере второго порядка. Принимая:

$$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y,\quad B=dz\,d^2x-dx\,d^2z,\quad C=dx\,d^2y-dy\,d^2x,$$

т. е.

$$\{A, B, C\}=[d\bar{r}\,d^2\bar{r}],$$

то уравнение плоскости кривизны будет

$$A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z)=0 \text{ или } (\bar{R}-\bar{r})\,[d\bar{r}\,d^2\bar{r}]=0$$

или

$$\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0.$$

6. Лежащая в плоскости кривизны прямая, перпендикулярная в точке P к касательной, называется главной нормалью в точке P. Ее направление определяется вектором $d\bar{t}/ds=d^2\bar{r}/ds^2$. Абсолютная величина этого вектора называется первой кривизной k кривой в точке P:

$$k=\left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right|=\left|\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Единичный вектор $(d\bar{t}/ds)^\circ=(d\bar{t}/ds):k=\bar{n}$ называется вектором главной нормали. Его координаты суть косинусы направления главной нормали:

$$\cos l=\frac{d^2x}{ds^2}:k,\qquad \cos m=\frac{d^2y}{ds^2}:k,\qquad \cos n=\frac{d^2z}{ds^2}:k$$

$$\bar{n}^2=\cos^2 l+\cos^2 m+\cos^2 n=1$$

$$\bar{t}\bar{n}=\cos\alpha\cos l+\cos\beta\cos m+\cos\gamma\cos n=0.$$

7. Прямая, перпендикулярная к плоскости кривизны и перпендикулярная к касательной в точке P, называется бинормалью в точке P. Направление ее определяется таким образом, чтобы она с положительными направлениями касательной и главной нормали образовала правую систему, т. е. направление бинормали должно быть направлением бинормального вектора $[\bar{t}\bar{n}]=\bar{b}$.

Три вектора $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ образуют сопровождающий трехгранник кривой. Плоскость $\bar{t}$, $\bar{b}$ называется спрямляющей плоскостью (R)

Углы λ, μ, ν бинормали с осями координат находим из:

$$\cos\lambda=A/kds^3,\quad \cos\mu=B/kds^3,\quad \cos\nu=C/kds^3,$$

$$\bar{b}^2=\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1,$$

$$\bar{n}\bar{b}=\cos l\cos\lambda+\cos m\cos\mu+\cos n\cos\nu=0,$$

$$\bar{b}^2\bar{t}=\cos\lambda\cos\alpha+\cos\mu\cos\beta+\cos\nu\cos\gamma=0.$$

8. Радиус кривизны ρ определяется из:

$$\rho=1/k=1:\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Точка M главной нормали, для которой $MP=\rho$ называется центром кривизны. Его координаты суть:

$$x_0=x+\rho\frac{d^2x}{ds^2},\quad y_0=y+\rho\frac{d^2y}{ds^2},\quad z_0=z+\rho\frac{d^2z}{ds^2} \text{ или } \bar{r}_0=\bar{r}+\rho\bar{n}.$$

Круг, описанный радиусом $MP=\rho$ на плоскости кривизны вокруг точки M как центра имеет с кривой в точке P соприкасание по меньшей мере второго порядка и называется кругом кривизны.

9. При движении вдоль кривой по положительному направлению, определяемому $\bar{t}$, плоскость кривизны вращается вокруг касательной в данном месте. Вращение измеряется изменением вектора бинормали $\frac{d\bar{b}}{ds}$; если $d\bar{b}\uparrow\downarrow\bar{n}$, то получается правое вращение вокруг вектора касательной $\bar{t}$. Величина вращения определяется множителем $\varkappa$, если положить

$$\frac{d\bar{b}}{ds}=-\varkappa\bar{n}$$

$\varkappa$ есть вторая кривизна или кручение кривой. Смотря по тому $\varkappa>0$ или $\varkappa<0$, говорят о правом или левом кручении кривой в точке P. Имеем

$$\varkappa=-\bar{n}\frac{d\bar{b}}{ds}=-\cos l\frac{d\cos\lambda}{ds}-\cos m\frac{d\cos\mu}{ds}-\cos n\frac{d\cos\nu}{ds}$$

или, если длина дуги s — независимая переменная,

$$\varkappa=\rho^2\bar{t}\frac{d\bar{t}}{ds}\frac{d^2\bar{t}}{ds^2}=\frac{\rho^2}{ds^6}\begin{vmatrix} dx & d\nu & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

или

$$\varkappa=\frac{\rho^2}{ds^6}(Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z).$$

Для плоских кривых $\varkappa=0$.

2. Цилиндрическая винтовая линия.

1. Цилиндрической винтовой линией наз. линия, описанная точкой, равномерно движущейся по окружности круга, который в свою очередь перемещается равномерно в направлении, перпендикулярном к своей плоскости, т. е. описывает прямой круговой цилиндр.

Если a расстояние точки P от оси z-ов, φ угол вращения по отношению к первоначальному направлению (оси x-ов) и c коэфициент пропорциональности, тогда имеем:

$$x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=c\varphi,$$

ход винта $h=2\pi c$, подъем винта $\operatorname{tg}\alpha=h:2\pi a=c:a$.

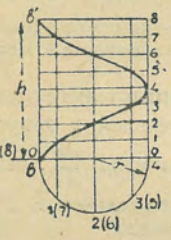
2. Проекции винтовой линии на плоскостях xz и yz суть синусоиды; потому что

$$x/a=\cos(z/c),\quad y/a=\sin(z/c).$$

3. Элемент дуги $ds = \sqrt{a^2 + c^2}\,d\varphi$; длина дуги

$$s = \sqrt{a^2 + c^2}\cdot\varphi = \frac{a}{\cos\alpha}\,\varphi.$$

Следовательно винтовая линия образуется также при наматывании плоского прямоугольного треугольника с катетами $2\pi a$ и h на круглый цилиндр радиуса a так, чтобы катет $2\pi a$ перешел в круг основания цилиндра.



Черт. 46.

4. Касательный вектор $\bar{t} = \cos\alpha\,\{-\sin\varphi, \cos\varphi, \operatorname{tg}\alpha\}$. Касательная образует таким образом с направлением оси z-ов постоянный угол $90^\circ - \alpha$. Уравнения касательной:

$$-\frac{\xi - x}{\sin\varphi} = \frac{\eta - y}{\cos\varphi} = \frac{\zeta - z}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

5. Кривизна $k = a/(a^2 + c^2)$. Радиус кривизны $\rho \quad (a^2 + c^2)/a = a/\cos^2\alpha$.

6. Виток $\varkappa = c/(a^2 + c^2) = \sin^2\alpha/c$. Винтовая линия имеет правое или левое направление в зависимости от того $c > 0$ или $c < 0$, т. е. в зависимости от того, считать ли высоту хода положительной в направлении $+z$-ов или обратно.

7. Построение проекции винтовой линии на плоскости xz (черт. 46). Делим ход $h = bb'$ на n (здесь 8) равных частей и на столько же частей окружность круга, представляющего горизонтальную проекцию цилиндра (последние деления откладываем от b); через первые точки деления проводим горизонтали, а через вторые — вертикали; пересечение горизонтали с соответствующей вертикалью дает точку, лежащую на проекции винтовой линии.

B. Кривые поверхности.

1. Общие положения.

1. Когда координаты x, y, z точки P являются непрерывными функциями двух переменных u, v (параметры), то точка описывает вообще кривую поверхность, на которой кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ образуют сеть криволинейных координат. Напр: $x = a\cos u\cos v$, $y = a\cos u\sin v$, $z = a\sin u$ дают шар радиуса a с кругами широты ($u = \text{const}$) и меридианами ($v = \text{const}$).

Исключением u и v получаем уравнение поверхности $F(x, y, z) = 0$, или, решая уравнение относительно z, $z = z(x, y)$. Последний случай имеет место для $u = x$, $v = y$.

Предполагается что все встречающиеся функции могут быть дифференцированы достаточное количество раз. Обозначим через x_u, x_v, x_{uu} и т. д. частные производные $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial v$, $\partial^2 x/\partial u^2$ и т. д. Далее обозначим по Эйлеру

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Три функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ могут быть выражены одним радиусом-вектором $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$.

2. Квадрат элемента линии:

$$\overline{dr}^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

где

$$E = \bar{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1 + p^2,$$
$$F = \bar{r}_u\bar{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = pq,$$
$$G = \bar{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 1 + q^2$$

обозначают основные величины первого порядка Гаусса.

3. Уравнение касательной плоскости

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - x & \zeta - z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (\bar{R} - r)\,\bar{r}_u\bar{r}_v = 0,$$

где $\bar{R} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ радиус-вектор любой точки касательной плоскости, или

$$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y + (\zeta - z)F_z = 0 \text{ или } (\bar{R} - \bar{r})\operatorname{grad} F = 0.$$

4. Уравнения нормали.

$$(\xi - x)/F_x = (\eta - y)/F_y = (\zeta - z)/F_z \text{ или } \bar{R} - \bar{r} = \lambda \operatorname{grad} F,$$

где λ — переменный вдоль нормали параметр; или

$$(\xi - x)/A = (\eta - y)/B = (\zeta - z)/C \text{ или } \bar{R} - \bar{r} = \mu\,[\bar{r}_u\bar{r}_v],$$

где

$$A = y_u z_v - y_v z_u, \quad B = z_u x_v - z_v x_u, \quad C = x_u y_v - x_v y_u$$

обозначают координаты вектора $[r_u r_v]$. Относящийся сюда единичный вектор называется вектором нормали $\bar{R} = [\bar{r}_u\bar{r}_v]^\circ$ и имеет координатами косинусы углов, образуемых нормалью $\bar{R}$ с тремя осями координат.

Если эти косинусы направления назовем через X, Y, Z, таким образом $\bar{R} = \{X, Y, Z\}$, то имеем

$$X = A/T = F_x/W = -pT,$$
$$Y = B/T = F_y/W = -qT,$$
$$Z = C/T = F_z/W = +1T,$$

где

$$T = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{p^2 + q^2 + 1} > 0, \qquad V = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} > 0$$

или

$$\bar{R} = [\bar{r}_u\bar{r}_v] : T = \operatorname{grad} F : |\operatorname{grad} F|.$$

5. Величина элемента кривой поверхности:

$$d\sigma = Tdudv = Wdxdy/F_x = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dx\,dy.$$

Для определения величины ограниченной части поверхности вычисляют двойной интеграл $\iint d\sigma$, распространенный в пределах переменных u, v или же соотв. x, y (стр. 77).

6. Две кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, проходящие через точку P поверхности, образуют координатный угол ω, для которого

$$\cos\omega = F : \sqrt{EG}, \quad \sin\omega = T : \sqrt{EG}.$$

Если $F = 0$, то линии координат образуют ортогональную сеть, т. е. перпендикулярно пересекаются.

7. Всякая плоскость, проходящая через нормаль, пересекает поверхность по линии, наз. нормальным сечением; его кривизна n в точке P называется кривизной нормального сечения. Тогда имеем

$$n=\frac{Ldu^2+2Mdu\,dv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdu\,dv+Gdv^2},$$

где

$$\begin{aligned}L&=-r_u\overline{R}_u=-(x_u X_u+y_u Y_u+z_u Z_u),\\ M&=-r_v\overline{R}_u=-(x_v X_u+y_v Y_u+z_v Z_u)\\ &=-r\overline{R}_{uv}=-(x_u X_v+y_u Y_v+z_u Z_v),\\ N&=-r_v\overline{R}_v=-(x_v X_v+y_v Y_v+z_v Z_v)\end{aligned}$$

обозначают основные величины второго порядка. Также

$$\begin{aligned}L&=\overline{R}r_{uu}=Xx_{uu}+Yy_{uu}+Zz_{uu}=r/T,\\ M&=\overline{R}r_{uv}=Xx_{uv}+Yy_{uv}+Zz_{uv}=s/T,\\ N&=\overline{R}r_{vv}=Xx_{vv}+Yy_{vv}+Zz_{vv}=t/T.\end{aligned}$$

$$n=(rdx^2+2sdx\,dy+tdy^2)/Tds^2.$$

8. Теорема Менье. Плоскость, проходящая через касательную к нормальному сечению и образующая с его плоскостью угол ϑ, пересекает поверхность по косому сечению, кривизна которого k в рассматриваемой точке

$$k=n/\cos\vartheta.$$

8. Главные кривизны. Среди плоскостей, проходящих через одну и ту же нормаль к поверхности, имеется вообще одна, для которой соответствующая кривизна нормального сечения наибольшая, и другая — для которой она наименьшая. Соответствующие нормальные сечения называются главными нормальными сечениями в данной точке P поверхности, кривизны называются главными нормальными кривизнами n_2; они определяются уравнениями:

$$n_1+n_2=(GL-2FM+EN):p^2=[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]:T^3,$$

$$n_1n_2=(LN-M^2):(T^2=rt-s^2):T^4,$$

где

$$T^2=EG-F^2=p^2+q^2+1.$$

10. Теорема Эйлера. Для нормального сечения, плоскость которого образует с плоскостью главного нормального сечения n_1 угол φ, имеем

$$n=n_1\cos^2\varphi+n_2\sin^2\varphi.$$

Главные нормальные сечения перпендикулярны друг к другу. Для нормальной кривизны двух друг к другу перпендикулярных нормальных сечений имеем $n'+n''=n_1+n_2$.

11. Величина $H=n_1+n_2$ называется среднею кривизною, а величина $K=n_1n_2$ — (гауссовой) мерою кривизны поверхности в точке P.

Теорема Гаусса. Если изгибать поверхность без растяжения, то мера кривизны в соответственных точках остается неизменной. Если $K=0$, то поверхность может быть развернута на плоскость. При $K>0$ имеем поверхность выпучивающуюся, а при $K<0$ — седлообразную.

Имеем далее:

$$K=\frac{-1}{W^2}\begin{vmatrix}F_{xx}&F_{xy}&F_{xz}&F_x\\F_{xy}&F_{yy}&F_{yz}&F_y\\F_{xz}&F_{yz}&F_{zz}&F_z\\F_x&F_y&F_z&1\end{vmatrix},\quad H=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

12. Оба (всегда взаимно перпендикулярные) семейства кривых поверхности, касательные которых определяют оба главные нормальные сечения, называются линиями кривизны поверхности. Если сеть координатных линий $u=\text{const.}$, $v=\text{const}$ состоит из линий кривизны, то $F=0$, $M=0$.

Оба семейства кривых поверхности, касательные которых определяют нормальные сечения кривизны $n=0$, называются ассимптотическими линиями поверхности. Они вещественны только, когда $K<0$. Если сеть координатных линий состоит из ассимптотических линий, то $L=0$, $N=0$.

Линии кривизны делят пополам углы ассимптотических линий.

13. Если в пространстве три семейства поверхностей пересекаются, так что в каждой точке пересечения все три линии разреза взаимноперпендикулярны, то линии разреза являются вместе с тем линиями кривизны тех поверхностей, на которых они лежат.

2. Поверхности второго порядка.

1. Общий вид уравнения поверхностей второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+\\+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

Если обозначим для краткости

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\\a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\\a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\\a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\end{vmatrix};\quad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}$$

$$s=a_{11}+a_{22}+a_{33};\quad t=a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}-a^2_{23}-a^2_{31}-a^2_{12}$$

(причем $a_{ik}=a_{ki}$), то получим при прямоугольных координатах следующие условия для вида поверхностей, представляемых общим уравнением, поскольку оно действительно и не распадается на пару плоскостей:

Эллипсоид при $D<0$, $s\Delta>0$, $t>0$;
Двуполый гиперболоид $D<0$, $s\Delta$ и t не оба >0;
Однополый гиперболоид $D>0$, $s\Delta$ и t не оба >0;
Конус $D=0$, $\Delta\neq0$, кроме того $s\Delta$ и t не оба >0;
Эллиптический параболоид при $\Delta=0$, $D<0$, $t>0$,
Гиперболический параболоид при $\Delta=0$, $D>0$, $t<0$;
Цилиндр при $D=0$, $\Delta=0$.

3. В поверхностях, имеющих центр ($\Delta\gtrless0$), последний получается как точка пересечения следующих плоскостей

$$\begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}&=0\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}&=0\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}&=0\end{aligned}$$

4. Приняв центр поверхности за начало координат, а ее главные оси — за оси координат, получим следующие уравнения поверхностей, имеющих центр:

эллипсоида: $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

однополого гиперболоида: $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$

двуполого гиперболоида: $x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$

Здесь a, b, c обозначают полуоси главных сечений; в первом случае они все действительны; во втором — bi, а в третьем bi и ci означают мнимые полуоси гипербол главных сечений.

Длины полуосей получаем из:

$$a^2 = -D/\lambda_1\Delta, \quad b^2 = -D/\lambda_2\Delta, \quad c^2 = -D/\lambda_3\Delta,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — обозначают действительные корни кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

5. **Конус.** Всякое однородное уравнение второй степени с тремя переменными вида:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0$$

представляет коническую поверхность, вершина которой лежит в начале координат.

Если направляющая кривая конуса, вершина которого совпадает с началом координат, представляет эллипс с полуосями a и b, плоскость которого перпендикулярна к оси z-ов и удалена от начала координат на расстояние h, то уравнение конической поверхности:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/h^2 = 0.$$

Если направляющая конуса представляет окружность радиуса a, то в предыдущем уравнении надо положить $b = a$. (Уравнение прямого кругового конуса).

6. **Шар.** Уравнение шаровой поверхности (начало координат в центре шара):

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Если же ξ, η, ζ, означают координаты центра шаровой поверхности, то ее уравнение: $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = r^2$.

Всякое уравнение вида:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

представляет шаровую поверхность; при этом $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}$;

$$\xi = -\frac{1}{2}A; \quad \eta = -\frac{1}{2}B; \quad \zeta = -\frac{1}{2}C.$$

7. **Параболоид.** Уравнение параболоида в простейшем виде; $x^2/2p \pm y^2/2q = z$. Верхний знак относится к эллиптическому, а нижний к гиперболическому параболоиду; p и q суть параметры парабол главных сечений.

8. **Цилиндр.** Уравнение цилиндрической поверхности, перпендикулярной к одной из координатных плоскостей, определяется уравнением кривой пересечения этой поверхности в соответствующей плоскости.

Если линия пересечения цилиндра с плоскостью xy есть эллипс или гипербола, полуоси которых a и b, а производящие цилиндра образуют углы α, β, γ с координатными осями, то уравнение цилиндрической поверхности:

$$\frac{(x - z\cos\alpha/\cos\gamma)^2}{a^2} \pm \frac{(y - z\cos\beta/\cos\gamma)^2}{b^2} = 1.$$

Знак + для эллиптического, знак − для гиперболического цилиндра.

Простейшее уравнение прямого параболического цилиндра:

$$z = x^2/2p.$$

3. Винтовые поверхности.

1. Если все точки жесткой кривой описывают около одной и той же оси винтовые линии одинакового хода h (стр. 105 и след.), то получается общая винтовая поверхность. Если пересечь винтовую поверхность плоскостью, содержащею ось, то кривая пересечения дает профиль этой винтовой поверхности.

Если ось z-ов является винтовой осью, $z = f(x)$ уравнение профиля в плоскости xz, h — ход витка, u — расстояние точки P поверхности от оси, v — угол, на который это расстояние (параллельно к оси x-ов) повернулось относительно первоначального положения, то при $h = 2\pi c$

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v \quad z = cv + f(u)$$

представляет винтовую поверхность в параметрах. Кривые $u = \text{const}$ суть винтовые линии, $v = \text{const}$ — линии ее профилей. Исключение u, v возможно и дает:

$$z = c\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x} + f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

2. Для $f(u) = 0$ получается обыкновенная винтовая поверхность (витая поверхность) для $h = 0$ — поверхность вращения, кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ являются на ней кругами широты и меридианами.

3. Квадрат линейного элемента

$$ds^2 = [1 + f'(u)^2]\,du^2 + 2cf'(u)\,du dv + (u^2 + c^2)\,dv^2.$$

Каждая винтовая поверхность развертывается на поверхности вращения так, что винтовые линии соответствуют кругам широты.

4. Для витой поверхности (обозначения как в 3) имеем:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + c^2)\,dv^2, \quad E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + c^2;$$

ее винтовые линии и профильные прямые пересекаются везде перпендикулярно.

VIII. ВЕКТОРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.

1. Перемещение, благодаря которому точка P пространства переходит в точку Q, определяется расстоянием (длиною), направлением и смыслом направления участ а PQ, который поэтому может быть назван вектором (от латинского vehere). Всякое представление, которое геометрически может быть выражено как направленное протяжение, также называется вектором сюда относится скорость, ускорение, сила электрического и магнитного поля и т. д. В противоположность этому всякое число и всякая величина, вполне определяемая одним числом, называются скалярами (от латинского scala), как-то: температура, плотность, работа, и т. д. Векторы обозначаются буквой с черточкой наверху:

$$\overline{PQ} = \overline{v}.$$

Задачей векторического исчисления является составление формальных правил, согласно которым, с целью уменьшения умственной работы, можно было бы также «считать» с векторами как с числами. Однако соответственно геометрическому определению вектора и эти правила исчисления должны иметь геометрическую природу. Эти правила покоятся на произвольных допущениях, которые однако приноровлены к потребностям геометрии, механики, математической физики и техники. Надо заметить, что уже доказана невозможность перенести все правила исчисления с числами на исчисление с векторами в пространстве.

2. Два вектора $\overline{PQ} = \overline{v}$ и $\overline{RS} = \overline{m}$, тогда и только тогда между собою равны, когда оба соответствуют одному и тому же перемещению в пространстве, т. е. имеют одинаковую длину, направление и смысл направления; это свободные векторы. Свободный вектор может следовательно быть перемещаем в пространстве как угодно параллельно самому себе, причем длина и смысл направления остаются неизменными.

Вектор $\overline{OP} = \overline{r}$ с неизменной начальной точкой называется радиус-вектором. Два радиус-вектора тогда между собою равны, когда они идентичны, т. е. вполне совпадают.

3. Мерой длины вектора v является его (абсолютное) значение; он обозначается через $|\overline{v}|$, причем всегда $|\overline{v}| \geqq 0$. «Величина» скорости, ускорения, силы, «интенсивность» магнитной или электрической силы поля являются такими значениями векторов. Значение вектора естественно является скаляром *.

Вектор, начальная и конечная точки которого совпадают, называется нулевым вектором и обозначается просто через 0. Его значение равно нулю, его направление неопределенно.

4. Под $-\overline{v} = \overline{QP}$ понимают вектор той же длины, что и $\overline{v} = \overline{PQ}$ и параллельный ему, но с противоположным направлением. Имеем

$$|-\overline{v}| = |\overline{v}|.$$

Если m число, отличное от нуля, то через $m\overline{v} = \overline{v}m = \overline{m}$ обозначают вектор, который при $m > 0$ параллелен и одинаково направлен ($\uparrow\uparrow$) с вектором v, а при $m < 0$ параллелен и противоположно ($\uparrow\downarrow$) направлен и которого значение в $|m|$ раз больше, чем значение $\overline{w} \uparrow\uparrow \overline{v}$ для $m > 0$ $\overline{m} \uparrow\downarrow \overline{v}$ при $m < 0$; $|\overline{w}| = |\overline{m}| \cdot |\overline{v}|$.

* Абсолютное значение величины m также обозначают через $|m|$, но обращение тут невозможно.

При $m = 0$, имеем $m\overline{v} = 0$. Черт. 47 показывает вектор $\overline{v}$, $2\overline{v}$, $-\frac{1}{2}\overline{v}$.

Имеем

$$\lambda(\mu\overline{v}) = \mu(\lambda\overline{v}) = \lambda\mu\overline{v}.$$

5. Вектор $\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}$ есть вектор параллельный и одинаково направленный к вектору $\overline{v}$ ($\neq 0$) со значением равным единице; это есть соответственный $\overline{v}$ вектор-единица; его обозначают через $\overline{v}^0$ (v в степени 0). Имеем следов.

$$\overline{v} = |\overline{v}| \cdot \overline{v}^0.$$



Черт. 47.

6. Если путем параллельного перемещения прибавить к вектору $\overline{AB} = \overline{a}$ вектор $\overline{BC} = \overline{b}$ (черт. 48), то $\overline{AC} = \overline{c}$ называется суммой (составляющей) от $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}.$$

Сумма векторов $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{BC'} = -\overline{b}$ называется разностью $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{d} = \overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b}).$$



Черт. 48.

В параллелограме, определяемом $\overline{a}$ и $\overline{b}$, имеем $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$, соответствующие диагоналям черт. 49.

Имеем следующие правила:

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (Закон перестановки в сложении)

$\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + b) + \overline{c}$ (Закон соединения)

$\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$ (Закон распределения)

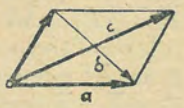
$\overline{a} - \overline{a} = 0$.

Далее имеем $|\overline{a} + \overline{b}| \geqq |\overline{a}| + |\overline{b}|$, где знак равенства имеет место при $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$. Если

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n = \overline{b}\,D,$$

то эти последовательные n векторов образуют замкнутый (вообще говоря, косой) многогранник с n сторонами.

7. Пусть α, β, γ, δ суть неравные нулю скаляры, а $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ — неравные нулю векторы; в этом случае получаем следующие теоремы (и им обратные).



Черт. 49.

a) Если $\overline{A}$ параллельно $\overline{B}$, то $\alpha\overline{A} + \beta B = 0$.

b) Если $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ параллельны одной и той же плоскости (компланарные векторы), но ни один из них не параллелен двум другим векторам, то

$$\alpha\overline{A} + \beta\overline{B} + \gamma\overline{C} = 0.$$

c) Если $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ расположены как угодно, но среди них нет трех компланарных и нет двух взаимно-параллельных, то

$$\alpha\overline{A} + \beta\overline{B} + \gamma\overline{C} + \delta\overline{D} = 0.$$

Отсюда вытекают следующие формулы:

A. Всякий вектор $\overline{B}$, параллельный вектору $\overline{A}$ ($\neq 0$), может быть представлен в виде:

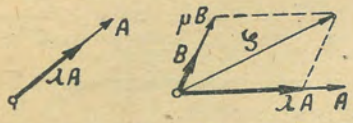
$$\overline{B} = \lambda\overline{A}$$

притом только одним способом (черт. 50).

B. Если $\overline{A}(\neq 0)$ и $\overline{B}(\neq 0)$ между собою не параллельны, то всякий вектор $\overline{C}$, компланарный с $\overline{A}$ и $\overline{B}$, может быть представлен в виде:

$$\overline{C} = \lambda\overline{A} + \mu\overline{B}$$

притом только одним способом (черт. 54).



Черт. 50.

C. Если $\overline{A}(\neq 0)$, $\overline{B}(\neq 0)$ и $\overline{C}(\neq 0)$ не компланарны, и среди них нет двух взаимно-параллельных, то всякий вектор $\overline{D}$ может быть представлен в виде:

$$\overline{D} = \lambda\overline{A} + \mu\overline{B} + \nu\overline{C}$$

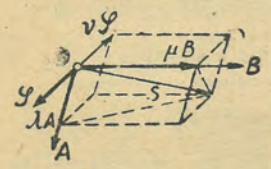
притом одним только способом (черт. 51).

Если $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ суть векторы-единицы, то величины λ, μ, ν называются координатами вектора $\overline{D}$ в отношении векторов $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

8. Под **углом** $\overset{\frown}{AB}$ понимают **наименьший** из углов, образуемых направлениями $\overline{A}$ и $\overline{B}$:

$$0 \leqq \overset{\frown}{AB} \leqq \pi.$$

$$\overset{\frown}{BA} = -\overset{\frown}{AB};\ \cos\overset{\frown}{BA} = \cos\overset{\frown}{AB};\ \sin\overset{\frown}{BA} = -\sin\overset{\frown}{AB}.$$



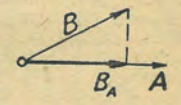
Черт. 51.

9. **Внутреннее (скалярное) произведение:**

$$\overline{A}\overline{B} = (\overline{A}\overline{B}) =$$

$$= |\overline{A}| \cdot |\overline{B}| \cdot \cos\overset{\frown}{AB}$$

является числом [скаляр *].



Черт. 52.

Пример: сила $\overline{P}$, неизменная по величине и направлению, совершает вдоль направленного (прямого) участка пути $\overline{S}$ работу

$$A = \overline{P}\overline{S} = |\overline{P}| \cdot |\overline{S}| \cdot \cos\overset{\frown}{PS}.$$

$\overline{B}\overline{A} = \overline{A}\overline{B}$ (закон переместительности внутреннего произведения)

$\overline{A}(\overline{B} + \overline{C}) = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C}$ (закон распределения)

$(\lambda\overline{A})\,\overline{B} = \lambda(\overline{A}\overline{B}) = \lambda\overline{A}.$

Если $\overline{A}\overline{B} = 0$, то $\overline{A} = 0$ или $\overline{B} = 0$ или $\overline{A} \perp \overline{B}$ и наоборот.

При $\overline{B} = \overline{A}$ получается $\overline{A}\overline{A} = \overline{A}^2 = |\overline{A}|^2$ norm от $\overline{A}$.

$(\overline{A} \pm \overline{B})^2 = \overline{A}^2 \pm 2\,AB + \overline{B}^2$ (закон косинуса).

$$(\overline{A} + \overline{B})^2 - (\overline{A} - \overline{B})^2 = 4\,\overline{A}\overline{B}.$$

10. Для проекции $\overline{B}$ на $\overline{A}(\neq 0)$ получаем (черт. 52):

$$\overline{B}_{\overline{A}} = \frac{\overline{A}\overline{B}}{\overline{A}^2} \cdot \overline{A} = (\overline{A}\,\overline{B}) \cdot \overline{A}^\circ.$$

(Надо помнить, что сокращение векторных множителей недопустимо).



Черт. 53.

11. Три некомпланарных вектора $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ образуют в этой последовательности **положительный** (или **с правым вращением**) трехгранник, если вращение направления $\overline{u}$ по кратчайшему направлению к $\overline{v}$, сопровождаемое одновременным перемещением по направлению $\overline{w}$ приводит к правому вращению (черт. 54 и 55).

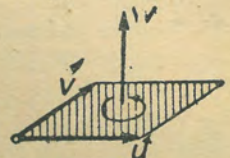
Правозакрученный трехгранник характеризуется $\overline{u}\overline{v}\overline{w} > 0$, а левозакрученный $\overline{u}\overline{v}\overline{w} < 0$; ср. 13.



Черт. 54.

12. **Внешнее (векторное, векториальное) произведение** векторов $\overline{u}$, $\overline{v}$ есть вектор $\overline{w}$, однозначно определяемый следующими тремя положениями.

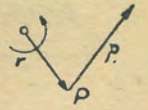
1. $\overline{w} \perp \overline{u}$, $\overline{w} \perp \overline{v}$.



Черт. 55.

Таким образом векторное произведение $[\overline{uv}] = \overline{w}$ есть **вектор**, перпендикулярный к плоскости векторов $\overline{u}$, $\overline{v}$. 2) Длина этого вектора численно равна площади параллелограма, образованного из $\overline{u}$ и $\overline{v}$. 3) Направление этого вектора определяется условием, чтобы векторы $\overline{u}$, $\overline{v}$, $[\overline{uv}]$ этой последовательности образовали правозакрученный трехгранник (черт. 55).

Примеры: Момент вращения силы $\overline{P}$ по отношению к точке вращения O и точке приложения силы P, где $\overline{OP} = \overline{r}$, выражается векторным произведением $\overline{M} = [\overline{rP}]$, чем одновременно определяется и смысл вращения (черт. 56).



Черт. 56.

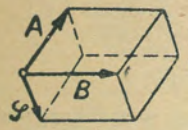
Угловая скорость твердого тела, точка которого находится на расстоянии r от оси вращения, и движется со скоростью $\overline{v}(\perp \overline{r})$, — определяется по величине и смыслу вращения вектором

$$\overline{w} = \frac{[\overline{rv}]}{r^2};\quad [\overline{wr}] = \overline{v}.$$

Имеем:

$[\overline{vu}] = -[\overline{uv}]$ (закон переместительности здесь не применим), $[\overline{U}(\overline{A} + \overline{B})] = [\overline{U}\overline{A}] + [\overline{U}\overline{B}]$ (закон распределения).

$$\lambda[\overline{U}\overline{V}] = [\lambda\overline{U}\overline{V}] = [\overline{U}\lambda\overline{V}].$$



Черт. 57.

Если $[\overline{U}\overline{V}] = 0$, то $\overline{U} = 0$, или $\overline{V} = 0$, или $\overline{U} \parallel \overline{V}$ и наоборот $[\overline{U}\overline{U}] = 0$,

$$[\overline{U}\overline{V}]^2 = \overline{U}^2\overline{V}^2 - (\overline{U}\overline{V})^2,$$

$$[(\overline{U} - \overline{V})(\overline{U} + \overline{V})] = 2\,[\overline{U}\overline{V}].$$

13. При трех векторах закон соединения не приложим ни для внутреннего, ни для внешнего произведения, но имеем $\overline{A}\,[\overline{B}\overline{C}] = \overline{B}\,[\overline{C}\overline{A}] = \overline{C}\,[\overline{A}\overline{B}]$. Этот скаляр, неизменный от циклической перестановки величин $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, обозначается через $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ или $(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$; по абсолютной величине он равен объему параллелепипеда из трех векторов $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$; он положителен, если $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ образуют положительную систему (черт. 57).

$$\overline{A}\overline{C}\overline{B} = \overline{C}\overline{B}\overline{A} = \overline{B}\overline{A}\overline{C} = -\overline{A}\overline{B}\overline{C}.$$

$|\overline{A}\overline{B}\overline{C}| \leqq |\overline{A}| \cdot |\overline{B}| \cdot |\overline{C}|$.

$|\overline{A}\overline{B}\overline{C}| = |\overline{A}| \cdot |\overline{B}| \cdot |\overline{C}|$, если $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ все взаимно-перпендикулярны.

$\overline{A}\overline{B}\overline{C} = 0$, если $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{C}$ компланарны.

* Для скалярного произведения употребляют также обозначения $S\overline{AB}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A} \times \overline{B}$, $(\overline{A}, \overline{B})$, но они не рекомендованы AEF.

14. $(\bar{A}\bar{B}\bar{C})\,(\bar{U}\bar{V}\bar{W}) = \begin{vmatrix} \bar{A}\bar{U} & \bar{A}\bar{V} & \bar{A}\bar{W} \\ \bar{B}\bar{U} & \bar{B}\bar{V} & \bar{B}\bar{W} \\ \bar{C}\bar{U} & \bar{C}\bar{V} & \bar{C}\bar{W} \end{vmatrix}$; $\quad (\bar{A}\bar{B}\bar{C})^2 = \begin{vmatrix} \bar{A}^2 & \bar{A}\bar{B} & \bar{A}\bar{C} \\ \bar{A}\bar{B} & \bar{B}^2 & \bar{B}\bar{C} \\ \bar{A}\bar{C} & \bar{B}\bar{C} & \bar{C}^2 \end{vmatrix}$

$(\bar{A}\bar{B}\bar{C})^2 = \bar{A}^2\bar{B}^2\bar{C}^2 - \bar{A}^2(\bar{B}\bar{C})^2 - \bar{B}^2(\bar{C}\bar{A})^2 - \bar{C}^2(\bar{A}\bar{B})^2 + 2(\bar{A}\bar{B})(\bar{B}\bar{C})(\bar{C}\bar{A})$.

$[(\bar{A}\bar{B}\bar{C})^2] = [\bar{A}\bar{A}][\bar{B}\bar{C}][\bar{C}\bar{A}]$.

15. Теорема развития:

$$[\bar{A}[\bar{B}\bar{C}]] = (\bar{A}\bar{C})\cdot\bar{B} - (\bar{A}\bar{B})\cdot\bar{C} = [[\bar{C}\bar{B}]\bar{A}].$$
$$[\bar{A}[\bar{B}\bar{C}]] + [\bar{B}[\bar{C}\bar{A}]] + [\bar{C}[\bar{A}\bar{B}]] = 0.$$

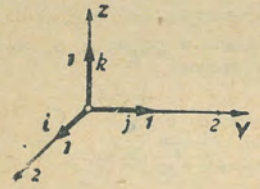
16. $[\bar{A}\bar{B}][\bar{C}\bar{D}] = (\bar{A}\bar{C})(\bar{B}\bar{D}) - (\bar{B}\bar{C})(\bar{A}\bar{D})$.

$[[\bar{A}\bar{B}][\bar{C}\bar{D}]] = (\bar{A}\bar{B}\bar{D})\cdot\bar{C} - (\bar{A}\bar{B}\bar{C})\cdot\bar{D} = (\bar{A}\bar{C}\bar{D})\cdot\bar{B} - (\bar{B}\bar{C}\bar{D})\cdot\bar{A}$.

$(\bar{A}\bar{B}\bar{C})\cdot\bar{D} = (\bar{B}\bar{D})[\bar{C}\bar{A}] + (\bar{C}\bar{D})[\bar{A}\bar{B}] + (\bar{D}\bar{A})[\bar{B}\bar{C}]$.

$[\bar{A}\bar{U}][\bar{B}\bar{V}][\bar{C}\bar{W}] = (\bar{A}\bar{U}\bar{V})(\bar{B}\bar{C}\bar{W}) - (\bar{A}\bar{B}\bar{U})(\bar{C}\bar{V}\bar{W})$.

17. $(\bar{A}\bar{B}\bar{C})\,V = (\bar{V}\bar{B}\bar{C})\,\bar{A} + (\bar{V}\bar{C}\bar{A})\,\bar{B} + (\bar{V}\bar{A}\bar{B})\,\bar{C}$.



Черт. 58.

$$\begin{vmatrix} \bar{A}\bar{A}' & \bar{B}\bar{A}' & \bar{C}\bar{A}' & \bar{D}\bar{A}' \\ \bar{A}\bar{B}' & \bar{B}\bar{B}' & \bar{C}\bar{B}' & \bar{D}\bar{B}' \\ \bar{A}\bar{C}' & \bar{B}\bar{C}' & \bar{C}\bar{C}' & \bar{D}\bar{C}' \\ \bar{A}\bar{D}' & \bar{B}\bar{D}' & \bar{C}\bar{D}' & \bar{D}\bar{D}' \end{vmatrix} = 0,$$

где $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{A}'$, $\bar{B}'$, $\bar{C}'$ $\bar{D}'$, любые векторы. Если $\bar{a}$ $\bar{b}$, $\bar{c}$, не компланарны, то-есть $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \neq 0$, то три вектора

$$\bar{a}' = \frac{[\bar{b}\bar{c}]}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}, \quad \bar{b}' = \frac{[\bar{c}\bar{a}]}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}, \quad \bar{c}' = \frac{[\bar{a}\bar{b}]}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

называются обратными к $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Если все векторы имеют общую исходную точку, то система $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ образует угол, полярный к углу $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Имеем

$$\bar{a} = \frac{[\bar{b}'\bar{c}']}{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}, \quad \bar{b} = \frac{[\bar{c}'\bar{a}']}{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}, \quad \bar{c} = \frac{[\bar{a}'\bar{b}']}{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'},$$

$\bar{a}\bar{a}' = \bar{b}\bar{b}' = \bar{c}\bar{c}' = 1$. $\quad (\bar{a}\bar{b}\bar{c})(\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}') = 1$.

$\bar{a}\bar{b}' = \bar{b}\bar{a}' = \bar{b}\bar{c}' = \bar{c}\bar{b}' = \bar{c}\bar{a}' = \bar{a}\bar{c}' = 0$.

$\bar{v} = (\bar{v}\bar{a}')\,\bar{a} + (\bar{v}\bar{b}')\,\bar{b} + (\bar{v}\bar{c}')\,\bar{c} = (\bar{v}\bar{a})\,\bar{a}' + (\bar{v}\bar{b})\,\bar{b}' + (\bar{v}\bar{c})\,\bar{c}'$.

18. Разлагая вектор $\bar{v}$ на два взаимно-перпендикулярные направления из коих одно определяется вектором $\bar{u}$, получаем:

$$\bar{v} = \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{u}^2}\cdot\bar{u} + \frac{[\bar{u}[\bar{v}\bar{u}]]}{\bar{u}^2} = (\bar{u}^0\bar{v})\cdot\bar{u}^0 + [\bar{u}^0[\bar{v}\bar{u}^0]].$$

19. Все приведенные выше определения, теоремы и формулы независимы от системы координат. Прямоугольная, правая картезианская система координат определяется (кроме положения начальной точки O) тремя векторами-единицами i, j, k, основными векторами (ортами), которые взаимно перпендикулярны и в указанной последовательности образуют правую систему, причем их направления последовательно совпадают с положительными осями X, Y, Z. Вместе с тем определяется и масштаб координатных осей (черт. 58).

Имеем

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1,$$
$$ij = jk = ki = 0, \quad ijk = +1.$$

Так что

$$[jk] = i, \quad [ki] = j, \quad [ij] = k.$$

20. Проекции вектора $\bar{A}$ на i, j, k или, что то же самое, на три координатные оси x, y, z пусть будут $\bar{A}_x$; $\bar{A}_y$; $\bar{A}_z$; тогда $\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z$. Координаты $\bar{A}$ пусть будут A_x. A_y, A_z, так что $\bar{A}_x = A_x i$, $\bar{A}_y = A_y j$, $\bar{A}_z = A_z k$.

Имеем

$$\bar{A} = A_x i + A_y j + A_z k = \{A_x, A_y, A_z\}$$
$$\bar{A}^2 = A_x + A_y^2 + A_z^2, \quad |\bar{A}| = +\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = A.$$
$$\cos\overset{\wedge}{\bar{A}i} = A_x : A, \quad \cos\overset{\wedge}{\bar{A}j} = A_y : A, \quad \cos\overset{\wedge}{\bar{A}k} = A_z : A.$$

Эти „косинусы направления" вектора $\bar{A}$ вместе с тем являются координатами вектора-единицы $\bar{A}^0 = \{\cos\overset{\wedge}{\bar{A}i}, \cos\overset{\wedge}{\bar{A}j}, \cos\overset{\wedge}{\bar{A}k}\}$.

21. $\bar{A} + \bar{B} = \{A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z\}$
$= (A_x + B_x)i + (A_y + B_y)j + (A_z + B_z)k$
$\lambda\bar{A} = \{\lambda A_x, \lambda A_y, \lambda A_z\} = \lambda A_x i + \lambda A_y j + \lambda A_z k$
$\bar{A}\bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.

$$[\bar{A}\bar{B}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\,i + (A_z B_x - A_x B_z)\,j + (A_x B_y - A_y B_x)\,k.$$

Координаты $[\bar{A}\bar{l}]$ получаются посредством циклической замены букв x, y, z

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x).$$
$$i = \{1, 0, 0\}, \quad j = \{0, 1, 0\}, \quad k = \{0, 0, 1\}.$$

22. Вектор, направление и величина которого зависят от одной или нескольких скалярных переменных, называется переменным вектором. Непрерывность и диференцируемость по скалярным переменным у векторов та же, что и у скалярных функций; например, производная вектора $\bar{v}(t)$ по переменной t равна

$$\bar{v}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{v}(t+h) - \bar{v}(t)}{h},$$

диференциал равен

$$d\bar{v} = \bar{v}'(t)\,dt$$

и т. д Имеем

$$\bar{v}(t+h) = \bar{v}(t) = \frac{h}{1}\bar{v}'(t) = \frac{h^2}{2}\bar{v}''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\bar{v}^{(n)}(t) + \frac{h^n}{n!}\bar{v}(t, h),$$

где $\bar{w}(t, h) \to 0$ при $h \to 0$.

$$\bar{v}d\bar{v} = |\bar{v}|\,d\,|\bar{v}|, \quad -|d\bar{v}| < d\,|\bar{v}| < |d\bar{v}|,$$

Когда длина $\bar{v}$ остается неизменной, то $\bar{v}d\bar{v} = 0$.

Когда направление $\bar{v}$ остается неизменным, то $[\bar{v}d\bar{v}] = 0$.

$$\bar{v}^0 d(\bar{v}^0) = 0.$$

23. $d(\bar{u}+\bar{v})=d\bar{u}+d\bar{v}$

$d(\bar{u}\bar{v})=d\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{u}d\bar{v}$

$d[\bar{u}\bar{v}]=[d\bar{u}\bar{v}]+[\bar{u}d\bar{v}]$

$d(\bar{u}\bar{v}\bar{w})=(d\bar{u})\bar{v}\bar{w}+\bar{u}(d\bar{v})\bar{w}+\bar{u}\bar{v}(d\bar{w})=$

$=\bar{u}\bar{v}d\bar{w}+\bar{v}\bar{w}d\bar{u}+\bar{w}\bar{u}d\bar{v}.$

$d\bar{A}=\{dA_x, dA_y, dA_z\},$

$d\bar{r}=\{dx\ dy\ dz\}\quad |d\bar{r}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=ds.$

есть длина элемента пространственной кривой (стр. 125). Вектор-единица $\frac{d\bar{r}}{ds}=\bar{t}$ имеет направление касательной к этой пространственной кривой, которая описывается конечной точкой P переменного радиус-вектора $\overline{OP}=\bar{r}$ (тангенциальный вектор).

24. Векторное поле есть часть пространства, в котором каждой точке принадлежит некоторый вектор $\bar{A}$ (вектор поля); через $|\bar{A}|$ обозначают силу (интенсивность) поля в данной точке. Кривые, тангенциальные векторы которых в каждой точке совпадают с вектором $\bar{A}^0$, называются векторными или силовыми линиями. Они определяются векторным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$[\bar{A}d\bar{r}]=0 \quad \text{или} \quad \bar{A}^0=\frac{d\bar{r}}{ds}=\bar{t},$$

совпадающим со скалярными дифференциальными уравнениями

$$dx:dy:dz=A_x:A_y:A_z.$$

Через обыкновенную точку однозначного векторного поля не могут пройти две различные силовые линии. Это не относится к особым точкам, где $|\bar{A}|=0$ или $|\bar{A}|=\infty$.

25. Скалярное поле есть часть пространства, каждой точке которого соответствует значение скалярной функции φ. Поверхности $\varphi=\text{const}$ называются поверхностями уровня скалярного поля. В однозначном скалярном поле через общую точку не могут пройти две различные поверхности уровня. Каждому непрерывному скалярному полю соответствует векторное поле, вектор которого указывает направление наибольшего изменения функции φ и которого значение равно этому изменению $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right|$. Он называется градиентом φ, grad φ. Имеем:

$$d\varphi=\operatorname{grad}\varphi\cdot d\bar{r}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz.$$

Силовые линии grad φ пересекают поверхности уровня $\varphi=\text{const}$ нормально.

Если grad $\varphi=\bar{G}$, то φ называется потенциалом вектора $\bar{G}$.

26. $\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}i+\frac{\partial\varphi}{\partial y}j+\frac{\partial\varphi}{\partial z}k.$

$$(\operatorname{grad}\varphi)^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

(Диференциальный параметр 1-го порядка),

$\operatorname{grad}(C\varphi)=C\operatorname{grad}\varphi$, где C есть скалярная постоянная,

$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi,$

$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi,$

$\operatorname{grad}F(\varphi)=F'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi.$

27. Градиент можно определить как пространственное диференцирование скалярной функции φ при помощи векторного диференциатора „набла“:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k,$$

так что

$$\nabla\varphi=\operatorname{grad}\varphi$$

Знак ∇ есть знак действия, аналогичный знаку d обычного (скалярного) диференциального исчисления; так как результат диференцирования не зависит от выбора прямолинейных координат, то ∇ имеет значение вектора, подчиняющегося правилам векториального анализа, слагающие которого, однако являются не числами, а знаками диференцирования. В качестве диференциатора ∇ действует на стоящие от него вправо скалярные функции и переменные векторы, поскольку они связаны с ним произведением; диференциатор не действует на написанные влево от него скаляры или векторы. Ввиду этого при вычислениях со знаком ∇ нельзя менять порядка символов.

28. Применение знака ∇ к вектору $\bar{A}$ приводит к *

$$\nabla\bar{A}=\operatorname{div}\bar{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\ \text{(скаляр!)}$$

и 2)

$$[\nabla\bar{A}]=\operatorname{rot}\bar{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)k.$$

29. $\operatorname{div}(\lambda\bar{A})=\lambda\operatorname{div}\bar{A}+(\operatorname{grad}\lambda,\ \bar{A})$

$\operatorname{rot}(\lambda\bar{A})=\lambda\operatorname{rot}\bar{A}+[\operatorname{grad}\lambda,\ \bar{A}]$

$\operatorname{div}(\bar{A}+\bar{B})=\operatorname{div}\bar{A}+\operatorname{div}\bar{B}$

$\operatorname{rot}(\bar{A}+\bar{B})=\operatorname{rot}\bar{A}+\operatorname{rot}\bar{B}$

30. Если $\bar{t}=\frac{d\bar{r}}{ds}=\left\{\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right\}$ тангенциальный вектор пространственной кривой, то

$$(\bar{t}\nabla)\bar{A}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial x}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial y}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial z}=\frac{d\bar{A}}{ds}$$

есть изменение $\bar{A}$ по направлению ds (или $\bar{t}$).

* Вместо rot $\bar{A}$ – комиссией AEF не рекомендуется — пишут также и curl $\bar{A}$, quirl $\bar{A}$.

$(\bar{B}\nabla)\bar{A} = |\cdot\bar{B}\cdot(\bar{B}^0\nabla)\bar{A}$ есть изменение $\bar{A}$ по направлению $\bar{B}$, помноженное на значение $\bar{B}$.

31. $\operatorname{div}[\bar{A}\bar{B}] = B\operatorname{rot}\bar{A} - \bar{A}\operatorname{rot}\bar{B}$

$\operatorname{rot}[\bar{A}\bar{B}] = (\bar{B}\nabla)\bar{A} - (\bar{A}\nabla)\bar{B} + \bar{A}\operatorname{div}\bar{B} - \bar{B}\operatorname{div}\bar{A}$

$\operatorname{grad}(\bar{A}\bar{B}) = (\bar{B}\nabla)\bar{A} + (\bar{A}\nabla)\bar{B} + [\bar{A}\operatorname{rot}\bar{B}] + [\bar{B}\operatorname{rot}\bar{A}]$

$\operatorname{grad}\bar{A}^2 = (\bar{A}^0\nabla)\bar{A} + [\bar{A}^0\operatorname{rot}\bar{A}]$

$(A^0\nabla)\bar{A}^0 + [\bar{A}^0\operatorname{rot}\bar{A}^0] = 0.$

32. $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle$ (дифференциатор 2-го порядка)

$\nabla^2\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \triangle\varphi$ (дифференциальный параметр 2-го порядка)

$\nabla(\nabla\bar{A}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{A}$

$[\nabla[\nabla\bar{A}]] = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{A}) = \operatorname{rot}^2\bar{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{A} - \triangle\bar{A}$

$[\nabla\nabla\varphi] = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$

$\nabla[\nabla\bar{A}] = \operatorname{div}\operatorname{rot}A = 0$

$\triangle(\varphi\psi) = \varphi\triangle\psi + \psi\triangle\varphi + 2\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi.$

33. $[[\nabla\bar{A}]\bar{B}] = (\nabla B)\bar{A} - \nabla(\bar{A}\bar{B}) = (\nabla B)A - \operatorname{grad}(\bar{A}\bar{B})$

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\operatorname{div}\bar{D} = [\bar{A}\bar{B}](\bar{C}\nabla)\bar{D} + [\bar{B}\bar{C}](\bar{A}\nabla)\bar{D} + [\bar{C}\bar{A}](\bar{B}\nabla)\bar{D}.$

34. Пусть $\bar{r} = \{x, y, z\}$ есть радиус-вектор, $r = |\bar{r}|$, $r^0 = \dfrac{\bar{r}}{r}$ соответственный вектор-единица, $\bar{c}$ постоянный вектор; тогда

$$\operatorname{grad} r = \bar{r}^0, \quad \operatorname{grad}(\bar{c}\bar{r}) = c, \quad \operatorname{grad}(r^{-1}) = -\frac{\bar{r}^0}{r^2}, \quad \operatorname{grad} f(r) = f'(r)\bar{r}^0$$

$$\operatorname{div}\bar{r} = 3, \quad \operatorname{div}\bar{r}^0 = \frac{2}{r}, \quad \operatorname{div}\left(\frac{\bar{r}^0}{r^2}\right) = 0,$$

$$\operatorname{div}[\bar{c}\bar{r}] = 0, \quad \operatorname{div}(f(r)\bar{r}^0) = 2\frac{f(r)}{r} + f'(r),$$

$$\operatorname{rot}\bar{r} = 0, \quad \operatorname{rot}[\bar{c}\bar{r}] = 2c, \quad \operatorname{rot}(f(r)\bar{r}) = 0,$$

$$(\bar{c}\nabla)\bar{r} = \bar{c}, \quad \triangle\frac{1}{r} = 0.$$

35. Конечная точка радиус-вектора $\bar{r}(u)$, зависящего от скалярной переменной u, описывает пространственную кривую; конечная точка $\bar{r}(u, v)$ описывает кривую поверхность, на которой кривые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ образуют сеть. Конечная точка $\bar{r}(u, v, w)$ описывает часть пространства, определенным образом подразделяемую поверхностями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$ (u, v, w называются криволинейными координатами); см. стр. 106.

Квадрат линейного элемента любой кривой на поверхности равняется $d\bar{r}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, где

$$E = \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}, \quad G = \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right)^2;$$

$F \equiv 0$ значит, что кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ взаимно пересекаются под прямыми углами.

Вектор элемента поверхности $d\bar{f} = \left[\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u}\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]du\,dv$ значения $|d\bar{f}| = d\sigma$ равен $\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$.

Элемент объема пространства

$$d\tau = \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial w}\right)du\,dv\,dw.$$

Имеем

$$\operatorname{rot}\bar{A}d\bar{f} = \left(\frac{\partial\bar{A}}{\partial u}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v} - \frac{\partial\bar{A}}{\partial v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\right)du\,dv,$$

$$\operatorname{div}\bar{A}d\tau = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\bar{A}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{A}\frac{\partial\bar{r}}{\partial w}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\bar{A}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right)\right]du\,dv\,dw.$$

Векторы $\left(\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u}\right)^0 = e_1$, $\left(\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right)^0 = e_2$, $\left(\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial w}\right)^0 = e_3$ являются тангенциальными векторами трех координатных линий, вдоль которых пересекаются в пространстве поверхности $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$, в конечной точке $OP = \bar{r}$. Пусть вектор-поле $\bar{A}$ разложен на слагающие по отношению к e_1, e_2, e_3. Тогда $\bar{A} = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$, причем $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$.

36. Цилиндрические координаты.

$$\bar{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ w\}$$

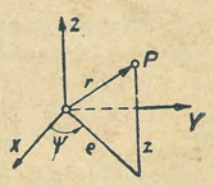
$u = \rho$, $v = \psi$, $w = z$ (черт. 59)

$$d\tau = u\,du\,dv\,dw$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}e_1 + \frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}e_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial w}e_3$$

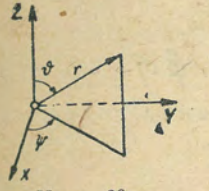
$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{1}{u}\frac{\partial(uA_1)}{\partial u} + \frac{1}{u}\frac{\partial A_2}{\partial v} + \frac{\partial A_3}{\partial w}$$

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$



Черт. 59.

$$\triangle\varphi = \frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}.$$



Черт. 60.

Шаровые полярные координаты.

$$\bar{r} = \{u\cos v\sin w,\ u\sin v\sin w,\ u\cos w\}$$

$u = |\bar{r}|$, $v = \psi$, $w = \vartheta$ (черт. 60)

$$d\tau = u^2\sin w\,du\,dv\,dw$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}e_1 + \frac{1}{u\sin v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}e_2 + \frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}e_3$$

$$\operatorname{div}\bar{A}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}(u^2A_1)+\frac{1}{u\sin w}\frac{\partial A_2}{\partial v}+\frac{1}{u\sin w}\frac{\partial}{\partial w}(\sin wA_3)$$

$$\operatorname{rot}\bar{A}=-\begin{vmatrix} e_2 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{1}{u\sin w}\frac{\partial}{\partial v} & \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial w} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta\varphi=\frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{1}{u^2\sin^2 w}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{1}{u^2\sin w}\frac{\partial}{\partial w}\left(\sin w\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right).$$

37. a) Криволинейный интеграл вектора $\bar{A}$ вдоль участка кривой C, распространенный от точки P_1 до P_2:

$$\int\limits_{P_1}^{P_2}\bar{A}d\bar{r}=\int\limits_{(C)}^{P_2}(A_xdx+A_ydy+A_zdz).$$

Криволинейный интеграл всегда является скаляром.

Пример: Работа силы $\bar{K}$ вдоль участка цепи (C) от P_1 до P_2 является криволинейным интегралом

$$A=\int\limits_{P_1(C)}^{P_2}\bar{K}d\bar{r}.$$

b) Скалярный интеграл площади вектора $\bar{A}$ по ограниченной поверхности F или векторный поток $\bar{A}$ сквозь участок поверхности F:

$$\int\limits_{(F)}(\bar{A}d\bar{f})=\iint\limits_{(F)}\left(\bar{A}\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right)du\,dv=\iint\limits_{(F)}|\bar{A}|\cos\widehat{nA}\,\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

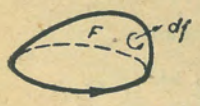
где $\bar{n}$ есть вектор-единица нормали к поверхности.

c) Векторный интеграл площади:

$$\int\limits_{(F)}[\bar{A}d\bar{f}]=\iint\limits_{(F)}\left[\bar{A}\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]\right]du\,dv.$$

Криволинейный интеграл, распространенный по замкнутой кривой (без двойных точек), называется интегралом по краю. Интеграл поверхности, распространенный по замкнутой поверхности (простого строения), называется интегралом по оболочке, или круговым интегралом. Такие интегралы обозначаются через $\oint$.

$$\oint d\bar{r}=0,\qquad \oint d\bar{f}=0.$$



Черт. 61.

38. Интегральная теорема Стокса:

$$\int\limits_{(F)}\operatorname{rot}\bar{A}d\bar{f}=\int\limits_{C}\bar{A}d\bar{r},$$

причем круговой интеграл должен считаться от линии ограничивающей F так, чтобы $d\bar{f}$ и $d\bar{r}$ определяли правое вращение (черт. 61).

39. Интегральная теорема Гаусса:

$$\int\limits_{(R)}\operatorname{div}\bar{A}d\tau=-\oint\bar{A}d\bar{f},$$

где интеграл по поверхности, ограничивающей объем R, должен быть так направлен, чтобы вектор $d\bar{f}$ был направлен внутрь.

40. $\oint\operatorname{rot}\bar{A}d\bar{f}=0,$

$\oint\bar{r}d\bar{f}=3\tau$, где τ есть объем, заключенный внутри ограничивающей поверхности.

$$\int\limits_{(R)}\operatorname{grad}\varphi\operatorname{rot}\bar{A}d\tau=-\int\varphi\operatorname{rot}\bar{A}d\bar{f},\qquad\int\limits_{(R)}\operatorname{rot}\bar{A}d\tau=-\oint[\bar{A}d\bar{f}].$$

41. Теорема Грина:

$$\oint\operatorname{grad}\psi d\bar{f}=-\int\limits_{(R)}(\varphi\Delta\psi+\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}\psi)\,d\tau,$$

$$\oint(\varphi\operatorname{grad}\psi-\psi\operatorname{grad}\varphi)\,d\bar{f}=\int\limits_{(R)}(\psi\Delta\varphi-\varphi\Delta\psi)\,d\tau,$$

$$\int\varphi d\bar{f}=\int\limits_{(R)}\operatorname{grad}\varphi d\tau,\qquad\oint\limits_{0}\bar{r}^2d\bar{f}=2\int\limits_{(R)}\bar{r}d\tau.$$

42. Пусть τ есть объем, ограниченный оболочкой нижеследующих интегралов, тогда

$$\operatorname{grad}\varphi=-\lim_{\tau\to0}\left(\frac{1}{\tau}\oint\varphi d\bar{f}\right),$$

$$\operatorname{div}\bar{A}=-\lim_{\tau\to0}\left(\frac{1}{\tau}\oint\bar{A}d\bar{f}\right),$$

$$\operatorname{rot}\bar{A}=\lim_{\tau\to0}\left(\frac{1}{\tau}\oint[\bar{A}d\bar{f}]\right).$$

43. Потенциальное (свободное от вихрей) поле: $\operatorname{rot}\bar{A}=0$. В простом связанном *, свободном от вихрей, поле всякий криволинейный интеграл

$$\int\limits_{P_1}^{P_2}\bar{A}d\bar{r}$$

* Поле наз. просто связанным тогда, когда всякая замкнутая кривая ограничивает в нем часть поверхности, целиком расположенную внутри поля.

имеет значение, независящее от вида пути, или $\oint \bar{A}d\bar{r} = 0$.

$$\bar{A} = \operatorname{grad}\varphi, \qquad \varphi = \int_{P_1}^{P_2} \bar{A}d\bar{r}.$$

Потенциал φ однозначен и непрерывен.

В многократно связанном, свободном от вихрей поле имеются многозначные непрерывные потенциалы; их можно сделать однозначными, если ввести поверхности изменений, где потенциалы всегда претерпевают тот же самый скачок. Пример: электрическое поле во внешнем пространстве трансформатора.

44. Поле, свободное от источников: $\operatorname{div}\bar{A} = 0$. В таком поле векторный поток $\int_{(F)} \bar{A}d\bar{f}$ сквозь поверхность с заданной ограничивающей кривой имеет значение, не зависящее от формы поверхности, или $\oint \bar{A}d\bar{f} = 0$. $\bar{A} = \operatorname{rot}\bar{V}$.

45. Слоистое (с нормальными поверхностями) поле: $\bar{V}\operatorname{rot}\bar{A} = 0$. Только в таком поле (а следовательно и в свободном от вихрей) имеются поверхности, которые всегда перпендикулярны к силовым линиям (поверхности уровня).

$$\bar{A} = \lambda \operatorname{grad}\varphi, \qquad \int_{P_1(C)}^{P_2} \bar{A}d\bar{r} = \int \lambda d\varphi,$$

$$\operatorname{div}\bar{A} = \lambda\triangle\varphi + (\operatorname{grad}\lambda \operatorname{grad}\varphi), \qquad \operatorname{rot}\bar{A} = [\operatorname{grad}\lambda \operatorname{grad}\varphi].$$

46. Свободное от вихрей поле определяется указанием его источников ($\operatorname{div}\bar{A} = \rho$), а свободное от источников — его вихрями ($\operatorname{rot}\bar{A} = \bar{R}$); любое поле однозначно определяется его источниками (ρ) и вихрями ($\bar{R}$), поскольку выполнены определенные условия непрерывности.

Аффиноры (тензоры).

47. Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ три (некомпланарных) вектора ($\bar{abc} \neq 0$); равно как и $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ($\bar{uvw} \neq 0$). Если

$$\bar{P} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} \quad \text{и} \quad \bar{Q} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} + \gamma\bar{w},$$

то $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ находятся в аффинорной связи. Согласно 17 имеем

$$\bar{Q} = \bar{u}\cdot\bar{a}'\bar{P} + \bar{v}\cdot\bar{b}'\bar{P} + \bar{w}\cdot\bar{c}'\bar{P},$$

где $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'$ суть векторы, обратные к $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Выражение для $\bar{Q}$ называется линейной векторной функцией от $\bar{P}$ и потому

$$\bar{Q} = \Phi\bar{P}.$$

Буква Φ указывает на линейное преобразование (трансформацию), посредством которого вектор $\bar{P}$ переходит в вектор $\bar{Q}$. Если $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ обозначают наперед заданный трехгранник, то Φ определяется тремя векторами

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ или $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'$. Такую, примененную к вектору, трансформацию пишут в виде

$$\Phi = \bar{u}\cdot\bar{a}' + \bar{v}\cdot\bar{b}' + \bar{w}\cdot\bar{c}'$$

и называют его аффинором [прежде тензором *], а $\bar{Q} = \Phi\bar{P}$ называют „произведением“ аффинора Φ на вектор $\bar{P}$.

48. В особом случае $\bar{u} = i$, $\bar{v} = j$, $\bar{w} = k$ получается

$$\bar{Q} = \Phi\bar{P} = i\cdot\bar{A}\bar{P} + j\cdot\bar{B}P + k\cdot C\bar{P}$$

(здесь вместо $\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'$ написано $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$), а разложение по координатам дает:

$$\begin{aligned} Q_x &= A_xP_x + A_yP_y + A_zP_z \\ Q_y &= B_xP_x + B_yP_y + B_zP_z \\ Q_z &= C_xP_x + C_yP_y + C_zP_z. \end{aligned}$$

Аффинор определяется теперь системой коэффициентов (матриц)

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_xA_yA_z \\ B_xB_yB_z \\ C_xC_yC_z \end{pmatrix}, \qquad \bar{Q} = \begin{pmatrix} A_xA_yA_z \\ B_xB_yB_z \\ C_xC_yC_z \end{pmatrix}\bar{P}$$

49. Если

$$\Phi = \bar{u}\cdot\bar{A} + \bar{v}\cdot\bar{B} + \bar{w}\cdot\bar{C},$$

то

$$\Phi' = \bar{A}\cdot\bar{u} + \bar{B}\cdot\bar{v} + \bar{C}\cdot\bar{w}$$

есть аффинор сопряженный с Φ.

В частном случае (48) $\bar{u} = i$, $\bar{v} = j$, $\bar{w} = k$ получается

$$\bar{Q}' = \Phi'P = \bar{A}\cdot i\bar{P} + \bar{B}\cdot j\bar{P} + \bar{C}\cdot k\bar{P} = P_x\bar{A} + P_y\bar{B} + P_z\bar{C},$$

разложением по координатам:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} A_xB_xC_x \\ A_yB_yC_y \\ A_zB_zC_z \end{pmatrix}, \qquad \bar{Q}' = \begin{pmatrix} A_xB_xC_x \\ A_yB_yC_y \\ A_zB_zC_z \end{pmatrix}\bar{P}.$$

Таким образом Φ' получается из Φ путем замены столбцов и строк.

50. Два аффинора называются между собою равными, если они идентичны. Под суммой $\Phi_1 + \Phi_2$ подразумевают аффинор, превращающий вектор $\bar{P}$ в $\Phi_1\bar{P} + \Phi_2\bar{P}$. Имеем

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \bar{u}\cdot(\bar{A}_1 + \bar{A}_2) + \bar{v}\,(\bar{B}_1 + \bar{B}_2) + \bar{w}\cdot(\bar{C}_1 + \bar{C}_2),$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \begin{pmatrix} A_{1x} + A_{2x} & A_{1y} + A_{2y} & A_{1z} + A_{2z} \\ B_{1x} + B_{2x} & B_{1y} + B_{2y} & B_{1z} + B_{2z} \\ C_{1x} + C_{2x} & C_{1y} + C_{2y} & C_{1z} + C_{2z} \end{pmatrix} = \Phi_2 + \Phi_1.$$

$$\lambda\Phi = \bar{u}\lambda\bar{A} + \bar{v}\lambda\bar{B} + \bar{w}\lambda\bar{C}.$$

51. Симметрическим аффинором называют такой, который совпадает со своим сопряжением: $\Phi = \Phi'$. Переменный аффинор это такой, который противоположен своему сопряженному: $\Phi = -\Phi'$.

Аффинор $\Phi = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix} = (a_{ik})$ $\qquad (i, k = 1, 2, 3)$

* Иногда употребляют термин „диада“; однако этим словом обозначают и более простой случай v-a'. Комиссия АЕЕ еще не выработала своих предложений по аффинорному анализу.

симметричен, если $a_{ik}=a_{ki}$, переменен, если $a_{ik}=-a_{ki}$, так что $a_{ii}=0$. Всякому симметрическому аффинору может быть приписана поверхность второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{31}zx=1,$$

называемая «тензорным эллипсоидом», хотя она и не всегда является эллипсоидом.

Всякий аффинор может быть представлен в виде суммы симметрического и переменного аффинора, а именно

$$\Phi=T+A,,\qquad T=\frac{1}{2}(\Phi+\Phi'),\qquad A=\frac{1}{2}(\Phi-\Phi'),$$

где Φ' есть аффинор, сопряженный с Φ; это разложение возможно лишь одним способом. T называется тензором от Φ, а A — аксиатором от Φ

$$T=\operatorname{ts}\Phi,\qquad A=\operatorname{ax}\Phi.$$

$$\operatorname{ts}\Phi=\begin{vmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & a_{22} & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{ax}\Phi=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(a_{12}-a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13}-a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}-a_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(a_{23}-a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31}-a_{13}) & \frac{1}{2}(a_{32}-a_{23}) & 0 \end{vmatrix}.$$

52. Примеры. a) Тензор напряжения. Упругое состояние тела определяется тремя силами натяжения (или давления) и шестью срезывающими силами, которые могут быть выражены в виде одного аффинора:

$$\begin{pmatrix} X_x Y_x Z_x \\ X_y Y_y Z_y \\ X_z Y_z Z_z \end{pmatrix}$$

Из механики известно, что этот аффинор симметричен, т. е. $Y_x=X_y$, $X_z=Z_x$ $=Y_z$.

b) Три величины, входящие в $\operatorname{ax}\Phi$ могут быть представлены как координаты вектора $\bar{\omega}=\frac{1}{2}(a_{32}-a_{23})\,i+\frac{1}{2}(a_{13}-a_{31})\,j+\frac{1}{2}(a_{21}-a_{12})\,k$. Тогда $\operatorname{ax}\Phi\bar{P}=[\bar{\omega}\bar{P}]$.

В частности (ср. 12) $\operatorname{ax}\Phi\bar{r}=[\bar{\omega}\bar{r}]$ есть скорость вращения $\bar{r}$, если через $\bar{\omega}$ обозначить угловую скорость, при вращении вокруг оси, перпендикулярной к $\bar{r}$.

c) Бесконечно малое измерение вектора $\bar{P}$ под действием уносящей его текущей жидкости, скорость которой пропорциональна вектору $\{u, v, w\}$, выражается векторной функцией

$$\Phi\bar{P}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}\bar{P}.$$

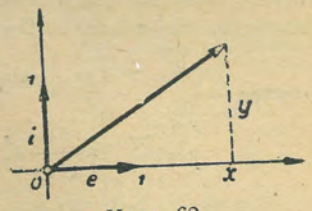
Разложение Φ на его тензор и аксиатор приводит к теореме Гельмгольца, согласно которой всякая бесконечно малая деформация может быть выражена, как соединение чистой деформации (в смысле примера a) и вращения (пример b), причем параллельное перемещение не учитывается.

IX. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ВЕКТОРЫ ПЛОСКОСТИ, ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, КОНФОРМНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ.

A. Комплексные числа и векторы плоскости.

1. На стр. 34 и 44 указаны формальные правила исчислений с комплексными числами. Независимо от этого, комплексные числа могут быть истолкованы с геометрически-векториальной точки зрения, что делает их особенно важными и необходимыми для применений к математической физике, механике и особенно электротехнике.

В дальнейшем будет говориться исключительно о векторах, лежащих в одной плоскости. Обозначим через $\bar{e}$ и $\bar{j}$ два взаимно перпендикулярных вектора-единицы осей x и y; тогда $[\bar{e}\bar{i}]=\bar{k}$ есть вектор-единица, перпендикулярный к рассматриваемой плоскости, обращенной к зрителю. Всякий вектор $\bar{r}$ плоскости может быть представлен в виде $\bar{r}=x\bar{e}+y\bar{i}$, где x, y суть прямоугольные координаты конечной точки радиус-вектора $\bar{r}$ по отношению к системе координат, определяемой векторами $\bar{e}$ и $\bar{i}$. Мы имеем тогда для сложения, вычитания и умножения на (вещественное) число λ,



Черт. 62.

$$\bar{r}\pm\bar{r}'=(x\pm x')\,\bar{e}+(y\pm y')\,\bar{i},$$
$$\lambda\bar{r}=\lambda x\bar{e}+\lambda y\bar{e}.$$

Если $|\bar{r}|=+\sqrt{x^2+y^2}$ и $\varphi=\operatorname{arc}(\bar{r})=$
$=\operatorname{arc}\cos(x/|\bar{r}|)=\operatorname{arc}\sin(y/|\bar{r}|)=\operatorname{arc}\operatorname{tg}(y/x)$

суть полярные координаты конечной точки $\bar{r}$, то

$$\bar{r}=|\bar{r}|\,(\cos\varphi\,\bar{e}+\sin\varphi\bar{i}).$$

Стоящий в скобках вектор

$$\bar{e}_\varphi=\cos\varphi\bar{e}+\sin\varphi\bar{i}$$

является вектором-единицей отклонения (фазы) φ относительно оси x;

$$\bar{e}_0=\bar{e}_0;\quad \bar{e}_{\frac{\pi}{2}}=\bar{i}\ \text{(черт. 62)}.$$

2. Для внутреннего ( ) и внешнего [ ] произведения имеем

$$(\bar{r}\bar{r}')=xx'+yy'=|\bar{r}|\cdot|\bar{r}'|\cos\overset{\frown}{\bar{r}\bar{r}'},\quad (\bar{r}\bar{r})=|\bar{r}|^2,$$
$$[\bar{r}\bar{r}']=(xy'-yx')\cdot\bar{k}=|\bar{r}|\cdot|\bar{r}'|\sin\overset{\frown}{\bar{r}\bar{r}'}\cdot k.$$

Скалярное произведение является вещественным числом, тогда как векторное произведение является вектором, не лежащим в данной плоскости. Это обстоятельство приводит к желательности создания третьего вида умножения двух векторов (лежащих в одной плоскости), при котором и произведение (вектор) также лежит в той же плоскости. Если $\bar{r}=|\bar{r}|\cdot\bar{e}_{\varphi}$, $\bar{r}'=|\bar{r}|\,\bar{e}'_{\varphi}$, то (согласно определению)

$$\bar{r}\bar{r}'=|\bar{r}|\cdot|\bar{r}'|\cdot\bar{e}'_{\varphi+\varphi}=|\bar{r}|\cdot|\bar{r}'|\,(\cos(\varphi+\varphi')\,\bar{e}+\sin(\varphi+\varphi')\,\bar{i}).$$

Этот вид умножения обладает также тем достоинством, что для него остаются в силе законы: 1. переместительности $\bar{r}'\bar{r}=\bar{r}\bar{r}'$; 2. соединения $(\bar{r}\bar{r}')\,\bar{r}''=\bar{r}(\bar{r}'\bar{r}'')=\bar{r}\bar{r}'\bar{r}''$; 3. распределения $(\bar{r}+\bar{r}')\,\bar{r}''=\bar{r}\bar{r}''+\bar{r}'\bar{r}''$.

Этим путем можно также и делить векторы. Под $\bar{r}^{-1}=\dfrac{1}{\bar{r}}$ мы понимаем вектор, который при умножении на $\bar{r}\,(\neq 0)$, согласно данному выше определению, дает вектор $\bar{e}$. Получаем однозначно

$$\bar{r}^{-1}=\frac{1}{\bar{r}}=\frac{1}{|\bar{r}|}\,\bar{e}_{-\varphi}=\frac{1}{|\bar{r}|}\,(\cos\varphi\,\bar{e}-\sin\varphi\,\bar{i}),$$

откуда

$$\frac{\bar{r}'}{\bar{r}}=\bar{r}'\bar{r}^{-1}=\frac{|\bar{r}'|}{|\bar{r}|}\,\bar{e}_{\varphi-\varphi}=\frac{|\bar{r}'|}{|\bar{r}|}\,(\cos(\varphi'-\varphi)\,\bar{e}+\sin(\varphi'-\varphi)\,\bar{i}).$$

Конечно, только что указанное произведение обладает тем недостатком, что оно зависит от выбора вектора $\bar{e}$, т. е. от направления оси абсцисс.

Имеем также

$$\bar{r}\bar{r}=\bar{r}^2=|\bar{r}|^2\bar{e}_{2\varphi}.$$

Если положить здесь

$$\bar{r}=\bar{e}\ \text{и}\ \bar{r}=\bar{i},$$

то получим

$$\bar{e}^2=\bar{e},\quad \bar{i}^2=\bar{e}_{\pi}=-\bar{e}.$$

3. Обычно обозначают векторы по оси x (понимая их всегда как радиус-векторы) просто абсциссами конечных точек, т. е. в виде положительных или отрицательных кратных вектора-единицы $\bar{e}$, а этот последний обозначают через 1; далее, пишут i вместо $\bar{i}$ и z вместо $\bar{e}$ *). Тогда

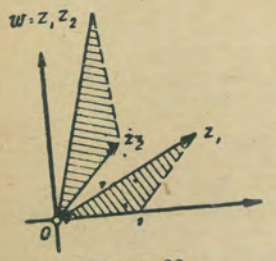
$$i^2=-1,\quad z=x+yi.$$

Не надо только забывать, что здесь x, y суть скаляры (вещественные числа), а i, z — векторы, и не надо удивляться, что полученное для векторов выражение $i^2=-1$ для скаляров (вещественных чисел) не применимо.

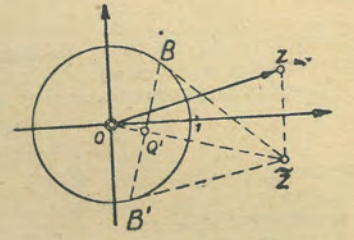
Вектор $z=x+yi$ обнимает два скаляра, последовательность которых фиксирована и называется поэтому „комплексным числом“ (Гаусс), причем термин „число“, до сих пор применявшийся лишь к скалярам в этом смысле, распространяется и на векторы одной плоскости. Основание такого распространения для понятия число заключается в том, что правила исчисления с обычными вещественными числами все без исключения применимы и к векторам плоскости, если вычитание, умножение и деление (согласно 1 и 2) соответственным образом определяется и при вычислениях всегда полагается $i^2=-1$.

Когда пишут $i=\sqrt{-1}$, то это можно и надо рассматривать исключительно как особое начертание векторного уравнения $i^2=-1$, так как

иначе можно впасть в ошибки прошлого или в непонятную мистику, которым нет места в математике и которые сказываются в прежнем названии „мнимые величины“.



Черт. 63.

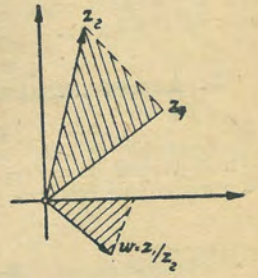


Черт. 64.

Заметим еще, что вектор-единица $\bar{e}_{\varphi}$ по причине, указанной ниже (см. стр. 130), может быть обозначаем и через $e^{i\varphi}$, т. е. имеет место формула Эйлера

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi=e_{\varphi}.$$

4. Умножение $z_1=|z_1|\cdot e_{\varphi_1}$ на $z_2=|z_2|\cdot e_{\varphi_2}$ означает геометрически вращение вектора z_1 на угол φ_2 и одновременно увеличение (или уменьшение) его длины до значения $|z_1|\cdot|z_2|$ (вращательное растяжение). Деление есть не что иное как поворот на $-\varphi_2$ (т. е. в противоположном направлении) и растяжение (или сжатие) его длины до значения $|z_1|:|z_2|$.



Черт. 65.

Геометрическое построение $w=z_1z_2$. Треугольник Oz_2w подобен треугольнику $O\,1\,z_1$ (черт. 63). Умножение на i есть, следовательно, чистый поворот на 90° в положительном направлении.

Геометрическое построение $1/z$. Сперва конструируют сопряженное значение $\tilde{z}=|z|\cdot e_{-\varphi}$ и из точки $\tilde{z}$ проводят касательную к кругу радиуса 1. Прямая BB', соединяющая точки касания, пересекает вектор $\tilde{z}$ в конечной точке Q' искомого вектора $OQ'=1:z$. (Трансформация посредством обратных радиусов или обращение; Q' есть точка, обратная к $\tilde{z}$, черт. 64.)

Геометрическое построение $w=z_1/z_2$. Строят треугольник $O\,1\,w$, подобный треугольнику Oz_2z_1 (черт. 65).



Черт. 66.

Геометрическое построение $\sqrt[n]{z}$. Круг радиуса $\left|\sqrt[n]{|z|}\right|$ с центром в нулевой точке делят на n равных частей, начиная от точки $z_0=+\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{\varphi/n}$. Точки деления дают n значений для $\sqrt[n]{z}$ (черт. 66, где $n=7$).

Если $z_0, z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$ суть те n векторов, которые идут от центра O к точкам деления, то имеем

$$\sum z_k=z_0+z_1+z_2+\ldots+z_{n-1}=0,$$

а также

$$\sum\cos(\varphi/n+k2\pi/n)=0\ \text{и}\ \sum\sin(\varphi/n+k2\pi/n)=0.$$

5. Целесообразно пользоваться векторами в плоскости в применении к периодическим явлениям, которые протекают по закону синусов. Пусть имеем такое синусоидальное колебание (t есть время):

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

его амплитуда A, его фаза колебания ω, следовательно его период (продолжительность колебания) $2\pi/\omega$, его начальная фаза φ_0; это колебание может быть рассматриваемо в качестве слагающей y вектора

$$z = A\mathfrak{e}_{\omega t+\varphi_0} = Ae^{i(\omega t+\varphi_0)}.$$

Сложение двух колебаний y_1 и y_2 в одно общее колебание может быть достигнуто путем сложения соответственных векторов z_1, z_2. Для колебаний с одинаковой ω, так наз. множитель времени $\mathfrak{e}_{\omega t}=e^{i\omega t}$ один и тот же. При вычислениях и конструкциях с такими синхронными векторами можно поэтому пропускать этот множитель и представлять себе, что вся плоскость вращается с неизменной угловой скоростью ω, так как в этом случае существенным является лишь разность фаз векторов. Вместо этого можно рассматривать плоскость как неподвижную, тогда как прямая, проходящая через $z=0$, вращается с угловой скоростью $-\omega$, т. е. в обратном направлении. На этом основаны например диаграммы техники переменных токов.

Б. Аналитические функции комплексной переменной.

Конформное изображение.

1. Функция $w=f(z)$ комплексной переменной $z=x+iy$, имеющая в каждой точке области плоскости z производную

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z) \qquad (1)$$

называется аналитической или правильной в этой области. Разделив вещественную и мнимую части $w=u(x,y)+iv(x,y)$, получаем для аналитической функции:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=-i\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (2)$$

ввиду чего можно применить диференциальные уравнения Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

и потенциальное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \text{ для } \varphi=u \text{ и } v. \qquad (4)$$

Об элементарных функциях см. II E, стр. 68. В частности необходимо указать на то, что вектор $e^x\mathfrak{e}_y=e^x(\cos y+i\sin y)$ представляет аналитическую функцию $z=x+iy$, которой производная тоже равна $e^x\mathfrak{e}_y$; она обладает, следовательно, такими же свойствами, как и вещественная показательная функция; далее, при $z=0$ она принимает значение 1 и обозначается поэтому через e^z. Для $x=0$ получаем тогда

$$e^{iy}=\mathfrak{e}_y=\cos y+i\sin y,$$

т. е. формулу Эйлера.

2. Если приравнять вещественную часть $u(x,y)$ аналитической функции и ее мнимую часть $v(x,y)$ некоторой произвольной постоянной, то на плоскости xy (плоскость z) получается сеть до двух семейств кривых, которые во всех точках пересечения взаимно-перпендикулярны, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Этим семействам соответствует в другой плоскости, плоскости uv (плоскости w) сеть прямых, параллельных осям u и v.

Функция $w=f(z)$ приводит в соответствие каждой точке z плоскости z некоторую точку w в плоскости w; говорят, что обе плоскости изображаются одна на другую. Если функция $w=f(z)$ аналитическая, т. е. когда имеет место одно из условий 1, 2 или 3, то во всех точках, где $f'(z)\neq 0$, две пересекающие кривые плоскости z образуют такой же угол, как соответственные кривые плоскости w в соответственной точке (winkeltreue Abbildung). Кроме того, линейные элементы обеих кривых плоскости z в данной точке находятся взаимно в таком же отношении, как линейные элементы соответственных кривых плоскости w в соответственной точке (сходство в мельчайших частях). Такое изображение посредством аналитической функции называется конформным изображением.

$f'(z)=\frac{dw}{dz}$ называется отношением искажения, так как $|f'(z)|$ измеряет изменение длины, а $\arg(f'(z))$ — вращение, испытываемое небольшим участком плоскости z при изображении.

В. Некоторые частные виды конформных изображений.

1. $w=z+c$, где c есть комплексная постоянная; изображает параллельное перемещение плоскости z на величину вектора c по его направлению и длине.

2. $w=az+b$ ($a\neq 0$ и 1) дает перемещение на b, вращение на $\arg(a)$ и удлинение в отношении $1:|a|$. Точка $z=b/(1-a)$ остается неизменной.

3. $w=1/z$ дает трансформацию при помощи взаимных радиусов (инверсия, зеркальное отражение от круга), как она построена на черт. 68. Точка $z=0$ является „особым центром“ (полюсом) и превращается в „бесконечно-далекую“ точку ($w=\infty$). Внутренняя часть круга-единицы переходит в наружную и наоборот. Точки периферии превращаются в такие же; точки $z=\pm 1$ остаются неизменными. Круги и прямые плоскости z, не проходящие через нулевую точку $z=0$, превращаются в круги плоскости w; круги же и прямые, проходящие через точку $z=0$, превращаются в прямые плоскости w.

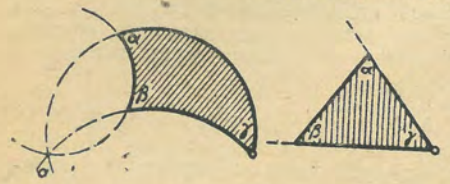
4. $w=l(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ [линейная * функция, $c\neq 0$] превращает совокупность всех кругов плоскости z в совокупность всех кругов плоскости w, поскольку прямые определяются как круги, проходящие через бесконечно-

* Линейная сказано здесь в смысле „линейно дробная“.

далекую точку ($z=\infty$ или $w=\infty$). Обе так называемые „неподвижные точки"

$$A, B=[a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}]:2c$$

плоскости z соответствуют тем же точкам плоскости w. Они совпадают, если $(a-d)^2+4bc=0$: это „параболическая" линейная функция. Линейная функция является единственной, дающей обратимо-однозначное конформное изображение всей плоскости z на всю плоскость w, т. е., что каждой точке первой плоскости соответствует определенная точка второй плоскости и наоборот.



Черт. 67.

$l(z)$ вполне определенно, если заданы три значения w, которые $l(z)$ принимает при трех различных значениях z. Если

$$A=l(\alpha),\ B=l(\beta),\ C=l(\gamma),$$

тогда w получается из

$$\frac{w-A}{w-C}:\frac{B-A}{B-C}=\frac{z-\alpha}{z-\gamma}:\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}$$

или $(w, A, B, C)=(z, \alpha, \beta, \gamma)$, если обозначить таким образом двойное отношение. Двойное отношение четырех точек остается при линейном конформном изображении неизменным.

Некоторые особые случаи.

$w=i\dfrac{z-i}{z+i}$ изображает верхнюю половину плоскости $y>0$ на внутреннюю часть круга-единицы $|w|<1$, а ось x-ов на его край $|w|=1$.

$w=\dfrac{az-b}{\bar{b}z-\bar{a}}$ изображает круг-единицу $|z|\leqq 1$ на круг единицу $|w|\leqq 1$, если $a\bar{a}-b\bar{b}>0$.



Черт. 68-а.

$w=k\cdot\dfrac{z-b}{z-a}$ изображает круговой треугольник плоскости z, сумма углов которого равна двум прямым и стороны которого проходят через одну точку a, на прямолинейный треугольник плоскости w. Угол $z=b$ (при γ) переходит в нулевую точку (черт. 67). Та же самая функция изображает круговой сегмент, состоящий из двух касающихся в точке a кругов плоскости z, — на полосу плоскости w (черт. 68) и круговое кольцо, образованное двумя эксцентрическими кругами плоскости z в концентрическое круговое кольцо плоскости w.



Черт. 68-б.

$w=z+a^2/z$ (a — вещественно). Кругам $|z|=\text{const.}$ плоскости z соответствуют конфокальные эллипсы плоскости w, если $|z|\neq a$, а кругу $|z|=a$ — участок $|u|\leqq 2a$.

5. $w=z^2$. Прямые через точку $z=0$ превращаются в прямые через точку $w=0$, причем каждая поворачивается на двойной угол. Вокруг точки $w=0$ (точка разветвления) изображение углов не получается точным. Вся плоскость z изображается на двойную, из двух частей состоящую плоскость w (двойная плоскость Римана). Кривым $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ плоскости w соответствуют гиперболы $x^2-y^2=u$, $2xy=v$ плоскости z; напротив, параллелям к осям $x=\text{const.}$, $y=\text{const.}$ плоскости z соответствуют конфокальные параболы $v^2=-4x^2(u-x^2)$ и $v^2=4y^2(u+y^2)$ плоскости w.

6. $w=z^n$ ($n>0$ целое число); аналогично предыдущему. Вся плоскость z изображается на n-кратную, из n частей состоящую плоскость w (n-кратная плоскость Римана). Нулевая точка $w=0$ является n-кратной точкой разветвления.

7. $w=z^{1/\alpha}$ (α-вещественно). Внутренняя поверхность угла $\pi\alpha$, вершина которого лежит в нулевой точке $z=0$ и одна из сторон которого лежит на положительной оси x-ов, изображается на полуплоскости $v>0$, а соответственный сектор круга-единицы на верхний полукруг $v=+\sqrt{1-u^2}$.

8. $w=e^z$. Четырем полосам $0\leqq y<\pi/2$, $\pi/2\leqq y<\pi$, $\pi\leqq y<3\pi/2$, $3\pi/2\leqq y<2\pi$ соответствуют по порядку 1, 2, 3 и 4 квадранты плоскости w, всей плоскости z — бесконечно многократная плоскость w, прямых $x=\text{const.}$ соответствуют круги $|w|=e^x=\text{const.}$, прямым $y=\text{const.}$ — прямые $\arg(w)=\text{const.}$

9. $w=\sin z$. Прямым $x=\text{const.}$, $y=\text{const.}$ плоскости z соответствуют в плоскости w конфокальные гиперболы и эллипсы

$$\frac{u^2}{\sin^2 x}-\frac{v^2}{\cos^2 x}=1,\quad \frac{u^2}{\cosh y}+\frac{v^2}{\sinh y}=1.$$

10. $w=\log(z^2-1)$. Прямые $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ плоскости w, параллельные осям, являются изображениями конфокальных кривых Кассини (лемнискат) с фокусами $x=\pm 1$ и равносторонних гипербол, проходящих через те же точки.

11. $w=e^{-2\pi/z}$ изображает пространство вокруг острия, состоящего из $+x$-оси и дуги круга, лежащей в плоскости z и касательной к острию в нулевой точке на пространство вокруг вершины вытянутого угла плоскости w. Точка $z=0$ сама является особой.

Литература. L. Lewent, Konforme Abbildung, Leipzig u. Berlin 1912, B. G. Teubner. — L. Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung, Berlin u. Leipzig 1915, G. J. Göschen, Sammlung Göschen, Bd. 768. — Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882. — Ausgeführte Beispiele bei Th. Meyer, Konforme Abbildung, Z. f. ang. Math. u. Mech. 3, S. 136, 1923. — Дальнейшее можно найти во всех почти учебниках теории функций, напр. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного; Госиздат 1927 г.

X. ПРАКТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА.

1. Пользование логарифмической линейкой.

Для гидротехнических и гидравлических расчетов наиболее употребительна логарифмическая линейка системы Rietz'a. Линейка состоит из трех основных частей.

а) Остов линейки с 4 шкалами (черт. 69).

1-я — логарифмическая шкала — представляет значение мантисс логарифмов для чисел, расположенных во 2-й шкале.

2-я — числовая шкала — представляет нормальный ряд чисел или $\sqrt{n}$ и $\sqrt[3]{n}$, если рассматривать ее как добавление к 3-й и 4-й шкалам.

3-я — квадратичная шкала — представляет квадраты к числам 2-й шкалы.

4-я — кубическая шкала — представляет кубы чисел по отношению к значениям 2-й (числовой) шкалы.

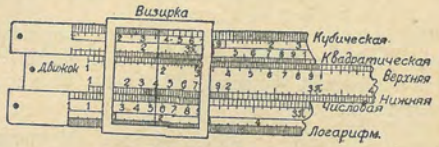
б) Движок с четырьмя шкалами.

1) Нижняя — нормальный ряд чисел.

2) Верхняя — квадраты чисел к нижней шкале.

3) 4 шкалы на обороте движка представляют синусы и тангенсы углов.

в) Визирка — подвижная часть для установки и чтения результатов с одним или тремя визирными линиями.



Черт. 69.

Работа линейкой производится следующим образом:

а) Умножение. Например для умножения 2×3 делаем следующее.

Визирка устанавливается на 2 по числовой шкале, движок перемещается до установки своим левым концом по линии визирки, после этого визирка перемещается на цифру 3 на нижней шкале движка: результат читается по числовой шкале.

б) Деление. Для деления 5:2,5 делаем следующее: устанавливаем визирку на 5 по числовой шкале, движок устанавливаем значением 2,5 на нижней шкале на визирку, результат читаем по концу движка по числовой шкале.

Наиболее часто встречаемые в гидравлике выражения $H^{\frac{3}{2}}$, $H^{\frac{2}{3}}$, aH^2, $a\sqrt{H}$, $\frac{nd^2}{4}$, nr^2 и др. берутся следующим образом.

1) $H^{\frac{3}{2}}$ берется следующим образом: значение H визиркой отмечается на 3-й (квадратичной) шкале.

Результат возведения числа $H^{\frac{3}{2}}$ читается на 4-й (кубической) шкале, например: $2^{\frac{3}{2}} = 1{,}83$.

2) $H^{\frac{2}{3}}$ вычисляется установкой визирки на значении H на 4-й (кубической) шкале. Результат читается на 3-й (квадратичной) шкале, например: $3^{\frac{2}{3}} = 2{,}08$.

3) Выражение aH^2 берут следующим образом: подвижная шкала устанавливается по числовой графе на значении H, по верхней графе движка устанавливается визирка на значении a. Результат читается на 3-й (квадратичной) шкале, например: $2{,}3^2 = 18$.

4) $a\sqrt{H}$ берется следующим образом: движок устанавливается по числовой шкале на значение a; визирка устанавливается по верхней подвижной шкале на H. Результат читается на 2-й (числовой) шкале; например: $2\sqrt{2} = 2{,}83$.

5) Логарифмы числа находятся путем установки визирки на 2-й (числовой) шкале на число, логарифмы которого отыскиваются.

Результат по визирке читается на 2-й логарифмической шкале. Например: $\lg 3 = 0{,}477$.

6) H^n вычисляется путем логарифмирования, т. е. $\lg a = n \lg H$; следовательно первоначально находится значение $\lg N$, это значение умножается

на n и по мантиссе полученного числа находится значение a. Например $3\frac{3}{4}$ определяется следующим образом: $\lg a = \frac{3}{4} \lg 3$.

Определяем значение $\lg 3 = 0{,}477$; 0,477 умножаем на $\frac{3}{4}$ или на 0,75, получаем 0,357. По мантиссе 357, устанавливая визирку по 1-й шкале на 357, по 2-й (числовой) шкале читаем результат 228, следовательно $a = 2{,}28$. При возведении в степень чисел меньших единицы приходится поступать следующим образом; например $0{,}5^{\frac{3}{4}}$; $\lg = 0{,}5 = \bar{1}{,}699$. Раскрывая дополнение логарифма, получаем — 0,301. Далее 0,301 умножаем на $\frac{3}{4}$, получаем — 0,226; берем дополнение к этому lg, прибавляем + и — единицу и тогда имеем $\lg a = \bar{1}{,}774$. По мантиссе 774, устанавливая визирку по 2-шкале, находим значение $a = 0{,}595$.

7) Определение площади круга производится по формуле $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$ или πr^2. Для этого движок устанавливается на значение d по 2-й шкале. Визирка устанавливаетя по верхней шкале движка на специальную графу, соответствующую 0,785, отмеченную штрихом. Результат читается по 3-й (квадратичной) шкале, например: площадь круга диаметром 0,76 м равняется, установив подвижную шкалу на 0,76 и читая по визирке, установленной на специальном штрихе, 0,454.

Если площадь выражается через радиус, т. е. πr^2, тогда движок устанавливается на значении числа r по 2-й (числовой) шкале, визирка устанавливается на специальную пометку π на движке, соответствующую 3,14. Результат читается по 3-й квадратичной шкале.

Для облегчения подсчетов можно пользоваться специальными штрихами на движке C и C_1, которые при установке их на начальную точку линейки дают на 3-й графе значение $\frac{\pi}{4}$, после чего, беря визиркой диаметр по нижней шкале движка, результат читаем на 3-й шкале.

8) Значение синусов, тангенсов берется на оборотной стороне движка, где нанесены шкала, отвечающая синусам и шкала, отвечающая тангенсам.

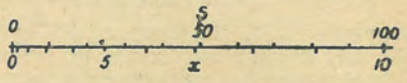
Тангенсы определяются следующим образом: графа tg устанавливается штрихом числа градусов на начальный штрих на остове линейки, результат читается по конечным линиям остова на лицевой стороне на нижней шкале движка. Например tg 30°; для этого шкала tg устанавливается значением 30 на соответствующем начальном штрихе, нанесенном на оборотной стороне линейки. Результат читается по нижней шкале движка, установив на лицевой стороне визирку на начальном значении, соответствующем 1 или 10. Так $\operatorname{tg} 30° = 0{,}578$.

Синусы вычисляются так: шкала устанавливается числом градусов на начальную пометку на оборотной стороне линейки. Результат читается на верхней шкале движка на лицевой стороне путем установки визирки на 1 или 10. Так $\sin 30° = 0{,}5$.

При определении по тангенсам и синусам углов следует подсчеты делать так: например $\varphi = \operatorname{arc tg}(0{,}5)$; для определения p движок устанавливаем цифрой 5 по его нижней шкале на конечную часть линейки; по оборотной стороне по начальной пометке читаем; $\varphi = 26° 37'$.

2. Графическое сложение и вычитание.

Алгебраическая сумма данных числовых величин может быть определена, если величины представить в определенном масштабе в виде отрезков. Алгебраическое сложение выполняют тогда вдоль прямой линии с помощью бумажной полоски или лучше при употреблении циркуля. Для определения суммы вида $f(z)=\varphi(x)+\psi(y)$ можно также (фиг. 69) употреблять прибор типа раздвижной счетной линейки. Вычисление суммы вида $s=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots$ требует равномерно размеченной по отношению к s шкалы в соединении с шкалой, размеченной по отношению к x для $f(x)$; черт. 70 дает две таких разметки для $f(x)=x^2$.



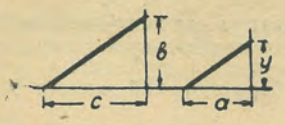
Черт. 70.

3. Графическое умножение и деление.

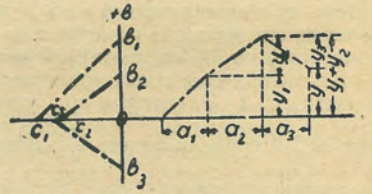
Определение y из выражения $y=\frac{ab}{c}$ происходит например приемом, указанным на черт. 71; многократным применением приема можно определить выражение вида:

$$y=\pm a_1\frac{b_1}{c_1}\pm a_2\frac{b_2}{c_2}\pm\ldots=y_1\pm y_2\pm\ldots$$

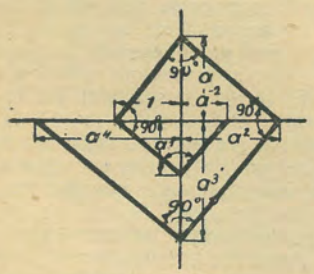
(черт. 72). Если при умножении и делении пользуются вместо равномерного масштаба логарифмическим, то приходят к приему, применяемому при пользовании логарифмической линейкой.



Черт. 71.



Черт. 72.



Черт. 73.

4. Графическое возвышение в степень и извлечение корня.

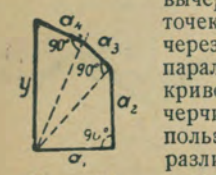
Определение a^n может быть произведено для целых значений n способом, указанным на черт. 73. Тот же прием может быть применен и наоборот при вычислении $\sqrt[n]{a}$. Выражение вида:

$$y=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots}$$

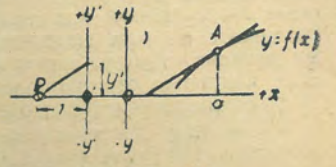
определяется многократным применением пифагоровой теоремы (черт. 74).

5. Графическое диференцирование.

Дана функция $y=f(x)$; найти значение ее производной y' для данного значения $x=a$. Кривую, определяемую уравнением $y=f(x)$, вычерчивают, нанося ряд ее точек; y' получают, проводя через P (черт. 75) прямую, параллельную касательной к кривой при $x=a$. При вычерчивании кривой можно пользоваться для x и y различными масштабами; только $O'P=1$ необходимо наносить в масштабе для x, и y' в масштабе для y. Точность значения y' кроме масштаба чертежа особенно зависит от правильности положения касательной в точке A кривой, определяемой значением $x=a$. Точность можно повысить, определяя возможно точнее положение касательной; это удается, если принять, что касательная в ближайших к A точках совпадает с кривой, или что достаточно малый отрезок кривой нужно рассматривать как прямолинейный. Поэтому вычисляют по точкам весьма малый отрезок кривой и строят его в соответственно увеличенном масштабе.

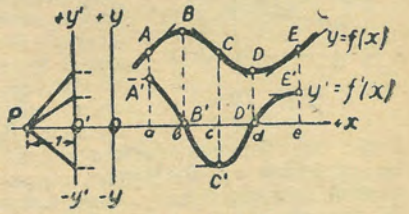


Черт. 74.



Черт. 75.

Кривой, данной уравнением $y=f(x)$, соответствует диференциальная кривая, определяемая уравнением $y'=f'(x)$; чтобы получить ее, определяют указанным выше способом при помощи касательных к кривой значения y' для достаточного количества значений x; найденные значения y' наносятся как ординаты и полученные таким образом (черт. 76) точки A', B', C',... соединяют непрерывной кривой. Вычерчивание диференциальной кривой основывается на определении известных избранных точек, каковы например точки пересечения диференциальной кривой с осью x-ов и высшие и низшие точки. Эти точки диференциальной кривой получают с помощью высших и низших точек и точек перегиба данной кривой.

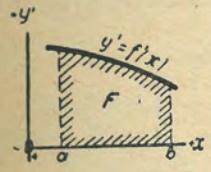


Черт. 76.

6. Графическое интегрирование.

Если нужно вычислить определенный интеграл

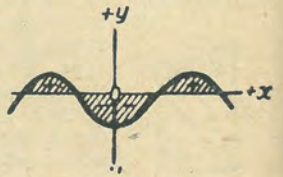
$$y=\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx,$$



Черт. 77.

то наносят кривую (черт. 77) уравнения $y'=f'(x)$: y тогда выразится площадью F, ограниченной осью x-ов, кривой $y'=f'(x)$ и двумя прямыми, параллельными оси ординат, в расстояниях $x=a$ и $x=b$. Определение площади F проще всего выполняется так: параллельными к оси ординат прямыми разбивают ее на

узкие трапеции с одной и той же высотой h; если m_1, m_2, m_3, ... суть средние линии трапеций, то $F = h.\sum m$. Сумму средних линий получают, складывая их посредством циркуля, ее размеры соответствуют масштабу ординат. Если кривая $y' = f'(x)$ проходит частью над осью x-ов, частью под ней, то площадь F разбивают на отдельные части; так как знак их зависит от y', то части, лежащие под осью x-ов, считаются отрицательными (черт. 78).

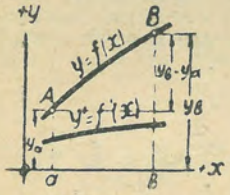


Черт. 78.

Значение определенного интеграла

$$y = \int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx$$

может быть также определено с помощью интегральной кривой $y = f(x)$, соответствующей (черт. 79) кривой $y' = f'(x)$. Границам $x = a$ и $x = b$ соответствуют точки A и B на интегральной кривой; разность ординат $y_b \mid y_a$ точек A и B представляет значение y интеграла, причем если B лежит выше A, то y — положительна, если наоборот, то y — отрицательна.

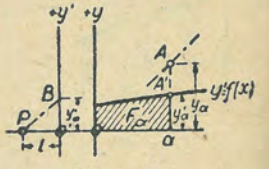


Черт. 79.

При вычерчивании интегральной, кривой $y = f(x)$, соответствующей данной кривой $y' = f'(x)$, необходимо иметь в виду, что последняя является дифференциальной кривой по отношению к искомой кривой. Так как кривой $y' = f'(x)$ соответствует бесконечное множество подобных между собой интегральных кривых, то при вычерчивании необходимо выбрать одну определенную, обыкновенно же ту, которая проходит через начало координат. Для кривой, проходящей через точку O (черт. 80), берут соответствующую значению $x = a$ точку A с помощью ее ординаты y_a; последняя выражается площадью F_a фигуры, ограниченной координатными осями, кривой $y' = f'(x)$ и прямой $x = a$. Площадь F_a получают проще всего разлагая на узкие трапеции параллельно оси ординат при одной и той же высоте, как указано выше. Определив для достаточного количества значений a, начиная с малых значений a, соответствующие точки A и соединив их непрерывной прямой, получают интегральную кривую $y = f(x)$, принадлежащую кривой $y' = f'(x)$.

При нанесении интегральной кривой важно, чтобы для каждой точки A была вычерчена также касательная к кривой; для этого откладывают $O'P = 1$ и $O'B = y_a'$ (черт. 80), где y_a' — ордината точки A' диференциальной кривой $y' = f'(x)$ для $x = a$; при этом условии прямая PB параллельна касательной A.

При проведении касательной предполагается, что масштаб для ординат как диференциальной кривой $y' = f'(x)$, так и интегральной кривой $y = f(x)$ один и тот же.



Черт. 80.

Для кривой $y' = f'(x)$, пересекающей ось x-ов в любой точке S, вычерчивают соответствующим образом такую интегральную кривую, которая касается оси x-ов в точке S; принимая, что нулевая точка координатной системы перенесена в S, получают указанным выше способом отдельные точки искомой кривой.

7. Произвольно точное определение действительных корней алгебраического или трансцендентного уравнения.

Дано уравнение $f(x) = 0$. Если принять $f(x) = y$, то это уравнение определит некоторую кривую, которую можно нанести по точкам; абсциссы точек пересечения кривой с осью x-ов являются искомыми корнями. Полученные таким образом значения кривой вообще только приближенные; их точность зависит от масштаба и от качества выполнения чертежа. Точность значения корня можно повысить до желаемой степени тем, что отрезок кривой, примыкающий к соответственной точке пересечения, наносят по частям в последовательно увеличивающемся масштабе; при этом наносимый по точкам отрезок кривой тем больше приблизится к прямой линии, чем он будет меньше.

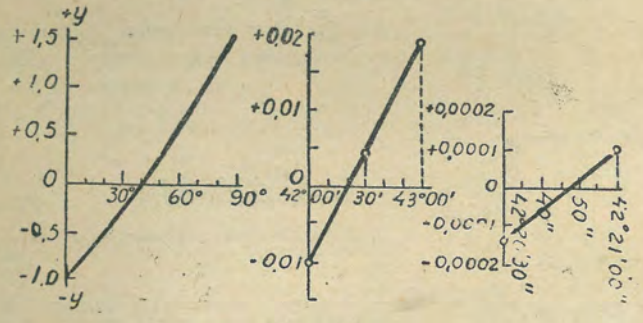
Пример. В уравнении $x - \cos x = 0$ должны быть определены с точностью до 1″ значения x, лежащие между 0 и 90°.

Положив $y = x - \cos x$ и определяя кривую по точкам, получают следующие пары значений:

$x =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$y =$	−1	−0,81	−0,59	−0,31	−0,07	+0,23	+0,54	+0,83	+1,22	+1,57

Вычерченная кривая (фиг. 81) дает $x = 42°$; теперь находят пары значений:

$x =$	42°	43°	42°30′
$y =$	−0,0101	+0,0191	+0,0045,



Черт. 81.

и нанеся отрезок кривой в виде прямой линии получают $x = 42°20'$; исходя из этого значения, определяют следующие пары значений:

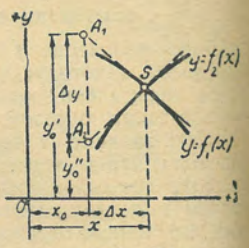
$x =$	42°20′	42°21′	42°20′30″
$y =$	−0,000383	+0,000103	−0,000140.

Нанеся на чертеж прямолинейный отрезок кривой, лежащий между 42°20′30″ и 42°21′00″, находят $x = 42°20'47''$.

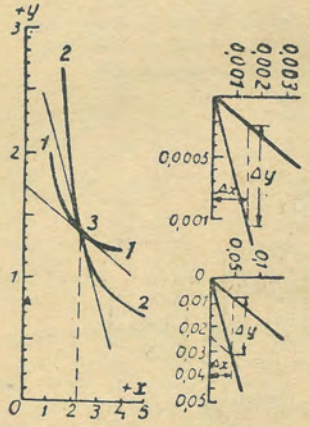
8. Произвольно точное определение корней двух алгебраических или трансцендентных уравнений с двумя неизвестными.

Если данные уравнения с неизвестными x и y написаны в форме: $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, то можно найти ряд точек кривых, определяемых этими уравнениями, и затем нанести искомые кривые. Координаты точек пересечения обеих кривых представляют собой искомые корни. Найденные таким образом значения для точки пересечения S (черт. 82) являются не вполне точными, а приближенными значениями x и y. Если должны

быть найдены более точные значения, то измеряют приближенное значение x_0 для x, подставляют x_0 в данные уравнения и получают $y_0' = f_1(x_0)$ и $y_0'' = f_2(x_0)$. Если обозначить разность между y' и y_0'' через Δy и в точке пересечения обеих кривых провести касательные к ним, то касательные вместе с Δy образуют небольшой треугольник SA_1A_2; если начертить этот треугольник в соответственно большем масштабе, то можно в нем измерить подлежащую внесению поправку Δx к x_0 и вместе с тем вычислить $x = x_0 + \Delta x$. Если достигнутая при этом точность недостаточна, то полученное для x значение рассматривают снова как приближенное значение и повторяют с ним указанный выше прием. При вычерчивании треугольника SA_1A_2 в большем масштабе должны равным образом соответственно увеличиться масштабы абсцисс и ординат главной фигуры.



Черт. 82.



Черт. 83.

Пример. Неизвестные x и y обоих уравнений $y^x = 2$ и $x^y = 3$ должны быть определены с точностью до двух десятичных знаков.

Если написать уравнение в форме $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ и $y = \frac{\lg 3}{\lg x}$, то для нанесения по точкам обеих кривых можно получить следующие пары значений:

1-я кривая

$x =$	$+1$	$+1,5$	$+2$	$+3$	$+4$;
$y =$	$+2$	$+1,59$	$+1,41$	$+1,26$	$+1,19$;

2-я кривая

$x =$	$+1$	$+1,5$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$
$y =$	∞	$+2,70$	$+1,58$	$+1$	$+0,79$	$+0,68$.

Нанеся кривые, получают (черт. 83) $x_0 = +2,2$ и вместе с тем $y_0' = 1,370$ и $y_0'' = 1,393$ таким образом $\Delta y = y_0'' - y_0' = 0,023$.

В точке пересечения S обеих кривых проводят касательные к ним и между касательными (лучше на отдельном рисунке) в увеличенном например в 20 раз масштабе проводят Δy параллельно оси y-ов (нижний вспомогательный рисунок), откуда получают $\Delta x = 0,04$. Так как здесь $y_0'' > y_0'$, то x_0 слишком мало и следовательно $x = x_0 + \Delta x = 2,2 + 0,04 = +2,24$. Рассматривая это значение снова как приближенное, находят, повторяя тот же прием, следующие значения: $x_0 = 2,24$, $y_0' = 1,3627$, $y_0'' = 1,3619$, $\Delta y = 0,0008$, $\Delta x = 0,001_4$ (верхний вспомогательный рисунок). Так как $y_0' > y_0''$, то x_0 слишком велико и следовательно $x = x_0 - \Delta x = 2,24 - 0,001_4 = +2,23_8$. Таким образом $x = +2,23_9$ и $y = 1,36_2$.

XI. ВЗАИМНЫЙ ПЕРЕВОД МЕР МЕТРИЧЕСКИХ, АНГЛИЙСКИХ и РУССКИХ.

В таблице приняты следующие обозначения:

кг — килограмм
lbs — английский фунт
т — тонна
$\frac{кг}{см^2}$ — килограмм / кв. сантиметр
$\frac{кг}{м^3}$ — килограмм / куб. метр
$\frac{lbs}{ft^3}$ — англ. фунт / куб. фут
$\frac{lbs}{inch^2}$ — англ. фунт / кв. дюйм
$\frac{lbs}{ft^2}$ — англ. фунт / кв. фут
$\frac{г}{м^3}$ — килограмм / кв. *м*
л — литр
$м^3$ — куб. метр
ft^3 — куб. фут
га — гектар
кгм — килограммометр
м — метр
км — километр
kw — киловатт.
inch — дюйм

Остальные обозначения понятны

Длины

1 *см* = 0,3937 дюйма *
1 *м* = 3,2809 фута
1 *м* = 1,0936 ярда
1 *м* = 0,4687 сажени
1 *км* = 0,6562 англ. мили
1 *км* = 0,9374 версты

1 дюйм = 2,5400 *см*
1 фут = 0,3048 *м*
1 ярд = 3 фута = 0,9144 *м*
1 сажень = 2,1336 *м*
1 английская миля = 5000 футов = 1,5240 *км*
1 верста = 1,0668 *км*

1 уставная миля (1 statute mile) = 1760 = 1,6093 *км*
1 географическая миля = 7,4205 *км*
1 морская миля = 1,8532 *км*
1 английская миля = 5000 футов = 1,5240 *км*

Поверхности

1 $см^2$ = 0,1550 кв. дюйма
1 $м^2$ = 10,7643 кв. фута
1 $м^2$ = 1,1962 кв. ярда
1 $м^2$ = 0,2197 кв. сажени
1 $км^2$ = 0,8787 кв. версты
1 *га* = 10 000 $м^2$ = 0,9153 десятины
1 *га* = 2,4711 акра

1 кв. дюйм = 6,4514 $см^2$
1 кв. фут = 0,0929 $м^2$
1 кв. ярд = 0,8361 $м^2$
1 кв. сажень = 4,5521 $м^2$
1 кв. верста = 1,1380 $км^2$
1 десятина = 1,0925 *га*
1 акр = 4840 кв. ярдам = 0,4047 *га* (0,37 десятины)

1 кв. миля (mile of land) = 640 акрам = 2,59 $км^2$

Объемы

1 $см^3$ = 0,0610 куб. дюйма
1 $м^3$ = 35,3166 куб. фута
1 $м^3$ = 1,3080 куб. ярда
1 $м^3$ = 0,1030 куб. сажени

1 куб. дюйм = 16,3866 $мм^3$
1 куб. фут = 0,0283 $м^3$
1 куб. ярд = 0,7645 $м^3$
1 куб. сажень = 9,7123 $м^3$

Вес

1 *кг* = 2,2046 lbs
1 *кг* = 2,4418 фунта
1 *кг* = 0,0610 пуда
1 *т* = 61,0459 пуда

1 lbs = 0,4536 *кг*
1 фунт = 0,4095 *кг*
1 пуд = 16,3811 *кг*
1 пуд = 0,0164 *т*

1 судовая тонна (Sort ton САСШ, Канада) = 2 000 lbs = 907,19 *кг*
1 long ton = 2240 lbs = 1016,05 *кг*

Давление

1 $кг/см^2$ = 14,224 $lbs/inch^2$
1 $кг/см^2$ = 0,2048 lbs/ft^2
1 $кг/см^2$ = 1,7535 фунт/дм
1 $кг/см^2$ = 0,3938 пуд/$дм^2$
1 $кг/см^2$ = 0,278 пуд/$саж^2$
1 $кг/см^2$ = 0,227 фунт/$фут^2$

1 $lbs/inch^2$ = 0,0703 $кг/см^2$
1 lbs/ft = 4,8829 $кг/см^2$
1 фунт/дм = 0,0635 $кг/см^2$
1 пуд/$дм^2$ = 2,5391 $кг/см^2$
1 пуд/$саж^2$ = 3,599 $кг/м^2$
1 фунт/$фут^2$ = 4,408 $кг/м^2$

* Русский фут (дюйм) = английскому футу (дюйму).

Плотность

1 *кг/м*³ = 0,0624 lbs/ft³
1 *кг/м*³ = 0,0691 фунт/фут³
1 *кг/м*³ = 0,0929 пуд/саж³

1 lbs/ft³ = 16,019 *кг/м*³
1 фунт/фут³ = 14,4627 *кг/м*³
1 пуд/саж³ = 1,688 *кг/м*³

Меры жидкости

1 *л* = 0,001 *м*³ = 0,264 амер. галлона = 0,220 англ. галлона = 0,0353 ft³
1 амер. галлон (U S Gallon) = 0,8333 англ. галлона (Imperial Gallon) = 0,1336 ft³ = 3,785 *л*
1 англ. галлон = 1,200 амер. галлона = 0,1603 ft³ = 4,544 *л*
1 ft³ = 6,24 англ. галлона = 7,49 амер. галлона = 28,375 *л*
1 акро-фут (acre foot) = 325,851 амер. галлона = 1223,41 *м*³
1000000 амер. галлонов = 3,0689 акро-фут = 3785 *м*³
1 акро-фут в сутки = 0,5042 $\frac{\text{куб. фут}}{\text{сек}}$; $\frac{1 \text{ куб. фут}}{\text{сек.}}$ = 1,983 акро-фут в сутки
1 куб. фут воды (4°) = 69,1432 фунта = 62,42 lbs = 1,7286 пуда.
1 куб. саж. воды (4°) = 23716,13 фунта = 592,903 пуд = 7,9696 вед.
1 ведро = 30,034 фунта = 0,4345 куб. фут = 12,2993 *л*

Скорость

1 *см/сек* = 0,0328 *фут/сек*
1 *см/сек* = 0,036 *км/час*
1 *км/час* = 0,9374 *вер/час*

1 *фут/сек* = 30,4797 *см/сек*
1 *км/час* = 27.777 *см/сек*
1 *вер/час* = 1,0668 *км/час*

1 узел (knot) = 6080 *фут/час* = 1,85 *км/час*

Работа и мощность

1 *кгм* = 7,2331 англ. футо-фунт = 8,0114 русск. футо-фунт. ≏ 0,2 пудо-фута
1 пудо-фут = 4,9925 *кгм* ≏ 5 *кгм*
1 метрич. лош. сила = 75 *кгм* (в *сек*) = 15 пудо-фунт (в *сек*)
1 англ. лош. сила = 0,746 kw; 1 kw = 1,340 англ. лош. силы
1 метр. лош. сила = 0,736 kw; 1 kw = 1,360 метр. лош. силы

XII. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

А. Понятие о вероятности.

а) **Вероятностью** p наступления некоторого события называется отношение числа n равновозможных случаев, благоприятствующих наступлению этого события, к числу N всех равновозможных случаев, соответствующих вопросу: $p = \frac{n}{N}$. (1)

Пример 1. В сосуде находятся N одинаковых по величине шаров, из которых n белых, остальные — других цветов; вероятность вынуть наугад белый шар: $p = \frac{n}{N}$.

При $p = 0$ рассматриваемое событие невозможно, при $p = 1$ оно достоверно.

События называются единственно возможными, если одно из них наверное должно случиться; несовместными, если каждое из них исключает остальные. Два единственно возможных и несовместных события называются противоположными; если вероятности их p и q, то $p + q = 1$ (2)

Пример 2. Если p — вероятность вынуть белый шар, q — вероятность вынуть шар другого цвета, то $p + q = 1$.

б) **Сложение вероятностей.** Вероятность p случиться одному из несовместных событий без указания, какому именно, равна сумме вероятностей этих событий $p_1, p_2 \ldots p_n$.

$$p = p_1 + p_2 \ldots\ldots p_n. \quad (3)$$

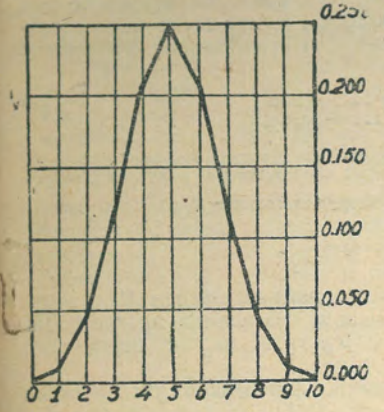
Пример 3. Если вероятность вынуть из сосуда белый шар — p_1, а вероятность вынуть черный шар — p_2, то вероятность вынуть белый или черный шар $p = p_1 + p_2$.

в) **Умножение вероятностей.** Если $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ — вероятности некоторых независимых событий, то вероятность p того, что они произойдут вместе, будет:

$$p = p_1\, p_2 \ldots\ldots p_n. \quad (4)$$

Пример 4. В предыдущем примере вероятность вынуть подряд 2 белых шара p_1^2 подряд 2 черных шара p_2^2; первым белый, вторым черный шар $p_1 p_2$. Во всех случаях число шаров в сосуде не должно изменяться, т. е. вынутый шар должен снова помещаться в сосуд в противном случае вероятность вынуть тот или иной шар при 2-м испытании будет зависеть от цвета первого шара, т. е. события не будут независимыми.

г) **Вероятность при повторении испытаний.** Если для каждого из n независимых испытаний вероятность события A выражается числом p, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A случится при этом ровно m раз, равна коэфициенту при ξ^m в разложении $(p\xi + q)^n$ по формуле бинома Ньютона, причем $q = 1 - p$; $P_{m,n} = p^m q^{n-m} C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m}$ (5)



Черт. 84.

(доказывается применением предыдущих теорем).

Пример 5. Монета бросается 10 раз, вероятность выпадения герба при каждом испытании $p = \frac{1}{2}$; найти вероятность выпадения герба m раз (от 0 до 10). Искомая вероятность при различных m будет равна (табл. 1):

Таблица 1

m	p	m	p
0	0,001	6	0,205
1	0,010	7	0,117
2	0,044	8	0,044
3	0,117	9	0,010
4	0,205	10	0,001
5	0,246		

На чертеже 84 нанесены вероятности p в функции от числа выпадения герба m; из таблицы и чертежа видно, что наиболее вероятным является 5 выпадений герба ($^1/_2$ всех бросаний) и по мере отклонения этого числа от 5 вероятность резко снижается.

Вычисление факториала $n!$ [входящего в формулу (5)] при больших n становится затруднительным; приближенное значение $n!$ дается формулой Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}, \quad (6)$$

откуда

$$\lg(n!) = 0{,}39909 + (n + 0{,}5)\lg n - 0{,}4342945\, n. \quad (6')$$

При помощи (6) можно доказать, что приближенно (тем более точно, чем больше n) будет:

$$P_{n,m} = \frac{e^{-\alpha^2}}{\sqrt{2\pi npq}}, \qquad (5')$$

где:

$$\alpha = \frac{m - np}{\sqrt{2npq}} \quad \text{и} \quad q = 1 - p.$$

д) **Закон больших чисел** (Я. Бернулли, 1713 г.)

Если для каждого из N испытания вероятность события A есть p, то при безграничном возрастании N отношение числа n появлений события к числу испытаний N стремится к пределу, равному p:

$$\text{пр.} \left(\frac{n}{N}\right)_{N=\infty} = p. \qquad (7)$$

Называя отношение $\frac{n}{N}$ частотой события A, можно сказать, что при увеличении числа испытаний частота события приближается к его вероятности.

е) **Вероятность гипотез** (вероятность a posteriori).

Имеется n групп явлений: $A_1, A_2 \ldots . A_n$, в каждой из которых может случиться явление A; вероятности этого явления в каждой из групп называем $p_1, p_2 \ldots . p_n$; вероятности (à priori), что наблюдение сделано над одной из групп $A_1, A_2 \ldots . A_n$, называем $\pi_1, \pi_2 \ldots . \pi_n$; тогда вероятность P того, что фактически наблюденное явление A принадлежит k-й группе будет (формула Байеса):

$$P = \frac{p_k \pi_k}{p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \ldots . + p_n\pi_n}. \qquad (8)$$

Пример 6. 10 сосудов содержат по 12 шаров, причем 2 сосуда содержат по 3 белых и 9 черных, а 8 сосудов — по 7 белых и 5 черных; из одного сосуда вынут шар, оказавшийся белым. Вероятность того, что он вынут из 1-й группы сосудов $P_1 = \frac{3}{31}$, что из 2-й группы сосудов: $P_2 = \frac{28}{31}\left(p_1 = \frac{3}{12},\ \pi_1 = \frac{2}{10};\ p_2 = \frac{7}{12},\ \pi_2 = \frac{8}{10}\right)$.

ж) **Математическое ожидание.** Математическим ожиданием $M(x)$ величины x, вероятность появления которой равна p, называется произведение px. Если x может принимать значения $x_1, x_2 \ldots . x_n$ с вероятиями $p_1, p_2 \ldots . p_n$, то $M(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$.

Так при бросании одной игральной кости, помеченной числом очков от 1 до 6, м. о. числа выпавших очков составит: $\frac{1}{6} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5$. На основании закона больших чисел, средняя величина x при многих испытаниях, при которых она может принимать различные численные значения, стремится к пределу, равному м. о.

Б. Функции распределения.

1. Основные понятия и обозначения.

Переменная величина x (варианта) наблюдалась N раз, имея при этом значения $x_1, x_2 \ldots . x_n$. Делим совокупность чисел на определенные (одинаковые) интервалы d и подсчитываем число n значений варианты, находящихся в каждом интервале; это число называется численностью каждого интервала, а отношение его к числу всех наблюдений $\frac{n}{N}$ — частостью или частотой интервала.

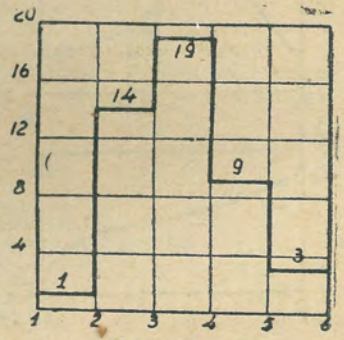
Пример 7. Распределение годовых модулей стока р. Днепра у Лоцманской Каменки за 1877/78 — 1922/23 гг. (за 46 лет):

Таблица 2

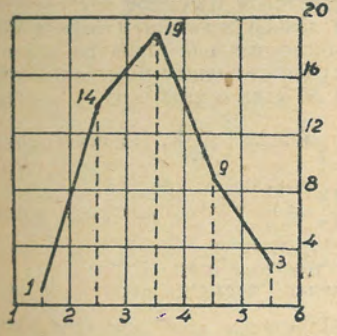
Интервалы модуля стока (*л/сек.* с 1 *кв. км*)	1,0—2,0	2,0—3,0	3,0—4,0	4,0—5,0	5,0—6,0
Численность	1	14	19	9	3
Частота	0,022	0,304	0,413	0,196	0,065

Распределение численности или частоты варианты в различных интервалах может быть представлено ступенчатой или ломаной линией (черт. 85-а и 85-б); подобное построение называется эмпирическим графиком частоты, иначе многоугольником распределения (черт. 85-б) или **гистограммой** (черт. 85-а)

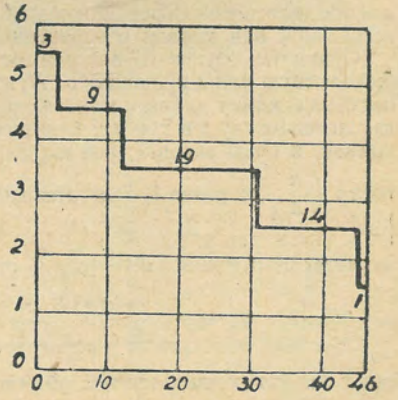
Отложим на оси абсцисс (черт. 86) общую численность варианты или сумму частот, равную 1, а по оси ординат — переменную величину варианты; для середины каждого интервала отложим по оси абсцисс сумму численностей (или частот) тех значений варианты, которые лежат в пределах взятого интервала или выше его. Полученная ступенчатая линия называется **суммарным гра-**



Черт. 85-а.



Черт. 85-б.



Черт. 86.

фиком распределения или огивой; абсциссы концов горизонтальных участков дают суммарное число (абсолютное или в процентах от N) значений варианты, **не меньших** нижней границы взятого интервала; в отношении гидрологических величин (расход, горизонт и т. д.) график называется графиком **продолжительности** или **обеспеченности** этих величин. Оба вида графиков (гистограмма и суммарный график распределения) выражают один и тот же характер распределения величин взятой варианты.

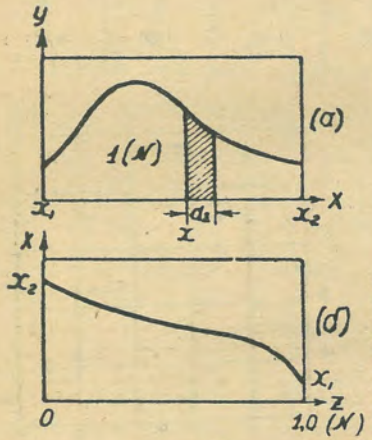
Эмпирическая величина обеспеченности заданной величины варианты вычисляется в предположении, что эта величина совпадает с серединой соответствующего интервала (горизонтального участка) на графике обеспеченности. Тогда обеспеченность k-го (слева) значения варианты P_k будет равна (в долях единицы):

Без соединения в группы

$$P_k = \frac{k - 0{,}5}{N}. \qquad (9)$$

При соединении в группы:

$$P_k = \frac{\sum_1^k n_l - 0{,}5 n_k}{N}. \qquad (9')$$



Черт. 87.

С увеличением N и уменьшением d ступенчатые линии (черт. 85-а и 86) приближаются к виду плавных кривых; поэтому допускается, что истинный характер распределения, присущий рассматриваемой варианте (для которой N наблюдений является лишь случайной выборкой), выражается **непрерывной функцией** от величины варианты; эта функция называется **функцией распределения** варианты, графики же этой функции **кривыми распределения** — диференциальной или кривой частоты (черт. 87-а) и интегральной или кривой обеспеченности (продолжительности) (черт. 87-б).

Ординаты чертежа 87-а выражают в определенном масштабе численность (абсолютную или в процентах от N) варианты данной величины (x на оси абсцисс) на единицу длины интервала; поэтому число значений варианты, заключающееся между x и $x + dx$, будет $y dx$, т. е. равно элементу площади между кривой и осью абсцисс; вся площадь равна N, если откладываются численности $\left(\frac{n}{d}\right)$, и равна 1, если откладываются частоты $\left(\frac{n}{Nd}\right)$. По построению чертежа 87-б имеем: $dz = y dx$, откуда: $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{y}$ и $z = \int_x^{x_2} y dx$; вся длина оси абсцисс на чертеже 87-б равна соответственно N или 1.

Обычный вид кривой распределения (кривой частоты) показан на чертеже 88. На концах кривой обычно $\frac{dy}{dx} = 0$, причем одна или обе ветви часто подходят к оси x-ов асимптотически (т. е. кривая неограниченно

распространяется в одну или обе стороны); реже на одном или обоих концах $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$. Значение варианты x_0, соответствующее наибольшей частоте (max. кривой), называется **модой** распределения; на интегральной кривой это значение соответствует точке перегиба. Если ордината x_m делит пополам площадь кривой частоты (т. е. численность варианты $< x_m$ равна численности варианты $> x_m$), то значение варианты x_m называется **медианой** распределения; это есть ордината интегральной кривой при $z = 0{,}5$ (50%) (**обычный** горизонт или расход на кривой обеспеченности гидрологических величин). Абсцисса центра тяжести площади кривой частоты $x_c = \frac{np\sum xy}{N} = \frac{\int xy dx}{\int y dx}$ называется **серединой**, или **центром** распределения (среднее арифметическое). Если x_c не равно x_0, кривая **асимметрична**, причем разность $r = x_c - x_0$ называется **радиусом асимметрии;** при слабой асимметрии приблизительно: $x_c - x_m = \frac{1}{3} r$, $x_m - x_0 = \frac{2}{3} r$; отношение $\frac{r}{\sigma}$ (с см. стр. 149) называется показателем асимметрии.

Общее диференциальное уравнение кривых распределения численности (кривых частоты) установлено К. Пирсоном из теоретических соображений в виде:

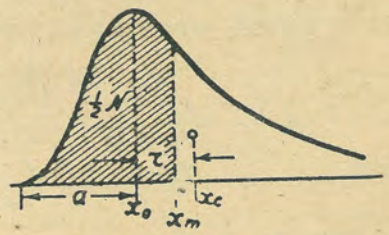
$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}. \qquad (10)$$

Величины входящих в это уравнение параметров (а следовательно и форма уравнения в конечном виде) определяются путем сопоставления уравнения (10) с наличным статистическим материалом; удобнее всего это сопоставление делается **методом моментов,** также разработанным К. Пирсоном.

2. Метод моментов.

а. Сущность метода. Имеем m значений величины y; требуется выразить характер изменения этой величины функцией известного вида $y = f(x, a, b, c...)$, где $a, b... — n$ постоянных (параметров) функции, причем $n < m$. Для определения этих параметров выбираем на оси x-ов произвольную точку (начало отсчета), обозначаем расстояние от этой точки до любой ординаты через x и составляем следующие n уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= \sum_1^m y_k = \int f(x)\,dx \\ m_1 &= \sum_1^m x_k y_k = \int x f(x)\,dx \\ m_2 &= \sum_1^m x_k^2 y_k = \int x^2 f(x)\,dx \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n &= \sum_k^m x_k^n y_y = \int x^n f(x)\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$



Черт. 88.

Взяв интегралы правой части системы (11), т. е. выразив их через параметры a, b, c,..., находим последние из полученной системы n уравнений с n неизвестными; пределы интегрирования определяются видом функций $y=f(x)$ и входящими в нее параметрами.

б. Статистические моменты. Выражения:

$$\nu_0=\frac{1}{N}\sum y_k,\quad \nu_1=\frac{1}{N}\sum x_k y_k;\quad \nu_2=\frac{1}{N}\sum x_k^2 y_k \text{ и т. д.}$$

называются нулевым, первым, вторым и т. д. **статистическими моментами** относительно выбранной нами ординаты, от которой ведется отсчет величины x (т. е. от ординаты $x=0$).

Нулевой момент $=\frac{1}{N}\sum y_k=1$, так как $\sum y_k=N$ — объему совокупности; если же y выражает **частоту**, то в выражениях для моментов $\frac{1}{N}$ опускается.

Первый момент есть не что иное как **среднее арифметическое** всех входящих в распределение величин или **центр распределения**:

$$x_c=\nu_1=\frac{\sum x_k y_k}{N}; \tag{12}$$

если все $y_k=1$ (т. е. рассматриваются отдельные значения варианты без соединения их в группы), то:

$$x_c=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}. \tag{12'}$$

Моменты, взятые относительно $x=x_c$, называются **центральными статистическими моментами** и имеют особо большое значение в математической статистике.

Общее выражение n-го центрального статистического момента будет:

$$\mu'_n=\frac{1}{N}\sum y\,(x-x_c)^n=$$

$$=\frac{1}{N}\sum y\left[x^n-nx^{n-1}x_c+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}x_c^2-\cdots\right]. \tag{13}$$

Суммируя и заменяя x_c через ν_1, находим:

$$\mu'_n=\nu_n-n\nu_1\nu_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\nu_1^2\nu_{n-2}-\cdots \tag{14}$$

Отсюда формулы перехода к центральным статистическим моментам будут:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu'_1=\nu_1-x_c=0.\\
&\mu'_2=\nu_2-\nu_1^2\\
&\mu'_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^2\\
&\mu'_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Полученные выражения называются грубыми или неисправленными центральными статистическими моментами; при вычислении их предполагается, что все значения варианты в одном интервале сосредоточены в центре этого интервала, в то время как в действительности они распределяются более или менее равномерно по длине интервала. Поэтому для вычисления **точных** центральных моментов величина грубых моментов исправляется введением **поправок;** в случае, если кривая распределения имеет с осью абсцисс касание порядка выше 1-го (т. е. если начальные и конечные значения y очень малы), вводятся **поправки Шеппарда,** при которых точные центральные моменты вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_1=0\\
&\mu_2=\mu'_2-\frac{1}{12}\\
&\mu_3=\mu'_3\\
&\mu_4=\mu'_4-\frac{1}{2}\mu'_2+\frac{7}{240}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

При технических вычислениях, не требующих особо высокой точности, а также в случае, если значения варианты не соединяются в группы, принимается: $\mu_1=0$, $\mu_2=\mu'_2$, $\mu_3=\mu'_3$ и т. д.

Второй центральный момент или средний квадрат отклонений от центра распределения играет в статистике столь же большую роль, как и среднее арифметическое; величина $\sigma=\sqrt{\mu_2}$ называется **средним квадратичным отклонением** или **рассеянием** варианты (девиация); она характеризует изменчивость варианты. Отношение $\frac{\sigma}{x_c}$ (отвлеченное число) называется коэфициентом изменчивости (коэфициент вариации).

в. Вычисление моментов. При небольшой численности ряда вычисления ведутся для каждого значения варианты без соединения их в группы; пример вычислений дан в таблице 3, в которой моменты вычислены для

Таблица 3

x	$x-30$	$(x-30)^2$	$(x-30)^3$	$(x-30)^4$
20	−10	100	−1000	10 000
25	−5	25	−125	625
28	−2	4	−8	16
30	0	0	0	0
32	+2	4	+8	16
36	+6	36	216	1 296
45	+15	225	3 375	50 625
216	+6,0	934	2 466	62 578

$$\nu_1=\frac{6\cdot 0}{7}=0{,}857$$

$$\nu_2=\frac{394}{7}=56{,}29$$

$$\nu_3=\frac{2\,466}{7}=352{,}3$$

$$\nu_4=\frac{61\,578}{7}=8\,940$$

значения варианты $x=30$; при вычислении удобно пользоваться таблицами степеней целых чисел; вычисление прямо центральных моментов по степеням $x-x_c$ потребовало бы при дробных значениях x_c весьма большой счетной работы. Найдя $\nu_1-\nu_4$, вычисляем центральные моменты:

$\mu_1=0{,}857-x_c=0$, отк. $x_c=0{,}857$ и ср. арифм. $30{,}0+0{,}857=30{,}857$

$\left(\text{так же } \frac{216}{7}=30{,}857\right)$.

$\mu_2=56{,}29-0{,}857^2=55{,}56$.

Рассеяние варианты: $\sigma = \sqrt{55{,}56} = 7{,}46$.

Коэфициент изменчивости: $\frac{7{,}46}{30{,}857} = 0{,}242$.

Далее: $\mu_3 = 325{,}3 - 3 \cdot 56{,}29 \cdot 0{,}857^3 + 2 \cdot 0{,}857 = 181{,}2$.

$$\mu_4 = 8\,940 - 4 \cdot 352{,}3 \cdot 0{,}857 + 6 \cdot 56{,}29 \cdot 0{,}857^2 - 3 \cdot 0{,}857^4 = 8\,066.$$

При соединении данных величин в группы применяется **метод условных вариант.**

Обозначим d — длину интервала (постоянную); x_k — значение x, отвечающее середине k-го интервала, y_k — численность этого интервала ($\sum y_k = N$). Выберем вблизи середины распределения один интервал и занумеруем его числом 0; последующие интервалы нумеруем числами 1, 2, 3..., предыдущие (в обратном направлении) — числами — 1, — 2, — 3; тогда будем иметь

$$x_k = x_0 + kd; \tag{17}$$

подставив в уравнения (15), находим:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= x_0 + \nu_1' \cdot d \\ \mu_2 &= d^2 (\nu_2' - \nu_1'^2) \\ \mu_3 &= d^3 (\nu_3' - 3\nu_1'\nu_2' + 2\nu_1'^3) \\ \mu_4 &= d^4 (\nu_4' - 4\nu_1'\nu_3' + 6\nu_1'^2\nu_2' - 3\nu_1'^4) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где обозначено: $\nu_1' = \frac{\sum ky}{N}$, $\nu_2' = \frac{\sum k^2 y}{N}$, $\nu_3' = \frac{\sum k^3 y}{N}$ и $\nu_4' = \frac{\sum k^4 y}{N}$.

Пример 8. Вычислить центральные моменты для совокупности 46 годовых модулей стока р. Днепра (пример 7).

Таблица 4

Интервалы	x_k	k	y_k	k^2	k^3	k^4	ky	k^2y	k^3y	k^4y
1—2	1,5	—2	1	4	—8	16	—2	4	—8	16
2—3	2,5	—1	14	1	—1	1	—14	14	—14	14
3—4	3,5	0	19	0	0	0	0	0	0	0
4—5	4,5	1	9	1	1	1	9	9	9	9
5—6	5,5	2	3	4	8	16	6	12	24	48
			46	10	0	34	—1	39	11	87

$d = 1$, $N = 46$

$\nu_1' = -\frac{1}{46} = -0{,}0217$

$\nu_2' = \frac{39}{46} = 0{,}848$

$\nu_3' = \frac{11}{46} = 0{,}239$

$\nu_4' = \frac{87}{46} = 1{,}893$

$x_0 = 3{,}500 - 0{,}022 = 3{,}478$

$\mu_2 = 0{,}848 - 0{,}0217^2 = 0{,}848$; $\sqrt{\mu_2} = \sigma = 0{,}921$,

$\mu_3 = 0{,}239 + 3 \cdot 0{,}0217 \cdot 0{,}848 - 2 \cdot 0{,}0217^3 = 0{,}294$

$\mu_4 = 1{,}893 + 4 \cdot 0{,}0217 \cdot 0{,}239 - 6 \cdot 0{,}0217^2 \cdot 0{,}848 - 3 \cdot 0{,}0217^4 = 1{,}914$.

3. Кривые Пирсона.

Интегрированием уравнения (8) при различных значениях b_0, b_1 и b_2 К. Пирсоном выведены уравнения в конечном виде семи основных типов кривых распределения, показанных в следующей таблице (табл. 5):

Таблица 5

Тип	Уравнение кривой	Протяжение кривой	Симметрия	Положение моды	Критерий
I	$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{\gamma a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{\gamma a_2}$	Ограничена с обеих сторон	Не симметрична	$x = 0$	$k < 0$
II	$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m$	То же	Симметрична	$x = 0$	$k = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 3$
III	$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\gamma a} e^{-\gamma x}$	Ограничена с одной стороны	Не симметрична	$x = 0$	$k = \infty$
IV	$y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right) e^{-\nu \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}}$	Не ограничена	Не симметрична	$x = -\frac{\gamma a}{2m}$	$0 < k < 1$
V	$y = y_0 x^{-p} e^{-\frac{\gamma}{x}}$	Ограничена с одной стороны	Не симметрична	$x = \frac{\gamma}{p}$	$k = 1$
VI	$y = y_0 x^{-q_1} (x - a)^{q_2}$	То же	Не симметрична	$x = \frac{aq_1}{q_1 - q_2}$	$k > 1$
VII	$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	Не ограничена	Симметрична	$x = 0$	$k = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 3$

Для выбора наиболее подходящего для данного статистического материала типа кривой вычисляется **критерий** k и параметры β_1 и β_2, выражаемые через центральные моменты распределения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \\ \beta_2 &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \\ k &= \frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4 (4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Расстояние между центром распределения и модой для всех кривых:

$$r = \frac{\sqrt{\mu_2}\,\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2 (5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}. \tag{20}$$

Показатель асимметрии

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2 (5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}. \tag{21}$$

Пример 9. Определить характер распределения годовых модулей стока р. Днепра у Лоцманской Каменки (пример 7 и 8):

$$\beta_1 = \frac{0{,}294^2}{0{,}848^3} = 0{,}135; \quad \beta_2 = \frac{1{,}914}{0{,}848^2} = 2{,}66;$$

$$k = \frac{0{,}135 \times (2{,}66 + 3{,}00)^2}{4 \times (4 \times 2{,}60 - 3 \times 0{,}135)(2 \times 2{,}60 - 3 \times 0{,}135 - 6)} = -0{,}087.$$

Наиболее точно распределению отвечает кривая I типа; распределение довольно симметрично (β_1 мало) и притом близко к нормальному (β_2 близко к 3); следовательно можно пользоваться кривой II или VII типа.

4. Нормальное распределение.

Если отклонения варианты от ее среднего значения подчинены закону случайности, то уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{c}, \tag{10'}$$

откуда:

$$v=y_0\,e^{-\frac{x^2}{2c}}. \tag{22}$$

Определяя параметры y_0 и c методом моментов, находим:

$$y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \tag{22'}$$

т. е. имеем кривую Пирсона VII типа (кривая Гаусса или нормальная кривая распределения). Здесь $\sigma=\sqrt{\mu_2}$ — среднее квадратичное отклонение; признаки нормального распределения: $\beta_1=0$, $\beta_2=3{,}0$; распределение близко к нормальному, если эти равенства выполнены приблизительно.

Уравнение (22) дает **частоту** значения варианты, отклоняющейся от среднего значения на величину x; относительное число значений (или вероятность) варианты, заключенной в пределах $x_c<x<x_c+a$, будет

$$P_{0,a}=\frac{n_{0,a}}{N}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \tag{23}$$

где $t=\frac{a}{\sigma}$; значения $F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ приведены в таблице I в приложениях (стр. 179). Из (23) следует, что если отклонения варианты от среднего значения выражать в долях σ, то вероятность не зависит от величины σ; поэтому σ называется **стандартным отклонением** (стандартная девиация).

Положив

$$t=z\sqrt{2}\quad\left(\text{т. е. } z=\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right),$$

находим:

$$P\pm a=2P_{0,a}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt=\Theta(t). \tag{24}$$

Функция $\Theta(t)$ называется интегралом вероятностей и вычисляется при помощи ряда:

$$\Theta(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{10}-\frac{t^7}{42}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right];$$

ее таблицы даются во многих курсах теории вероятностей и математической статистики; при пользовании этими таблицами нужно полагать $t=\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}$, где x — отклонение варианты от центра распределения.

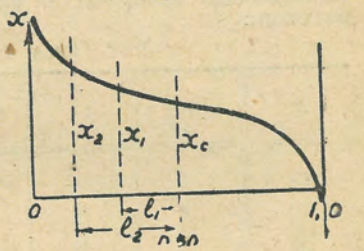
Уравнение суммарной кривой распределения (черт. 89):

$$z=\frac{1}{2}\mp\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \tag{25}$$

или:

$$z=\frac{1}{2}\mp F\left(\frac{x}{\sigma}\right) \tag{25'}$$

Здесь знак — берется для обеспеченности $<\frac{1}{2}$, т. е. для $x>x_c$, знак + для обеспеченности $>\frac{1}{2}$ или $x<x_c$; по формуле (25) можно вычислить процент обеспеченности для любого x и, наоборот, определить величину x, отвечающую заданному проценту обеспеченности (z).



Черт. 89.

Сетка вероятностей. На графике суммарной кривой распределения изменим расстояние между делениями оси абсцисс таким образом, чтобы кривая обратилась в прямую линию. Для этого необходимо выполнить отношение (черт. 89):

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{x_2-x_c}{x_1-x_c}. \tag{26}$$

Подставляя $x_2=x_c+t_2\sigma$ и $x_1=x_c+t_1\sigma$, находим:

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{t_2}{t_1},$$

откуда

$$l_1=l_2\frac{t_1}{t_2}=l_2\frac{f(z_1)}{f(z_2)},\ \text{где } t=f(z)$$

определяется из уравнения (25). Задаемся начальным значением z_2, положим $z_2=0{,}1\%$ ($z_2=0{,}001$), и длиной отрезка l_2, положим $l_2=100{,}0$ мм; тогда для взятого промежуточного z_1 находим по уравнению (26) длину отрезка l_1, т. е. положение деления z_1 на оси абсцисс; при этом можно пользоваться таблицами функции $F(t)$ или $\Theta(t)$.

Значения l_1 для различных z_1 (при $z_2=0{,}001$ и $l_2=100{,}0$ мм) приведены в таблице 6.

Деления правой половины оси абсцисс симметричны с делениями левой половины. На сетке вероятностей вертикальные линии, соответствующие разным процентам вероятности, проходят через соответствующие деления оси абсцисс, горизонтальные — через равномерные деления оси ординат. Откладываем по оси ординат различные значения варианты, а по оси абсцисс — соответствующий эмпирический процент обеспеченности, вычисленные по формулам (9) или (9'); при нормальном или близком к нормальному распределении эти точки расположатся приблизительно вдоль прямой

Таблица 6

(значение t для различных z левой половины кривой обеспеченности)

z %	t	z %	t	z %	t	z %	t	z %	t
0,1	100,0	4	56,6	12	38,0	26	20,8	40	8,2
0,2	93,2	5	53,2	14	34,9	28	18,9	42	6,5
0,5	83,5	6	50,3	16	32,2	30	17,0	44	4,9
1,0	75,4	7	47,8	18	29,6	32	15,1	46	3,2
1,5	70,2	8	45,5	20	27,2	34	13,4	48	1,6
2,0	66,3	9	43,4	22	25,0	36	11,6	50	0
3	60,8	10	41,4	24	22,8	38	9,9		

линии; проведя на-глаз эту прямую, можем интерполировать по ней процент обеспеченности различных (не помещенных в таблице) значений варианты, а также экстраполировать за пределами этих значений.

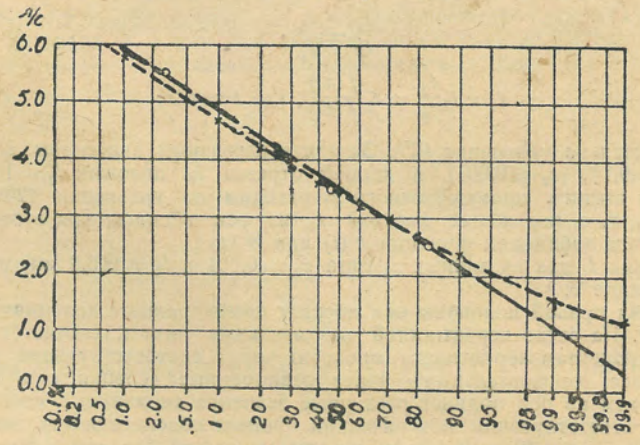
Пример 10. Исследовать распределение годовых модулей стока р. Днепра у Лоцманской Каменки (пример 7).

Вычисляем эмпирический процент обеспеченности модулей различной величины:

Таблица 7

M	n	Σn	$\Sigma n - \frac{n_k}{2}$	p %
5,5	3	3	1,5	3,1
4,5	9	12	7,5	16,3
3,5	19	31	21,5	46,7
2,5	14	45	38,0	85,6
1,5	1	46	45,5	99,0

Наносим эти данные на сетку вероятностей (черт. 90); за исключением нижней точки все остальные хорошо ложатся на прямую, что подтверждает вывод примера 9 о близости распределения к нормальному; экстраполируя прямую, находим: при $p = 0{,}1\%$ (1 раз в 1 000 лет) $M = 6{,}7$ $л/с$; при $p = 99{,}9\%$ (также 1 раз в 1 000 лет) $M = 0{,}3$ $л/с$.



Черт. 90.

5. Кривая III типа. Метод Фостера.

Кривая Пирсона III типа достаточно хорошо выражает любое, не слишком асимметричное распределение и в то же время представляет большие удобства для подсчетов: поэтому ею можно пользоваться не только при κ весьма большом, но и в других случаях, особенно при слабой асимметрии и при небольшом объеме статистического материала, когда вычисление моментов высоких степеней и критерия не может быть сделано достаточно точно.

Параметры уравнения кривой III типа:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{4\mu_2^3}{\mu_3^2} - 1 \\ \gamma &= \frac{2\mu_2}{\mu_3} \\ a &= \frac{p}{\gamma} \\ y_0 &= \frac{N p^{p+1}}{a e^p \Gamma(p+1)} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Здесь μ_2 и μ_3 — 2-й и 3-й центральные моменты, N — общая численность варианты, $\Gamma(p+1)$ — эйлеров интеграл 2-го рода; a — расстояние от начала кривой до моды; p — отношение этой величины к радиусу асимметрии.

Радиус асимметрии:

$$r = \frac{1}{\gamma} = \frac{\mu_3}{2\mu_2}.$$

Показатель асимметрии:

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{\mu_3}{2\mu_2^{\frac{3}{2}}}$$

Для $\Gamma(p+1)$ приближенная формула Форсайта:

$$\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{\sqrt{p^2+p+\frac{1}{6}}}{e}\right)^{p+0,5} \quad \text{с ошибкой} < \frac{1}{240\,p^3}.$$

Вместо параметров μ_2 и μ_3 Фостером приняты параметры:

$$C_v = \frac{\sqrt{\mu_2}}{x_c} = \frac{\sigma}{x_c} \qquad (28)$$

коэфициент вариации и

$$C_s = 2\frac{t}{\sigma} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{c_v^3} \qquad (29)$$

коэфициент асимметрии.

В этих параметрах имеем:

$$\left.\begin{aligned} p=\frac{4}{C_s^2}-1;\ \gamma=\frac{2}{C_v\cdot C_s}\ ;\ a=\frac{\left(4-C_s^2\right)\cdot C_v}{2\,C_s} \\ r=\frac{1}{\gamma}=\frac{C_v\cdot C_s}{2}\ ;\ \frac{r}{\sigma}=\frac{C_s}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Для того чтобы начало кривой пришлось на положительное значение варианты, необходимо $a+r\leqslant x_c$ (черт. 88); рассматривая распределение относительных значений варианты $\frac{x}{x_c}$ (например годовые модульные коэфициенты $\frac{M}{M_0}$), имеем $x_c=1$ и условие положительности варианты:

$$a+r\leqslant 1. \qquad (31)$$

Подставив a и r из (30), находим:

$$C_s\geqslant 2\,C_v. \qquad (32)$$

Если условие (32) не соблюдено, кривая III типа не может применяться к распределению величин, по существу положительных (например гидрологические данные); однако для приблизительных подсчетов такое применение может быть допущено.

Абсциссы интегральной кривой распределения получим в виде:

$$z=\frac{1}{N}\int_x^{\infty} y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\gamma a} e^{-\gamma x}\,dx. \qquad (33)$$

Подстановкой $1+\frac{x}{a}=\frac{t}{p}$ выражение (33) приводится к виду:

$$z=\frac{y_0\,e^p}{N\,\gamma\,p^p}\int_t^{\infty} t^p e^{-t}\,dt=\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_t^{\infty} t^p e^{-t}\,dt. \qquad (34)$$

Интеграл (34) вычисляется непосредственно (при p целых) или приближенными способами, так что $z=f(r,t)$; но

$$p=\frac{4}{C_s^2}-1 \text{ и } t=p\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{4}{C_s^2}-1+\frac{2}{C_s}\cdot\frac{x}{C_v},$$

так что

$$z=\varphi\left(C_s,\frac{x}{C_v}\right). \qquad (35)$$

Фостером вычислена таблица функции (35) при $C_v=1$ (таблица II в приложении, стр. 182); в таблице помещены не прямо величины $\frac{a}{C_v}$, но $\Phi=\frac{x-1}{C_v}$; поэтому $x=\Phi\cdot C_v+1$.

Пример 11. Распределение модулей стока р. Днепра (прим. 7) обработать по методу Фостера.

Находим центральные моменты распределения, составленного из годовых модулей коэфициентов

$$k=\frac{M}{M_0}=\frac{x}{x_c}=\frac{x}{3.478}:$$

$$\mu_0=1$$

$$\mu_2=\frac{0{,}848}{3{,}478^2}=0{,}07\text{J}$$

$$\mu_3=\frac{0{,}294}{3.478^3}=0{,}0070$$

Далее находим

$$C_v=\sqrt{0{,}07}=0{,}26$$

и

$$C_s=\frac{0{,}0070}{0{,}07^{3/2}}=0{,}38\backsim 0{,}40$$

Пользуясь таблицей Фостера при $C_s=0{,}40$, находим (табл. 8):

Таблица 8

$Z\%$	99,9	99,0	90	80	70	60	50	40	30	20	10,0	1,0	0,1
Φ	2,54	2,03	1,22	0,85	0,57	0,31	0,06	0,19	0,48	0,82	1,32	2,62	3,67
$\Phi\cdot C_v$	0,66	0,53	0,32	0,22	0,15	0,08	0	0,05	0,12	0,21	0,34	0,68	0,25
$K=1+\Phi\cdot C_v$	0,34	0,47	0,68	0,76	0,85	0,92	1,00	1,05	1,12	1,21	1,34	1,68	1,95
$M=kM_0$	1,2	1,6	2,4	2,6	3,0	3,2	3,5	3,7	3,9	4,2	4,7	5,8	6,8
	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+

6. Правило трех сигма.

Из уравнения (23) и таблицы значений $F(t)$ следует, что при $t=3{,}0$ (т. е. при $x=3\sigma$), $P_{0,x}=0{,}4986$ и $P_{\mp 3\sigma}=0{,}9972$; следовательно при нормальном (и близком к нормальному) распределении 99,7% всех значений варианты отклоняются от ее среднего значения в ту или другую сторону не более чем на утроенное среднее квадратичное отклонение. Даже для весьма несимметричного распределения свыше 90% всех значений варианты лежат в интервале от $x_c-3\sigma$ до $x_c+3\sigma$; следовательно значения, отклоняющиеся от среднего более чем на 3σ, можно считать практически весьма мало вероятными.

Пример 12. В примерах 7 и 8 имеем $x_c=3{,}478$ и $\sigma=0{,}921$ поэтому практически невероятными будут годовые модули стока $>3{,}478+3\times 0{,}921=6{,}241$ и меньшие, чем $3{,}478-3\times 0{,}921=0{,}715$.

В. Теория ошибок.

1. Распределение случайных ошибок.

Ошибки наблюдений делятся на **систематические** и **случайные**. Первые зависят: а) от недостатков измерительных приборов (инструментальные ошибки; например непараллельность оптической оси нивелира и оси уровня); б) от внешних причин, постоянно влияющих в одном направлении (например влияние кривизны земной поверхности и рефракции при геодезических работах); в) от склонности наблюдателя делать ошибку преимущественно в одном направлении (личная ошибка). Систематические ошибки при накоплении могут значительно исказить результат наблюдений; определение возможной величины систематической ошибки и ее устранение является задачей методологии соответствующих наблюдений; лучшим приемом является производство повторных измерений разными лицами, разными инструментами и различными методами.

Случайные ошибки происходят от случайных изменений в установке измерительных приборов и от погрешностей при производстве наблюдений и отсчетов, а также от таких внешних причин, которые, часто меняясь, влияют на результат измерения то в одну, то в другую сторону (например дрожание волоска при отсчете по рейке от действия восходящих токов теплого воздуха). Случайная ошибка является следовательно результатом весьма многих случайных причин; поэтому вероятность случайной ошибки одинаковой величины, но разных знаков одинакова; вероятность появления малой по абсолютной величине случайной ошибки больше, чем большой. Установлено теорией и подтверждено опытом, что распределение случайных ошибок весьма близко следует закону Гаусса или нормальной кривой распределения (22); в теории ошибок более употребительна другая форма этого уравнения:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2}, \tag{37}$$

где: $y = f(v)$ — частота ошибки величиной $\pm v$.

Сравнивая (22′) и (37), находим:

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}. \tag{38}$$

Вероятность, что ошибка будет заключаться между $-\alpha$ и $+\alpha$ согласно (37), будет:

$$P_{\mp\alpha} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-h^2 v^2} dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{2\alpha} e^{-y^2} dy = \Theta(h\alpha), \tag{39}$$

Следовательно, чем больше h, тем больше вероятность, что ошибка не выйдет из пределов интервала $\mp\alpha$; поэтому h называется **мерой точности,** или **коэфициентом точности** ряда наблюдений.

Из (37) при $v = 0$ получаем $y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642h;$ (40)

это число характеризует **частоту безошибочных наблюдений.**

Средней квадратичной ошибкой ε называется корень квадратный из математического ожидания квадрата ошибки:

$$\varepsilon^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-h^2 v^2} dv = \frac{1}{2h^2},$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \sigma. \tag{41}$$

Средней абсолютной ошибкой ε_1 называется математическое ожидание абсолютной величины этой ошибки:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |v| e^{-h^2 v^2} dv = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}798\,\sigma. \tag{42}$$

Вероятной ошибкой называется такая ошибка ε_0, что вероятность появления большей ошибки одинакова с появлением меньшей.

Подставляя в (26)

$$\alpha = \varepsilon_0 \text{ и } P_{\mp\alpha} = \frac{1}{2},$$

находим

$$\frac{1}{2} = \Theta(h\varepsilon_0),$$

откуда

$$\varepsilon_0 = \frac{0{,}4769}{h} = 0{,}674\,\sigma. \tag{43}$$

Наибольшая допустимая ошибка $\varepsilon_m = (3-4)\,\varepsilon$; наблюдения с ошибкой $v > \varepsilon_m$ отбрасываются.

2. Вычисление ошибок из наблюдений.

Обозначим: $l_1, l_2 \ldots l_n$ — результаты n измерений одной величины; l — ее истинное значение; $M = \frac{\sum l_k}{n}$ — среднее арифметическое всех наблюдений; разности $\varepsilon_k = l - l_k$ наз. **истинными,** разности $\lambda_k = M - l_k$ — **кажущимися** ошибками отдельных наблюдений; очевидно $\sum\lambda_k = nM - \sum l_k = 0$; разность $\Delta = l - M$ — есть ошибка среднего арифметического.

Истинное значение l и истинные ошибки ε неизвестны и требуется найти их вероятные значения, пользуясь полученными из наблюдений величинами M и l_k.

Чтобы получить непосредственное представление о точности арифметического среднего, нужно было бы выполнить большое число **серий** наблюдений и исследовать распределение арифметических средних, вычислив среднее квадратичное отклонение их σ_m; применяя к среднему арифметическому формулу (52), легко однако показать, что величина σ_m и средняя квадратичная ошибка (истинная) одной серии наблюдений связаны зависимостью:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{44}$$

Следовательно арифметическое среднее n измерений в $\sqrt{n}$ раз точнее одного измерения.

Обе части равенства $\varepsilon_k = l - l_k = l - M + \lambda_k$ возводим в квадрат и суммируем полученные выражения:

$$\sum\varepsilon_k^2 = n(l-M)^2 + 2(l-M)\sum\lambda_k + \sum\lambda_k^2;$$

но

$$\sum\varepsilon_k^2 = n\sigma^2,\ n(l-M)^2 = \sigma^2 \text{ и } \sum\lambda_k = 0,$$

следовательно:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\lambda_k^2}{n-1}}. \tag{45}$$

Из (44) и (45) следует, что

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\Sigma \lambda_k^2}{n(n-1)}}. \qquad (46)$$

Вероятная ошибка арифметической средины (т. е. результата серии наблюдений) согласно (43) будет:

$$\varepsilon_0(M) = 0{,}674\,\sigma_M \cong {}^2/_3 \sqrt{\frac{\Sigma \lambda_k^2}{n(n-1)}}. \qquad (47)$$

Окончательный результат наблюдений представляется в форме:

$$l = \frac{\Sigma l_k}{n} \pm 0{,}674 \sqrt{\frac{\Sigma \lambda_k^2}{n(n-1)}}. \qquad (48)$$

Таблица 9

l'_k	λ'_k	λ'^2_k	l''_k	λ''_k	λ''^2_k
25,2	− 0,3	0,09	25,0	− 0,6	0,36
25,5	0	0	25,5	− 0,1	0,01
25,6	+ 0,1	0,01	25,8	+ 0,2	0,04
25,7	+ 0,2	0,04	26,1	+ 0,5	0,25
102,0		0,14	102,4		0,66

Пример 13. Над отрезком сделаны 2 серии измерений по 4 в каждой серии; результаты обработаны в таблице 9:

$$l' = \frac{102{,}0}{4} \pm 0{,}674 \sqrt{\frac{0{,}14}{4 \times 3}} =$$

$$= 25{,}50 \pm 0{,}07$$

$$l'' = \frac{102{,}4}{4} \pm 0{,}674 \sqrt{\frac{0{,}66}{4 \times 3}} =$$

$$= 25{,}60 \pm 0{,}16.$$

3. Вес наблюдений.

Если отдельные наблюдения имеют разную степень надежности, то каждому из них приписывается определенный **вес**; именно принимается, что наблюдение обладает весом g, если оно равносильно g наблюдениям веса единицы, тогда **взвешенное среднее** в отличие от простого среднего определяется формулой:

$$x_c = \frac{\Sigma g_k x_k}{\Sigma g_k}$$

Средняя квадратичная ошибка наблюдения веса g согласно (44) будет

$$\sigma_g = \frac{\sigma}{\sqrt{g}},$$

а потому точность его согласно (38) будет:

$$h_g = \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{g}}{\sigma \sqrt{2}} = h\sqrt{g}. \qquad (49')$$

Веса наблюдений иногда принимаются по личному усмотрению с учетом качества инструментов, опытности наблюдателей и т. д. При наличности нескольких серий наблюдений их веса принимаются согласно (49'(обратно пропорциональными квадратам вероятных ошибок каждой серии. В предыдущем примере:

$$l = 25{,}00 + \frac{0{,}50 \times 16^2 + 0{,}60 \times 7^2}{16^2 + 7^2} = 25{,}52.$$

4. Средняя ошибка функции.

Пусть Y есть известная функция от нескольких независимых переменных $X_1, X_2 \ldots X_n$, измеряемых непосредственно; требуется найти выражение для ее средней ошибки ε, если известны ошибки $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ величин $X_1, X_2 \ldots X_n$.

а) Линейная функция $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 \ldots + a_nX_n$. (50)

Обозначим $x_1, x_2 \ldots x_n$ — ошибки величин X при одном наблюдении; тогда:

$$Y + y = a_0 + a_1(X_1 + x_1) + a_2(X_2 + x_2) + \ldots + a_n(X_n + x_n), \qquad (50')$$

отсюда:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \qquad (50'')$$

и

$$y^2 = a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + \ldots + a_n^2x_n^2 + R, \qquad (51)$$

где R есть сумма произведений вида $a_ka_lx_kx_l$.

Написав выражения (51) для **всех** наблюдений и сложив почленно, найдем:

$$\Sigma y^2 = a_1^2\Sigma x_1^2 + a_2^2\Sigma x_2^2 + \ldots + a_n^2\Sigma x_n^2 + \Sigma R, \qquad (51')$$

Если ошибки распределяются по закону Гаусса или в более общем случае симметрично, то $\Sigma R = 0$, так как для всякого произведения x_kx_l одного знака встретится такое же по величине произведение другого знака; переходя к средним квадратичным ошибкам, находим:

$$\varepsilon = \pm\sqrt{a_1^2\varepsilon_1^2 + a_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots + a_n^2\varepsilon_n^2}. \qquad (52)$$

В частном случае, если $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ и измерения величин X равноточны, т. е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon(X)$, то $\varepsilon(Y) = \sqrt{n} \cdot \varepsilon(X)$. (52')

Так при измерении линий, нивелировке и т. п. ошибка результата пропорциональна $\sqrt{n}$, где n — число установок инструмента; следовательно **вес** результата согласно (49) обратно пропорционален $\sqrt{n}$.

б) Нелинейная функция

$$Y + y = f(X_1 + x_1, X_2 + x_2, \ldots X_n + x_n), \qquad (53)$$

Разлагая по формуле Тейлора и ограничиваясь лишь первыми степенями величин x ввиду их малости, имеем:

$$Y + y = Y + \frac{\partial f}{\partial X_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X_n} x_n, \qquad (54)$$

откуда:

$$y = \frac{\partial f}{\partial X_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X_n} x_n; \qquad (54')$$

сравнивая с (50″), окончательно находим:

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 \varepsilon_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 \varepsilon_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)^2 \varepsilon_n^2}. \qquad (55)$$

Средняя **относительная ошибка** будет иметь выражение:

$$\frac{\varepsilon}{Y} = \pm \sqrt{\left(\frac{Y_1'}{Y}\right)^2 \varepsilon_1^2 + \left(\frac{Y_2'}{Y}\right)^2 \varepsilon_2^2 + \ldots + \left(\frac{Y_n'}{Y}\right)^2 \varepsilon_n^2}, \qquad (56)$$

где

$$Y_1' = \frac{\partial f}{\partial X_1}, \quad Y_2' = \frac{\partial f}{\partial X_2} \ldots \text{ и т. д.}$$

Относительная ошибка результата будет наименьшей в случае, если будем иметь приблизительно:

$$\left|\frac{Y_1'}{Y}\right| \varepsilon_1 = \left|\frac{Y_2'}{Y}\right| \varepsilon_2 = \ldots = \left|\frac{Y_n'}{Y_n}\right| \varepsilon_n. \qquad (57)$$

Для уменьшения относительной ошибки результата следует увеличивать точность измерения тех переменных, которые дают наибольшие величины 57), и не имеет смысла более точно измерять переменные, дающие малые слагаемые средней ошибки.

Пример 14. Найти среднюю относительную ошибку определения коэфициента расхода через водослив $m = \frac{q}{bh^{3/2}}$, если средние ошибки q, b и h и будут ε_q, ε_b и ε_h; по (55 находим:

$$\varepsilon_m = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_b}{b}\right)^2 + \frac{9}{4}\left(\frac{\varepsilon_h}{h}\right)^2}.$$

5. Способ наименьших квадратов.

Положим, что переменная Y связана с переменными $X_1, X_2 \ldots X_n$ уравнениями вида

$$Y = f_k(X_1, X_2 \ldots X_n); \qquad (58)$$

положим далее, что мы непосредственно наблюдаем Y, величины же $X_1 X_2 \ldots X_n$ должны быть вычислены по уравнению (58). Если величина Y наблюдается m раз, то при $m = n$ получается определенная система значений $X_1, X_2 \ldots X_n$; если же $m > n$, то полученные m уравнений обычно оказываются **несовместными;** например, если вычислить $X_1, X_2 \ldots X_n$ из первых n уравнений, то остальные $m - n$ уравнений не удовлетворяются при подстановке в них найденных значений $X_1 X_2 \ldots X_n$. Это может произойти по двум причинам: 1) хотя уравнения (58) совершенно точны, но величины Y наблюдаются с погрешностями; 2) уравнения (58) выражают не точные, а лишь приближенные зависимости между величинами $X_1, X_2 \ldots X_n$ и наблюдаемой величиной Y.

Задача заключается в нахождении **наивероятнейшей** системы величин $X_1, X_2 \ldots X_n$ и решается из следующих соображений. Положим, мы приняли

некоторую систему значений величин $X_1, X_2 \ldots X_n$; при подстановке их в уравнения (58) мы получим m равенств вида:

$$v_k = f_k(X_1, X_2 \ldots X_n) - Y_k, \qquad (59)$$

где v_k — разность между наблюденным значением функции Y_k и ее значением, вычисленным по принятым значениям $X_1 X_2 \ldots X_n$. Вероятность, что эта разность составит именно v_k, будет согласно (37):

$$P_k = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_k^2}. \qquad (60)$$

Вероятность же появления всей системы определенных разностей (для всех m наблюдений) как вероятность сложного события, по теореме умножения вероятностей (равенство 4) будет равна:

$$P = P_1 P_2 \ldots P_m = \frac{h_1 h_2 \ldots h_m}{(\sqrt{\pi})^m} e^{-\left(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_m^2 v_m^2\right)}. \qquad (61)$$

Для того чтобы система разностей v_k (а следовательно и принятая система значений $X_1, X_2 \ldots X_n$) была наивероятнейшей, необходимо, чтобы правая часть равенства получила наибольшее возможное значение, а следовательно, чтобы сумма

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_m^2 v_m^2 \qquad (62)$$

достигла минимума.

Но величины h^2 пропорциональны **весам** наблюдений, т. е. $h_k^2 = h^2 g_k$, где h есть мера точности наблюдения с весом $g = 1$; подставив в (61), находим окончательное решение поставленной задачи в виде условия:

$$F(X_1 X_2 \ldots X_n) = g_1 v_1^2 + g_2 v_2^2 + \ldots + g_m v_m^2 = \text{minimum}, \qquad (63)$$

которое приводит к n независимым уравнениям:

$$\frac{\partial F}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial X_2} = 0 \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial X_n} = 0. \qquad (64)$$

Из этих уравнений и определяются n переменных $X_1, X_2 \ldots X_n$.

Прием отыскания вероятнейших значений неизвестных при помощи условия (63) называется **способом наименьших квадратов.**

6. Уравновешивание наблюдений.

а) Между величинами $Y_1 Y_2 \ldots Y_m$ не существует зависимости. Уравнения (59), числом m, называются **начальными** или **уравнениями погрешностей.** Если f есть линейная функция:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n, \qquad (65)$$

то

$$F(X_1, X_2 \ldots X_n) = \Sigma g_k (a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n - Y_k)^2 \qquad (66)$$

и условия (63) дают n линейных уравнений, из которых определяются $X_1\ X_2 \dots X_n$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_1} &= \sum a_1 a_0 g + X_1 \sum a_1^2 g + X_2 \sum a_1 a_2 g + \dots + \\
&\quad + X_n \sum a_1 a_n g - \sum a_1 Y g = 0, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_2} &= \sum a_2 a_0 g + X_1 \sum a_2 a_1 g + X_2 \sum a_2^2 g + \dots + \\
&\quad + X_n \sum a_2 a_n g - \sum a_2 Y g = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_n} &= \sum a_n a_0 g + X_1 \sum a_n a_1 g + X_2 \sum a_n a_2 g + \dots + \\
&\quad + X_n \sum a_n^2 g - \sum a_n Y g = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

В частном случае, когда измеряется m раз одна и та же величина X, имеем:

$$Y = X, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = a_2 = \dots = a_n = 0;$$

уравнение (66) обращается в

$$F(X) = \sum g_k (X - X_k)^2, \qquad (53)$$

откуда:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X} = X \sum g_k - \sum g_k X_k = 0$$

или

$$X = \frac{\sum g_k X_k}{\sum g_k},$$

т. е. среднее взвешенное из всех измеренных величин есть наивероятнейший результат наблюдений.

Если функции f_k не линейны, то подбираем систему приближенных значений нескольких переменных, которые обозначаем $X_1', X_2' \dots X_n'$, поправки же к ним — $dX_1, dX_2 \dots dX_n$.

Тогда система уравнений (59) примет вид:

$$v_k = f_k(X_1' + dX_1,\ X_2' + dX_2 \dots X_n' + dX_n) - Y_k. \qquad (68)$$

Разлагая по формуле Тейлора, ограничиваясь первыми степенями разложения, обозначая

$$\frac{\partial f_1}{\partial X_1} = a_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial X_2} = b_1 \dots \quad \frac{\partial f_1}{\partial X_n} = r_1;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial X_1} = a_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial X_2} = b_2 \dots \quad \frac{\partial f_2}{\partial X_n} = r_2$$

и т. д. и наконец обозначая $f_k(X_1', X_2' \dots X_n') - Y_k = l_k$ (известные величины), получим систему уравнений погрешностей:

$$v_k = a_k dX_1 + b_k dX_2 + \dots + r_k dX_n + l_k; \qquad (69)$$

применяя к этой системе условие (63), получим систему (64) в виде:

$$\left.\begin{aligned}
dX_1 \sum ga^2 + dX_2 \sum gab + \dots + dX_n \sum gar + \sum gal = 0 \\
dX_1 \sum gba + dX_2 \sum gb^2 + \dots + dX_n \sum gbr + \sum gbl = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
dX_1 \sum gra + dX_2 \sum grb + \dots + dX_n \sum gr^2 + \sum grl = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (69')$$

Здесь через g обозначены веса наблюдений. Уравнения (69) называются **нормальными уравнениями** поправок к неизвестным величинам; их можно решать любым способом, но наиболее удобен **метод Гаусса** (см. отдел геодезии).

Средняя ошибка наблюдения с весом единицы:

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{\sum gv^2}{m-n}} \qquad (70)$$

[приводим без доказательства; (70) есть обобщение формулы (45).] Средние ошибки уравновешенных количеств (неизвестных):

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_1}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_2}}, \quad \dots \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_n}}. \qquad (71)$$

Здесь $g_1 \dots g_n$ — веса неизвестных $X_1 \dots X_n$, которые определяются попутно при решении нормальных уравнений по способу Гаусса.

б) Между величинами X имеются зависимости (условные наблюдения); ограничиваемся рассмотрением частного случая, когда определяются самые величины Y, т. е. все $Y_k = X_k$ (m наблюдений).

Величины $Y_1,\ Y_2 \dots Y_m$ должны удовлетворять r условным уравнениям вида:

$$\varphi(Y_1,\ Y_2 \dots Y_m) = 0; \qquad (72)$$

при $m = r$ получается определенная система значений Y; при $m > r$ получается в общем несовместная система уравнений. Вероятнейшей системой значений $Y_1 \dots Y_m$ будет та, которая, удовлетворяя условию (63), одновременно удовлетворяет системе (72), следовательно задача сводится к нахождению относительного минимума.

Предварительно систему (72) заменяем системой линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
A &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m + w_1 = 0 \\
B &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_m v_m + w_2 = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
R &= r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_m v_m + w_r = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

где $v_1,\ v_2 \dots v_m$ — поправки к наблюденным величинам;

$$a_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial Y_1}, \quad a_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial Y_2}, \quad \dots\ r_1 = \frac{\partial \varphi_r}{\partial Y_1}, \quad r_2 = \frac{\partial \varphi_r}{\partial Y_2} \dots;$$

$w_1,\ w_2 \dots w_r$ суть значения функций φ при подстановке приближенных значений Y.

Для нахождения относительного минимума функции (63) находим абсолютный минимум функции:

$$\Phi = \sum g_n v_k^2 - 2\lambda_1 A - 2\lambda_2 B - \dots - 2\lambda_r R, \qquad (74)$$

для чего приравниваем 0 частные производные от этой функции по v_k; после сокращений получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial v_1}=g_1v_1-\lambda_1a_1-\lambda_2b_1-\ldots-\lambda_rr_1=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial v_m}=g_mv_m-\lambda_1a_m-\lambda_2b_m-\ldots-\lambda_rr_m=0 \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

т. е. имеем m линейных уравнений; присоединяя к ним r условных уравнений (72), получаем всего $m+r$ уравнений, из которых определяем m поправок и r значений λ — **коррелат.**

Определяя $v_1 \ldots v_m$ из (75) и подставляя в (73), получаем **нормальные уравнения коррелат** в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1\Sigma\frac{a^2}{g}+\lambda_2\Sigma\frac{ab}{g}+\ldots+\lambda_r\Sigma\frac{ar}{g}+w_1=0\\ &\lambda_1\Sigma\frac{ba}{g}+\lambda_2\Sigma\frac{b^2}{g}+\ldots+\lambda_r\Sigma\frac{br}{g}+w_2=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\lambda_1\Sigma\frac{ra}{g}+\lambda_2\Sigma\frac{rb}{g}+\ldots+\lambda_r\Sigma\frac{r^2}{g}+w_r=0 \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Средняя ошибка наблюдения с весом $g=1$ определяется по формуле:

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\frac{\Sigma gv^2}{m-(m-r)}}=\sqrt{\frac{\Sigma gv^2}{r}}. \quad (77)$$

7. Вычисление параметров эмпирических кривых.

Способ наименьших квадратов часто применяется для вычисления параметров эмпирических формул, долженствующих наиболее точно выразить в математической форме связь между наблюдаемыми явлениями. Пусть Y есть функция нескольких переменных величин $X_1\ X_2 \ldots X_n$, так что при наличности определенных значений этих величин наблюдается и определенное значение Y; поставим себе задачей выразить зависимость Y от $X_1, X_2 \ldots X_n$ функцией **заданного** вида:

$$Y=f(X_1\ X_2 \ldots X_n,\ a,\ b,\ c \ldots r), \quad (78)$$

где $a, b, \ldots r$ — постоянные или параметры этой функции; если число сделанных наблюдений $m=r$ (где r — число параметров), то для системы параметров получается единственное решение; при $m>r$ и неточной связи между Y и $X_1 \ldots X_n$ имеем m несовместных уравнений (78); задача заключается в выборе наивероятнейшей системы параметров, т. е. очевидно такой, при которой разности $v_k=f(X_1, X_2 \ldots X_n)-Y_k$ удовлетворят условно (63). Очевидно весь ход решения задачи будет тождественен с описанным в п. 6, причем за искомые переменные $X_1 \ldots X_r$ нужно принять параметры $a, b \ldots r$. Система основных уравнений (53) в случае уравновешивания наблюдений представляет собой m вообще различных функций: при вычислении параметров это есть система m одинаковых уравнений с различными численными значениями входящих в них переменных.

Частный случай. Линейная функция одной независимой переменной:

$$Y=aX+b; \quad (79)$$

уравнение (66) примет вид: ($g=1$, $X_1=a$, $X_2=b$, $a_1=X$, $a_2=1$, $a_0=0$):

$$F(a,b)=\Sigma(aX+b-Y)^2, \quad (80)$$

откуда, приравнивая нулю частные производные, находим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial a}=\Sigma(aX+b-Y)\cdot X=a\Sigma X^2+b\Sigma X-\Sigma XY=0\\ &\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial b}=\Sigma(aX+b-Y)\cdot 1=a\Sigma X+b\Sigma 1-\Sigma Y=0 \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Система (81) дает решение:

$$a=\frac{\Sigma X\cdot\Sigma Y-m\Sigma XY}{(\Sigma X)^2-m\Sigma X^2};\quad b=\frac{\Sigma X\cdot\Sigma XY-\Sigma Y\cdot\Sigma X^2}{(\Sigma X)^2-m\Sigma X^2}. \quad (82)$$

Весьма многие зависимости могут быть выражены приближенно уравнением (79); методика подбора параметров при нелинейной зависимости изложена в след. разделе (корреляция).

Г. Корреляция.

1. Определения.

Если величина переменной Y зависит не только от величины переменных $X_1, X_2 \ldots X_n$, но и от других причин, то связь между Y и $X_1 \ldots X_n$ называется **неточной** или **корреляционной** связью в отличие от точной или функциональной зависимости $Y=f(X_1, X \ldots X_n)$. В то время как при наличии последней заданной системе значений $X_1 \ldots X_n$ соответствует лишь одно, вполне определенное значение Y, при неточной связи Y может изменяться при отдельных наблюдениях в более или менее широких пределах в зависимости от наличия других причин, не учитываемых переменными $X_1 \ldots X_n$.

Задачей теории корреляции является:

а) отыскание математической зависимости $Y=f(X_1, X_2, \ldots X_n)$, наиболее близко соответствующей данному фактическому материалу;

б) определение вероятности наличия предположенной корреляционной связи;

в) определение вероятной ошибки в вычислении Y по найденному уравнению.

Искомая функция $Y=f(X_1 \ldots X_n)$ называется **уравнением регрессии** переменной Y на переменные $X_1 \ldots X_n$ (термин взят из учения о наследственности, в котором теория корреляции впервые была применена); вид этого уравнения обыкновенно выбирается до известной степени произвольно; при помощи теории корреляции отыскиваются его параметры.

В основе теории корреляции лежит **метод наименьших квадратов,** т. е. искомая корреляционная зависимость определяется из условия (63); теория корреляции дает совокупность методов, наиболее удобно разрешающих вышеуказанные задачи.

2. Линейная корреляция между двумя переменными.

а. Основные формулы. Для искомой линейной зависимости.

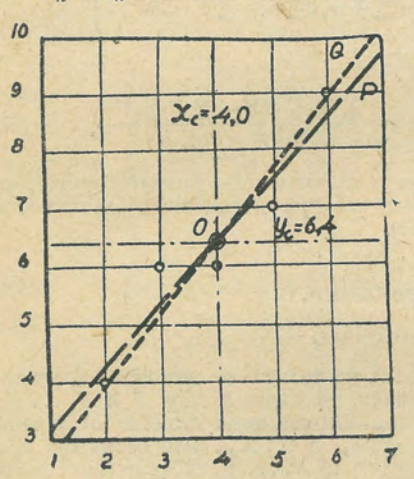
$$Y=aX+b \tag{79}$$

величина коэфициентов a и b выражается формулами (82); преобразуем эти формулы, обозначив X_c и Y_c — средние арифметические соответствующих переменных, так что:

$$X_c=\frac{\sum X_k}{N},\quad Y_c=\frac{\sum Y_k}{N},$$

где X_k и Y_k—наблюденные значения переменных. Отклонения их от средних обозначим x_k и y_k, так что:

$$x_k=X_k-X_c,\ y_k=Y_k-Y_c.$$



Черт. 91.

После подстановки этих величин в формулу (82), уравнение (79) примет вид:

$$Y-Y_c=\rho_{y(x)}(X-X_c), \tag{83}$$

где:

$$\rho_{y(x)}=\frac{\sum x_k y_k}{N\sigma^2_x}=\frac{\sum x_k y_k}{\sum x^2_k}. \tag{84}$$

Следовательно искомая прямая проходит через **центр распределения** (X_c, Y_c). Коэфициент $\rho_{y(x)}$ называется коэфициентом регрессии Y на X и прямая, выражаемая уравнением (83) — прямой регрессии Y на X,

Подобным же образом можно получить, что:

$$X-X_c=\rho_{x(y)}(Y-Y_c), \tag{83'}$$

где:

$$\rho_{x(y)}=\frac{\sum x_k y_k}{\sum y^2_k}. \tag{84'}$$

Геометрически $\rho_{y(x)}$ и $\rho_{x(y)}$ выражают угловые коэфициенты прямых регрессии OP (Y на X) и OQ (X на Y) (черт. 91).

Величина

$$r_{xy}=\pm\sqrt{\rho_{y(x)}\cdot\rho_{x(y)}}=\frac{\sum x_k y_k}{N\sigma_x\cdot\sigma_y} \tag{85}$$

называется коэфициентом корреляции между X и Y; очевидно: $r_{xy}=r_{yx}$. При помощи этой величины уравнения (83) и (83') можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} Y-Y_c&=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-X_c)\\ X-X_c&=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma}(Y-Y_c)\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Из (85) видно, что $|r|\leqslant 1$; можно показать, что если зависимость $Y=aX+b$ выполняется строго (т. е. все наблюденные точки ложатся на прямую), то $r=\pm 1$; в противоположном случае (когда точки симметрично рассеяны вокруг O или вокруг прямой, параллельной одной из осей координат) $r=0$; справедливы и обратные заключения, ввиду чего величина коэфициента корреляции может служить мерой тесноты линейной связи между Y и X.

Средняя квадратичная ошибка коэфициента корреляции:

$$\varepsilon(r)=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}; \tag{87}$$

уравнения регрессии:

$$\varepsilon(y)=\sigma_y\sqrt{1-r^2}; \tag{88}$$

коэфициентов регрессии:

$$\varepsilon(\rho_{y(x)})=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot\sqrt{\frac{1-r^2}{N-1}};\ \varepsilon(\rho_{x(y)})=\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot\sqrt{\frac{1-r^2}{N-1}}. \tag{89}$$

Если распределение мало уклоняется от нормального, то вероятные ошибки равны:

$$\varepsilon_0(r)=0{,}674\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}; \tag{87'}$$

$$\varepsilon_0(y)=0{,}674\sigma_y\sqrt{1-r^2}; \tag{88'}$$

$$\varepsilon_0(\rho_{y(x)})=0{,}674\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\sqrt{\frac{1-r^2}{N-1}}. \tag{89'}$$

Окончательно уравнение регрессии Y на X будет иметь вид:

$$Y=Y_c+\rho_{y(x)}(X-X_c)\pm 0{,}674\sigma_y\sqrt{1-r^2}. \tag{90}$$

б. Простая корреляционная таблица. Если число наблюдений не велико ($N=10-20$), то все наблюдения выписываются в таблицу и расчет ведется для каждого из них (без соединения в группы).

Пример 15. Найти уравнение регрессии для совокупности значений, данных в таблице 10.

Таблица 10

X_k	Y_k	x_k	y_k	x^2_k	y^2_k	$x_k y_k$
2	4	−2,0	−2,4	4,0	5,76	+4,8
3	6	−1,0	−0,4	1,0	0,16	+0,4
4	6	0	−0,4	0	0,16	0
5	7	+1,0	+0,6	1,0	0,36	+0,6
6	9	+2,0	+2,6	4,0	6,76	+5 2
20,0	32,0	0	0	10,0	13,20	11,0
4,0	6 4			2 0	2,64	2,20

$$\varepsilon_0(y)=0\,674\cdot 1{,}625\sqrt{0{,}084}=0{,}32$$

$$\varepsilon_0(x)=0{,}674\cdot 1{,}414\cdot\sqrt{0{,}084}=0{,}28$$

$$\sigma_x=\sqrt{2{,}0}=1{,}414$$

$$\sigma_y=\sqrt{2{,}64}=1{,}625$$

$$r=\frac{2{,}20}{1{,}414\cdot 1{,}625}=0{,}957$$

$$\rho_{y(x)}=0{,}957\frac{1{,}625}{1{,}414}=1{,}100$$

$$\rho_{x(y)}=0{,}957\frac{1{,}414}{1{,}625}=0{,}832$$

$$\varepsilon_0(r)=0{,}674\cdot\frac{1-0{,}957^2}{\sqrt{5}}=$$

$$=0{,}025;\quad r=0{,}957\pm 0{,}025$$

Таблица 11

X / Y	40 - 50	50—60	60—70	70—80	80—90	k_y	n_y	$(\sum n_{xy} \cdot k_x) k_y$	$\sum n_{xy} k_x$	x'_y	X_y
30—40	2	1	—	—	—	— 2	3	10	— 5	— 1,6667	48,33
40 - 50	5	3	1	1	—	— 1	10	12	— 12	— 1,2000	53,00
50—60	1	5	6	4	1	0	17	0	— 1	— 0,0588	64,41
60—70	—	2	5	4	5	+ 1	16	12	+ 12	+ 0,7500	72,50
70—80	—	—	1	2	1	+ 2	4	8	+ 4	+ 1,0000	75,00
k_x	— 2	— 1	0	+ 1	+ 2			42			
n_x	8	11	13	11	7						
$(\sum n_{xy} k_y) k_x$	18	3	0	7	14						
$\sum n_{xy} \cdot k_y$	— 9	— 3	+ 6	+ 7	+ 7						
y'_x	— 1,1250	— 0,2727	+ 0,4615	+ 0,6364	+ 1,0000						
Y'_x	43,75	52,37	59,62	61,36	65,00						

Окончательно:

$$Y = 6{,}40 + 1{,}100 \cdot (X - 4{,}00) \pm 0{,}32;$$

$$X = 4{,}00 + 0{,}832 \cdot (Y - 6{,}40) \pm 0{,}28.$$

в. Двойная корреляционная таблица применяется при большом числе наблюдений и соединений их в группы.

Величины σ_x, σ_y и $\sum xy$ вычисляются методом условных вариант; r по формуле:

$$r = \frac{\frac{1}{N}\sum(k_{xy} \cdot xy) - x_c y_c}{\sigma_x \sigma_y}. \qquad (91)$$

Вертикальные столбцы, соответствующие различным значениям x, называются x-овыми строями; горизонтальные строки — y-овыми строями.

Пример 16. Найти уравнение регрессии для таблицы 11; расчет ведем в такой последовательности, принимая временно длины интервалов $d_x = d_y = 1$:

1) Находим численность строев по x (n_x) и y (n_y);

поверка: $\sum n_x = \sum n_y = N = 50$.

2) Находим средние арифметические:

$$x'_c = \frac{1}{N}\sum k_x n_x = -\frac{2}{50} = -0{,}04;$$

$$y'_c = \frac{1}{N}\sum k_y n_y = +\frac{8}{50} = 0{,}16.$$

3) Находим σ'^2_x и σ'_y:

$$\sigma^2_x = \frac{1}{N}\sum k^2_x n_x - x'^2_c =$$

$$= \frac{82}{50} - 0{,}04^2 = 1{,}6384; \quad \sigma'_x = 1{,}280.$$

$$\sigma'^2_y = \frac{1}{N}\sum k^2_y n_y - y'^2_c =$$

$$= \frac{54}{50} - 0{,}16^2 = 1{,}0544;$$

$$\sigma'_y = 1{,}027.$$

4) Находим $\sum n_{xy} k_x k_y$ двумя способами (для проверки): по x-овым и по y-овым строям:

а) $\sum n_{xy} k_x k_y = \sum[\sum n_{xy} k_y] k_x = [2 \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 0] \cdot (-2) + [1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1] \cdot (-1) + [1 \cdot (-1) + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2] \cdot 0 + [1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2] \cdot 1 + [1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2] \cdot 2 = 18 + 3 + 0 + 7 + 14 = 42.$

б) Точно так же: $\sum n_{xy} k_x k_y = \sum[\sum n_{xy} k_x] k_y = 42$

$$\frac{1}{N}\sum n_{xy} k_x k_y = \frac{42}{50} = 0{,}84.$$

В таблице выписываем как величины $\sum n_{xy} k_y$ и $\sum n_{xy} k_x$, так и произведения $[\sum n_{xy} k_y] k_x$ и $[\sum n_{xy} k_x] k_y$.

5) Попутно вычисляем y'_x — средние арифметические y-ов для отдельных x-овых строев и x'_y — средн. арифметич. x-ов для отдельных y-овых строев по очевидным формулам:

$$y'_k = \frac{\sum n_{xy} k_y}{n_x} \text{ и } x'_y = \frac{\sum n_{xy} k_x}{n_y}.$$

6) Вычисляем коэфициент корреляции и его вероятную ошибку:

$$r = \frac{\frac{1}{N}\sum n_{xy} k_x k_y - x'_c \cdot y'_c}{\sigma'_x \cdot y'_y} = \frac{0{,}8400 + 0{,}04 \times 0{,}16}{1{,}280 \times 1{,}027} = 0{,}644;$$

$$\varepsilon_0(r) = 0{,}674\frac{1 - 0{,}644^2}{\sqrt{50}} = 0{,}056; \quad r = 0{,}644 \pm 0{,}056.$$

7) Находим x_c, y_c, σ_x, σ_y, $\rho_{y(x)}$ и $\rho_{x(y)}$ в первоначальных единицах (учитывая длины интервалов $d_x = 10{,}0$ и $d_y = 10{,}0$):

$$x_c = x'_c d_x = -0{,}04 \times 10 = -0{,}40; \quad X_c = 65{,}00 - 0{,}40 = 64{,}60.$$

$$y_c = y'_c d_y = 0{,}16 \cdot 10 = 1{,}60; \quad Y_c = 55{,}00 + 1{,}60 = 56{,}60.$$

$$\sigma_x = \sigma'_x \cdot d_x = 1{,}280 \times 10 = 12{,}80; \quad \sigma_y = \sigma'_y \cdot d_y = 1{,}027 \times 10 = 10{,}27.$$

$$\rho_{y(x)} = r \cdot \frac{\sigma'_y}{\sigma'_x} \cdot \frac{d_y}{d_x} = 0{,}644 \times \frac{1{,}027}{1{,}280} = 0{,}517;$$

$$\rho_{x(y)} = r \cdot \frac{\sigma'_x}{\sigma'_y} \cdot \frac{d_x}{d_y} = 0{,}644 \times \frac{1{,}260}{1{,}027} = 0{,}802$$

Подобным же образом находим средние по отдельным строям (Y_x и X_y).

8) Находим уравнения регрессии и их вероятные ошибки:

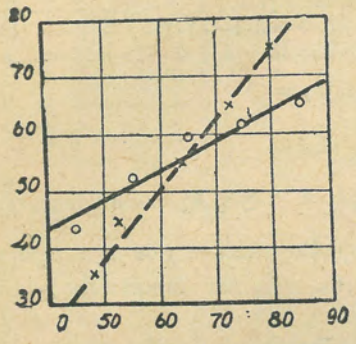
$$\varepsilon_0(y) = 0{,}674\,\sigma_y\sqrt{1 - r^2} = 0{,}674 \cdot 10{,}27\sqrt{1 - 0{,}644^2} = 5{,}33$$

$$Y = 56{,}60 + 0{,}517(X - 64{,}60) \pm 5{,}33$$

$$\varepsilon_0(x) = 0{,}674\,\sigma_x\sqrt{1 - r^2} = 0{,}674 \cdot 12{,}80 \cdot \sqrt{1 - 0{,}644^2} = 6{,}64$$

$$X = 64{,}60 + 0{,}802(Y - 56{,}60) \pm 6{,}64.$$

Средние отдельных строев X_y и Y_x служат для проверки (аналитической или графической) совпадения эмпирического материала с теоретическими прямыми регрессии; на чертеже 92 величины Y_x нанесены кружками, величины X_y — крестиками и проведены 2 прямые регрессии.



Черт. 92.

3. Нелинейная корреляция между двумя переменными.

а) Признаки нелинейной корреляционной связи. Величина

$$\sigma_{x(y)} = \sqrt{\frac{1}{n_x}\sum n_{xy}(y - y_x)^2}$$

есть среднеквадратичное отклонение y-ов для данного x-ового строя; величина

$$\sigma_{a(y)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum n_x \sigma^2_{x(y)}}$$

есть среднее квадратичное таких отклонений; далее, величина

$$\sigma_{м(y)} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum n_x (Y_x - \overline{Y_c})^2}$$

есть среднее квадратичное отклонение линии регрессии от центральной оси. Легко доказать, что

$$\sigma^2_y = \sigma^2_{a(y)} + \sigma^2_{м(y)}. \qquad (92)$$

Величина

$$\eta_{y(x)} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{a(y)}}{\sigma^2_y}} = \frac{\sigma_{м(y)}}{\sigma_y} \qquad (93)$$

называется **корреляционным отношением** y-а на x и обладает следующими свойствами, вытекающими из ее определения.

1) При отсутствии корреляции $\eta = 0$.

2) В случае совершенной корреляции (безразлично прямолинейной или криволинейной) $\eta = 1$.

Обратные заключения также справедливы.

3) Средняя квадратичная ошибка корреляционного отношения:

$$\varepsilon(\eta) = \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{N}} \qquad (94)$$

и вероятная ошибка:

$$\varepsilon_0(\eta) = 0{,}674\,\frac{1 - \eta^2}{\sqrt{N}}. \qquad (94')$$

4) Вообще $\eta \geqslant |r|$, причем $\eta = |r|$ при наличии строго линейной корреляции.

5) Величина $\zeta = \eta^2 - r^2 \ldots$ (95) называется критерием линейности. Его средняя квадратичная ошибка равна:

$$\varepsilon(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{N}}\sqrt{\zeta[(1 - \eta^2)^2 - (1 - r^2)^2 + 1]} \qquad (95)$$

или приближенно (для η и r мало отличающихся):

$$\varepsilon(\zeta) = 2\sqrt{\frac{\zeta}{N}}. \qquad (95')$$

Если ζ менее $3\varepsilon(\zeta)$, то с большой вероятностью можно полагать, что рассматриваемая связь не отличается существенно от линейной связи; при $\zeta \geqslant 3\varepsilon(\zeta)$ она вероятно существенно отличается от линейной связи.

Пример 17. Выяснить характер связи, данной в примере 16. 1) вычисляем $\sigma_{м(y)}$ и $\sigma_{м(x)}$.

Таблица 11-а

Y_x	$Y_x - Y_c$	$(Y_x - Y_c)^2$	$n_x(Y_x - Y_c)^2$	X_y	$X_y - X_c$	$(X_y - X_c)^2$	$n_y(X_y - X_c)^2$
43,75	− 12,85	165,12	1 321,0	48,33	− 16,27	264,71	794,1
52,37	− 4,23	17,89	185,8	53,00	− 11,60	134,53	1 345,6
59,62	+ 3,02	9,12	118,6	69,41	0,19	0,04	0,7
61,36	+ 4,76	22,63	249,3	72,50	+ 7,90	62,41	998,6
65,00	+ 8,40	70,56	493,9	75,00	+ 10,40	108,16	432,6
			2 369,6				3 571,6

$$\sigma_{м(y)} = \sqrt{\frac{2369{,}6}{50}} = \sqrt{47{,}392} = 6{,}88; \qquad \sigma_{м(x)} = \sqrt{\frac{3571{,}6}{50}} = 8{,}45;$$

$$\eta_y = \frac{6{,}88}{10{,}27} = 0{,}670; \qquad \zeta_y = 0{,}670^2 - 0{,}644^2 = 0{,}034;$$

$$\varepsilon(\zeta) = 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}034}{50}} = 0{,}052; \qquad \frac{\zeta}{\varepsilon(\zeta)} = \frac{0{,}034}{0{,}052} = 0{,}65 < 3;$$

поэтому связь можно считать близкой к линейной связи.

$$\eta_x = \frac{8{,}45}{12{,}80} = 0{,}660; \qquad \zeta_x = 0{,}660^2 - 0{,}644^2 = 0{,}020;$$

$$\varepsilon(\zeta) = 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}020}{50}} = 0{,}04; \qquad \frac{\zeta}{\varepsilon(\zeta)} = 0{,}50 < 3$$

— связь еще более близка к линейной.

На чертеже 92 **средние** величины y_x хорошо ложатся на некоторую плавную кривую, почему можно было бы ожидать хорошей нелинейной зависимости y от x; однако большое рассеяние y-ов около их средних значений понижает строгость этой зависимости, и отношение

$$\frac{\zeta}{\varepsilon(\zeta)} = 0{,}50 - 0{,}65 < 3$$

свидетельствует о том, что в данном случае именно **линейная** связь является достаточно вероятной и что нет смысла искать более точной нелинейной зависимости.

б) Вычисление криволинейной регрессии. Вычисление криволинейной зависимости распадается на 2 этапа: 1) подбор наиболее подходящего вида уравнения; 2) вычисление наивероятнейших параметров этого уравнения.

1. Подбор вида уравнения. Эта задача страдает некоторой неопределенностью, если только вид уравнения не вытекает из существа зависимости между переменными; во многих случаях полезным оказывается принцип одинаковой размерности всех членов уравнения. При отсутствии подобных указаний удачное разрешение задачи зависит от навыка. Начинать исследование необходимо с графической интерпретации имеющегося материала, т. е. с нанесения попарно заданных величин x и y (при двойной корреляционной таблице X и Y_x или X_y и Y) на прямоугольную сетку координат; по расположению полученных точек уже можно судить, какие типы уравнений вероятно применимы в данном случае.

Следующим шагом будет поверка применимости некоторых, наиболее простых типов уравнений с наименьшим числом постоянных (параметров), причем одновременно определяется и приблизительная величина этих параметров; эта операция выполняется при помощи **линейной анаморфозы** этих уравнений. Именно график уравнений $y=f(x)$ во многих случаях можно преобразовать в прямую линию, если откладывать по осям координат не x и y, а некоторые определенные функции этих переменных; для ряда наиболее употребительных уравнений эти функции даны в таблице 12 (заимствована у Е. В. Хентингтона — Г. Л. Ритц, Математические методы в статистике).

Таблица 12

№ по пор.	Начальное уравнение	Замена x'a	Замена y'a	Преобразованное уравнение
	$y=ax+b$	x	y	$y=ax+b$
1	$y=bc^{ax}$	x	$\lg y$	$\lg y=\lg b+x\cdot a\lg c$
2	$y=ax^b$	$\lg x$	$\lg y$	$\lg y=\lg a+b\lg x$
3	$y=a+\frac{b}{x}$	$\frac{1}{x}$	y	$y=a+b\cdot\frac{1}{x}$
4	$y=\frac{x}{a+bx}$	x	$\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y}=a+b\cdot x$
5	$y=c+b\cdot e^{ax}$	x	$\lg\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\lg\frac{\Delta y}{x\Delta}=\lg(ab)+a\lg e\cdot x$
6	$y=c+ax^b$	$\lg x$	$\lg\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\lg\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lg(ab)+(b-1)\lg x$
7	$y=c+\frac{b}{x-a}$	$x-x_0$	$\frac{x-x_0}{y-y_0}$	$\frac{x-x_0}{y-y_0}=-\frac{a-x_0}{c-y_0}+\frac{1}{c-x_0}(x-x_0)$
8	$y=c+\frac{x}{a+bx}$	x	$\frac{x-x_0}{y-y_0}$	$\frac{x-x_0}{y-y^0}=(a+bx)_0+\frac{b(a+bx_0)}{a}\cdot x$
9	$y=d+cx+be^{ax}$	x	$\lg\frac{\Delta^2y}{\Delta x^2}$	$\lg\frac{\Delta^2y}{\Delta\cdot^2}=\lg(a^2b)+a\lg e\cdot x$
10	$y=dc^xb^{ax}$	x	$\lg\frac{\Delta^2\lg y}{\Delta^2x^2}$	$\lg\frac{\Delta^2\lg y}{\Delta x^2}=\lg\frac{\lg b(\lg a)^2}{(\lg e)^2}+\lg a\cdot x$
11	$y=de^{cx}+be^{ax}$	$\frac{y_{k+1}}{y_k}$	$\frac{y_{k+2}}{y_k}$	$\frac{y_{k+2}}{y_k}=-e^{(a+c)\Delta x}+(e^{a\Delta x}+c^{c\Delta x})\cdot\frac{y_{k+1}}{y_k}$
12	$y=de^{ax}\times$ $\times(d\cos bx+c\sin bx)$	$\frac{y_{k+1}}{y_k}$	$\frac{y_{k+2}}{y_k}$	$\frac{y_{k+2}}{y_k}=e^{2a\Delta x}+2e^{a\Delta x}\cos b\,\Delta x\cdot\frac{y_{k+1}}{y_k}$
13	$y=a_0+a_1x+a_2x^2$	$x-x_0$	$\frac{y-y_0}{x-x_0}$	$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a_1+2a_2x_0+a_2(x-x_0)$

В этих формулах x_0 и y_0 — произвольная пара совместных значений x и y; Δx и Δy — разность соседних значений величин x и y; y_k, y_{k+1}, y_{k+2} — последовательные значения y, взятые через **равные** интервалы Δx; если обозначить B — начальную ординату прямой (при $x=0$) и M — ее угловой коэфициент, то берется уравнение (12), если $M^2+4B>0$, и уравнение (13) — если $M^2+4B<0$. Чтобы избежать вычисления логарифмов, можно при испытании уравнений (3) и (7) пользоваться логарифмической бумагой; для уравнений (2), (6), (10) и (11) требуется полулогарифмическая бумага, имеющая по одной оси логарифмическую, по другой — равномерную шкалу.

Если точки, нанесенные при помощи одной из формул, ложатся приблизительно вдоль прямой линии, на чертеже проводится на-глаз наивероятнейшее положение этой прямой; измерив начальную ординату и угловой коэфициент этой прямой, вычисляем приближенные значения двух параметров, входящих в преобразованное уравнение; остальные параметры вычисляются по начальным уравнениям и частным значениям x и y, взятым из нескольких наблюдений; при получении из различных наблюдений (или групп наблюдения) различных значений этих дополнительных параметров окончательно берутся их **средние** значения.

2. Когда тип уравнения подобран, его параметры вычисляются по способу наименьших квадратов (разд. III, п. 7) или по способу моментов (разд. II, п. 2). Наиболее употребителен первый способ, хотя он требует большой вычислительной работы, высокой точности подсчетов и не всегда дает определенные результаты.

Пример 18. Подобрать параметры кривой $y=a\ln(b+x)$ по следующим данным:

при $x=$	0	1	2	3
$y=$	0,60	1,20	1,30	1,50

Для данного уравнения имеем:

$$\frac{\partial y}{\partial a}=\ln(b+x);\qquad \frac{\partial y}{\partial b}=\frac{a}{a+x};\qquad \frac{\partial y}{\partial a}\cdot\frac{\partial y}{\partial b}=\frac{y}{b+x}.$$

Приближенное решение получено в виде $y=\ln(2+x)$, т. е. $a=1{,}0$ и $b=2{,}0$; дальнейшие вычисления сводим в таблицу 13.

Система (69') принимает вид (веса принимаем = 1):

$$6{,}200\,da+1{,}380\,db+0{,}2472=0$$
$$1{,}380\,da+0{,}4636\,db+0{,}0742=0$$

Ее решение дает: $da=-0{,}0126$, $a=0{,}9874$

$$db=-0{,}1227,\quad b=1{,}8773$$

Окончательно искомое уравнение:

$$y=0{,}9874\ln(1{,}8773+x).$$

Таблица 13

x	y_k	y'	l_k	$\frac{\partial y}{\partial a}$	$\frac{\partial y}{\partial b}$	$\frac{\partial y}{\partial a}\cdot\frac{\partial y}{\partial b}$	$\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2$	$\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2$	$\frac{\partial y}{\partial a}\cdot l_k$	$\frac{\partial y}{\partial b}\cdot l_k$
0	0,600	0,693	+0,093	0,693	0,500	0,346	0,480	0,2500	+0,0645	+0,0465
1	1,200	1,099	+0 101	1,099	0,333	0,366	1,208	0,1111	+0,1110	+0,0370
2	1,300	1,386	+0,086	1,386	0,250	0,346	1,922	0,0625	+0,1183	+0 0296
3	1,500	1,609	+0,109	1,609	0,200	0,322	2,590	0,0400	+0,1754	+0,0351
				4,787	1,283	1,380	6,200	0,4636	0,2472	0,0742

Довольно часто уравнение регрессии подбирается в форме параболы степени p:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p, \tag{96}$$

которой при достаточно большом p можно достаточно близко выразить большинство эмпирических зависимостей.

Выражение для суммы квадратов отклонений будет:

$$F(a_0 a_1 \ldots a_p) = \Sigma (y - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_p x^p)^2,$$

откуда уравнения для определения параметров a_0, $a_1 \ldots a_p$ получатся в виде:

$$\left.\begin{array}{l} S_0 a_0 + S_1 a_1 + S_2 a_2 + \ldots + S_p a_p = T_0 \\ S_1 a_0 + S_2 a_1 + S_3 a_2 + \ldots + S_{p+1} a_p = T_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_p a_0 + S_{p+1} a_1 + S_{p+2} a_2 + \ldots + S_{2p} a_p = T_p \end{array}\right\} \tag{97}$$

где:

$$S_0 = \Sigma n_x = N; \quad S_1 = \Sigma n_x x; \quad S_2 = \Sigma n_x x^2 \ldots S_r = \Sigma n_x x^2$$

$$T_0 = \Sigma n_x y_x; \quad T_1 = \Sigma n_x x y_x; \quad T_2 = \Sigma n_x x^2 y_x \ldots T_p = \Sigma n_x x^p y_x$$

Эти выражения выписаны для двойной корреляционной таблицы; для простой таблицы будут все $n_x = 1$ и $Y_x = y$.

Если принятая парабола оказывается недостаточно точной и требуется повысить ее степень, т. е. ввести дополнительные члены, то вычисленные уже коэфициенты изменятся, и весь расчет нужно сделать вновь; **способ Чебышева** позволяет находить дополнительные члены уравнения, не изменяя уже найденных членов (см. В. И. Романовский. Элементы теории корреляции).

4. Линейная корреляция между тремя и более переменными.

а. Полная корреляция. Если между переменным y и переменными x_1 и x_2 существует не точная линейная связь, ее можно выразить уравнением:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2; \tag{98}$$

коэфициенты этого уравнения найдем по методу наименьших квадратов из условия:

$$\Sigma [y - (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2)]^2 = \min,$$

откуда:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma y - n a_0 - a_1 \Sigma x_1 - a_2 \Sigma x_2 = 0 \\ \Sigma y x_1 - a_0 \Sigma x_1 - a_1 \Sigma x_1^2 - a_2 \Sigma x_1 x_2 = 0 \\ \Sigma y x_2 - a_0 \Sigma x_2 - a_1 \Sigma x_1 x_2 - a_2 \Sigma x_2^2 = 0. \end{array}\right\} \tag{99}$$

Если y, x_1 и x_2 отсчитываются от центров распределения, то уравнения (85) и (99) дадут:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 0; \quad a_1 = \dfrac{\sigma_0}{\sigma_1} \cdot \dfrac{r_{01} - r_{12} r_{02}}{1 - r_{12}^2} \\ \text{и} \\ a_2 = \dfrac{\sigma_0}{\sigma_2} \cdot \dfrac{r_{02} - r_{12} \cdot r_{01}}{1 - r_{12}^2} \end{array}\right\} \tag{100}$$

и следовательно искомое уравнение регрессии примет вид:

$$y = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \cdot \frac{r_{01} - r_{12} \cdot r_{02}}{1 - r_{12}^2} x_1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_2} \cdot \frac{r_{02} - r_{12} r_{01}}{1 - r_{12}^2} x_2. \tag{101}$$

Здесь σ_0, σ_1 и σ_2 — средние квадратичные отклонения (рассеяния) величин y, x_1 и x_2; r_{01}—коэфициент корреляции между y и x_1, вычисляемый обычным способом для всех имеющихся сопряженных величин y и x_1; то же относительно r_{02} и r_{12}.

Мерой тесноты линейной связи y с переменными x_1 и x_2 является **коэфициент двойной корреляции:**

$$R = \sqrt{\frac{r_{01}^2 + r_{02}^2 - 2 r_{01} r_{02} r_{12}}{1 - r_{12}^2}}. \tag{102}$$

Средняя квадратичная ошибка ур-нения регрессии:

$$\varepsilon(y) = \sigma_0 \sqrt{1 - R^2}. \tag{103}$$

В общем случае неточной линейной зависимости переменной Y от переменных $X_1\ X_2 \ldots X_p$ уравнение регрессии имеет вид:

$$Y - Y_c = -\frac{D_{01}}{D_{00}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_1}(X_1 - X_{1c}) - \frac{D_{0r}}{D_{00}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_2}(X_2 - X_{2c}) - \ldots - \frac{D_{0p}}{D_{00}} \frac{\sigma_0}{\sigma_p}(X_p - X_{pc}), \tag{104}$$

где D_{oc} есть минор определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_{01} & r_{02} \ldots & r_{0p} \\ r_{10} & 1 & r_{12} \ldots & r_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{p0} & r_{p1} & r_{p2} \ldots & 1 \end{vmatrix} \tag{105}$$

соответствующей нолевой строке и k-ому столбцу; при этом $r_{ok} = r_{ko}$ есть коэфициент корреляции между переменными Y и X_k.

Коэфициент p-кратной корреляции выразится формулой:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\Delta}{D_{00}}}, \tag{106}$$

и средняя квадратичная ошибка уравнения регрессии — формулой:

$$\varepsilon(y) = \sigma_0 \sqrt{1 - R^2}. \tag{107}$$

б. Частная корреляция. Если Y связано неточной зависимостью с переменными x_1 и x_2, то часто бывает полезно выяснить тесноту связи с каждой из этих переменных отдельно, т. е. выяснить роль каждой из переменных x_1 и x_2 в образовании величины Y. Это можно сделать, собрав все значения y и x_1 при **постоянном** x_2 и подобрав уравнение регрессии в виде $y = \rho_1 x_1 + c_1$, а затем подобрав такое же уравнение $y = c_2 x_2 + c_2$ при $x_1 =$ пост. Коэфициенты корреляции этих уравнений называются **частными коэфициентами корреляции** $r_{01\,(2)}$ и $r_{02\,(1)}$ и служат мерой тесноты связи между y и x_1 (или x_2) отдельно.

Частные коэфициенты корреляции и их средние квадратичные ошибки можно вычислить, зная полные коэфициенты, по формулам:

1) Двойная корреляция:

$$r_{01\,(2)}=\frac{r_{01}-r_{02}\,r_{12}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)\,(1-r_{02}^2)}}\;;\qquad r_{02\,(1)}=\frac{r_{02}-r_{01}\,r_{12}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)\,(1-r_{01}^2)}}\;; \tag{108}$$

2) Общий случай (p-кратная корреляция):

$$r_{01\,(23\ldots p)}=\frac{r_{01\,(3\ldots p)}-r_{02\,(3\ldots p)}\cdot r_{12\,(3\ldots p)}}{\sqrt{[1-r_{02\,(3\ldots p)}^2]\,[1-r_{12\,(3\ldots p)}^2]}}\,. \tag{109}$$

Средняя квадратичная ошибка во всех случаях:

$$\varepsilon\,(r)=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}\,. \tag{110}$$

5. Корреляция при малом числе наблюдений. Способ Фишера.

Формула (96) для средней квадратичной ошибки коэфициента корреляции справедлива лишь при больших N, примерно $N>20$. При меньших N более точно

$$\varepsilon\,(r)=\frac{1-r^2}{\sqrt{N-1}}\,. \tag{111}$$

При малых N высокий коэфициент корреляции не свидетельствует о наличности хорошей связи, так как он может оказаться случайным. Критерием устойчивости r может служить по предложению Р. А. Фишера величина:

$$z=\frac{1}{2}\,\lg\frac{1+r}{1-r}=1{,}1513\,\lg\frac{1+r}{1-r} \tag{112}$$

и ее средняя квадратичная ошибка:

$$\varepsilon\,(z)=\frac{1}{\sqrt{N-3}}\,. \tag{113}$$

Вероятность, что z превысит $\varepsilon\,(z)$ более, чем в θ раз, есть функция от θ; значения ее даны в табл. III в приложениях (стр. 182). При $\theta=\dfrac{z}{\varepsilon\,(z)}=2{,}5$ эта вероятность равна 0,01, т. е. практически достаточно мала, поэтому при

$$\theta=z\,\sqrt{N-3}\geqslant 2{,}5 \tag{114}$$

вычисленную величину коэфициента корреляции можно считать не случайной. Чем меньше получилось r, тем больше должно быть N для соблюдения условия (114); если N недостаточно, то это не значит, что найденная связь наверное случайна, но что вероятность этой случайности $>0{,}01$.

Литература.

1. С. Н. Бернштейн. Теория вероятностей. М. 1927. 2. Э. Борель, Случай (перевод с фр.) М. 1923. 3. В. В. Голубев Проф. Элементы математической статистики в приложении к лесному делу. М. 1929. 4. Иверонов Способ наименьших квадратов. М. 1928. 5. Л. К. Лахтин. Кривые распределения. М. 1922. 6. Л. К. Лахтин. Курс теории вероятностей. М. 1924. 7. А. А. Марков, Акад. Исчисления вероятностей. М 19 4. 8 Г. Л. Ритц, Математические методы в статистике (сборник статей. перев. с англ.) М. 1927. 9. В. В. Романовский проф. Элементарный курс математической статистики. М.—Л. 1924. 10. В. И. Романовский, проф. Элементы теории корреляции. Ташкент. 1928 г. 11. Е. Е. Слуцкий Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения. Киев, 1912. 12. Д. Л. Соколовский Применение кривых распределения к установлению вероятных колебаний годового стока рек Европейской части СССР. Л. 1930. 13. А. П. Эльдертон Кривые распределения численностей и корреляций (перев. с англ.) М. 1924.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица I
значений интеграла вероятности

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$t)$	t	$F(t)$
0.00	0.0000	**0.50**	0.1915	**1.00**	0.3413	**1.50**	0.4332
0.01	0.0040	0.51	0.1950	1.01	0.3437	1.51	0.4347
0.02	0.0080	0.52	0.1985	1.02	0.3461	1.52	0.4357
0.03	0.0120	0.53	0.2019	1.03	0.3485	1.53	0.4370
0.04	0.0159	0.54	0.2054	1.04	0.3508	1.54	0.4382
0.05	0.0199	0.55	0.2088	1.05	0.3531	1.55	0.4394
0.02	0.0239	0.56	0.2123	1.06	0.3554	1.56	0.4406
0.07	0.0279	0.57	0.2157	1.07	0 3577	1.57	0.4418
0.08	0.0319	0.58	0.3190	1.08	0.3599	1.58	0.4429
0.09	0.0358	0.59	0.2224	1.09	0.3621	1.59	0.4441
0.10	0.0398	**0.60**	0.2257	**1.10**	0.3643	**1.60**	0.4452
0.11	0 0438	0.61	0.2291	1.11	0.3665	1.61	0 4463
0.12	0.0477	0.62	0.2324	1.12	0.3685	1.62	0.4474
0.13	0.0517	0.63	0.2356	1.13	0.3707	1.63	0.4484
0 14	0.0557	0.64	0'2389	1.14	0.3728	1.64	0.4495
0.15	0.0596	0.65	0.2421	1.15	0.3749	1.65	0 4505
0.16	0.0636	0.66	0.2454	1.16	0.3770	1.66	0.4515
0.17	0.0675	0.67	0.2486	1.17	0.3790	1 67	0.4525
0.18	0 0714	0.68	0.2517	1.18	0.3810	1.69	0.4535
0.19	0.0753	0.69	0.2549	1.19	0.3830	1.69	0.4545
0.20	0.0793	**0.70**	0.2580	**1.20**	0.3849	**1.70**	0.4554
0.21	0.0832	0.71	0.2611	1.21	0.3869	1.71	0.4564
0.22	0.0871	0.72	0.2642	1.22	0 3888	1.72	0.4573
0.23	0.0909	0.73	0.2673	1.23	0 3906	1.73	0.4582
0 24	0.0948	0.74	0.2703	1.24	0 3925	1.74	0.4591
0.25	0.0987	0.75	0.2734	1.25	0 3943	1 75	0.4599
0.26	0.1026	0.76	0.2764	1 26	0 3962	1.76	0.4608
0.27	0.1064	0.77	0.2793	1.27	0.3979	1.77	0.4616
0.28	0 1103	0.78	0.2823	1.28	0 3997	1.78	0.4625
0.29	0.1141	0.79	0.2852	1.29	0.4015	1.79	0.4633
0.30	0.1179	**0.80**	0.2881	**1.30**	0.4032	**1.80**	0.4641
0.31	0.1217	0.81	0.2910	1 31	0.4049	1 81	0 4648
0.32	0.1255	0.82	0.2939	1.32	0.4066	1.82	0.4656
0.33	0.1293	0.83	0.2967	1.33	0.4082	1 83	0.4664
0.34	0.1331	0.84	0.2995	1.34	0.4099	1.84	0.4671
0.35	0.1368	0.85	0.3023	1.35	0.4115	1.85	0.4678
0.36	0.1406	0.86	0.3051	1.36	0 4131	1.86	0.4685
0.37	0.1443	0.87	0.3078	1.37	0.4146	1.87	0.4692
0.38	0.1480	0.88	0.3106	1.33	1.4162	1.88	0.4699
0.39	0.1517	0.89	0.3133	1.39	0.4177	1.89	0.4706
0.40	0.1554	**0.90**	0.3159	**1.40**	0.4192	**1.90**	0.4713
0.41	0.1591	0.91	0.3186	1.41	0.4207	1.91	0.4719
0.42	0.1627	0.92	0.3212	1.42	0.4222	1.92	0.4726
0.43	0.1664	0.93	0.3238	1.43	0.4236	1.93	0.4732
0.44	0.1700	0.94	0.3264	1.44	0.4251	1.94	0.4738
0.45	0 1736	0.95	0 3289	1.45	0.4265	1.95	0.4744
0.46	0.1772	0.96	0.3315	1.46	0.4278	1.96	0.4750
0.47	0 1808	0.97	0.3340	1.47	0.4292	1.97	0.4756
0.48	0.1844	0.98	0.3364	1.48	0.4306	1.98	0.4761
0.49	0.1879	0 99	0.3389	1.49	0.4319	1 99	0.4767

Таблица I
значений интеграла вероятности

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

t	$F(t)$	t	$F(t$	t	$F(t)$	t	$F(t)$
2.00	0,4772	**2.50**	0.4938	**3.00**	0.4986	**3.50**	0.4998
2.01	0.4778	2.51	0.4940	3.01	0.4987	3.51	0.4998
2.02	0.4783	2 52	0.4941	3.02	0.4987	3.52	0.4998
2.03	0.4788	2.53	0.4943	3.03	0.4988	3.53	0.4998
2.04	0.4793	2.54	0.4944	3.04	0.4988	3.54	0.4998
2.05	0.4798	2.55	0.4946	3.05	0.4988	3.55	0.4998
2.06	0.4803	2.56	0.4948	3.06	0.4989	3.56	0.4998
2.07	0.4808	2.57	0.4949	3.07	0.4989	3 57	0.4998
.08	0.4812	2.58	0.4951	3.08	0.4990	3.58	0.4998
2.09	0.4817	2:59	0.4952	3.09	0.4990	3 59	0.4998
2.10	0.4821	**2.60**	0.4953	**3.10**	0.4990	**3.60**	0.4998
2.11	0.4826	2.61	0.4955	3.11	0.4991	3 61	0.4998
2.12	0.4830	2.62	0.4956	3.12	0.4991	3.62	0.4998
2.13	0.4834	2.63	0.4957	3.13	0.4991	3.63	0.4998
2.14	0.4838	2.64	0 4958	3.14	0,4991	3.64	0.4999
2.15	0.4842	2.65	0.4960	3.15	0.4992	3.65	0.4999
3.16	0.4846	2.66	0.4961	3.16	0.4992	3 66	0·4999
2.17	0 4850	2.67	0.4962	3.17	0.4992	3.67	0.4999
2.18	0.4854	2.63	0.4963	3.18	0.4993	3.63	0.4999
2.19	0.4857	2.69	0.4964	3.19	0.4993	3.69	0.4999
2.20	0.4861	**2.70**	0.4965	**3.20**	0.4993	**3.70**	0.4999
2.21	0.4864	2.71	0.4966	3.21	0.4993	3.71	0 4999
2.22	0.4863	2 72	0.4967	3.22	0.4993	3 72	0.4999
.23	0.4871	2.73	0 4968	3.23	0.4994	3.73	0.4999
2.24	0.4874	2.74	0.4969	3.24	0.4994	3.74	0.4999
2.25	0.4878	2.75	0.4970	3.25	0.4994	3.75	0.4999
2.26	0.4881	2.76	0.4971	3 26	0.4994	3 76	0.4999
2.27	0.4884	2.77	0.4972	3.27	0.4995	3.77	0.4999
2.28	0.4887	2.78	0.4973	3.28	0.4995	3.78	0.4999
2.29	0.4890	2.79	0.4974	3.29	0.4995	3.79	0.4999
2.30	0.4893	**2.80**	0.4974	**3.30**	0.4995	**3.80**	0.4999
2.31	0.4895	2.81	0.4975	3.31	0.4995	3.81	0.4999
2.32	0.4898	2.8	0 4976	3.32	0.4995	3.82	0.4999
2.33	0.4901	2.83	0.4977	3.33	0.4996	3.83	0.4999
2.34	0.4903	2.84	0.4977	3.34	0.4995	3.84	0.4999
2.35	0.4903	2.85	0.4978	3.35	0.4996	3.85	0.4999
2.36	0.4909	2.86	0.4979	3.36	0.4996	3.86	0.4999
2.37	0.4911	2.87	0.4930	3 37	0.4996	3.87	0,4999
2.38	0.4913	2.83	0.4980	3 38	0.4996	3.88	0.4999
2.39	0.4916	2.89	0.4931	3.39	0,4996	3.89	0.4999
2.40	0.4918	**2.90**	0.4981	**3.40**	0.4997	**3.90**	0.4999
2.41	0.4920	2.91	0.4982	3.41	0.4997	3.91	0 4999
2.42	0.4922	2.92	0.4982	3.42	0.4997	3 92	0.4990
2 43	0.4924	2.93	0 4983	3.43	0.4997	3.93	0,4999
2.44	0.4926	2.94	0.4933	3 44	0 4997	3.94	0.4999
2.45	0.4928	2.95	0.4934	3.45	0.4997	3 95	0,5000
2.46	0.4930	2.96	0.4985	3.46	0.4997	3.96	0 5000
2 47	0.4932	2.97	0.4985	3.47	0.4967	3.97	0.5000
2.48	0.4934	2.93	0.4985	3.48	0.4997	3.98	0.5000
2.49	0.4936	2.99	0.4986	3.49	0.4997	3.99	0 5000

Таблица II
отклонений ординат кривых продолжительностей от середины в зависимости от значения C_s при $C_v = 1{,}0$
(по Фостеру)

Коэф. несимметрии C_s	Процентное значение обеспеченности																			C_s
	0,1	1,0	3,0	5	10	20	25	30	40	50	60	70	75	80	90	95	97	99,0	99,9	
0,0	+3,09	+2,33	1,87	+1,64	+1,28	+0,84	+0,68	+0,52	+0,25	—0,00	—0,25	—0,52	0,68	—0,84	—1,28	—1,64	—1,88	—2,33	—3,09	0,0
0,2	3,38	2,48	1,93	1,69	1,30	0,83	0,67	0,51	0,22	—0,03	—0,23	—0,55	—0,70	—0,85	—1,25	—1,58	—1,79	—2,18	—2,81	0,2
0,4	3,67	2,62	2,00	1,74	1,32	0,82	0,65	0,48	0,19	—0,06	—0,31	—0,57	—0,71	—0,85	—1,22	—1,51	—1,69	—2,03	—2,54	0,4
0,6	3,96	2,77	2,06	1,79	1,33	0,80	0,62	0,45	0,15	—0,09	—0,34	—0,58	—0,72	—0,86	—1,19	—1,45	—1,59	—1,88	—2,28	0,6
0,8	4,25	2,90	2,12	1,83	1,34	0,78	0,60	0,42	0,12	—0,13	—0,37	—0,60	—0,73	—0,86	—1,16	—1,38	—1,49	—1,74	—2,03	0,8
1,0	4,54	3,03	2,19	1,87	1,34	0,76	0,57	0,38	0,08	—0,16	—0,40	—0,61	—0,73	—0,86	—1,12	—1,31	—1,39	—1,59	—1,80	1,0
1,2	4,82	3,15	2,25	1,90	1,35	0,71	0,54	0,35	0,05	—0,19	—0,42	—0,62	—0,73	—0,85	—1,08	—1,25	—1,30	—1,45	—1,59	1,2
1,4	5,11	3,28	2,31	1,93	1,34	0,71	0,51	0,32	+0,02	—0,22	—0,44	—0,63	—0,73	—0,84	—1,05	—1,18	—1,21	—1,32	—1,40	1,4
1,6	5,39	3,40	2,33	1,96	1,33	0,68	0,48	0,28	—0,01	—0,25	—0,46	—0,64	—0,73	—0,82	—1,00	—1,11	—1,13	—1,19	—1,24	1,1
1,8	5,66	3,50	2,41	1,98	1,32	0,64	0,44	0,24	—0,05	—0,28	—0,48	—0,64	—0,72	—0,80	—0,95	—1,03	—1,06	—1,08	—1,11	1,8
2,0	5,91	3,60	2,46	2,00	1,30	0,61	0,41	0,20	—0,08	—0,31	—0,49	—0,64	—0,71	—0,78	—0,89	—0,95	—0,98	—0,99	—1,00	2,0
2,2	6,20	3,70	2,48	2,01	1,28	0,58	0,37	0,17	—0,11	—0,33	—0,49	—0,63	—0,69	—0,75	—0,84	—0,89	—0,90	—0,90	—0,91	2,2
2,4	6,47	3,78	2,49	2,01	1,25	0,54	0,33	0,13	—0,14	—0,35	—0,50	—0,62	—0,66	—0,71	—0,79	—0,82	—0,82	—0,83	—0,83	2,4
2,6	6,73	3,87	2,50	2,01	1,23	0,51	0,31	0,10	—0,17	—0,37	—0,50	—0,60	—0,64	—0,68	—0,74	—0,76	—0,76	—0,77	—0,77	2,6
2,8	6,99	3,95	2,51	2,02	1,20	0,47	0,28	0,06	—0,20	—0,38	—0,50	—0,59	—0,62	—0,65	—0,70	—0,71	—0,71	—0,71	—0,71	2,8
3,0	+7,25	+4,02	2,52	+2,02	+1,18	+0,42	+0,25	+0,03	—0,23	—0,40	—0,50	—0,57	—0,60	—0,62	—0,65	—0,66	—0,66	—0,67	—0,67	3,0

Таблица III

вероятности значений

$$\theta = \frac{z}{\varepsilon(z)}$$

в функции от θ

θ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	0.9920	0.9840	0.9761	0.9681	0.9601	0.9522	0.9442	0.9362	0.9283
0.1	0.9203	9124	9045	8966	8887	8808	8729	8650	8572	8493
0.2	0.8415	8337	8259	8181	8103	8026	7949	7872	7795	7718
0.3	0.7642	7566	7490	7414	7339	7263	7188	7114	7039	6965
0.4	0.6892	6818	6745	6672	6599	6527	6455	6384	6312	6241
0.5	0.6171	6101	6031	5961	5892	5823	5755	5687	5619	5552
0.6	0.5485	5419	5353	5287	5222	5157	5093	5029	4965	4902
0.7	0.4839	4777	4715	4654	4593	4533	4473	4413	4354	4295
0.8	0.4237	4179	4122	4065	4009	3953	3898	3843	3789	3735
0.9	0.3681	3628	3576	3524	3472	3421	3371	3320	3271	3222
1.0	0.3173	3125	3077	3030	2983	2937	2891	2846	2801	2757
1.1	0.2713	2670	2627	2585	2543	2501	2460	2420	2380	2340
1.2	0.2301	2263	2225	2187	2150	2113	2077	2041	2005	1971
1.3	0.1936	1902	1868	1835	1802	1770	1738	1707	1676	1645
1.4	0.1615	1585	1556	1527	1499	1471	1443	1416	1389	1362
1.5	0.1336	1310	1285	1260	1235	1211	1188	1164	1141	1118
1.6	0.1096	1074	1052	1031	1010	0989	0969	0949	0930	0910
1.7	0.0891	0873	0854	0836	0819	0801	0784	0767	0751	0735
1.8	0.0719	0703	0688	0673	0658	0643	0629	0615	0601	0588
1.9	0.0574	0561	0549	0536	0524	0512	0500	0488	0477	0466
2.0	0.0455	0444	0434	0424	0414	0404	0394	0384	0375	0366
2.1	0.0357	0349	0340	0332	0324	0316	0308	0300	0293	0285
2.2	0.0278	0271	0264	0257	0251	0244	0238	0232	0226	0220
2.3	0.0214	0209	0203	0198	0193	0188	0183	0178	0173	0168
2.4	0.0164	0160	0155	0151	0147	0143	0139	0135	0131	0128
2.5	0.0124	0121	0117	0114	0111	0108	0105	0102	0099	0096
2.6	0.0093	0091	0088	0085	0083	0080	0078	0076	0074	0071
2.7	0.0069	0067	0065	0063	0061	0060	0058	0056	0054	0053
2.8	0.0051	0050	0048	0047	0045	0044	0042	0041	0040	0039
2.9	0.0037	0036	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028
3.0	0.0027	0026	0025	0024	0024	0023	0022	0021	0021	0020
3.1	0.0019	0019	0018	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014
3.2	0.0014	0013	0013	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010
3.3	0.0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
3.4	0.0007	0007	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005
3.5	0.0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003
3.6	0.0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002
3.7	0.0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002

XIII. НОМОГРАФИЯ.

1. Номография — это отрасль математики, разрабатывающая различные методы графического построения особым образом составленных чертежей, называемых „номограммами". Во французской литературе номограммы часто называют „абаками". Для каждой формулы строится своя особая номограмма, которая с достаточной точностью дает готовый результат ряда вычислений, совершенно освобождая от каких бы то ни было фактических вычислений.

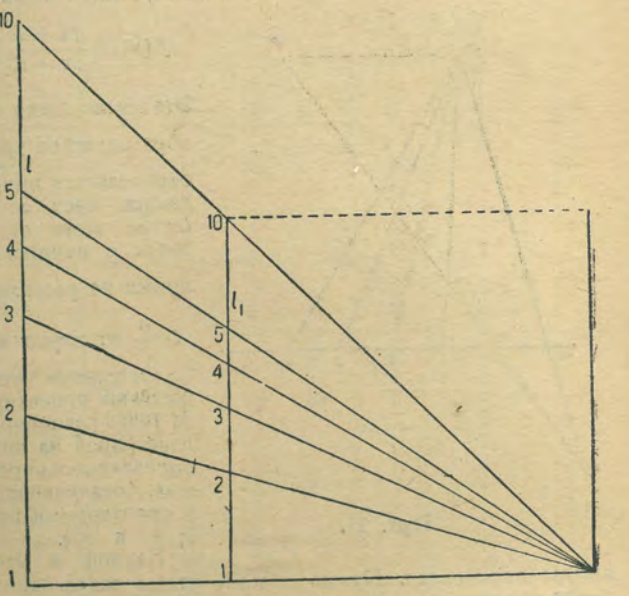
2. Основным элементом номограммы является функциональная шкала, которую можно рассматривать как особый полуграфический метод изображения функциональной зависимости между 2 переменными. Значения аргумента x на ней даются числами, значения функции $f(x)$ — отрезками.

Построение функциональной шкалы производится так: на прямой от одной и той же начальной точки ее O откладываются отрезки, равные значениям функции $f(x_1)$, $f(x_2)\ldots$, и в концах отложенных отрезков ставятся числовые пометки x_1, $x_2\ldots$, равные соответствующим значениям аргумента.

Положительные значения функции $f(x)$ откладываются по одну сторону от начала O, отрицательные — по другую. Шкалы функций $f(x)$ и $-f(x)$ имеют противоположное **направление (от начала к концу).**

Если в единице масштаба l *мм*, то точки с пометками x_1, $x_2\ldots$ будут находиться на расстоянии $lf(x_1)$, $lf(x_2)$ *мм*... от начала шкалы.

Число l называется **модулем** функциональной шкалы, а уравнение $s = lf(x)$, по которому вычисляется расстояние в миллиметрах помеченных точек шкалы от ее начала, называется **уравнением функциональной шкалы.**



Черт. 93.

Уравнение шкалы выражает свойство самого чертежа, и оно не может измениться, если придадим этому чертежу другое толкование. Последнее обстоятельство всегда нужно иметь в виду при построении номограммы.

Так, если имеют в своем распоряжении шкалу функции $f(x)$ с модулем l, то ту же самую шкалу можно рассматривать за шкалу функции $\varphi(x) = kf(x) + C$, но только с модулем $\frac{l}{k}$ (если $k < O$, то направление шкалы изменится). Отсюда является возможность пользоваться существующими в продаже шаблонами наиболее употребительных шкал, что сильно экономит время и труд при построении номограмм.

Обратим еще внимание на следующий факт: если желают построить функциональную шкалу длиной L мм с начальной числовой отметкой, равной a, и конечной, равной b, то модуль нужно взять равным $\frac{L}{f(b) - f(a)}$ *мм*. Положение остальных помеченных точек вычисляется тогда по формуле

$$s = l[f(x) - f(a)].$$

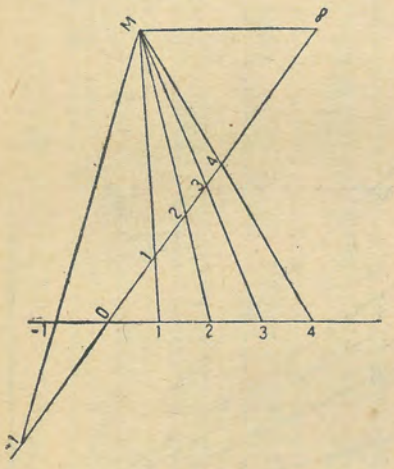
3. Наиболее употребительны следующие функциональные шкалы:

а) **равномерная шкала**, т. е. шкала функции $f(x) = ax + b$, где a и b постоянные числа; пометки для x идут, возрастая в арифметической прогрессии;

b) **логарифмическая шкала** с уравнением $s = l \cdot \lg x$. Логарифмическая шкала периодична: интервал ее от 1 до 10 тождественен с интервалом от 10 до 100, от 100 до 1 000... от 0,1 до 1 и т. д. Длина шкалы с одним периодом равна модулю этой шкалы l. На счетных линейках l обычно равно 250 *мм*, 125 *мм* и 83,3 *мм*. Но в продаже существуют шкалы других масштабов (модулей), которые желательно иметь под рукой при построении номограмм. Из чертежа 93 видно, как можно графически получить шкалу длиной в l_1 *мм*, имея в своем распоряжении логарифмическую шкалу в l *мм* длины.

Относительная точность отсчетов на логарифмической шкале — постоянна.

c) **Проективная шкала**, или шкала функции вида:



Черт. 94.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ (где } ad - bc \neq 0).$$

Эта шкала легко строится следующим образом: по ее уравнению $s = l \cdot \frac{ax+b}{cx+d}$ определяется вычислением положения любых трех ее помеченных точек (легче всего определить положение точек с пометками 0,1, ∞, находящихся на расстоянии $l \cdot \frac{b}{d}$, $l \cdot \frac{a+b}{c+d}$, $l \cdot \frac{a}{c}$ от начала шкалы).

Остальные точки строятся уже графически проектированием из центра M точек равномерной шкалы (черт. 94), нанесенной на прямую AB. Центр M определяется пересечением двух прямых, соединяющих точки обеих шкал с одинаковыми пометками (чаще 1 и 1; ∞ и ∞).

Наклон и масштаб равномерной шкалы произволен. Нужно только, чтобы точка пересечения обеих шкал имела одинаковую пометку.

Примечание. Шкала функции

$$F(x) = \frac{af(x) + b}{cf(x) + d}, \text{ где } ad - bc \neq 0,$$

называется проективной шкалой функции $f(x)$. Она строится также по трем ее помеченным точкам и проектированием уже не равномерной шкалы, а шкалы функции $f(x)$.

d) **Криволинейная шкала.** Криволинейная шкала обычно наносится на кривую, заданную уравнением в параметрической форме: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Для ее построения параметру t дают ряд числовых значений: $t_1, t_2, t_3 \ldots$, и точки кривой с координатами $\varphi(t_1), \psi(t_1)$; $\varphi(t_2), \psi(t_2)$; $\varphi(t_3), \psi(t_3)$... снабжаются пометками $t_1, t_2, t_3 \ldots$ Сама же кривая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ называется носителем шкалы.

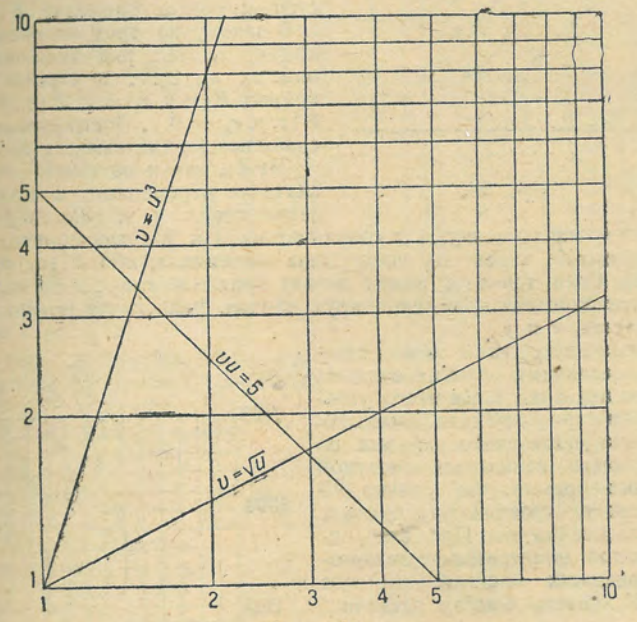
4. Если на осях координат OX и OY нанести шкалы функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ с модулями l_1 и l_2 и началом в O, то функциональными координатами u и v

точки плоскости называют отметки на шкалах подошв перпендикуляров, опущенных из этой точки на оси координат.

Если u и v функциональные координаты точки плоскости, то декартовые координаты той же точки будут: $x = l_1 f_1(u)$; $y = l_2 f_2(v)$.

Уравнение кривой $F(x, y) = 0$, отнесенной к декартовой системе координат, в функциональных координатах u и v очевидно напишется так: $F[l_1 f_1(u), l_2 f_2(v)] = 0$ и будет иметь более сложный вид; поэтому замена одних координат другими дает возможность представить графически различные функции прямыми линиями.

(Выпрямление кривых — „линейная функциональная анаморфоза“)



Черт. 95.

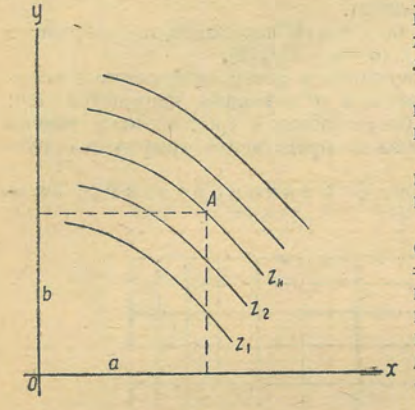
Для удобства отсчета через отметки шкал проводят прямые, параллельные осям OX и OY.

Полученные сетки называются функциональными сетками.

Наиболее употребительны из них логарифмические сетки двух родов; в первом случае: $l_1 = l_2 = l$; $f_1(u) = \lg(u)$; $f_2(v) = \lg v$. („логарифмическая бумага“. В продаже имеются листы этой бумаги с $l = 250$ *мм*, $l = 100$ *мм*; во втором случае $l_1 = l_2 = l$; $f_1(u) = u$; $f_2(v) = \lg v$ („полулогарифмическая бумага“).

Уравнение вида $u^p v^q = C$, где p, q, C — постоянные, графически изобразится прямой на логарифмической бумаге.

Обратно, очевидно уравнение любой прямой в логарифмических координатах будет иметь вид: $u^p v^q = C$. Аналогично, уравнение $v = p \cdot c^u$ изобразится прямой на полулогарифмической бумаге. На чертеже 95 изображены



Черт. 96.

ур-ния $v=\sqrt{u}, uv=5, v=u^3$, которые на логарифмической бумаге изображаются соответствующими прямыми линиями.

5. Номограммы для функций с тремя переменными разбиваются на три основных вида:

1) сетчатые номограммы, 2) номограммы из выравненных точек, 3) номограммы с индексами.

6. Сетчатые номограммы строятся так: в уравнении $F(x, y, z)=0$ одному из трех переменных, например z, дают ряд числовых значений: $z_1, z_2, z_3\ldots$ и строят графики кривых: $F(x, y, z_1)=0$; $F(x, y, z_2)=0$; $F(x, y, z_3)=0\ldots$ Построенные кривые снабжаются пометками $z_1, z_2, z_3\ldots$

Чтобы найти по такой номограмме значение переменного z при данных значениях x и y, например $x=a$ и $y=b$, нужно найти точку A с координатами a и b, тогда пометка z_k кривой, проходящей через эту точку, дает значение z, ибо $F(a, b, z_k)=0$ (черт. 96). Если точка A лежит между кривыми $z_1 z_2\ldots$, то величину z приходится определять, интерполируя на-глаз. Аналогично можно найти x, если известны z и y.

Сетчатые номограммы можно строить на различных функциональных сетках, на практике чаще всего употребляется логарифмическая бумага. На ней система помеченных кривых по большей части заменяется системой помеченных прямых, что сильно облегчает как построение номограммы, так и пользование ею. При построении сетчатой номограммы в декартовых координатах масштабы на осях OX и OY обычно бывают различны.

Пример 1. Номограмма формулы:

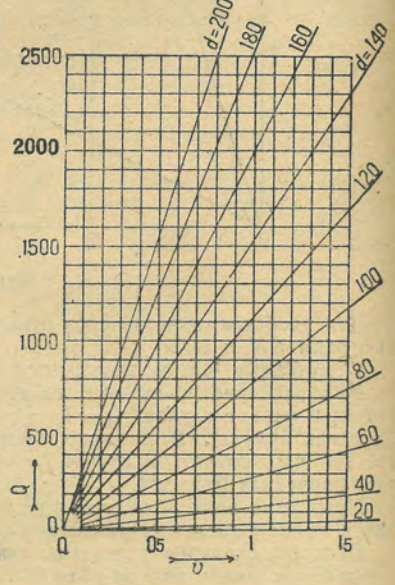
$$V=\frac{40Q}{\pi d^2}$$

(V в *м/сек.*, d — диаметр в *см*, Q — расход воды в *л/сек.*).

Принимая V за x, а Q за y декартовой системы координат, видим, что при $d=\text{const}$ зависимость между V и Q графически изобразится прямой. Поэтому d принимают за параметр. Полагая $d=20, 40\ldots$, получим номограмму (черт. 97) (масштабы на OX и OY различны).

Численный пример: $d=120$ *см*; $Q=900$ *л/сек.*; по номограмме находим $V=0{,}80$ *м/сек.*

Пример 2. Если в формуле Dupuit Eytelwein'a $Q=20\,000\sqrt{D^5 I}$ (Q расход воды в *л/сек.*, D — диаметр трубы в *м*, I — уклон) принять D и I за логарифмические координаты



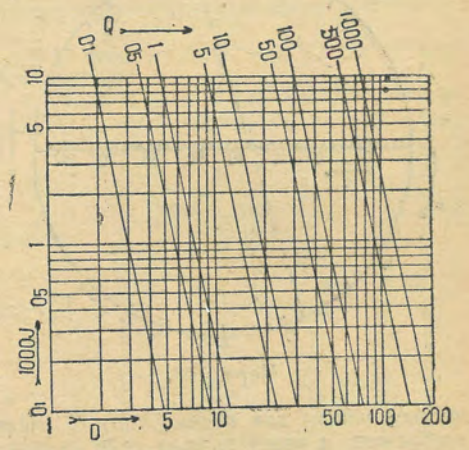
Черт. 97.

плоскости (т. е. u и v), то согласно § 4 мы видим, что при $Q=\text{const}$ наше уравнение будет в логарифмических координатах уравнением прямой *. Поэтому, полагая $Q=0{,}1; 0{,}5; 1\ldots$ и строя на логарифмической бумаге ($l=100$) соответствующие прямые, получим номограмму, изображенную на чертеже 98 (здесь диаметр трубы выражен в *см*)

7. Номограммы из выравненных точек принадлежат к наиболее совершенному виду номограмм. Общий метод их построения такой: левая часть уравнения $F(u, v, w)=0$ представляется в виде детерминанта: (I)

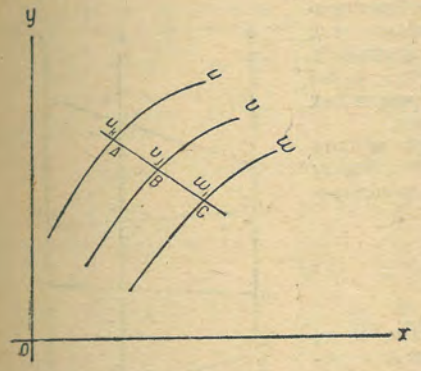
$$\begin{vmatrix} \varphi_1(u) & \psi_1(u) & 1 \\ \varphi_2(v) & \psi_2(v) & 1 \\ \varphi_3(w) & \psi_3(w) & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad \text{(I)}$$

Затем на 3 кривых с параметрическими уравнениями: $x=\varphi_1(u)$, $y=\psi_1(u)$; $x=\varphi_2(v)$, $y=\psi_2(v)$; $x=\varphi_3(w)$, $y=\psi_3(w)$ по способу, указанному в § 3 (d), наносятся криволинейные шкалы для 3 переменных u, v, w (черт. 99). После этого номограмма готова **.



Черт. 98.

Если три точки шкал (u), (v), (w): A, B, C с пометками u_k, v_j, w_l лежат на одной прямой, то $F(u_k, v_j, w_l)=0$. В самом деле, заменяя в (I) u, v, w через u_k, v_j, w_l, получаем известное соотношение, связывающее координаты трех точек A, B, C, лежащих на одной прямой. Отсюда, при $u=u_k$, $v=v_j$ и искомом w значение $w=w_l$ найдется как пометка точки пересечения со шкалой w прямой, соединяющей A, B. Интерполирование здесь легче, чем в сетчатых номограммах.



Черт. 99.

Пример. Номограмма формулы Базена (Bazin): $C=\dfrac{87}{1+\dfrac{\gamma}{\sqrt{R}}}$.

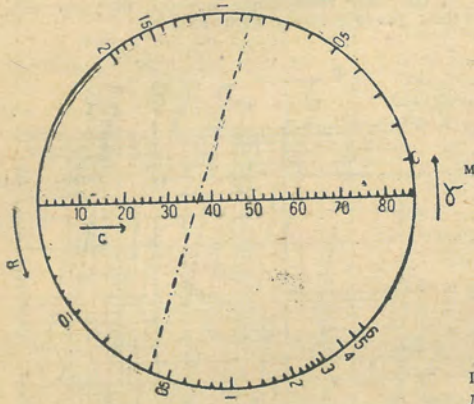
* Уравнение этой прямой в декартовых координатах очевидно будет:

$$\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}y-l(\lg Q-4{,}301)=0.$$

** Если уравнение $F(u, v, w)=0$ нельзя представить при помощи детерминанта (I), то для него нельзя построить номограмму из выравненных точек (сетчатую — можно). Вопросы о возможных случаях представления уравнения $F(u, v, w)=0$ детерминантом (I), хотя теоретически и обоснованы, но к сожалению до сих пор нет практически удобных приемов для разрешения этой задачи во всяких случаях.

1) Представляем данную зависимость между C, γ, R в виде детерминанта (I)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1+\gamma^2}, & \frac{\gamma}{1+\gamma^2}, & 1 \\ \frac{R}{1+R}, & \frac{-\sqrt{R}}{1+R}, & 1 \\ \frac{C}{87}, & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



Черт. 100.

2) Строим три шкалы для переменных γ, R, C по их уравнениям:

$$x = \frac{1}{1+\gamma^2},\ y = \frac{\gamma}{1+\gamma^2} \text{ для } \gamma$$

$$x = \frac{R}{1+R},\ y = \frac{-\sqrt{R}}{1+R} \text{ для } R.$$

$$x = \frac{C}{87},\ y = 0 \text{ для } C.$$

Исключая γ и R из двух первых уравнений, найдем, что две первые шкалы будут иметь носителем один и тот же круг: $x^2 + y^2 - x = 0$, а носитель третьей шкалы для переменного C очевидно будет ось OX. Номограмма изображена в окончательном виде на чертеже 100. (Масштаб равен радиусу круга.)

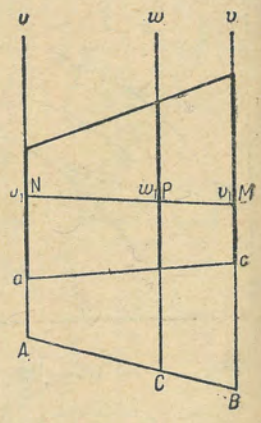
Численный пример. Для $R = 0{,}40$ м, $\gamma = 0{,}85$, номограмма дает $C = 37{,}1$.

8. На практике уравнение $F(u, v, w) = 0$ чаще всего приводится к одной из нижеприводимых канонических форм, для каждой из которых существуют простые, практически удобные правила построения номограммы из выравненных точек, не требующие применения детерминанта.

9. Каноническая форма $f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$ (1) представляется номограммой из выравненных точек с тремя параллельными шкалами.

Правило построения: 1) выбирают модули для шкал двух переменных, l_1 и l_2 так, чтобы шкалы переменных u и v были бы приблизительно одинаковой длины a,

$$al_3 = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2};$$



Черт. 101.

2) на трех параллельных прямых u, v, w, где средняя w делит расстояние между крайними u и v в отношении l_1 к l_2, наносят шкалы функций $f_1(u)$, $f_2(v)$, $f_3(w)$. За начало шкал можно взять любые три точки A, B, C, непременно лежащие на одной прямой (черт. 101). (Если u_1, v_1, w_1 три числа, удовлетворяющие уравнению (1), то та же номограмма (черт 101) представит собой уравнение $\overline{f}_1(u) + \overline{f}_2(v) = \overline{f}_3(w)$, где: $\overline{f}_1(u) = f_1(u) - f_1(u_1)$; $\overline{f}_2(v) = f_2(v) - f_2(v_1)$; $\overline{f}_3(w) = f_3(w) - f_3(w_1)$ с той лишь разницей, что начала шкал переместятся в точки M, N, P с пометками u_1, v_1, w_1. Второе уравнение очевидно равносильно первому, так как $f_1(u) + f_2(v_1) = f_3(w_1)$. Важно заметить для практики, что точки N и M берутся произвольно, так же как и их пометки, а пометка точки P вычисляется из первоначального уравнения подстановкой в него пометок M и N.

Для уравнения $f_1(u) - f_2(v) = f_3(w)$ шкала функции $-f_2(v)$ имеет обратное направление: c и d меняются местами.

Для того чтобы иметь шкалы функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ равными между собой и равными по длине L мм, модули l_1 и l_2 определяют по формулам

$$l_1 \approx \frac{L}{f_1(b) - f_1(a)},\ l_2 \approx \frac{L}{f_2(c) - f_2(d)},$$

где $a - b$ и $c - d$ — интервалы изменения u и v (см. § 2).

Пример. Логарифмируя формулу $Q = \frac{\pi d^2 v}{4}$ имеем:

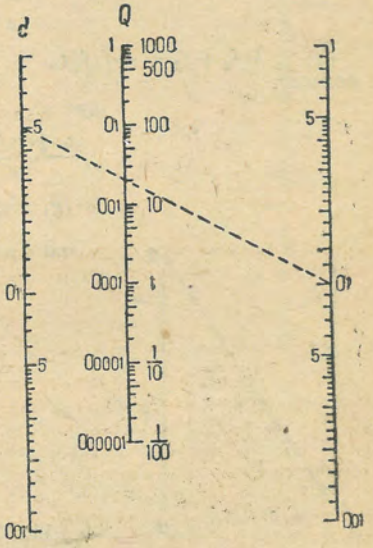
$\lg Q + \lg 4 - \lg \pi = 2 \lg d + \lg v$ [$f_3(Q) = \lg Q + \lg 4 - \lg \pi$; $f_1(d) = 2 \lg d$; $f_2(v) = \lg v$].

Интервалы изменения d и v от 0,01 до 1 (м и м/сек.);

$$l_1 = \frac{L}{2 \lg 1 - 2 \lg 0{,}01} = \frac{L}{4};\ l_2 = \frac{L}{\lg 1 - \lg 0{,}01} = \frac{L}{2};\ l_3 = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{L}{6};\ l_1 : l_2 = 1 : 2.$$

Проводя три параллельные прямые d, Q, v (средняя Q делит расстояние между d и v в отношении 1 : 2) и нанося на них шкалы функций $f_1 f_3, f_2$ получим номограмму, изображенную на чертеже 102 *.

Численный пример: $d = 0{,}5$, $v = 0{,}1$, по номограмме находим $Q = 0{,}02$ м³/сек., или 20 литров в секунду.



Черт. 102.

10. К виду (1) приводятся уравнения:

a) $f_1 \cdot f_2 = f_3$;

логарифмируя, имеем:

$$\lg f_1 + \lg f_2 = \lg f_3.$$

b) $f_1 f_2 f_3 = A$, где $A = \text{const}$ $f_1 f_2 = \frac{A}{f_3}$;

после логарифмирования:

$$\lg f_1 + \lg f_2 = \lg A - \lg f_3.$$

c) $f_1 f_2 + f_2 f_3 = f_1 f_2$

* Начала шкал f_1, f_2 можно расположить произвольно, начало шкалы f_3 должно лежать на прямой, соединяющей начала первых двух шкал. Если $L = 50$, то можно воспользоваться продажными шаблонами.

или

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{f_3}.$$

d) $f_1+f_2+f_3=f_1\cdot f_2\cdot f_3$,
или

$$-f_3=\frac{f_1+f_2}{1-f_1f_2}.$$

Заменой переменных: $f_1=\operatorname{tg}\alpha, f_2=\operatorname{tg}\beta$ преобразовываем предыдущее в $-f_3=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ или $\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, где $\operatorname{tg}\gamma=-f_3$.

$$\alpha+\beta=\gamma+n\pi.$$

e) $f_1+f_2+f_3=A\cdot f_1f_2f_3$,
полагая:

$$g_1=af_1,\quad g_2=af_2,\quad g_3=af_3.$$

$$\frac{g_1+g_2+g_3}{a}=A\cdot\frac{g_1g_2g_3}{a^3}$$

$$a^2(g_1+g_2+g_3)=Ag_1g_2g_3.$$

При $a=\sqrt{A}$ приходим к (d).

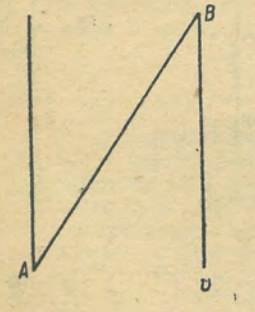
$$g_1+g_2+g_3=g_1g_2g_3.$$

f) $f_1f_2+f_2f_3+f_3f_1=A;\quad A=\text{const}.$

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}=A\cdot\frac{1}{f_1}\cdot\frac{1}{f_2}\cdot\frac{1}{f_3}$$

$$g_1=\frac{1}{f_1};\ g_2=\frac{1}{f_2};\ g_3=\frac{1}{f_3}.$$

$$g_1+g_2+g_3=Ag_1g_2g_3\ (e)$$



Черт. 103.

11. Каноническая форма:

$$f_1(u)=f_2(v)\cdot f_3(w).\qquad (II)$$

В номограмме этой формы 2 шкалы для $f_1(u)$ и $f_2(v)$ с модулями l_1, l_2 параллельны с началом в точках A и B, третья шкала AB наклонна (черт. 103) с началом в A, модулем l_3, равным длине AB, и строится для функции:

$$\frac{l_1f_3(w)}{l_1f_3(w)+l_2}.$$

Эта шкала может быть построена и графическим путем, как это указано в § 3 (c).

Как пример номограммы такого типа на чертеже 104 приведена номограмма известной формулы Dupuit-Eytelweina:

$$v=\sqrt{648{,}5\cdot DI},$$

где D дается в *м*, а v — в *м/сек*. (На номограмме D — в *см*, а I — в обратных величинах).

Для построения номограммы эта формула была приведена к виду:

$$D=\frac{1}{648{,}5\,I}\cdot v^2.$$

$$f_1(D)=D;$$

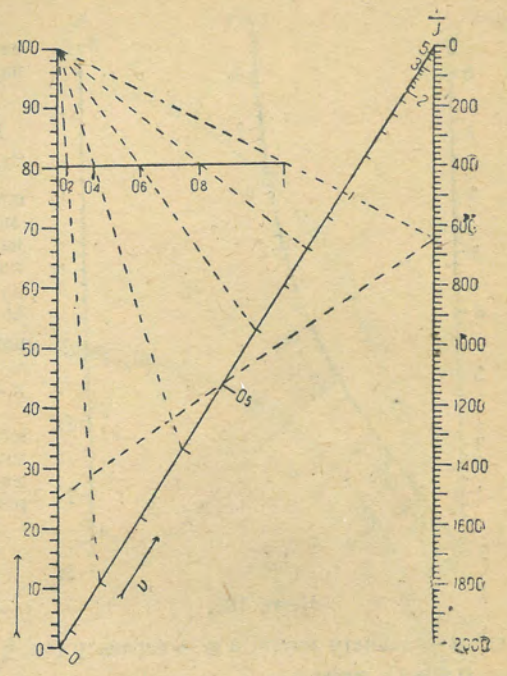
$$f_2(I)=\frac{1}{648{,}5\,I};\quad f_3(v)=v^2.$$

На чертеже указан способ графического построения шкалы проективной шкале функции $f_3(v)=v^2$.

12. Каноническая форма

$$f_1(w)+f_3(w)\cdot f_1(u)+f_2(v)=0\qquad (III)$$

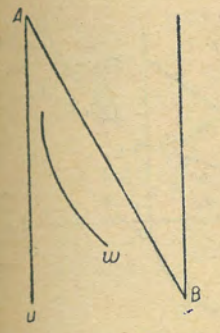
воспроизводится на номограмме с 2 параллельными прямыми для шкал функции $f_1(u)$ и $f_2(v)$. Модули l_1 и l_2; точки A и B начала шкал (см. черт. 105). Шкала для третьего переменного w криволинейна, и параметрическое уравнение носителя шкалы



Черт. 104.

$$x=l_3\frac{l_1}{l_2f_3(w)+l_1}\quad y=\frac{l_2l_1f_1(w)}{l_2f_3(w)+l_1}.$$

Оси координат AB и (u) с началом в A обычно косоугольные, где (u) и y положительны книзу, а (v) кверху.



Черт. 105.

Пример.

Приближенная формула для расхода через затопленный водослив

$$Q=1{,}77\,B\sqrt{H_1^3}+2{,}35\,BH_2\sqrt{H_1},$$

где Q — количество воды в секунду в $м^3$; B — ширина водослива H_1 — высота верхней поверхности воды над нижней и H_2 — высота этой последней над порогом водослива.

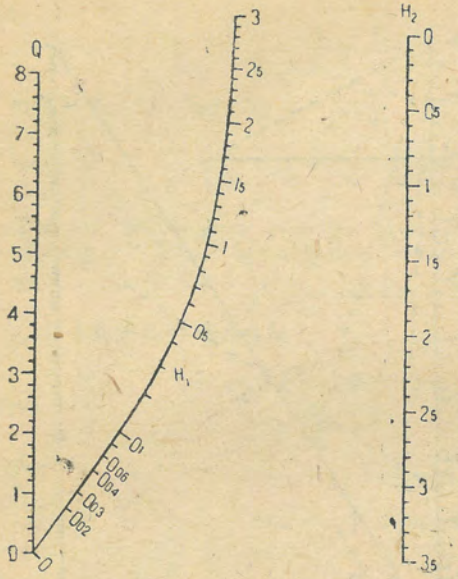
При $B=1$ м формула приводится к виду:

$$1{,}77\,H_1^{\frac{3}{2}}+2{,}35\,H_2H_1^{\frac{1}{2}}-Q=0,$$

т. е. к каноническому виду (III):

$$f_1(H_1)=1{,}77\,H_1^{\frac{3}{2}};\qquad f_3(H_2)=H_1^{\frac{1}{2}}$$

$$f_1(H_2)=2{,}35\,H_2;\qquad f_2(Q)=-Q.$$



Черт. 106.

В остальном построение производится по указанному в этом параграфе способу (черт. 106).

13. Каноническая форма:

$$f_1(u)\cdot f_2(v)\cdot f_3(w)+[f_1(u)+f_2(v)]\,g_3(w)+h_3(w)=0 \quad \text{(IV)}$$

воспроизводится круговой номограммой (черт. 107), причем на круг QO' наносятся две шкалы для переменных u и v, получаемые проектированием из O шкал функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$, нанесенных на прямую $O'y' \parallel Oy$ с одним и тем же масштабом l и общим началом O.

Шкала для третьего переменного w есть криволинейная шкала (w), носитель которой имеет параметрическое уравнение:

$$x=\frac{a^3 f_3}{a^2 f_3+l^2 h_3};$$

$$y=-\frac{a^2 l g_3}{a^2 f_3+l^2 h^3},$$

где a — диаметр круга, а w — параметр (см. § 3, d).

Пример. Формула:

$$R=\frac{bd+d^2}{b+d\sqrt{8}},$$

где R гидравлический радиус сечения канала с двойными откосами, d — глубина канала и b — ширина канала по дну.

Это уравнение в канонической форме примет вид:

$$-R\frac{b}{\sqrt{8}}-\left(R-\frac{b}{\sqrt{8}}\right)d+\frac{d^2}{\sqrt{8}}=0.$$

На круг проектируются прямолинейные шкалы функций $f_1(R)=R$, и

$$f_2(b)=-\frac{b}{\sqrt{8}}$$

с модулем l_1, нанесенные на прямую $O'x$.

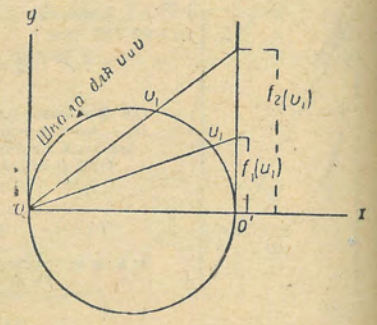
Криволинейная шкала для переменного d имеет носителем эллипс с уравнением:

$$x=\frac{1}{1+l^2\frac{d}{\sqrt{8}}}\,2$$

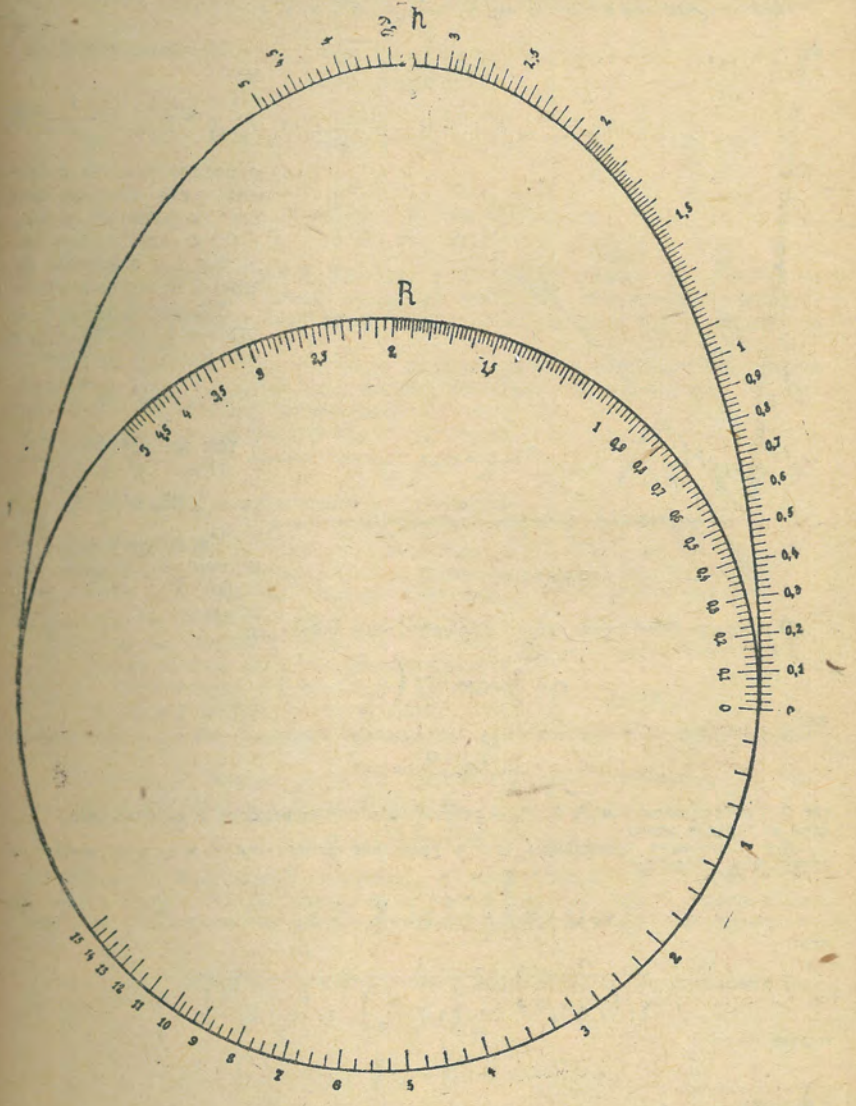
$$y=l\cdot dx$$

в параметрической форме, а в декартовых координатах этот эллипс выражается уравнением:

$$x^2+\frac{y^2}{x=8}$$

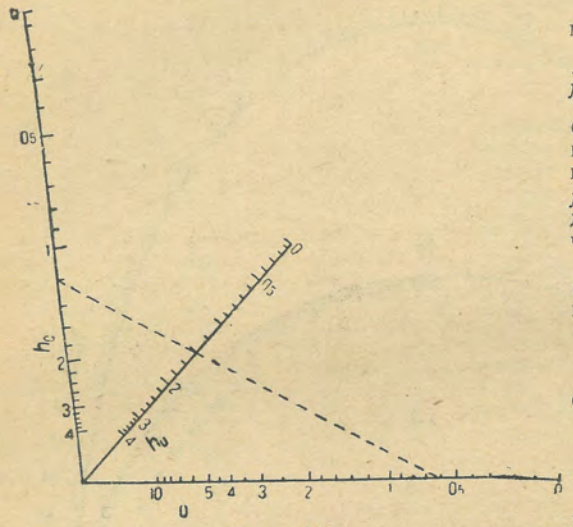


Черт. 107.



Черт. 108.

с малой полуосью, равной 0,5, и большой, равной 0,841. При построении этой номограммы за единицу измерения принят не мм, а диаметр круга, т. е. $a=1$, а $l=0{,}5$.



Черт. 109.

14. Каноническая форма:

$$\frac{1}{f_1(u)}+\frac{1}{f_2(v)}=\frac{1}{f_3(w)} \quad (V)$$

строится так. На сторонах угла $\alpha°$ наносятся шкалы функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ с одинаковым модулем l и с общим началом в вершине угла.

На биссектрисе угла строится шкала функции $f_3(w)$ с модулем

$$l_3=2l\cos\frac{\alpha}{2},$$

с тем же началом.

При

$$\alpha=120°, \quad l_1=l_2=l_3.$$

Часто уравнение, не имеющее формы (V), выгодно к этому виду привести.

Пример. Номограмма (черт. 109) представляет уравнение:

$$Q=\frac{2}{3}\cdot 0{,}62\sqrt{2g}\left(h_u^{\frac{3}{2}}-h_0^{\frac{3}{2}}\right),$$

или

$$h_0^{\frac{3}{2}}+\frac{Q}{1{,}82}=h_u^{\frac{3}{2}},$$

где Q — расход воды в $м^3$, а h_0, h_u — расстояние в метрах верхнего и нижнего края отверстия от зеркала воды.

Для построения номограммы данное уравнение приводится к виду последовательно следующим образом:

$$\left(1+h_0^{\frac{3}{2}}\right)+\left(1+\frac{Q}{1{,}82}\right)=2+h_u^{\frac{3}{2}}$$

или:

$$\frac{1}{1:\left(1+h_0^{\frac{3}{2}}\right)}+\frac{1}{1:\left(1+\frac{Q}{1{,}82}\right)}=\frac{1}{1:\left(2+h_u^{\frac{3}{2}}\right)};$$

модуль

$$l_1=l_2=125;\ \cos\frac{\omega}{2}=\frac{2}{3},$$

а поэтому

$$l_3=2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1{,}25=166{,}67\ м.$$

15. Номограммы из выравненных точек допускают коллинеарное преобразование. Если x и y координаты точек носителей шкал номограммы общего вида (см. § 7), а ξ и η — координаты коллинеарно преобразованной номограммы, то:

$$\xi=\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{23}};$$

$$\eta=\frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}},$$

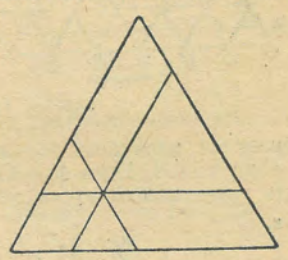
причем

$$a=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$$

(в остальном a_{ij} произвольны). Свобода в выборе коэфициентов $a_{ij}(\infty^8)$ позволяет получать номограммы, очень удобные для пользования, поэтому коллинеарное преобразование номограмм широко применяется в последнее время на практике.

Полезно иметь в виду, что при коллинеарном преобразовании всегда получаются проективные шкалы, но параллельность шкал вообще не сохраняется. Так например номограммы с тремя пересекающимися шкалами (§ 14) коллинеарны номограммам с тремя параллельными шкалами (§ 9).

16. Номограммы с индексами или транспарантами характерны тем, что для пользования ими недостаточно одной линейки, а необходимы особые транспаранты (начерченная на прозрачной бумаге пара взаимно перпендикулярных прямых, система концентрических кругов и т. д.). В большинстве случаев правила их построения основываются на геометрических соображениях элементарного характера. На практике встречаются весьма разнообразные номограммы этого вида. Каждая номограмма снабжается соответствующим ключом.



Черт. 110.

17. В последнее время получили распространение так называемые треугольные номограммы для уравнения вида:

$$f_1(u)+f_2(v)+f_3(w)=\text{const}.$$

Правила их построения основаны на свойствах равностороннего треугольника. Из чертежа 110 видно, что сторона основного треугольника равна сумме трех различных сторон внутренних равносторонних же треугольников.

Пример. На чертеже 111 дана треугольная номограмма известного уравнения Бернулли при $C=100$.

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=100;$$

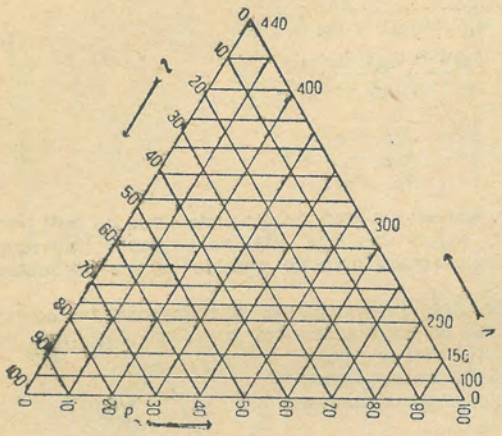
$$\left[f_1(z)=z;\ f_2\left(\frac{p}{\gamma}\right)=\frac{p}{\gamma};\ f_3(v)=\frac{v^2}{2g}\right].$$

На сторонах треугольника построены шкалы функции f_i с одним и тем же модулем k. Длина стороны $\triangle$ равна 100 l.

Способ пользования очевиден и основан на том, что сторона основного равностороннего треугольника равна сумме трех различных сторон внутренних равносторонних же треугольников (см. черт. 110).

§ 18. Номограмма с четырьмя и более переменными. Уравнение с четырьмя переменными x_1, x_2, x_3, x_4 в технических формулах чаще всего встречается в виде:

$$F(x_1,x_2)=G(x_3,x_4).$$



Черт. 111.

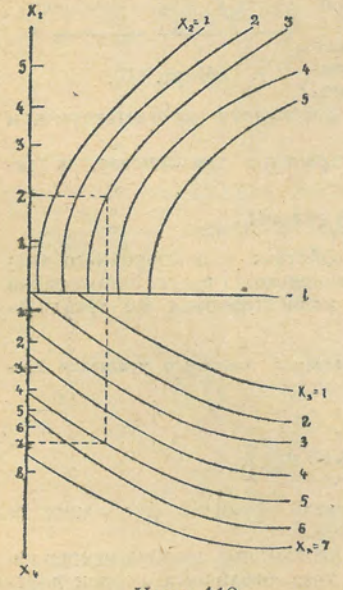
Для него строятся две номограммы с тремя переменными, где вспомогательное переменное t для уравнений:

$$F(x_1,x_2)=t,$$

$$G(x_3,x_4)=t.$$

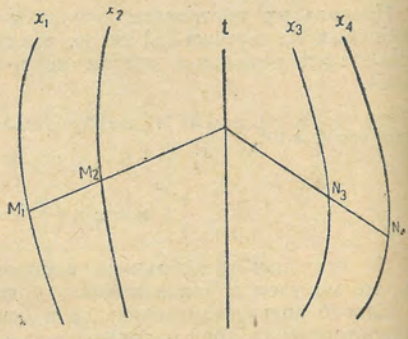
Способ пользования такой: чтобы найти x_4, зная x_1, x_2, x_3, по первой номограмме, находят t, а из второй, зная t и x_3, находят x_4. Обе номограммы обычно строятся на одном чертеже с общей шкалой t, градуирование которой становится излишним (t — немая шкала). Здесь возможны два случая.

Случай 1. Если функции F и G какие угодно, то уравнение может быть представлено двумя декартовыми абаками с общей немой шкалой для t. На чертеже 112 указано стрелками, как например по такой номограмме, зная, что $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=5$, определить x_4, равное 7.



Черт. 112.

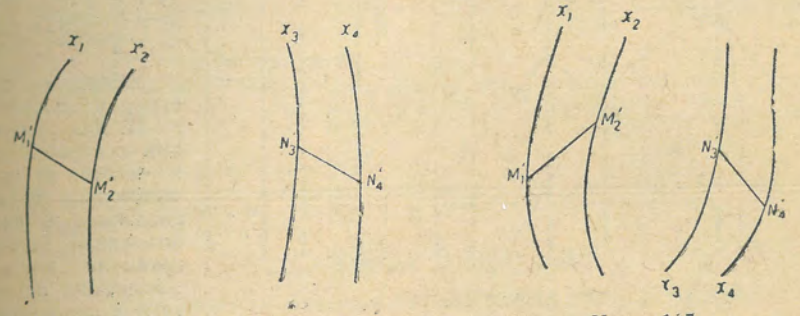
Случай 2. Уравнения $F(x_1,x_2)=t$ и $G(x_3,x_4)=t$ могут быть представлены номограммами из выравненных точек. На чертеже 113 изображены две номограммы из выравненных точек с общей прямолинейной немой



Черт. 113.

шкалой t. Если t — бесконечно удаленная прямая, то получим схему номограммы, изображенной на чертеже 114, ($M_1'M_2' \parallel N_3'N_4'$).

Сделав в предыдущей номограмме поворот второй ее части (для $G_{34}=t$) на 90°, получим номограмму (черт. 115), пользоваться которой удобно при помощи транспаранта из двух взаимно перпендикулярных прямых.



Черт. 114. Черт. 115.

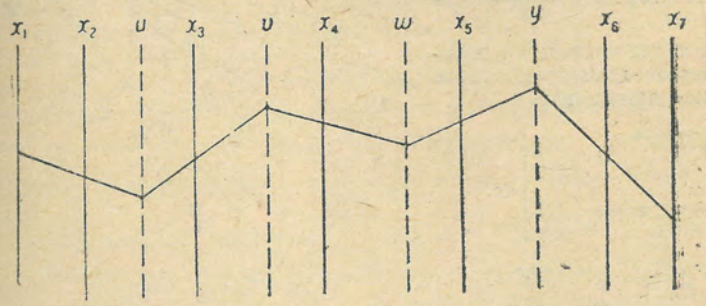
19. Для уравнений со многими переменными наиболее часто встречающегося вида:

$$f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}=f_n$$

строятся номограммы с многократным выравниванием при помощи ряда вспомогательных переменных: u, $v\ldots t$.

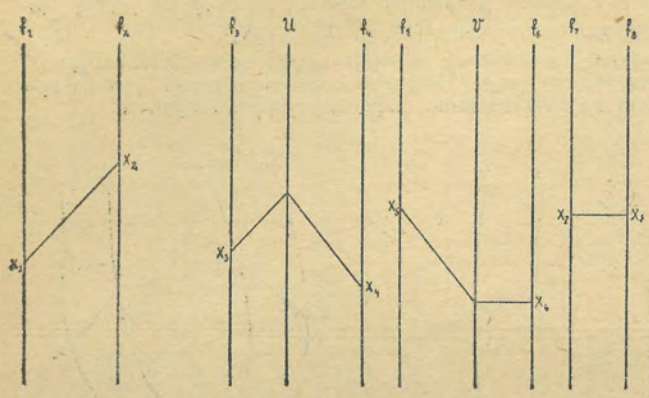
$$f_1+f_2=u$$
$$u+f_3=v$$
$$\ldots\ldots$$
$$t+f_{n-1}=f_n$$

Чертеж такой номограммы имеет вид, показанный на чертеже 116.



Черт. 116.

20. В частном случае, когда n четно, прямые выравнивания могут быть параллельны между собой. Для этого случая составляются уравнения:



Черт. 117.

$$f_1+f_2+f_3=u$$
$$u+f_4+f_5=v$$
$$v+f_6+f_7=f_8$$

или

$$f_1+f_2=-f_3+u$$
$$u+f_4=-f_5+v$$
$$v+f_6=-f_7+f_8.$$

Номограмма дается на чертеже 117.

21. Для уравнений с переменным и числом, не превышающим 6, не поддающихся изображению номограммами вышеописанными, прибегают к построению номограмм с бинарными полями. Метод их построения состоит в следующем: данное уравнение представляют в виде детерминанта 1 (см. § 7), но только φ_{ij} являются функциями в общем случае ($n=6$), двух переменных. Таким образом каждая точка бинарного поля обладает не одной, а двумя пометками. Если три точки лежат на одной прямой, то их пометки удовлетворяют данному уравнению.

Пример. На чертеже 118 изображена номограмма формулы Гангилье и Куттера (Ganguillet, Kutter):

$$C=\frac{23+\frac{1}{n}+\frac{0{,}00155}{I}}{1+\left(23+\frac{0{,}00155}{I}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}}.$$

Полагая $23+\frac{0{,}00155}{I}$ равным α (для краткости), представляют данное уравнение в виде детерминанта:

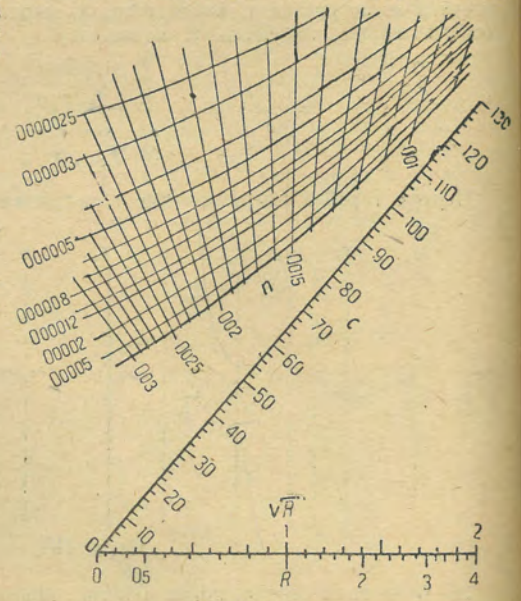
$$\begin{vmatrix} \sqrt{R} & 0 & 1 \\ o & C & 1 \\ -\alpha n & \alpha+\frac{1}{n} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение шкалы R

$$x=l_1\sqrt{R},\ y=0.$$

Уравнение шкалы C

$$y=l_2 C,\quad x=0,$$



Черт. 118.

а уравнение бинарного поля (In):

$$x=-l_1\alpha n;$$

$$y=l_2\left(\alpha+\frac{1}{n}\right).$$

Численный пример $I=0{,}000055$; $n=0{,}016$; $R=4$; по номограмме находим C равным 82.

Литература *на русском языке.*

1. Рабочая книга по высшей математике для втузов под редакцией проф. Хинчина ч. I и III. 2. Проф. Глаголев. Курс номографии. 3. Проф. Герсеванов. Основы номографии. 4. Проф. Соколов. Номография. 5. Швердт. Практический курс номографии.

На иностранных языках:

1. D'Ocagne. Traité de Nomographié. 2 Soreau. Nomographié ou traité des abagues. 3. Schwerdt. Lehrbuch der nomographie. 4. Lacmann. Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln.

XIV. ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ.

1. Закон подобия Ньютона (в отношении силы тяжести).

При испытании моделей гидротехнических сооружений приходится прибегать к различным масштабам моделирования. В этом случае для определения различных размеров и величин приходится, пользуясь законами Ньютона, определять необходимые размеры. Если обозначить в модели через l длины, через ω — площади, через v — скорости, через h — напоры, через w — объемы, через q — секундные расходы, через t — время, через p — силы, через m — моменты, через a — работы, через e — энергию и через — i уклоны, а через соответственные большие буквы действительные (в натуре) размеры сооружения, то из геометрического и динамического подобия при масштабе выполнения модели K имеем, учитывая, что K — коэфициент масштабирования меньший единицы, следующие соотношения:

Уклон — $i=K^0 I=I$	Объемы — $w=K^3 W$	
Скорость — $v=K^{0,5}V$	Силы — $p=K^3 P$	
Время — $t=K^{0,5}T$	Мощность, импульс сил — $e=K^{3,5}E$	(1)
Длины — $l=KL$	Моменты — $m=K^4 M$	
Площади — $\omega=K^2\,\Omega$	Работа — $a=K^4 A$	
Расходы воды — $q=K^{2,5}Q$	Давление — KP	

Таблица I

Наиболее употребительные данные для размеров моделирования

K	1/5	1/10	1/20	1/25	1/50	1/100
$K^{0,5}$	0,44721	0,316000	0,22400000	0,20000000	0,14100000	0,10000000
$K^{2,5}$	0,01790	0,003160	0,00055900	0,00032000	0,00056400	0,00001000
$K^{3,0}$	0,00800	0,00100	0,00012500	0,00006400	0,00000800	0,00000100
$K^{3,5}$	0,00358	0,000316	0,00002800	0,00001280	0,00000113	0,00000010
$K^{4,0}$	0,00160	0,000100	0,00000625	0,00000256	0,00000016	0,00000001

2. Закон подобия по Рейнольдсу
(по силам сопротивления — вязкости).

Если на модели и в натуре применяется одна и та же жидкость, то

$$\frac{v}{V}=\frac{L}{l} \text{ или } v=K^{-1}V,$$

где K — коэфициент масштабирования <1.

Из этого основного положения получаем:

Скорость $V=K^{-1}V$	Работа $a=KA$
Время $t=K^{-1}T$	Мощность $e=K^{-1}E$
Расход $q=KQ$	Импульс $s=K^2S$
Сила $p=K^0P$	

3. Моделирование шероховатости.

При моделировании шероховатости для выполнения масштаба скоростей по Ньютону необходимо, чтобы шероховатость модели была уменьшена по сравнению с натуральными ее размерами в K раз, т. е., если обозначим через n шероховатость модели, а через N — шероховатость натуральную, то $n=KN_1$. Однако изменение шероховатости модели возможно только в определенных пределах, которые даются возможностью сглаживания и выравнивания стенок.

Пользуясь различными формулами для скорости можем получить:

по Маннингу	$n=K^{1/6}N$
по Форхаймеру	$n=K^{1/5}N$
по Базену	$\gamma=K^{0,5}\Gamma$

При исследовании шероховатости проще всего пользоваться формулой Биля (*Biel*), который определил коэфициенты шероховатости для очень малых гидравлических радиусов, т. е. в пределах измерений для радиусов моделей. По Билю напоры, теряемые на трение в прямолинейном канале постоянного поперечного сечения, будут:

$$h_w=\frac{Rl}{\omega}v^2\frac{\phi}{1\,000}, \qquad (2)$$

где введены следующие обозначения: h_w — напор, теряемый на трение; R — гидравлический радиус $=\omega/\chi$; χ — смоченный периметр; l — длина канала; ω — живое сечение; v — средняя скорость $=q/\omega$; ϕ — коэфициент, зависящий по преимуществу от шероховатости русла и гидравлического радиуса.

Выражение $\frac{Rl}{\omega}$ — величина отвлеченная и постоянная для геометрически подобных каналов и поэтому часто называется „постоянным канала“ (Kanal constante).

Если бы коэфициент ϕ для сооружения был тоже постоянным, то напоры, потерянные на трение в каналах геометрически подобного очертания, относились бы просто как квадраты соответственных скоростей, т. е.:

$$\frac{h_w}{H_w}=\frac{v^2}{V^2}=\frac{h}{H}. \qquad (3)$$

Однако ϕ и Ψ неодинаковы в модели и самом сооружении.

Опытами Биля установлено, что ϕ при одинаковой шероховатости для больших гидравлических радиусов почти постоянно; оно повышается с

уменьшением $R=\frac{\omega}{\chi}$ сначала очень медленно; при более меньших значениях R, примерно от $R=0,1$, значение ϕ возрастает быстрее, а при очень малых значениях R чрезвычайно быстро увеличивается.

Из сказанного следует, что при моделях малых масштабов ϕ легко может стать значительно больше, чем Ψ. В этом случае потери на трение в модели будут чрезвычайно велики, а скорости и расходы, измеренные в модели, слишком малы. До известной степени с этим явлением можно бороться, придавая модели возможно более гладкие стенки, но этого можно достичь только при значениях $R\geqslant 0,02$. В случае, если модель приходится проектировать при значениях $R\leqslant 0,02$, необходимо учитывать ошибку, которая происходит вследствие неправильного применения законов подобия в отношении шероховатости.

Приведенные соображения по Билю относятся только к прямолинейным каналам, так как его опыты были произведены в этих условиях.

4. Искажение масштаба.

Если K_1 — масштаб глубин и K — масштаб горизонтальных расстояний, то получаем при моделировании:

Длина, ширина $l=KL$	Объем $w=K_1K^2W$
Глубина $h=K_1H$	Уклон $i=\frac{K_1}{K}J$
Площадь:	Скорость $v=\frac{K_1}{\sqrt{K}}V$
Горизонтальная $\omega=K^2\Omega$	
Вертикальная $\omega_1=K_1K\Omega$	
	Сила трения $f_t=K_1^2KFt$
	Время $t=K^{-1}K^{1,5}T$
	Расход $q=K^{0,5}K_1^2Q$
	Живая сила потока $e=KK_1^3E$

XV. КЛАССЫ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ.

При выборе допускаемых напряжений и различных норм в гидротехнических сооружениях можно принимать следующие деления на классы сооружений:

1-й класс: Сооружения, возводимые на реках с расходом свыше 1 000 *м/сек* (сооружения всесоюзного значения).

2-й класс: а) Сооружения, возводимые на реках и потоках с максимальным расходом более 300 *м³/сек*, но менее 1 000 *м³/сек*.

б) Головные сооружения, перепады, сбросы, акведуки, вододелительные крупные сооружения и регуляторы первого порядка и магистральные каналы с форсированным расходом более 50 *м³/сек*.

3-й класс: а) Все сооружения, возводимые на реках и потоках с максимальным расходом менее 300 *м³/сек*.

б) Головные сооружения, перепады, сбросы, акведуки и вододелители регуляторы первого порядка на каналах с форсированным расходом от 5 до 50 *м³/сек*.

в) Все деревянные сооружения на реках и каналах с форсированным расходом более 50 *м³/сек*.

4-й класс: а) Все гидротехнические сооружения на каналах с форсированным расходом от 1 до 5 *м³/сек*.

б) Все деревянные сооружения на каналах с расходом менее 50 *м³/сек*.

5-й класс: Сооружения на оросительной и мельчайшей сети с расходом до 1 *м³/сек*, конструируемые без расчета.

ГИДРАВЛИКА.

РАЗДЕЛ I.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЖИДКОСТЯХ.

А. Обозначения важнейших величин, входящих в формулы, и их размерность.

S и L — длина ($м$);
ω — площадь ($м^2$);
W — объем ($м^3$);
d — диаметр ($м$);
g — ускорение силы тяжести $= 9{,}81$ ($м/сек^2$) [1];
γ — вес единицы объема жидкости ($кг/м^3$);
$\rho = \frac{\gamma}{g}$ — плотность (масса единицы объема) жидкости ($кг \cdot сек^2/м^4$);
μ — коэфициент вязкости ($кг \cdot сек/м^2$);
ν — кинематический коэфициент вязкости ($м^2/сек$);
p — гидростатическое давление в точке ($кг/м^2$);
δ — относительный удельный вес;
t — температура в градусах Цельсия.

(Здесь через *кг* обозначена *сила*, или *вес* в 1 *кг*.)

Б. Главнейшие физические свойства некоторых тяжелых жидкостей.

Все жидкости делятся на: 1) тяжелые (или капельно-жидкие тела) и 2) газообразные. Последняя категория жидкостей рассматривается в аэромеханике. В дальнейшем будем рассматривать лишь тяжелые жидкости.

Научное определение жидкости обычно формулируется так: совершенная жидкость есть тело, не сжимающееся под действием внешних сил и неспособное оказывать никакого сопротивления силам, его растягивающим или производящим сдвиг его отдельных частиц.

В действительности имеем дело с реальными жидкостями. Важнейшие физические свойства реальных жидкостей следующие:

---

[1] На уровне моря и географической широте 45° $g = 9{,}81$ $м/сек^2$ и меняется так:

$$g = 9{,}806056 - 0{,}025028 \cos 2\varphi - 0{,}000003\, h,$$

где φ — географическая широта в градусах и h — высота над морем ($м$).

а) Плотность жидкости, т. е. массу единицы объема, обозначаем через ρ. Вес единицы объема γ связан с плотностью следующим равенством:

$$\gamma = \rho g. \qquad (1)$$

В таблице 1 приведены значения плотности жидкостей.

Таблица 1

Плотность жидкостей.

Наименование	t	γ $кг/м^3$	ρ $кг \cdot сек^2/м^4$
Вода пресная	15	999	102
Вода морская	15	1 020	104
Ртуть	15	13 596	1 385
Бензин	15	680 — 720	69 — 73
Древесный спирт	0	800	81,5
Алкоголь	15	790	80,5
Нефть	19	760 — 900	78 — 92

б) Объемный вес. Вес единицы объема чистой воды (без примесей) при 4° С принимается во всех расчетах за 1.

В зависимости от того, в каких мерах измерен объем (например $см^3$, $дм^3$ и т. д.), γ получает значения:

$$1\ г/см^3;\quad 1\ кг/л;\quad 1\ т/м^3. \qquad (2)$$

Относительная плотность чистой воды по сравнению с плотностью при 4° С или ее удельный вес δ при разных температурах показан в таблице 2.

Таблица 2

$t°$	δ_t	$t°$	δ_t	$t°$	δ_t
0°	0,99987	12°	0,99955	40°	0,99235
3°	0,99999	14°	0,99930	50°	0,98820
4°	1,00000	16°	0,99900	60°	0,98338
5°	0,99999	18°	0,99865	70°	0,97794
6°	0,99997	20°	0,99826	80°	0,97194
8°	0,99989	25°	0,99712	90°	0,96555
10°	0,99975	30°	0,99576	100°	0,95865

При любой температуре вес единицы объема воды γ_t численно равняется δ_t из таблицы 2.

Так как плотность воды меняется незначительно, то для практических расчетов (до 50°) достаточно брать постоянное его значение $\delta_t = 1$.

в) Удельный вес. Удельным весом других жидкостей называется число, показывающее, во сколько раз определенный объем данной жидкости легче или тяжелее такого же объема чистой воды при 4° С.

В таблице 3 показаны удельные веса некоторых жидкостей и тел.

Таблица 3

Название жидкости	$t°$	Относительный удельный вес δ
Вода и лед		
Лед	0—(—20)	0,92
Вода без примесей	4	1,00
Морская вода	15	1,02—1,03
Нефтяные продукты		
Бензин 1-го сорта	15	0,70—0,72
Бензин 2-го сорта	15	0,74—0,75
Керосин обыкновенный	15	0,82—0,83
Смазочное масло	15	0,89—0,92
Мазут обыкновенный	15	0,89—0,92
Мазут черный	15	0,93—0,94
Гудрон	15	0,93—0,95
Нефть грозненская	15	0,85—0,91
Нефть бакинская	15	0,88—0,95
Нефть в среднем	15	0,89
Различные жидкости		
Алкоголь безводный	15	0,79—0,80
» с 25% воды	15	0,86
» » 50% »	15	0,935
Вино виноградное	15	0,99—1,03
Глицерин безводный	0	1,26
» с 50% воды	0	1,13
Деготь каменноугольный	15	1,20
Деревянное масло	15	0,92
Древесный спирт	15	0,83
Касторовое масло	15	0,97
Льняное масло	15	0,93
Молоко	15	1,03
Оливковое масло	15	0,92
Ртуть	0	13,596
Скипидар	0	0,87
Смоляное масло	0	0,96
Сурепное м сло	0	0,91—0,92
Сероуглерод	0	1,29
Терпентинное масло	0	0,87
Хлопковое масло	0	1,92—0,93
Хлороформ	0	1,50
Эфир этиловый	0	0,74
Раствор хлористого натра		
С 14% NaCl	0	1,10
» 26% NaCl	0	1,20
Кислоты		
Азотная с 25% HNO_3	0	1,15
» » 40% HNO_3	0	1,25
» » 90% HNO_3	0	1,50
Соляная с 10% HCl	15	1,05
» » 40% HCl	15	1,20
Серная с 7,5% H_2SO_4	15	1,05
» » 27% H_2SO_4	15	1,20
» » 87% H_2SO_4	15	1,80
» дымящаяся	15	1,89

Вес единицы объема для других жидкостей кроме воды равен:

$$\gamma_t = 1 \cdot \delta, \tag{4}$$

где δ берется из таблицы 3.

Для определения относительного удельного веса δ_t нефтяных продуктов при других температурах $t°$ кроме указанной в таблице δ_{15} можно пользоваться такой зависимостью:

$$\delta_t = \frac{\delta_{15}}{1 + \beta_m (t° - 15)}, \tag{5}$$

где для β_m по Менделееву имеем:

δ =	0,70	0,80	0,85	0,90	0,92;
β_m =	0,00082	0,00077	0,00072	0,00064	0,0006.

В САСШ часто для β_m дают среднее значение $\beta_m = 0{,}0007$.

г) **Сжимаемость жидкостей.** Все жидкости сжимаются незначительно. Коэфициент объемного сжатия β_w, т. е. число, выражающее относительное уменьшение объема при увеличении давления на одну атмосферу при давлении до 500 атмосфер, равно для воды:

$$\beta_w = \text{от } 0{,}0000525 \text{ до } 0{,}0000475 \cong \frac{1}{20\,000}. \tag{6}$$

Для алкоголя $\beta_w = 0{,}000077$

» эфира $\beta_w = 0{,}000110$,

» ртути $\beta_w = 0{,}000003$,

» бензина $\beta_w = 0{,}000092$,

» глицерина $\beta_w = 0{,}000025$.

Модуль нормальной упругости для воды в среднем принимается:

$$E = 20\,700 \ кг/см^2.$$

д) **Температурное расширение.** Коэфициент температурного расширения β_t, или число, выражающее увеличение объема воды при повышении температуры на 1° С, для воды можно охарактеризовать по данным Amagat следующей таблицей 4. В таблице приведены значения β_t в миллионных долях, или, что то же, увеличенные в 10^6 раз.

Таблица 4

Давление в атмосферах	Температура в градусах Цельсия				
	0°—10°	10°—20°	40°—50°	60°—70°	90°—100°
1	14	150	422	556	719
100	43	165	422	548	704
200	72	183	426	539	—
500	149	236	429	523	661

е) **Теплоемкость.** Теплоемкостью, или удельной теплотой тела, называется то количество тепла, которое необходимо для нагревания 1 *кг* этого тела на 1 градус.

Теплоемкость, или удельная теплота, C для воды дается в таблице 5.

Таблица 5

$t°$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	В среднем от 0 до 100°
C	1,007	1,004	1,002	1,000	0,999	0,998	0,999	1,005

Лед от (— 20) до 0° . . . . . $C = 0{,}502$.

Для некоторых других жидкостей в среднем между 0° — 100°.

Алкоголь . . . . . $C = 0{,}60$
Глицерин . . . . . $C = 0{,}58$
Древесный спирт . . . . . $C = 0{,}57$
Керосин . . . . . $C = 0{,}51$
Ртуть . . . . . $C = 0{,}033$
Скипидар . . . . . $C = 0{,}50$
Серная кислота . . . . . $C = 0{,}33$
Эфир . . . . . $C = 0{,}50$

ж) Теплота плавления. Теплотой плавления (r) называется то количество калорий (килограмм калорий) тепла, которое необходимо затратить на то, чтобы 1 *кг* этого тела перевести из твердого состояния в жидкое без повышения температуры этого тела.

Таблица 6

Название тела	r	Название тела	r
Свинец	5,4	Парафин	35,1
Кадмий	13,6	Ртуть	2,8
Хлористый кальций	40,7	Азотистый калий	47,4
Лед	80,0	Азотистый натр	63 0
Глицерин	42,5	Олово	14,6

з) Теплота испарения. Теплотой испарения (R) жидкостей называется то количество килограмм калорий тепла, которое необходимо затратить при превращении в пар 1 *кг* жидкости при той же температуре и нормальном давлении.

Таблица 7

Название жидкости	R	Название жидкости	R
Алкоголь	210	Ртуть	62
Анилин	113	Сероуглерод	90
Бензол	94	Терпентин	70
Вода	537	Эфир	90

и) Аномалии воды. Вода в целом ряде случаев представляет отклонение от общих правил и при физическом воздействии ведет себя не так, как большинство других жидкостей и твердых тел. Эти отклонения от нормального, или аномалии, воды частью видны из рассмотрения таблиц 1—6. Аномалии воды заключаются в следующем:

1. Наибольшая плотность при 4° С. В интервале от 0 до 4° С вода от повышения температуры сжимается.
2. При плавлении льда происходит сжатие, а не расширение.
3. С повышением давления точка замерзания понижается вместо повышения.
4. Наименьшая теплоемкость — при 27° С.
5. Теплоемкость насыщенного водяного пара отрицательна, т. е., чтобы пар перестал быть насыщенным, приходится от него отнять тепло.

При сжатии газообразный пар остается прозрачным, при внезапном разрежении наблюдается образование тумана (для прочих жидкостей наоборот).

6. Аномалия в области электричества и тепловых лучей (дисперсия).

Кроме того нужно отметить чрезмерно большое значение для воды характерных постоянных: теплоемкости, теплоты плавления, теплоты парообразования и диэлектрической постоянной.

к) Вязкость жидкостей. Частицы жидкости, соприкасаясь друг с другом при движении, замедляют или ускоряют свое движение благодаря наличию касательных сил, которые называются силами трения. Силы трения можно рассматривать как силы внешнего трения (трение о стенки канала, трение о поверхности движущегося в жидкости тела и т. д.) и как силы внутреннего трения. Силы внутреннего трения жидкости характеризуют вязкость жидкости. Следовательно под вязкостью жидкости подразумевается то ее свойство, в силу которого при перемещении одного слоя жидкости по другому в ней возникает сила внутреннего трения.

Сила внутреннего трения, или вязкость, согласно основным положениям Ньютона, подчинена следующим законам:

1. Прямо пропорциональна градиенту относительной скорости перемещения одного слоя жидкости по другому; относительная скорость dv; толщина слоя dy; градиент $\frac{dv}{dy}$.
2. Прямо пропорциональна величине трущихся поверхностей ω.
3. Не зависит от давления на жидкость (отличие от трения в твердых телах).
4. Зависит от свойств жидкости.

Обозначая силу трения через F_t можно написать:

$$F_t = -\mu\omega\frac{dv}{dy}, \qquad (7)$$

где μ — некоторый коэфициент, зависящий от физических свойств жидкости, но не зависящий от давления, который называется коэфициентом вязкости.

Коэфициент вязкости, не зависящий от плотности жидкости (ρ), называется кинематическим коэфициентом вязкости и выражается следующим образом:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \qquad (8)$$

Коэфициент вязкости μ имеет измерение в системе *CGS*:

$$[\mu] = г\,(\text{масса}) \cdot см^{-1} \cdot сек^{-1}.$$

Такая абсолютная единица вязкости называется пуазом. Чаще в практике применяется сантпуаз или $\frac{1}{100}$ доля пуаза.

По классическим опытам Poiseuille'я в системе мер: *см—г—сек* (CGS) для воды кинематический коэфициент вязкости равен:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0{,}0178}{1 + 0{,}0337\,t + 0{,}000221\,t^2}. \qquad (9)$$

Значения коэфициента вязкости даны для воды в таблице 8, а для некоторых жидкостей в таблице 9 в системе *CGS*.

Таблица 8

$t°$	μ	$t°$	μ	$t°$	μ
0°	0,0178	10°	0,0131	30°	0,0081
3°	0,0161	12°	0,0124	40°	0,0066
5°	0,0152	15°	0,0114	50°	0,0055
8°	0,0139	20°	0,0101	60°	0,0036

Таблица 9

Название жидкости	$t°$	Удельный вес	Коэфициент вязкости μ
Бензин	15°	0,71	0,00625
Керосин	15°	0,825	0,0225
Нефть	15°	0,86	0,075
„	15°	0,88	0,275
„	15°	0,89	0,55
„	15°	0,90	1,35
Глицерин	2,8	1,20	42,2
„	5	—	35,25
„	10	—	22,5
„	20	—	8,0
„	26,5	—	4,9
Ртуть	0	13,59	0,0170
„	99	—	0,0122
„	197	—	0,00905
Оливковое масло	20	0,92	2,56

Значения кинематического коэфициента вязкости для некоторых жидкостей:

Таблица 10

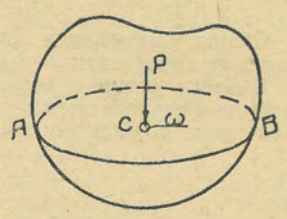
№ по пор.	Название жидкости	$t°$	ν $м^2/сек$ увелич. в 10^6
1	Вода	20°	1,00
2	Бензин	20°	0,83
3	Керосин	20°	2,20
4	Касторовое масло	40°	230,00
5	Смазочное масло	40°	60,00

РАЗДЕЛ II.

ГИДРОСТАТИКА.

1. Гидростатическое давление.

Если провести в жидкости, находящейся в покое, горизонтальную плоскость AB (черт. 1), выделить на ней элементарную площадку ω и суммарное давление на нее от вышележащего столба жидкости обозначить P, то $\frac{P}{\omega}$ называется средним гидростатическим давлением жидкости.



Черт. 1.

Предел, к которому стремится $\frac{P}{\omega}$ при уменьшении площадки до нуля, называется гидростатическим давлением в точке:

$$p = \lim \left(\frac{P}{\omega}\right)_{\omega=0}. \qquad (10)$$

2. Основные законы равновесия жидкой среды.

1. Гидростатическое давление в точке не зависит от выбора направления площадки.

2. При равновесии жидкого тела действующие на него внешние силы направлены по внутренним нормалям.

3. Закон Паскаля.

Давление, производимое на пограничной поверхности покоящейся жидкости внешними силами, передается во все точки жидкости равномерно.

4. Общие уравнения гидростатики, или уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z. \qquad (11)$$

Здесь в левой части уравнений приращение давления на единицу расстояния в направлении, параллельном осям координат.

В правой части: ρ — плотность жидкости, X, Y и Z — проекции на соответствующие оси координат объемных сил, отнесенных к единице массы.

Уравнения (11) дают:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

или:

$$dp = \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \qquad (12)$$

Уравнение (12) является основным уравнением равновесия жидкостей.

5. Поверхности уровня и их свойства.

Уравнение поверхности одинакового давления (поверхность уровня):

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0. \tag{13}$$

Свойства поверхности уровня:

Первое — равнодействующая внешних сил нормальна к поверхности уровня.

Второе — две поверхности уровня, имеющие различные гидростатические давления, не имеют общих точек.

6. Равновесие жидкости.

Общие условия, при которых возможно равновесие жидкости, можно выразить следующим образом.

1. Действующие объемные силы должны иметь потенциал, т. е. должна существовать такая функция $U(x, y, z)$, для которой будут существовать следующие соотношения:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = Z.$$

2. Для тяжелой капельной жидкости общее характеристическое уравнение имеет вид $f(p, \rho, t) = 0$. В частности плотность жидкости ρ в случае ее однородности должна зависеть лишь от давления, т. е.

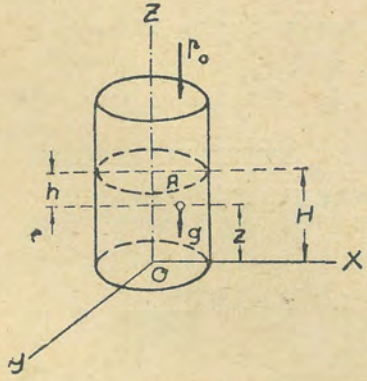
$$\rho = f(p). \tag{14}$$

Последний вид характеристического уравнения для воды, плотность которой мало зависит от давления и от температуры, превращается в уравнение следующего вида:

$$\rho = \text{const}. \tag{15}$$

Соответственно с этим из общего уравнения равновесия жидкости для тяжелой покоящейся жидкости, беря начало координат на свободной поверхности и направляя ось z-ов вертикально вниз или вверх и имея в виду, что в этом случае $U = \pm gz$ и на свободной поверхности $U_0 = 0$, получаем:

$$p = p_0 \pm \gamma z. \tag{16}$$



Черт. 2.

7. Гидростатическое давление в данной точке тяжелой покоящейся жидкости.

Для практических целей необходимо в уравнение равновесия жидкости (16) подставить вместо z значение h, понимая под h глубину погружения данной точки относительно свободного уровня жидкости (черт. 2). В этом случае получаем:

$$p = p_0 + \gamma h. \tag{17}$$

В этом уравнении обычно называют p — полным гидростатическим давлением в данной точке, p_0 называют гидростатическим давлением на свободной поверхности и $\gamma h = p - p_0$ — избыточным гидростатическим давлением, или пьезометрическим.

Пьезометрическое давление может иметь два значения: избыточное давление сверх атмосферного и избыточное давление, характеризующее недостаток давления до одной атмосферы. Последнее давление обычно называют вакуумом.

8. Измерение гидростатического давления.

Гидростатическое давление обычно измеряется как сила, отнесенная к единице площади, обычно *кг/см²*, *т/м²*. Конечно возможно измерение гидростатического давления в любых единицах, например в Англии и Америке измерение гидростатического давления дается в фн/д² или фн/фт². Если выражать h в сантиметрах, то $p = 0{,}001h$ *кг/см²*; если h дано в метрах, то $p = h$ *т/м²*; если h дано в футах, то $p = 62{,}4h$ фн/фт².

Довольно часто гидростатическое давление выражается высотой столба жидкости и в атмосферах. При этом давление воды 1 *кг/см²* соответствует высоте столба воды в 10 *м*, что составляет техническую атмосферу, или новую атмосферу в отличие от старой атмосферы, выражаемой высотой столба воды в 10,33 *м*. Точно так же и для других жидкостей могут различаться давления, выраженные высотой водяного столба новой (технической) и старой; в частности для ртути имеем техническую высоту давления 0,7353 *м*, в то время как нормальная высота атмосферного давления (на уровне моря при 0° составляет 0,76 *м*.

Избыточная высота давления выражается $h = (p - p_0) : \gamma$ и обычно называется пьезометрической высотой. В том случае, когда избыточная высота давления показывает недостаток давления до атмосферного, недостаток давления до атмосферного называется вакуумом. Вакуум может выражаться точно так же в долях атмосферы. Если вакуум равен 6 *м* водяного столба, то говорят, что вакуум равен 6 *м*, или 0,6 атмосферы.

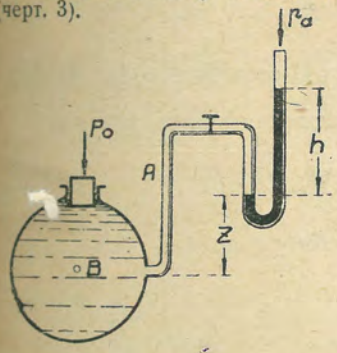
9. Приборы, измеряющие гидростатическое давление.

а) Пьезометр и манометр. Пьезометр служит для измерения избыточного, или пьезометрического, давления. Он представляет изогнутую трубку A с водой.

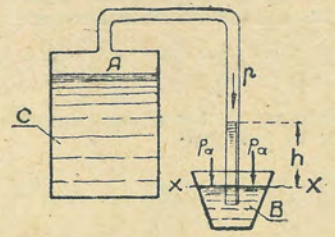
Если в изогнутую трубку налить ртуть, получим манометр. Трубка присоединяется к тому сосуду, давление в котором требуется определить (черт. 3).

Если в сосуде B вода ($\gamma = 1$), а в трубке ртуть ($\gamma_1 = 13{,}59$), то избыточное давление в центре сосуда:

$$P_B = 1 \cdot z + \gamma_1 h. \tag{18}$$



Черт. 3.



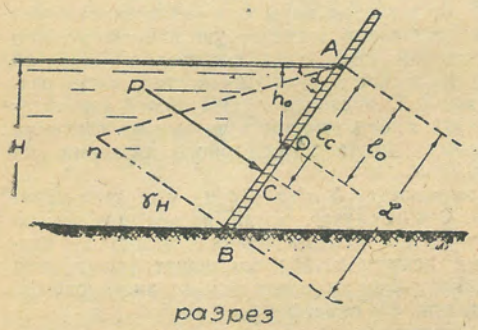
Черт. 4.

б) Вакуумметр служит для измерения давления меньше атмосферного, или вакуума. Допустим, что в сосуде C в области A будет вакуум (черт. 4). В этом случае по погруженной в нижний сосуд B трубке поднимается жидкость с весом единицы объема γ, и высота h_{vac} будет:

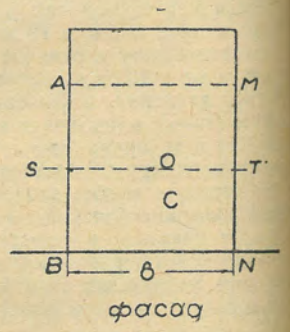
$$h_{vac}=\frac{p_a-p}{\gamma}. \tag{19}$$

10. Гидростатическое давление на плоские щиты или стенки.

Давление жидкости на плоский щит будет вполне определено, если будут найдены три основных элемента, характеризующих равнодействующую силу давления P: ее направление, величина и точка приложения (черт. 5).



Черт. 5.



Черт. 5-а.

1. Направление равнодействующей в силу первого условия равновесия жидкой среды нормально к плоскому щиту или стенке.

2. Величина равнодействующей избыточного давления P равна:

$$P=\gamma h_0\omega=\frac{\gamma bH^2}{2\sin a}=\frac{1}{2}\gamma H^2\frac{b}{\sin a}, \tag{20}$$

где h_0 — глубина погружения центра тяжести O смоченной части $AMNB$; γh_0 | избыточное давление в центре тяжести.

На единицу ширины вертикально установленного щита при $\alpha=90°$ избыточное давление по величине равно:

$$P=\frac{1}{2}\gamma H^2. \tag{21}$$

3. Центр давления C, или точка приложения равнодействующей, определяется из равенства:

$$l_c=\frac{I}{W}, \tag{22}$$

или:

$$l_c=\frac{I_0+(b\cdot H)l^2_0}{W}$$

где I — момент инерции смоченной части $AMNB$ относительно линии AM (пересечение щита со свободной поверхностью жидкости), I_0 — момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести; W — статический момент смоченной части.

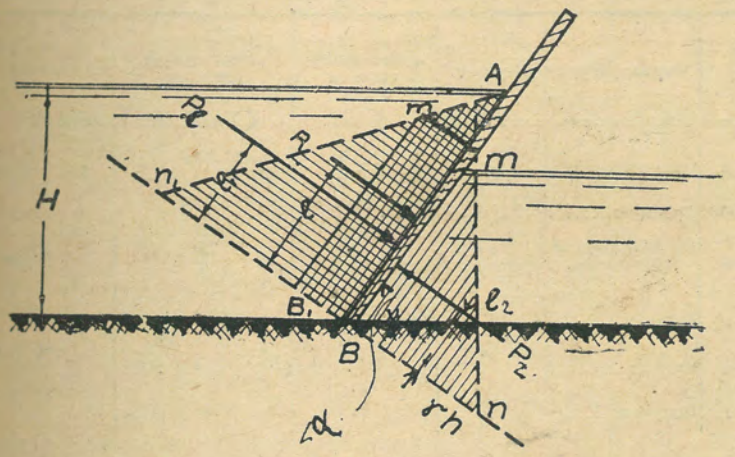
$$W=bLl_0=\frac{bL^2}{2}. \tag{23}$$

Для прямоугольного щита:

$$I=\frac{bL^3}{3}.$$

Соответственно

$$l_c=\frac{2}{3}L=\frac{2}{3}\cdot\frac{H}{\sin\alpha}. \tag{24}$$



Черт. 6.

При двустороннем давлении (черт. 6) определяем по вышеизложенному отдельно суммарное давление слева P_l и справа P_r.

Равнодействующая R будет:

$$R=P_l-P_r. \tag{25}$$

Точку приложения находят из уравнения моментов всех сил относительно точки B.

$$Rl=P_ll_1-P_rl_2;\quad l=\frac{P_ll_1-P_rl_2}{R}. \tag{26}$$

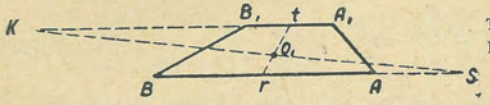
Эпюра давления слева ABn_1 и справа Bmn.

Отняв от площади $\triangle ABn_1$ площадь $\triangle Bmn$, получим эпюру равнодействующей, изображенную трапецией ABB_1m_1.

Равнодействующая проходит через центр тяжести этой трапеции.

Нахождение графическим путем центра тяжести трапеции показано на чертеже 7.

Откладываем от B_1 влево сторону BA, а от A вправо сторону B_1A_1. Прямая, соединяющая точки K и S в пересечении с линией, соединяющей середины параллельных сторон, даст искомый центр тяжести O.



Черт. 7.

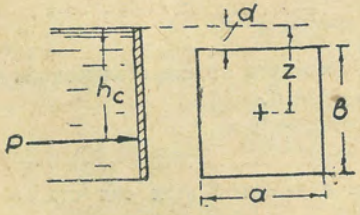
Аналитически центр тяжести трапеций определится из равенства:

$$\frac{tO_1}{O_1r}=\frac{B_1A_1+2BA}{BA+2B_1A_1}. \qquad (27)$$

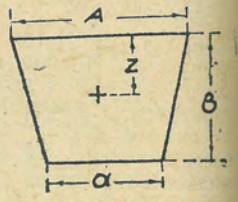
В случае различных форм смоченной части стенки, показанных на чертеже 8 (а и б), можно пользоваться таблицей 11.

Таблица 11.

Чертеж	Форма фигуры	Площадь	Глубина погружения центра тяжести $z=h_0$	Глубина погружения центра давления $h_c=l_c$	Давление на стенку P
8-а	Прямоугольная .	ab	$d+\frac{b}{2}$	$\frac{b}{3}\cdot\frac{2b+3d}{b+2d}+d$	$\gamma ab\left(\frac{b}{2}+d\right)$
8-б	Трапеция	$\frac{A+a}{2}\cdot b$	$\frac{b}{3}\cdot\frac{2a+A}{a+A}$	$\frac{b}{2}\cdot\frac{3a+A}{2a+A}$	$\frac{1}{6}\gamma b^2(2a+A)$
8-в	Равнобедренный треугольник...	$\frac{ab}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{6}\gamma ab^2$
8-г	Квадрат.....	a^2	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7}{12}a\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\gamma a^2\sqrt{2}$
8-д	Круг	πr^2	$d+r$	$d+r+\frac{r^2}{4(d+r)}$	$\gamma\pi r^2(r+d)$
8-е	Полукруг	$\frac{\pi r^2}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{3}{16}\pi r$	$\frac{2}{3}\gamma r^3$



Черт. 8-а.



Черт. 8-б.

Пример расчета.

Прямоугольный щит шириной $b=1{,}2$ м, наклоненный к горизонту под углом $\alpha=$ (черт. 6) имеет глубину воды перед собой $H=3$ м и глубину воды за щитом $t_2=0{,}8$ м.

Определить подъемное усилие T, считая движение железа по железу и построить эпюру давления на щит.

Давление P_1 с верховой стороны:

$$P_1=\frac{H^2}{2}\cdot\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{1\cdot1{,}5\cdot1{,}2\cdot3}{0{,}71}=7{,}7\ m.$$

Давление P_r с низовой стороны:

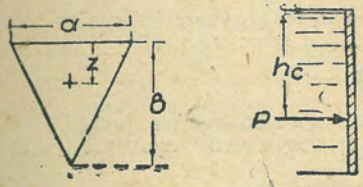
$$P_r=\frac{t_2^2}{2}\cdot\frac{b}{\sin\alpha}=0{,}54\ m.$$

Давление на щит

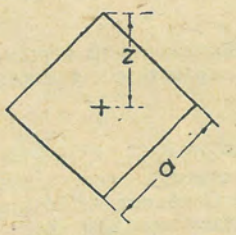
$$R=P_1-P_r=\gamma\frac{b}{2\sin\alpha}(H^2-t^2)=7\cdot16\ m.$$

Подъемное усилие $T=f\cdot P=2{,}5\ m$, считая $f=0{,}35$.

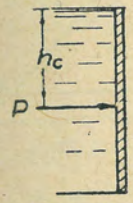
Эпюра давления представляет трапецию BB_1mA (черт. 6).



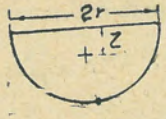
Черт. 8-в.



Черт. 8-г.



Черт. 8-д.

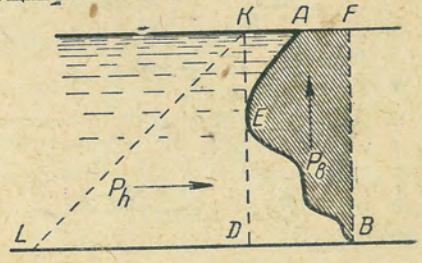


Черт. 8-е.

11. Гидростатическое давление на криволинейную поверхность.

а) Общий случай. При определении давления жидкости на криволинейную поверхность следует пользоваться методом Пуанкаре, который состоит в определении суммы проекций давлений на вертикальную и горизонтальную ось в силу следующих положений:

1. Независимо от вида поверхности, погруженной в покоящуюся жидкость, сумма вертикальных давлений на нее жидкости равна по величине всему объему жидкости, заключенному между самой поверхностью, ограничивающей ее с низовой стороны цилиндрической поверхностью с вертикальными образующими и свободной поверхностью жидкости.

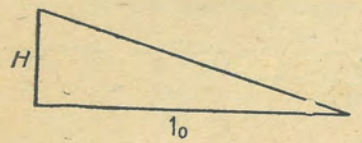


Черт. 9.

2. Величина давления жидкости на поверхность в гори-

зонтальном направлении равна давлению жидкости на проекцию этой поверхности на плоскость, перпендикулярную горизонтальной оси.

Поэтому при определении равнодействующей давления жидкости на криволинейную часть поверхности AE (черт. 9) находим отдельно горизонтальную P_h и вертикальную P_b составляющие.



Черт. 10а.

Горизонтальная составляющая по величине на пог. метр равна давлению на вертикальную стенку KD:

$$P_h = \gamma h_0 \omega = \frac{1}{2}\gamma H^2. \qquad (28)$$

Центр тяжести на вертикальной проекции определяется по таблице 11.

Вертикальная составляющая на пог. метр:

$$P_b = \gamma W, \qquad (29)$$

где W — объем $AEBF$ и γ — вес единицы объема жидкости.

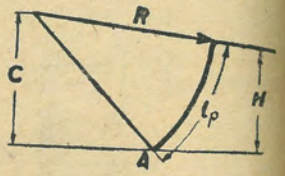
Направление вертикальной составляющей проходит через центр тяжести O объема $AEBF$ (черт. 9).

Равнодействующая обеих перечисленных выше сил по величине определяется по уравнению:

$$P = \sqrt{P_h^2 + P_B^2}. \qquad (30)$$

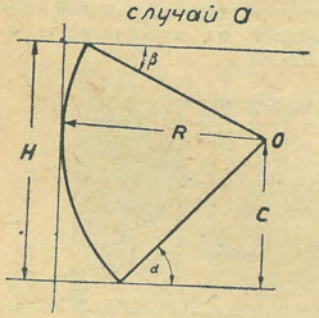
Угол равнодействующей с вертикалью определяется по соотношениям:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P_h}{P_B};\quad \sin\varphi = \frac{P_h}{P};\quad \cos\varphi = \frac{P_B}{P}. \qquad (31)$$

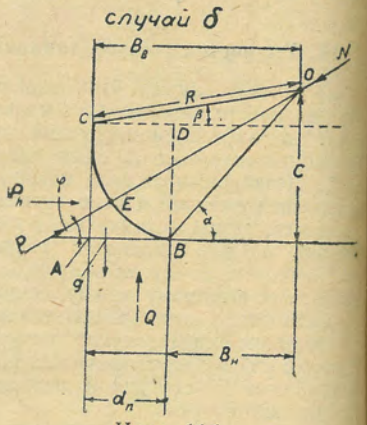


Черт. 10б.

б) Давление на сегментные затворы. В гидротехнике наиболее часто давление на криволинейной поверхности вычисляется для сегментных, секторных и вальцевых затворов.



Черт. 11а.



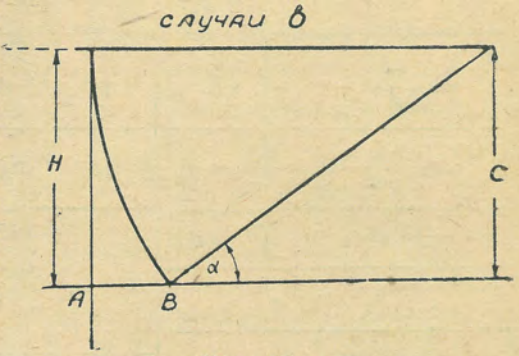
Черт. 11б.

Гидростатическое давление при малой кривизне поверхности сегментных и секторных щитов допустимо рассчитывать как давление по треугольнику развернутой части поверхности сегмента или сектора, а именно, если l_p — развернутая длина сегмента (черт. 10) и H — напор над нижней точкой, тогда общее давление на 1 ширины равно:

$$P = \frac{1}{2}\gamma H l_p. \qquad (32)$$

Однако и более точный учет давления на сегментный или секторный затвор не вызывает затруднений. При расчете сегментных и секторных щитов встречаются следующие случаи при обозначениях: H — напор перед щитом, C — высота оси над нижней кромкой щита, R — радиус цилиндрической части затвора (черт. 11):

а. $H > C$.
б. $H < C$.
в. $H = C$.



Черт. 11в.

Расчет давлений для трех намеченных соотношений H и C может быть произведен по следующим табличным формам (см. табл. 12 и 13):

Таблица 12

Для случаев а и в ($H \geqslant C$)

H в $м$	H^2	R в $м$	R^2 в $м^2$	C в $м$
$\sin\alpha = \frac{C}{R}$	α	$\operatorname{tg}\alpha$	$B_H = \frac{C}{\operatorname{tg}\alpha}$	$d_h = R - B_H$
$\sin\beta = \frac{H-C}{R}$	β	$\operatorname{tg}\beta$	$B_B = \frac{H-C}{\operatorname{tg}\beta}$	$d_b = R - B_B$ $м$
$\varepsilon = \alpha + \beta$	$\sin\varepsilon$	$\Omega = 0.5\,H(d_H + d_b)$ кв. $м$		
$P_h = 0{,}5\,H^2$ в $т$		$f = R^2 0{,}5\left(\frac{\pi}{180}\varepsilon - \sin\varepsilon\right)$ кв. $м$		
		$\omega = \Omega - f$ кв. $м$		
$Q = Hd_h$ в $т$ $G = \omega$ в $т$ $P_b = Q - G$ в $т$		Давление на погонный метр затвора $P = \sqrt{P_h^2 + P_b^2}$ тонн		
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P_h}{P_b}$	φ	$\sin\varphi$	Расстояние от оси до центра давления $Z = P\sin\varphi$ $м$	

Таблица 13

Для случая б ($H < C$)

H в $м$	H^2 в $м$	R в $м$	R^2	C в $м$
$\sin\alpha=\frac{H}{R}$	α	$\operatorname{tg}\alpha$	$B_H=\frac{C}{\operatorname{tg}\alpha}$	$d_H=R-B_H$ $м$
$\sin\beta=\frac{C-H}{R}$	β	$\operatorname{tg}\beta$	$B_B=\frac{C-H}{\operatorname{tg}\beta}$	
$\varepsilon=\alpha+\beta$	$\sin\varepsilon$	$\Omega=0{,}5\ Hd_H$ в кв. $м$ $f=R^2 0{,}5\left(\frac{\pi}{180}\varepsilon-\sin\varepsilon\right)$ в. $м$ $\omega=\Omega-f$ кв. $м$		
$P=0{,}5H^2$ в $т$				
$Q=Hd_h$ в $т$ $G=\omega$ в $т$ $P_b=Q-G$		Давление на погонный метр затвора $P=\sqrt{P_h^2+P_b^2}$ тонн		
$\operatorname{tg}\varphi=\frac{P_h}{P_b}$	φ	$\sin\varphi$	Расстояние от оси до центра давления $Z=P\sin\varphi$ в $м$	

Силами действующими на сегментный затвор будут:

а) горизонтальное давление p_h;

б) вертикальное давление Q, направленное вверх и равное объему воды, вытесненной призмой $ACDB$;

в) собственный вес отсека g, представляющего вес криволинейной призмы $ACEB$;

г) искомая реакция затвора P, равная давлению, но обратного направления.

Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось OX:

$$P_x=P_h. \tag{33}$$

Сумма проекций на вертикальной оси OY:

$$P_y=P_B=Q-g, \tag{34}$$

откуда

$$P=\sqrt{P_h^2+P_B^2}. \tag{35}$$

Угол наклона равнодействующей давления с горизонтальной осью составляет:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{P_B}{P_h}. \tag{36}$$

Пример расчета 1-й.

В качестве примера приводим расчет сегментного затвора.

Перекрываемый пролет 550 $м$, при высоте напора — 1,5 $м$, радиусе $R=2$ $м$ и при возвышении опорной оси над полом флютбета $C=1{,}25$ $м$.

Расчет давления производится по приведенной выше форме и дается в таблице 14.

Таблица 14

$H=1{,}5$ $м$	$H^2=2{,}25$	$R=2$ $м$	$R^2=4$ $м^2$	$C=1{,}25$ $м$
$\sin\alpha=\frac{1{,}25}{2{,}00}=0{,}625$	$\alpha=38°40'$	$\operatorname{tg}\alpha=0{,}80$	$B_H=\frac{1{,}25}{0{,}80}=1{,}56$	$d_H=2-1{,}56=0{,}44$ $м$
$\sin\beta=\frac{0{,}25}{2{,}00}=0{,}125$	$\beta=7°10'$	$\operatorname{tg}\beta=0{,}126$	$B_B=\frac{0{,}25}{0{,}26}=1{,}98$	$d_B=2-1{,}98=0{,}02$ $м$
$\varepsilon=45°50'$		$\Omega=0{,}5\times1{,}15\times0{,}46=0{,}34$ кв. $м$ $f=4\times0{,}04=0{,}16$ кв. $м$ $\omega=\Omega-f=0{,}18$ кв. $м$		
$P_h=0{,}5\times2{,}25=1{,}125$ $т$				
$Q=1{,}5\times0{,}44=0{,}66$ $т$ $G=\omega\quad=0{,}18$ $т$ $P_b=Q-G=0{,}48$ $т$		Давление на погонный метр затвора $P=\sqrt{1{,}27+0{,}23}=$около $1{,}22$ $т$		
$\operatorname{tg}\varphi=\frac{0{,}48}{1{,}425}=0{,}425$	$\varphi=\backsim23°$	$\sin\varphi=0{,}39$	$Z=2\times0{,}39=0{,}78$ $м$	

Рассматривая единицу ширины затвора для вычисления сил P_h, P_B и g имеем:

$$P_h=\frac{1}{2}\gamma H^2, \tag{37}$$

$$P_B=\gamma H d_n, \tag{38}$$

$$g=\gamma\omega, \tag{39}$$

где d_n — горизонтальное проложение поверхности щита и

ω — площадь отсека $ACEB$ (черт. 11).

Пример расчета 2-й.

Необходимо определить для напора верхнего бьефа H (черт. 12-а) и угла подъема цилиндрического затвора α:

1) величину и направление силы давления;

2) предельный вес цилиндра, при котором последний не будет ни прижиматься к порогу B ни отставать от него.

1. Горизонтальные слагающие силы давления воды на погонный метр цилиндра:

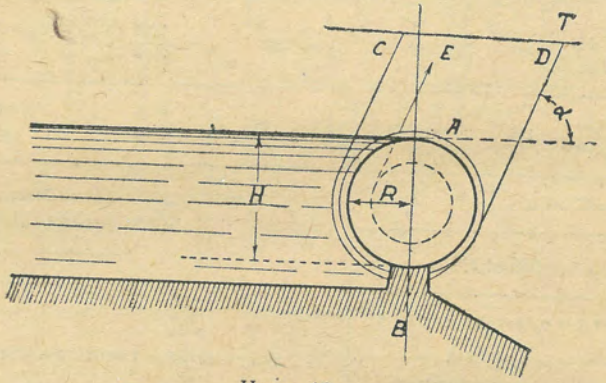
$$P_h=\frac{1}{2}\gamma H^2.$$

Вертикальная слагающая:

$$P_B = \frac{\pi H^2 l}{8}.$$

Полное давление проходит через ось цилиндра, а его величина:

$$P = \gamma \frac{H^2}{8} \sqrt{16 + \pi^2} = 0{,}636 H^2 m.$$

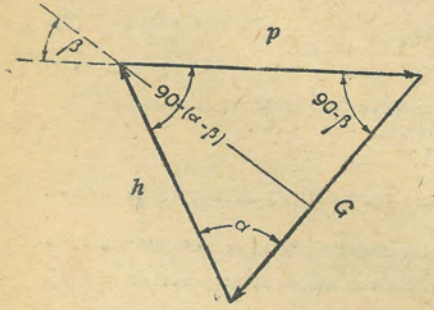


Черт. 12а.

Направление давления составляет угол с горизонтальной осью

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P_B}{P_h} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785 \quad \text{и} \quad \beta = 38°8'.$$

2. На цилиндр действуют три силы, проходящие через ось: давление воды — P_h; собственный вес цилиндра — g и реакция на плоскости P_B. Все эти силы должны уравновешиваться, т. е. образовать замкнутый треугольник, из которого получаем (черт. 12б):



Черт. 12б.

$$g = p \cdot \frac{\sin[90° - (\alpha - \beta)]}{\sin \alpha} = \frac{P \cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha_n};$$

$$g = 0{,}636\, H = \frac{\cos(\alpha - 38°8')}{\sin \alpha}.$$

Так при $\operatorname{tg}\alpha = 4$ получаем $\alpha = 75°58'$ и $g = 0{,}519\, H^2 m$ на погонный метр.

Для того, чтобы получилось нажатие на порог, для плотности нужно увеличить вес цилиндра или придать сечению щита форму не круга, а груши с выпуском внизу (черт. 12в).

Данные для расчета сегментов инж. Пеплова.

Для расчета сегментных затворов инж. Пеплов дает расчетные таблицы для следующих обозначений:

радиус щита

$$R = \rho H;$$

центральный угол ε

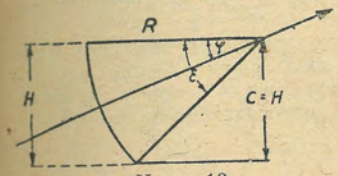
$$\sin\varepsilon = \frac{1}{\rho};$$

горизонтальное давление

$$P_h = \frac{1}{2}\gamma H^2;$$

вертикальное давление

$$P_B = H^2 \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 (2\varepsilon - \sin 2\varepsilon);$$



Черт. 13.

угол равнодействующей β:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\varepsilon - \sin 2\varepsilon}{1 - \cos 2\varepsilon};$$

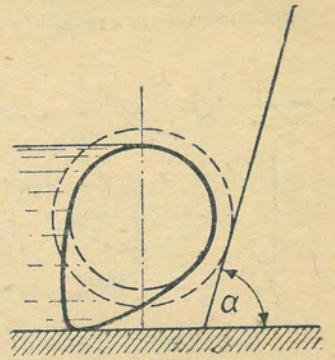
полное давление

$$P = \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 H^2 \frac{1 - \cos 2\varepsilon}{\cos\beta}.$$

Для ходовых расчетов стандартных щитов дается таблица 15.

Таблица 15

ρ	$\sin\varepsilon$	$2\varepsilon - \sin 2\varepsilon$	$1 - \cos 2\varepsilon$	$\operatorname{tg}\beta$	$\cos\beta$	P_h	P_B	P	ε	β
1,2	0,83333	1,04929	1,38912	0,75537	0,79793	$0{,}5\,H^2$	$0{,}37736\,H^2$	$0{,}62672\,H^2$	56°27′	37° 4′
1,3	0,76923	0,77218	1,18338	0,66252	0,83740	$0{,}5\,H^2$	$0{,}32586\,H^2$	$0{,}59706\,H^2$	50°17′	33° 8′
1,4	0,71428	0,59137	1,02036	0,57957	0,86515	$0{,}5\,H^2$	$0{,}28935\,H^2$	$0{,}57791\,H^2$	45°35′	30° 6′
1,5	0,66667	0,46585	0,83911	0,52395	0,88580	$0{,}5\,H^2$	$0{,}26935\,H^2$	$0{,}56450\,H^2$	41°49′	27°39′



Черт. 12в.

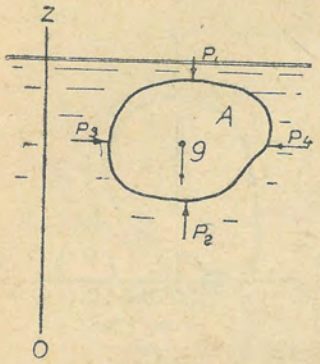
12. Закон Архимеда и плавание тел.

Погруженное в жидкость тело A веса G испытывает сверху суммарное давление P_1, снизу P_2 и горизонтальные составляющие P_3, P_4 (черт. 14).

Проекция всех сил на вертикальную ось OZ даст в момент равновесия:

$$G = P_2 - P_1. \qquad (41)$$

Это положение формулировано в законе Архимеда так: тело при погружении в жидкость теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненный им объем жидкости.



Черт. 14.

Из формулы (41) видно, что давление жидкости на всю поверхность погруженного тела дает направленное вверх избыточное давление, равное весу жидкости в объеме погруженного тела.

Величина $P_2 - P_1$ называется подъемной силой.

Плавание тел:

при $P_2 - P_1 < G$ тело тонет;
при $P_2 - P_1 > G$ тело всплывает; (42)

при $P_2 - P_1 = G$ тело находится в безразличном равновесии.

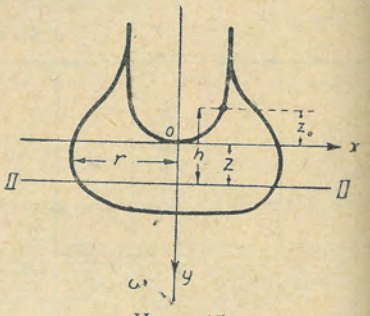
13. Относительное равновесие жидкости.

Относительное равновесие будет в том случае, когда сосуд вместе с жидкостью перемещается в пространстве.

По принципу д'Аламбера можем и в этом случае рассматривать жидкость как абсолютно неподвижную, прибавив лишь силы инерции с ускорениями равными, но направленными в противоположную сторону движения жидкости. Рассмотрим следующие примеры относительного равновесия жидкости.

Пример 1.

Найдем распределение давления в жидкости равномерно вращающейся в открытом сверху сосуде с угловой скоростью ω (черт. 15). Считаем движение установившимся, а потому жидкость рассматриваем как находящуюся в покое относительно сосуда. В этом случае можно применить уравнение равновесия, если к действующим силам присоединить еще силу инерции, вызванную вращательным движением. Движение симметрично относительно оси, поэтому достаточно рассмотреть любую меридиональную плоскость. Берем начало координат на оси на свободной поверхности жидкости; ось z-ов направляем вертикально вниз; за вторую координату оси берем r.



Черт. 15.

а) Сила инерции — центральная сила. Величина ее q_r, действующая на единицу массы:

$$q_r = \omega^2 r dp = \rho(\omega^2 r dr + \gamma dz),$$

$$q_r = \frac{g}{\gamma} \cdot \omega^2 r dx + \gamma dz.$$

Интегрируя, получаем:

$$P = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2 r^2}{2} + \gamma z + C.$$

C определяется из условия, что в начале координат давление равно давлению на свободной поверхности P_0; тогда имеем:

$$p - p_0 = \frac{\gamma \omega^2 r^2}{2g} + \gamma z. \qquad (A)$$

б) Уравнение свободной поверхности $p - p_0$ в рассматриваемом меридиональном сечении напишется:

$$z + \frac{\omega^2 r^2}{2g} = 0.$$

Свободная поверхность является следовательно параболоидом вращения. Величина превышения любой точки свободной поверхности над началом координат:

$$z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \qquad (Б)$$

Поверхности равного давления:

$$z + \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \text{const}.$$

т. е. также параболоиды вращения.

в) Найдем распределение давлений вдоль горизонтальной плоскости II—II, координаты которой равны z:

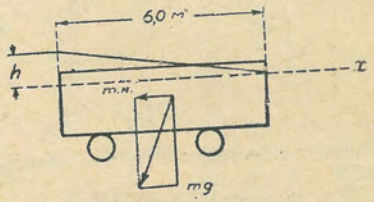
В уравнении (А) считаем z постоянным. Подставляя кроме этого из уравнения (Б) значение Z_0, имеем:

$$p - p_0 = \gamma\left(z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) = \gamma(e - z_0) = \gamma h.$$

Таким образом давление соответствует столбу жидкости, равному расстоянию от плоскости II—II до свободной поверхности жидкости.

Пример 2.

Определить уравнение свободной поверхности воды в тендере, движущемся равномерно-ускоренно с ускорением $U = 3{,}27$ *м/сек²*.



Черт. 16.

В нашем случае: $X = -U$; $Z = -g$.

Решение (черт. 16).

Уравнение поверхности уровня:

$$dp = \frac{\gamma}{g}(X dx + Y dy + Z dz),$$

$$dp = \frac{\gamma}{g}(-U dx - g dz); \quad p = \frac{\gamma}{g}(-U \cdot x - g z) + C.$$

При $x = 0$; $z = 0$; $p = p_a$; $C = p_a$.

$$p - p_a = \frac{\gamma}{g}(-Ux - gz) = -\left(\frac{\gamma U x}{g} + \gamma z\right).$$

Уравнение свободной поверхности будет при $p = p_a$, т. е. $p - p_a = 0$;

$$\frac{\gamma U x}{g} + \gamma z = 0; \quad Ux + gz = 0;$$

следоват. $z = -\frac{U}{g}x$ — прямая линия.

При $x = -6$, $z = h = \frac{3{,}27 \cdot 6}{9 \cdot 81} = 1 \cdot 92$ *м*.

РАЗДЕЛ III.

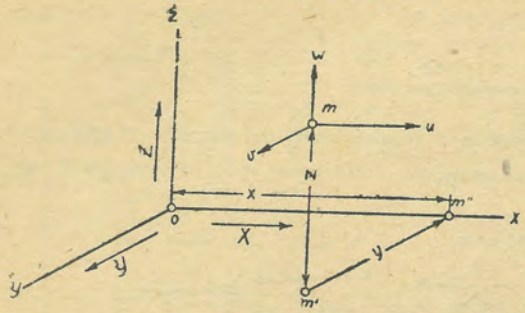
ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ (ГИДРОДИНАМИКА).

1. Уравнения движения частицы идеальной жидкости. Леонарда Эйлера.

На основании положения механики твердого тела, что сила p, вызывающая движение тела массы m с ускорением g, равна:

$$p = mg,$$

общие уравнения движения бесконечно малой частицы жидкости напишутся в виде:



Черт. 17.

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1)$$
$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

где u, v и w — слагающие скорости частицы в точке m, параллельные декартовым осям координат x, y, z (черт. 17); X, Y и Z — проекции по тем же осям внешних объемных сил; ρ — плотность жидкости в точке m; p — давление в ней и t — время.

Все величины, входящие в уравнения (1), являются вообще функциями четырех независимых переменных: координат точки m — x, y, z и времени t.

Но для одной и той же частицы жидкости координаты точки x, y, z сами являются функциями времени t, почему в этом случае, вводя полные производные по времени от u, v и w уравнения (1) напишем в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad (2)$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Уравнения (2) называются уравнениями движения частицы жидкости в форме Эйлера.

Пять неизвестных функций, входящих в эти уравнения,—u, v, w, p и ρ, должны быть непрерывными, конечными и однозначными функциями координат x, y, z и времени t.

Условие непрерывности этих функций требует непрерывного заполнения пространства жидкостью, что выражается выполнением уравнения непрерывности или неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

К этой системе четырех уравнений с пятью неизвестными для определенности задачи нахождения вида движения жидкости необходимо прибавить еще одно уравнение между теми же неизвестными.

Таким пятым уравнением будет уравнение, характеризующее физические свойства рассматриваемой жидкости, называемое характеристическим уравнением.

Для каждой жидкости физика дает его в виде определенной функциональной связи между давлением p, плотностью ρ и температурой τ жидкой среды:

$$f(p, \rho, \tau) = 0.$$

Так для:

1) капельных, несжимаемых жидкостей постоянной температуры (вода, масла и т. д.):

$$\rho = \text{const}; \quad (4)$$

2) газов при постоянной температуре

$$\frac{p}{\rho} = 1 + \alpha t = \text{const}; \quad (4')$$

3) газов в состоянии адиабатического расширения

$$p = k\rho^{\gamma}, \quad (4'')$$

где α — коэфициент расширения, k и γ — постоянные газы, причем γ — отношение удельной теплоты газа при постоянном давлении к удельной теплоте при постоянном объеме, $\gamma = 1{,}408$.

Совокупность уравнений (2), (3) и одного из характеристических уравнений дает полную систему уравнений непрерывного движения частицы жидкости.

2. Исследование движения жидкости.

Для выяснения формы движения массы жидкости в каждом отдельном случае при известных уже функциях p, ρ, u, v, w строят системы воображаемых поверхностей и линий, обладающих каждая определенными свойствами.

Вид и взаимное расположение подобных систем поверхностей и линий позволят составить ясное представление о характере изучаемого движения жидкости.

а) Поверхности, во всех точках которых давление имеет одну и ту же величину, называют поверхностями равного давления или уровня (изобарическими):

$$p = \text{const}.$$

б) Поверхности, во всех точках которых плотность жидкости имеет одну и ту же величину, называют поверхностями равной плотности или изостерическими:

$$\rho = \text{const}.$$

в) **Траектории частиц жидкости.** Если известны компоненты скорости частицы жидкости по осям координаты u, v, w как функции x, y, z и t, то, принимая во внимание, что координаты различных точек траектории, проходимой частицей жидкости, сами являются функциями времени t, а производные координат по времени дают величины компонентов скорости, будем иметь три уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t)$$
$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t) \quad (5)$$
$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t),$$

интеграция которых дает координаты точек траектории в виде

$$x = f_1(a, b, c, t)$$
$$y = f_2(a, b, c, t) \qquad (5)$$
$$z = f_3(a, b, c, t),$$

где a, b, c постоянны и дают координаты точки пространства, через которую проходит кривая траектории и в которой находится частица жидкости в момент $t = 0$.

г) **„Линия движения", или „токи жидкости".** Но если желательно знать не движение отдельной частицы жидкости за определенный период времени t, а состояние движения ее частиц в какой-либо данный момент времени, т. е. при $t = \text{const}$, то вместо траектории частицы жидкости получим „линию движения", или „ток жидкости" (иначе „линию тока"), как кривую, огибающую систему касательных к траектории.

Уравнение тока получим из выражений:



Черт. 18.

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad \frac{dz}{dt} = w$$

или

$$dx = udt; \quad dy = vdt; \quad dz = wdt;$$

исключая из них постоянный множитель dt получим уравнения

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \qquad (6)$$

интеграции которых дает два уравнения [с двумя произвольными постоянными.

Токи вообще отличны от траекторий.

Обе системы линий совпадают только для движений независимых от времени, т. е. „установившихся", или „стационарных".

д) Струей жидкости называют ее массу, отделяемую от остальной жидкости комплексом токов, проходящих через все точки какого-либо бесконечно малого, замкнутого контура, взятого внутри этой жидкости.

3. Уравнения движения в функции компонентов вихря.

Движение частицы жидкости, как и всякого материального тела, возможно всегда разложить на два основные типа:

а) движение, сопровождающееся перемещением центра тяжести частицы в пространстве;

б) вращение частицы как твердого тела вокруг своего центра тяжести, остающегося неподвижным в пространстве (вихревое движение).

Современная техника умеет оперировать и утилизировать энергию только движения жидкости первого типа (а).

Энергия второго типа движения жидкости (б), или энергия вихревого движения, является энергией, сполна теряемой.

Например приемы гашения энергии на перепадах и быстротоках как раз базируются на этом.

Последнее показывает всю важность для инженеров изучения этого типа движения жидкости и влияния его на форму движения всей ее массы.

А так как система уравнений (2) еще не разделяет движение частицы жидкости на два указанные его типа, то эту систему необходимо преобразовать в такую, где эти типы движений были бы ясно разделены.

Для выполнения последнего преобразования назовем полную скорость частицы жидкости через V и воспользуемся равенством (7).

$$V = u^2 + v^2 + w^2. \qquad (7)$$

Частные производные от обеих частей этого равенства по переменным x, y, z дадут равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (8)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}V^2\right) = u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

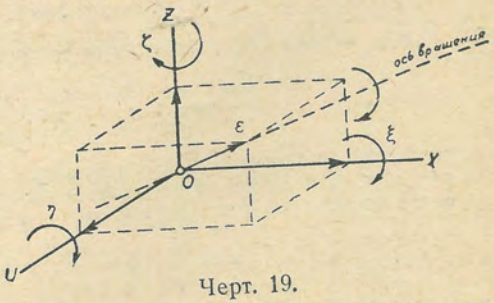
Отнимая их от обеих частей уравнений (2), приводим последние к желаемому нами виду их:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2(\eta w - \zeta v) = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}V^2\right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2(\zeta u - \zeta w) = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}V^2\right) \qquad (9)$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + 2(\xi v - \eta u) = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}V^2\right)$$

где ξ, η, ζ — компоненты по осям координат x, y, z — вращательной или угловой скорости частицы жидкости при вращении ее вокруг своего центра тяжести как тела твердого.

Эти слагающие вихревого движения жидкости равны:

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (10)$$
$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$



Черт. 19.

Полное вращение частицы по величине и направлению может быть найдено, как диагональ ε прямоугольного параллелепипеда с ребрами ξ, η, ζ, направленными по осям координат x, y, z (черт. 19), причем за положительное направление вращения принимают вращение, совершающееся по стрелке часов для наблюдателя, расположенного по оси вращения и стоящего ногами в начале координат.

Согласно чертежу 19 полное вращение ε по величине равно:

$$\varepsilon^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \tag{11}$$

Подобно току жидкости (6) кривую, определяемую диференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \tag{12}$$

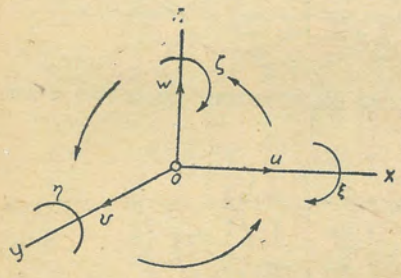
называют вихревой нитью.

Из выражений компонентов вихря (10) следует, что:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

Это уравнение, подобно уравнению непрерывности жидкости (3) при $\rho = \text{const}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{14}$$



Черт. 20.

Это показывает, что для капельных жидкостей компоненты вихря можно уподоблять компонентам полной скорости частицы жидкости и производить над ними одинаковые операции.

Наконец должно заметить, что получение всех выражений (10) и (9) легко производится помощью круговой перестановки всех знаков, расположив компоненты скорости и вихря по осям координат согласно чертежу (4) и идя от каждой из желаемых осей против стрелки часов.

Условие безвихревого движения жидкости. При безвихревом движении жидкости все компоненты вихря должны одновременно равняться нулю:

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

что по выражениям (10) равносильно одновременному существованию равенств:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Эти равенства возможны только в том случае, когда существует такая функция $\varphi(x, y, z, t)$, частные производные которой по x, y, z дают компоненты скоростей частицы по соответственным осям координат:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

По аналогии с функцией потенциала сил функцию φ называют функцией потенциала скоростей.

Все движения жидкости, имеющие функцию потенциала скоростей, будут безвихревыми движениями, и наоборот, движения без потенциала скоростей будут движениями вихревыми.

Безвихревые движения жидкости носят поэтому наименование потенциальных движений.

Последние являются наиболее выгодными и желательными во всех случаях транспортировки жидкости или утилизации ее энергии.

4. Уравнения движения жидкости в функции компонентов вихря в случае внешних сил, имеющих потенциал и $\rho = f(p)$.

В том случае, когда внешние, объемные силы, действующие на жидкость, имеют потенциал $U(x, y, z)$, так что:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{15a}$$

а плотность ее является функцией давления:

$$\rho = f(p),$$

почему, обозначая через:

$$P = \int^{p} \frac{dp}{\rho},$$

будем иметь:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};$$

систему уравнений (9) возможно представить в более краткой канонической форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\eta w - \zeta v) &= -\frac{\partial U_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\zeta u - \xi w) &= -\frac{\partial U_1}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\xi v - \eta u) &= -\frac{\partial U_1}{\partial z} \end{aligned} \tag{15}$$

особо удобной для исследований, где функция

$$U_1 = U + P + \frac{V^2}{2} \tag{16}$$

есть полный запас энергии частицы жидкости.

А. БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ.

1. Общие данные.

Компоненты вихря $\xi = \eta = \zeta = 0$.

Скорости имеют потенциал $\varphi(x, y, z, t)$, так что:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Поэтому:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Вставляя все эти величины в уравнения (15), получим уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U_1+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U_1+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U_1+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0$$

показывающие нам, что функции $U_1+\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ не зависят от переменных x, y, z.

По отношению к этим переменным функция:

$$U_1+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\text{const},$$

или

$$U+P+\frac{V^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\text{const}. \qquad (17)$$

Выражение (17) дает нам частный интеграл трех первых уравнений Эйлера. Он носит наименование интеграла Лагранжа.

Постоянное второй части является здесь функцией времени.

При установившемся или стационарном движении $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ приходим к интегралу Д. Бернулли:

$$U+P+\frac{V^2}{2}=\text{const}. \qquad (18)$$

В этом случае токи жидкости совпадают с траекториями частиц и имеют уравнения:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w},$$

показывающие, что токи нормальны здесь к поверхностям равного потенциала скоростей, т. е.:

$$\varphi=\text{const}. \qquad (19)$$

Для капельных, несжимаемых жидкостей $\rho=\text{const}$, и уравнение непрерывности (14) может быть представлено в виде:

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \qquad (20)$$

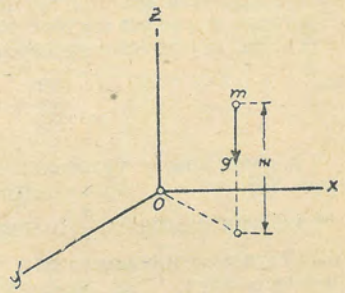
называемом уравнением Лапласа.

Всякая функция $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению (20), дает форму возможного движения жидкости.

2. Уравнение Д. Бернулли (закон сохранения энергии).

Для капельных жидкостей, $\rho=\text{const}$, находящихся под действием одной силы тяжести, с ускорением $g=9{,}81$ *м/сек²*, постоянно направленным вертикально вниз (черт. 21), согласно (15а) получим:

$$U=gz;\quad P=\frac{p}{\rho}.$$



Черт. 21.

Поэтому уравнение (18) примет вид:

$$\frac{p}{\gamma}+z+\frac{V^2}{2g}=\text{const}, \qquad (21)$$

где

$$\gamma=\rho\cdot g.$$

3. Предельная скорость.

Наибольшая скорость, с которой могут двигаться частицы непрерывной жидкой среды при данном z, будет достигнута при $\frac{p}{\gamma}=0$ и равна:

$$V_{\max}=\sqrt{2g(H-z)}. \qquad (22)$$

При дальнейшем увеличении скорости давление внутри жидкости стало бы отрицательным и вызвало бы разрыв сплошности течения.

Предельная скорость дает границу применимости уравнения Д. Бернулли и уравнений непрерывного движения Л. Эйлера. Так например на поверхности моря $z=0$ при атмосферном давлении $H=10{,}33$ *м*

$$V_{\max}=\sqrt{2g\cdot 10{,}33}=14{,}2\ м/сек.$$

Поэтому все потоки жидкости, движущиеся в соприкосновении с атмосферой со скоростью, большей 14,2 *м/сек*, не являются уже сплошными жидкими телами, но агрегатом из отдельных капель жидкости, окруженных воздухом. Подобный поток всасывает в себя воздух, аэрируется, почему объем его увеличивается.

Уравнение Д. Бернулли (21), как и интеграл Лагранжа (17), показывает нам, что три первые уравнения Эйлера, давая связь между давлением, положением и величиной скорости в каждой точке движущейся жидкости, не решают еще вопроса о форме движения всей массы ее в целом, от которой зависит то или иное распределение скоростей и давлений в пространстве, заполняемом потоком.

Эту форму всего течения жидкости возможно получать только решением четвертого уравнения Эйлера, интегрированием уравнения непрерывности (20).

Теория решения этого уравнения или уравнения Лапласа дается теорией потенциала и составляет в общем случае труднейшую область механики, почему приходится ограничиться только частными его интегралами или сводить задачу к исследованию движений жидкости в двух измерениях, случаю ее течения параллельно плоскости или к одному измерению параллельно линии.

4. Физический смысл уравнения Бернулли.

Согласно приведенному выше уравнение Бернулли выражает собою закон сохранения энергии при движении струйки или, что то же, уравнение Бернулли выражает постоянство удельной энергии вдоль струйки, что может быть выражено следующим образом:

$$\frac{V^2}{2g}+\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)=\text{const.} \qquad (23)$$

В приведенном уравнении первый член выражает кинетическую энергию, двучлен в скобках выражает потенциальную энергию, слагающуюся из энергии давления $\frac{p}{\gamma}$ и энергии положения z.

Все члены, приведенные в уравнении Бернулли (Bernoulli), имеют размерность длин. Член, выражающий кинетическую энергию, обычно называется скоростным напором; член, выражающий энергию давления, называется приведенной высотой давления. Константное значение уравнения Бернулли обычно называется гидродинамическим напором относительно плоскости сравнения.

При переходе от рассмотрения отдельной струйки к рассмотрению движения целого потока уравнение Бернулли ни в чем не изменяется кроме члена, выражающего кинетическую энергию, к которому вводится поправочный коэфициент α, зависящий от перераспределения скоростей по сечению, о чем будет сказано ниже при рассмотрении выражения уравнения Бернулли для реальной жидкости.

5. Уравнение Д. Бернулли для реальных потоков конечных размеров поперечного сечения.

Для реального потока жидкости (черт. 22), движение которого от сечения *1—1* до сечения *2—2* является параллельноструйным и сопровождается потерей энергии на местные сопротивления, общее уравнение Д. Бернулли принимает вид:

$$\frac{\alpha V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{\alpha V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2+h_w, \qquad (24)$$

где приняты следующие обозначения:

z_1 и z_2 — выражает энергию положения и измеряется высотой рассматриваемой точки относительно плоскости сравнения *0—0*;

p_1 и p_2 — давления в сечениях *1—1* и *2—2*;

V_1 и V_2 — средняя скорость в сечениях *1—1* и *2—2*;

h_w — потери напора жидкости при движении на рассматриваемом участке;

α — коэфициент, учитывающий неравномерность распределения скорости в поперечном сечении реального потока;

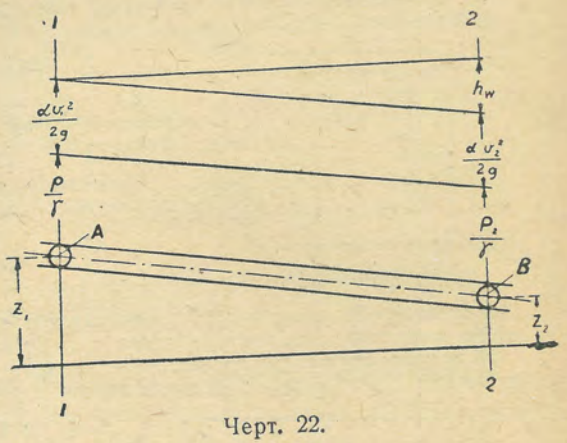
$\frac{V^2}{2g}$ — скоростной напор в сечениях *1—1* и *2—2*.

Значение коэфициента перераспределения скоростей α находится в пределах от $\alpha=1{,}0$ до $\alpha=1{,}15$, в среднем $\alpha=1{,}10$. Предельно максимальное значение $\alpha=1{,}50$.

При расчетах неравномерного движения жидкости можно принимать $\alpha=1{,}0$ на участках медленно изменяющегося потока, а для начальных участков неравномерного движения (от критических скоростей на входе) можно принимать $\alpha=1{,}5$. Последнее еще недостаточно установлено исследовательскими работами. Поэтому часто и здесь принимают $\alpha=1{,}0$—$1{,}10$.

При равномерном движении жидкости выявляются потери напора в зависимости от отдельных местных сопротивлений (трение о стенки канала, потери на вход, на изгиб и другие местные потери сопротивления).

Изучение вопроса местных сопротивлений изложено в главе „Равномерное движение жидкости в напорных трубопроводах".



Черт. 22.

6. Истечение из отверстий.

Истечение из отверстий необходимо рассматривать при двух условиях:
А) при постоянном напоре и Б) при переменном напоре.

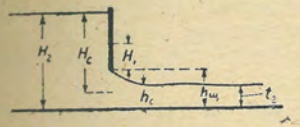
Как истечение при постоянном напоре, так и при переменном напоре кроме того должно быть рассмотрено свободное и затопленное.

А. Истечение при постоянном напоре.

Свободные, или незатопленные, отверстия.

Истечение свободным, или незатопленным, отверстием называют истечения при таких условиях, когда горизонт воды в нижнем бьефе не выше нижней кромки порога отверстия.

Для отверстий типа (черт. 23) более целесообразно всегда считать отверстие подтопленным.



Черт. 23.

а) Основные формулы.

Скорость при постоянном напоре определяется по общей формуле Торичелли (Toricelli) с учетом потерь на вход в отверстие по формуле (черт. 24):

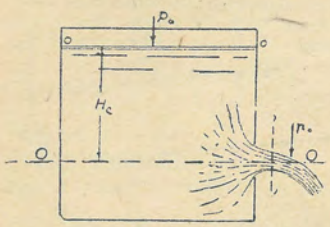
$$v=\varphi\sqrt{2gH_0}, \qquad (25)$$

где приняты следующие обозначения:

v — скорость истечения в отверстие,

H_c — напор над центром тяжести отверстия,

v_0 — подходная скорость,
g — ускорение силы тяжести,
H_0 — напор с учетом проходной скорости и давлением p_a или



Черт. 24.

$$H_0 = H_c + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p}{\gamma},$$

φ — скоростный коэфициент, равный в среднем $\varphi = 0{,}97$.

Для вычисления величины скоростного коэфициента может служить формула:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\Sigma\zeta}}, \qquad (26)$$

где принято обозначение ($\Sigma\zeta$), выражающее сумму коэфициентов потерь на те сопротивления, которые струя претерпевает при входе в отверстие.

В общем случае $\Sigma\zeta$ составляется из всех потерь на пути струи при истечении — вход, трение, местные потери в пути и выход или:

$$\Sigma\zeta = \zeta_{вх} + \zeta_{вых} + \zeta_{тр} + \zeta_{зак} + \ldots \qquad (27)$$

Расход воды при постоянном напоре определяется в силу закона постоянства расхода по формуле вида:

$$Q = \omega v = \alpha_1 \varphi \sqrt{2gH_0} = \mu\omega\sqrt{2g\,H_0}, \qquad (28)$$

где приняты следующие обозначения:

ω — площадь отверстия,
H_c — напор над центром тяжести,
H_0 — напор с учетом подходной скорости и давления p_a или

$$H_0 = H_c + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma},$$

v_0 — скорость подхода,
Q — расход воды в $м^3/сек$,
μ — коэфициент расхода, который представляет собой произведение двух коэфициентов α_1 и φ, т. е. коэфициент расхода μ учитывает как скоростные потери на вход (φ), так и влияние сжатия струи коэфициентом (α_1).

В среднем для относительно малых отверстий до 1 $м$ значение μ колеблется от 0,62 до 0,64; точнее см. ниже таблицы.

В соответствии с приведенным выше средним значением $\varphi = 0{,}97$ и средним значением $\alpha_1 = 0{,}63$, расходный коэфициент получает общее среднее выражение

$$\mu = 0{,}63 \cdot 0{,}97 = 0{,}61.$$

б) Большие отверстия.

Для расчета пропускаемого расхода через большие отверстия нельзя применять формулу вида, принятого для истечения в малые отверстия, по-

тому что для больших отверстий напоры в разных точках оказываются неодинаковыми, и приходится разбивать большие отверстия на горизонтальные полосы с одинаковыми напорами (черт. 25).

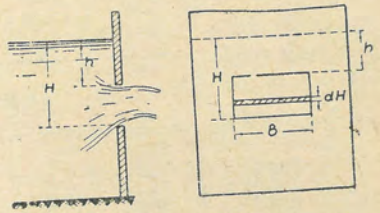
Расход через каждую из таких полос с площадью bdH и переменным напором H будет:

$$dq = \mu b\, dH\sqrt{2gH}.$$

После интегрирования имеем:

$$Q = \int_h^H \mu b\, dH\sqrt{2gH} =$$

$$= \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}). \qquad (29)$$



Черт. 25.

Если $h > \frac{H-h}{2}$, то для вычисления расхода вместо (29) можно пользоваться формулой (с ошибкой не $> 1\%$):

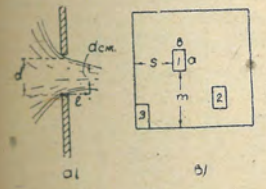
$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_0}, \qquad (29\text{-а})$$

где H_0 представляет напор над центром тяжести отверстия с учетом подходной скорости и ω — площадь отверстия.

в) Опытные данные, формулы для расчетов и величины коэфициентов.

При определении коэфициента расхода для истечения в отверстия приходится рассматривать следующие случаи: истечения при совершенном сжатии имеет место для отверстия типа 1, указанного на чертеже 26, где граница отверстия достаточно удалена от стенок водоема и горизонта воды в нем, для чего по опытным данным необходимо выполнение следующих условий:

$$m > 3a; \quad s > 3b. \qquad (30)$$



Черт. 26.

Если для какой-либо стороны отверстия приведенные выше условия не соблюдены, сжатие считается несовершенным (отверстие 2, черт. 26).

Наконец сжатие считается неполным, если отверстие с какой-либо стороны не испытывает сжатия вовсе (отверстие 3, черт. 26).

Полные данные о величинах коэфициента расхода в настоящее время дать трудно, потому что опытные материалы не позволяют дать какой-либо полной их систематизации. Поэтому приходится для назначения коэфициентов пользоваться отдельными отчетными данными.

Для выбора коэфициентов при совершенном сжатии приводим таблицы Smith'a, Lesbros и Poncelet (стр. 236—237).

Таблица 16

Значение коэфициентов расхода μ через круглое отверстие в тонк вертикальной стенке по опытам Smith'a

Напор над центром отверстия (в метрах)	Диаметр отверстия (в метрах)					
	0,006	0,015	0,030	0,060	0,180	0,30
0,12	—	0,631	0,618	—	—	—
0,15	—	0,627	0,615	0,600	0,592	—
0,18	0,655	0,624	0,613	0,601	0,593	—
0,21	0,651	0,622	0,611	0,601	0,594	0,590
0,24	0,648	0,620	0,610	0,601	0,594	0,591
0,27	0,646	0,618	0,609	0,601	0,595	0,591
0,30	0,644	0,617	0,608	0,600	0,595	0,591
0,40	0,638	0,613	0,605	0,600	0,596	0,593
0,60	0,632	0,610	0,604	0,599	0,597	0,596
0,90	1,627	0,606	0,603	0,599	0,597	0,597
1,20	0,623	0,605	0,602	0,599	0,598	0,596
1,80	0,618	0,604	0,600	0,598	0,597	0,596
2,40	0,614	0,603	0,600	0,598	0,596	0,596
3,00	0,611	0,601	0,598	0,697	0,596	0,596
6,00	0,601	0,598	0,596	0,596	0,596	0,594
30,00	0,593	0,592	0,592	0,592	0,592	0,592

Таблица 17

Значения коэфициентов расхода μ через квадратное отверст в тонкой вертикальной стенке по опытам Smith'a

Напор над центром отверстия (в метрах)	Сторона квадрата (в метрах)					
	0,006	0,015	0,03	0,06	0,18	0,30
0,12	—	0,637	0,621	—	—	—
0,15	—	0,633	0,619	0,605	0,597	—
0,18	0,660	0,630	0,617	0,605	0,698	—
0,21	0,656	0,628	0,616	0,605	0,599	0,596
0,21	0,652	0,625	0,615	0,605	0,600	0,597
0,27	0,650	0,623	0,614	0,605	0,601	0,598
0,30	0,648	0,922	0,613	0,605	0,601	0,599
0,40	0,642	0,618	0,610	0,605	0,602	0,601
0,60	0,637	0,615	0,608	0,605	0,604	0,602
0,90	0,632	0,612	0,607	0,605	0,604	0,603
1,20	0,628	0,610	0,606	0,605	0,603	0,602
1,80	0,623	0,609	0,605	0,604	0,603	0,602
2,40	0 619	0,608	0,605	0,604	0,603	0,602
3,00	0,616	0,606	0,604	0,603	0,602	0,601
6,00	0,606	0,603	0,602	0,602	0,601	0,600
30,00	0,599	0,598	0,598	0,598	0,598	0,598

Таблица 18

Значения коэфициентов расходов μ через прямоугольное отверстие в тонкой вертикальной стенке по опытам Poncelet и Lesbros

Напор над верхним ребром отверстия (в метрах)	Ширина отверстия b=0,2 м						b=0,6 м	
	Высота отверстия h (м)						h (м)	
	0,01	0,02	00,3	0,05	0,10	0,20	0,02	0,20
0,01	0,701	0,650	0,630	0,607	—	—	0,644	—
0,02	0,694	0,659	0,634	0,615	0,596	0,572	0 643	—
0,03	0,688	0,659	0,638	0,620	0,600	0,578	0,642	0,593
0,04	0,683	0,658	0,640	0,623	0,603	0,582	0,642	0,595
0,05	0,679	0,658	0,640	0,625	0,605	0,585	0,641	0,597
0,06	0,676	0,657	0,640	0,627	0,607	0,587	0,641	0,599
0,08	0,670	0,656	0,638	0,629	0,610	0,589	0,640	0,601
0,10	0,636	0,654	0,673	0,630	0,611	0,592	0,639	0,602
0,14	0,650	0,651	0,635	0,630	0,613	0,595	0,637	0,603
0,20	0,655	0,648	0,633	0,630	0,615	0 598	0,635	0,605
0,30	0,650	0,644	0,632	0,629	0,616	0,600	0,633	0,607
0,50	0,644	0,640	0,630	0,628	0,617	0,603	0,630	0,607
1,00	0,632	0,633	0,628	0,626	0,615	0,605	0,626	0,605
1,50	0,615	0,619	0,620	0 620	0,611	0,602	0,623	0,602
2,00	0,611	0,612.	0,612	0,613	0,607	0,601	0,620	0,602
3,00	0,609	0,610	0,608	0,606	0,603	0,601	0,615	0,601

При несовершенном сжатии коэфициент расхода μ вычисляется по данным Вейсбаха следующим образом:

Для круглых отверстий:

$$\mu_0 = \mu(1 + K), \tag{31}$$

для прямоугольных отверстий:

$$\mu_0 = \mu(1 + K_1), \tag{32}$$

где μ — коэфициенты расхода при совершенном сжатии, а K и K_1 берутся по следующей таблице 19 в зависимости от соотношения площадей ω и Ω, где ω — площадь отверстия, Ω — площадь притекания (см. стр. 238).

Для расчетов коэфициента расхода при неполном сжатии значения вычисляются при истечении в атмосферу и при небольших отверстиях чаще всего по формуле Бидона:

для круглых отверстий:

$$\mu_0 = \mu\left(1 + 0{,}128 \cdot \frac{n}{p}\right); \tag{33}$$

для прямоугольных отверстий:

$$\mu_0 = \mu\left(1 + 0{,}152 \cdot \frac{n}{p}\right); \tag{34}$$

Для истечения из больших отверстий вычисление производится по формуле Вейсбаха:

$$\mu_0 = \mu\left(1 + 0{,}157 \cdot \frac{n}{p}\right). \tag{35}$$

В приведенных выше трех формулах приняты следующие обозначения:

μ — коэфициент расхода при совершенном сжатии,

n — часть периметра, по которому отсутствует сжатие,

p — полный периметр отверстия.

Для практических расчетов гидротехнических сооружений, где приходится иметь по преимуществу дело с большими отверстиями, можно рекомендовать данные, приведенные ниже в таблице 20а, составленной на основании учета практики английской и американской гидротехники, в обработке акад. Павловского.

Таблица 19

Значения K и K_1 при несовершенном сжатии

$\frac{\omega}{\varphi}$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
K	0,007	0,014	0,023	0,034	0,045	0,059	0,075	0,092
K_1	0,009	0,019	0,030	0,042	0,056	0,071	0,088	0,107
$\frac{\omega}{\varphi}$	0,45	0,50	0,55	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
K	0,112	0,134	0,161	0,189	0,260	0,351	0,471	0,631
K_1	0,128	0,152	0,178	0,208	0,278	0,356	0,473	0,608

Таблица 20

№	Тип отверстий	α	φ	μ
1	Отверстия без бокового и донного сжатия при закругленной верхней кромке (тип входа с линейчатыми поверхностями, раструбом и конусами)			
	Отверстия до 2 *м*	0,95	0,95	0,90
	Отверстия выше 2 *м*	0,97	0,95	0,92
2	Отверстия без бокового и донного сжатия с острой верхней кромкой (тип входа с линейчатой поверхностью, раструбом, конусом)			
	Отверстия до 2 *м*	0,99	0,90	0,83
	Отверстия выше 2 *м*	0,94	0,90	0,85
3	Отверстия без сжатия по дну, с закругленными краями (тип входа раструбом и конусом)			
	Отверстия до 2 *м*	0,87	0,85	0,74
	Отверстия выше 2 *м*	0,90	0,85	0,76
4	Отверстия без сжатия по дну с острыми краями			
	Отверстия до 2 *м*	0,85	0,80	0,68
	Отверстия выше 2 *м*	0,87	0,82	0,71
5	Отверстия сжатием со всех сторон в зависимости от их формы			
	Отверстия до 2 *м*			
	от значений	0,85	0,82	0,70
	до значений	0,75	0,80	0,60
	Отверстия выше 2 *м*			
	от значений	0,87	0,82	0,71
	до значений	0,80	0,80	0,64

Таблица 20а

№	Тип отверстий	μ
1	Малые отверстия с полным сжатием	0,60
2	Отверстия средних размеров с сжатием струи со всех сторон при отсутствии направляющих стенок к отверстиям	0,65
3	Отверстия больших размеров с несовершенным, но всесторонним сжатием без более точного определения условий подхода к отверстию в среднем	0,70
4	Отверстия умеренные с боковым сжатием, но вовсе без сжатия по дну	0,80
5	Средние отверстия (шириной до 2 *м*) без сжатия по дну и с весьма слабым боковым сжатием, тип отверстий мостов регуляторов	0,90
6	Большие отверстия современного типа плотин и шлюзов при ширине 5–6 *м* без сжатия по дну и с весьма слабым боковым сжатием	до 0,95

При расчете отверстий ирригационных сооружений рекомендуется выбор коэфициентов ставить в зависимость от типов входов в сооружения.

Типы входов для отверстий ирригационных сооружений могут рассматриваться следующих видов:

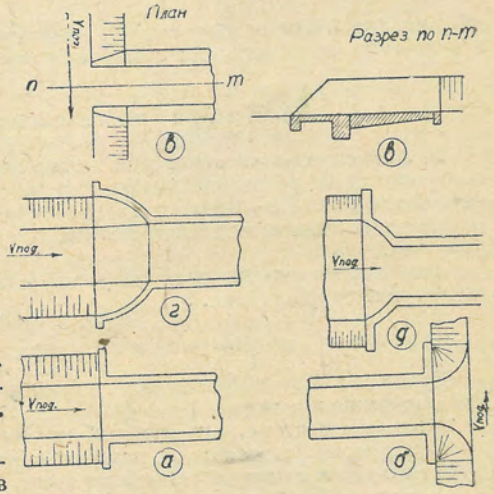
входы с обратными стенками (черт. 27-а),

входы с конусами (черт. 27-б),

входы с ныряющими стенками (27-в),

входы с линейчатыми поверхностями (черт. 27-г) и наконец входы раструбом (черт. 27-д).

В зависимости от перечисленных выше типов входов проф. Михайловым рекомендуются коэфициенты (табл. 20).



Черт. 27.

г) Предварительные расчетные формулы.

Чаще всего для предварительных расчетов отверстий приходится пользоваться средними данными. Так для отверстий, имеющих полное сжатие или во всяком случае сжатие со всех сторон, нередко берется $\mu = 0{,}60-0{,}65$, в среднем $\mu = 0{,}625$.

Для отверстий донных, т. е. не имеющих сжатия по дну (черт. 23) значение μ принимается $\mu = 0{,}7$.

Эти коэфициенты во всяком случае заключают в себе известный запас, что видно по сравнению с таблицами акад. Павловского и проф. Михайлова.

Для расчетов удобно пользоваться формулой для расхода следующего вида:

$$Q = \mu_1 \omega H_0^{\frac{1}{2}}, \qquad (36)$$

где

$$\mu_1 = \mu\sqrt{2g}.$$

При этом получаем следующие с некоторым округлением значения μ_1 и μ:

$\mu = 0{,}625$; μ_1 в метрах $= 2{,}75$; μ_1 в футах $= 5{,}00$,
$\mu = 0{,}7$; μ_1 в метрах $= 3{,}10$; μ_1 в футах $= 5{,}60$.

д) Пределы применимости формул для расчета отверстий.

При расчете свободного донного отверстия (черт. 27) при высоте отверстия $h_{щ}$ и ширине b общей формулой для расчета расхода можно пользоваться до тех пор пока:

$$h_{щ} \leqslant \frac{2}{3}\left(H_2 + \frac{v_0^2}{2g}\right), \qquad (37)$$

так как при большем значении $h_{щ}$ имеем уже не истечение из отверстия, а истечение через водослив с широким порогом.

е) Коэфициент сжатия струи.

Коэфициент сжатия струи при выходе из отверстия (черт. 23) в среднем при расчетах на основании имеющихся лабораторных данных можно принять около $\varepsilon = 0{,}75 - 0{,}64$.

Размеры сжатия подлежат дальнейшему уточнению в лабораторных условиях.

Наиболее низкие значения получены в последнее время Ленинградским институтом гидротехники.

ж) Истечение через насадки.

Насадки в гидротехнических сооружениях можно рассматривать следующих основных типов:

1) насадок Вентури, или внешний цилиндрический (черт. 28),
2) конически расходящийся насадок (черт. 29),
3) конически сходящийся насадок (черт. 30),
4) насадок Борда, или внутренний цилиндрический (черт. 31),
5) коноидальный насадок (черт. 32).

Общая расчетная формула для определения расхода через насадки остается того же вида, как и для расчета отверстий:

$$Q = \mu_1 \omega H_0^{\frac{1}{2}} = \mu\omega\sqrt{2gH_0}. \qquad (38)$$

Расчет истечения жидкости через насадки может производиться с учетом их влияния только в том случае, если длина насадки превосходит в $2^1/_2$—3 раза размер их диаметра. В этом случае сжатая струя при входе в насадок успевает расшириться и заполнить все отверстие, и истечение поэтому происходит полным сечением.

1. Цилиндрический насадок, или насадок Вентури. Насадок Вентури чаще всего делается длиной до 4 диаметров. Непосредственно при входе струя образует сжатие сечения, а возле стенки — водоворот ab (черт. 28).

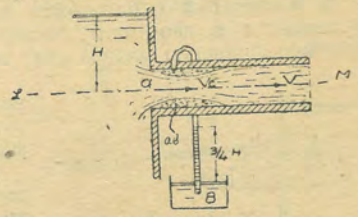
Скорость v_c в сжатом сечении больше, чем скорость в конце трубы. Увеличение скорости в сжатом сечении происходит за счет затраты части

потенциальной энергии, следовательно в сжатом сечении давление меньше атмосферного, что подтверждается и опытными данными.

Понижение давления, или вакуум, в некоторых случаях может практически достигнуть величины:

$$\frac{p}{\gamma} = 0{,}75H_c - h_n, \qquad (39)$$

где H_c — напор над центром тяжести сечения и h_n — величина подтопления, т. е. погружение центра выходного отверстия под уровень горизонта воды в нижнем бьефе. Для отверстий незатопленных $h_n = 0$, поэтому получаем формулу для вакуума вида:



Черт. 28.

$$\frac{p}{\gamma} = 0{,}75H_c. \qquad (40)$$

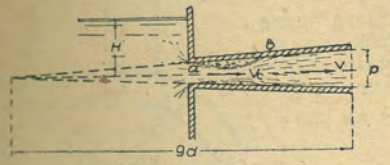
Следовательно на такую высоту может подняться столб жидкости в пьезометре, установленном у сжатого сечения (черт. 28).

Коэфициент расхода в насадках Вентури доходит до $\mu = 0{,}82$ и $\mu_1 = 3{,}64$.

Насадки можно рассчитывать с приведенными повышенными по сравнению с отверстиями коэфициентами расхода только в том случае, если вакуум в сжатом сечении, определенный по формуле (39), не достигает практически допускаемой величины, обычно 5—7 *м*. Кроме того для правильной работы насадка необходимо предварительное его заполнение.

2. Конически расходящийся насадок. Конически расходящийся насадок представляет усеченный конус с высотой конуса, равной примерно девятикратному диаметру основания.

Все явления, указанные при определении цилиндрического насадка Вентури, повторяются и для конически расходящегося насадка, только в более усиленном виде. Давление в сжатом сечении $a - b$ (черт. 29) меньше атмосферного и может быть доведено до



Черт. 29.

$$\frac{p}{\gamma} = 0{,}5H.$$

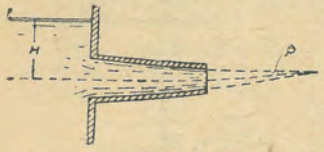
Коэфициент расхода может быть увеличен до $\mu = 1$ и $\mu_1 = 4{,}43$ по отношению к входному отверстию.

Коэфициент скорости при истечении из насадка падает до $\varphi = 0{,}45$, а также коэфициент расхода по отношению выходного конца получается $\mu = 0{,}45$ и $\mu_1 = 2{,}00$.

Главная практическая ценность конически расходящихся насадков заключается в возможности уменьшения живой силы потока с увеличением его сечения в конце, т. е. поглощением части напора гидравлическими потерями при переходе от скорости сжатого сечения V_c до скорости выходной $V_{вых}$. Поэтому в последнее время в гидротехнической практике применяются для пропуска ливневых и оросительных вод под насыпями конически расходящиеся трубы, так как это предохраняет отводной канал за

насыпью от размыва. Аналогично с этим наличие большой разницы в скоростях выходной и сжатого сечения дает основание этот тип насадка применять для всасывающих труб водяных турбин.

3. Конически сходящийся насадок. Конически сходящиеся насадки суживаются к наружному концу и применяются тогда, когда желательно получить большую живую силу вытекающей струи (черт. 30).



Черт. 30.

При угле конусности β до 13° коэфициент расхода и скорости по отношению к наружному суженному сечению получается $\mu = 0{,}95$, $\mu_1 = 4{,}2$ и $\varphi = 0{,}96$.

В силу особенности конически сходящихся насадков их применяют по преимуществу в соплах, подводящих воду к колесам Пельтона, а также в брандспойтах.

Подвод воды к колесам Пельтона производится потому конически сходящимися насадками, что в этом случае получаются наибольшие выходные скорости.

В брандспойтах применение сходящегося насадка вызывается необходимостью получить возможно большую дальность и высоту боя струи, что связано опять-таки с наибольшими выходными скоростями.

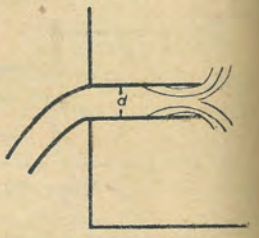
Для выбора коэфициента φ, μ и μ_1 в зависимости от угла конусности сходящегося насадка можно рекомендовать таблицу 21.

Таблица 21

Угол конусности β . . .	1°	5°	10°	13°	16°	20°	30°	45°
Коэфициент скорости φ	0,852	0,920	0,949	0,961	0,969	0,971	0,975	0,983
Коэфициент расхода μ .	0,852	0,920	0,933	0,945	0,938	0,922	0,896	0,857
Коэфициент расхода μ_1 .	3,78	4,18	4,15	4,19	4,16	4,09	3,98	3,80

4. Насадок Борда. При расчете насадка Борда (черт. 31) следует применять, учитывая потери напора на вход и заполнение полностью всего сечения, следующий коэфициент расхода:

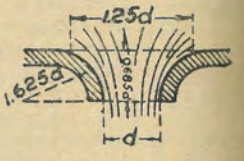
$$\mu = 0{,}71 \quad \text{или} \quad \mu_1 = 3{,}15.$$



Черт. 31.

5. Коноидальный насадок. Если насадку придать криволинейную форму вытекающей струи, как показано на чертеже 32, то гидравлические сопротивления могут быть сведены к минимуму, а также уничтожаются области отжима с вакуумом. Коэфициенты расхода и скорости в нем равны: $\mu = \varphi = 0{,}97$, а $\mu_1 = 4{,}30$.

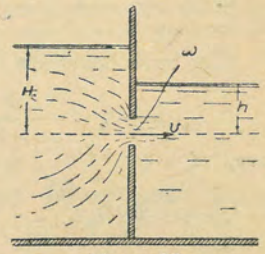
Эти насадки пропускают расход в полтора раза больше, чем отверстие такой же площади в тонкой стенке. По возможности криволинейное очертание придается входным отверстиям гидротехнических сооружений, пропускающих воду.



Черт. 32.

Затопленные отверстия, или истечение под уровень.

При расчете истечения жидкости под уровень, в практических расчетах гидротехнических сооружений, истечение через затопленное отверстие рассчитывается по формулам следующего вида (черт. 33):



Черт. 33.

скорость определяется по формуле:

$$V = \varphi \sqrt{2g(H_0 - h)}; \qquad (41)$$

расход определяется по формуле:

$$Q = \mu\omega \sqrt{2g(H_0 - h)} = \mu_1 \omega \sqrt{H_0 - h}.$$

Значения коэфициентов μ, μ_1 и φ сохраняются для практических расчетов те же самые, что и приведенные для истечения свободным отверстием.

При расчете истечения затопленным отверстием необходимо выполнение предварительно следующих условий:

1. Уровень воды в нижнем бьефе должен быть по крайней мере выше порога отверстия.

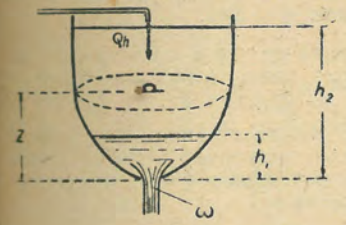
2. Энергия потока в сжатом сечении за отверстием должна быть недостаточна для отгона прыжка.

3. В случае открытия частично затопленного отверстия на величину большую чем $^2/_3$ напора расчеты должны вестись по формулам для истечения через водослив с широким порогом.

Б. Истечение при переменном уровне.

а) Свободное истечение при переменном уровне.

Для расчетов истечения при переменном уровне приходится прибегать к элементарным расходам и их суммированию по времени. Поэтому расчеты истечения при переменном уровне могут быть сделаны только для случая, медленно изменяющегося во времени движения и только для определенных конкретных условий.



Черт. 34.

Основная зависимость в этом случае получается в следующем виде (черт. 34):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_n - \mu\omega\sqrt{2gz}}{\Omega}, \qquad (42)$$

где вообще:

$$Q_n = f(t),$$
$$\Omega = f(z).$$

Это уравнение разрешается приближенными методами в квадратурах лишь для немногих частных случаев зависимости (42). Вообще для практически наиболее часто встречающихся случаев имеем:

1. $Q_n = \text{const}; \quad \Omega = f(z).$

При этом получаем:

$$t_2 - t_1 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\Omega\, dz}{Q_n - \mu\omega\sqrt{2gz}}. \qquad (43)$$

Полученный интеграл хоть и является функцией только от z, но интегрированию редко поддается, а потому решение должно быть произведено приближенно путем суммирования.

2. $$Q_n = \text{const},$$
$$\Omega = \text{const}.$$

При этом получаем:

$$t_2 - t_1 = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h_0}\ln\frac{\sqrt{h_0}-\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_0}-\sqrt{h_2}} + (\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2})\right], \quad (44)$$

где:

$$h_0 = \frac{Q_n^2}{\mu^2\omega^2 2g}.$$

3. $$Q_n = O,$$
$$\Omega = \text{const}.$$

При этом, пользуясь общей формулой, при опорожнении или наполнении сосуда будем иметь:

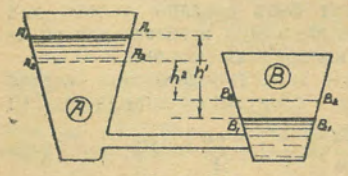
$$t_2 - t_1 = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2}). \quad (45)$$

Для частного случая полного опорожнения сосуда будем иметь:

$$t_2 - t_1 = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\sqrt{h_1}. \quad (46)$$

Полученное время для наполнения или опорожнения оказывается вдвое большим, чем потребное время для той же операции при постоянном напоре.

Приведенные формулы чаще всего употребляются для расчетов судоходных шлюзов; μ обычно в расчетах принимается в пределах от 0,5 до 0,6, чаще всего $\mu = 0{,}55$ или $\mu_1 = 2{,}45$.



Черт. 35.

б) Истечение при переменном напоре под переменный уровень.

Время истечения при переменном напоре под переменный уровень может быть определено в общем виде только для сосудов призматических (черт. 35).

В этом случае будем иметь:

$$t_2 - t_1 = \frac{2\Omega_a\cdot\Omega_b(\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2})}{(\Omega_a+\Omega_b)\mu\omega\cdot\sqrt{2g}}, \quad (47)$$

где Ω_a и Ω_b являются горизонтальными сечениями сосудов A и B (черт. 35).

Для определения времени выравнивания горизонтов обоих сосудов необходимо положить $h_2 = 0$, и тогда будем иметь следующее:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2\cdot\Omega_a\cdot\Omega_b\sqrt{h_1}}{(\Omega_a+\Omega_b)\mu\omega\sqrt{2g}}. \quad (48)$$

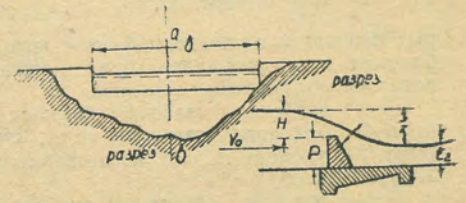
В приведенной формуле h_1 обозначена первоначальная разность в уровнях сообщающихся сосудов.

При расчетах крупных водоемов (водохранилища, пруды) применение приведенных выше формул истечения при переменном уровне невозможно, потому что в этих случаях встречаемся с сосудами неправильных форм, которые не поддаются интегрированию, а потому приходится расчеты делать приближенно, пользуясь методом суммирования за элементарные промежутки (см. Регулирование стока, III).

7. Водосливы.

а) Терминология, определения и основные формулы.

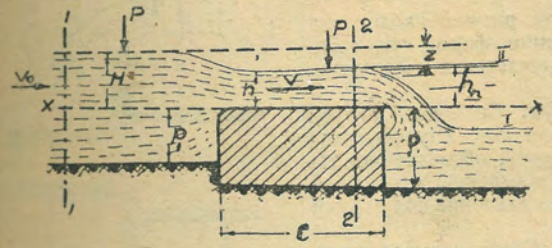
Если какой-либо канал или реку преградить поперечной стенкой (черт. 36) и жидкость по каналу или реке будет переливаться через эту стенку, то говорят — она течет через водослив. В этом случае H_1 и t_2 будут глубины в канале до и после водослива, p — высота стенки водослива, b — ширина водослива, H — напор над водосливом, H_0 — напор над водосливом с учетом подходной скорости, z — разность горизонтов в верхнем и нижнем бьефах, z_0 — разность горизонтов в верхнем и нижнем бьефах с учетом влияния подходной скорости.



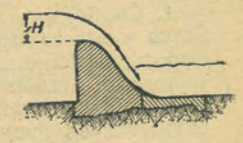
Черт. 36.

С точки зрения формы водосливы различаются следующих видов:
водослив с тонкой стенкой (черт. 40),
водослив с широким порогом (черт. 37),
водосливы практических форм (черт. 38).

Кроме этих основных трех видов водосливов могут рассматриваться водосливы с толстой стенкой, которые находятся в средних условиях между



Черт. 37.



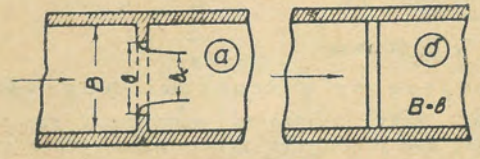
Черт. 38.

типом водослива с тонкой стенкой и с широким порогом и принадлежат к группе водосливов практических форм.

Основным признаком деления водосливов на водосливы с тонкой стенкой, с толстой стенкой и с широким порогом служит отношение $\frac{H}{C}$, где H — напор над водосливом, а C — толщина стенки водослива (черт. 37).

При значениях $\frac{H}{C} > 2$ водослив чаще всего рассматривается как во
слив с тонкой стенкой.

При значениях $\frac{H}{C} < 2$, но все же больше чем 0,5 водослив называет
с толстой стенкой, и частная его разновидность — водослив практическ
формы.



Черт. 39.

Наконец при $\frac{H}{C} < 0{,}5$ во
слив обычно рассматривается
водослив с широким порогом.

В отношении планового р
положения различают водосл
вы прямолинейные и криво
нейные, а по отношению к
правлению движения потока
нормальные, т. е. такие, в ко
рых направление подходной скорости нормально к линии водослива,
боковые, в которых направление движения воды в подающем воду водото
параллельно гребню водослива.

Далее водосливы классифицируются на водосливы с боковым сжати
(*а*) и без бокового сжатия (*б*) (черт. 39) и затем на водосливы свободн
(черт. 37, уровень *I*), или незатопленные, и водосливы затопленные (чер
37, уровень *II*).

Кроме этого все водосливы рассматриваются по формам вырезов сво
стенки: водосливы прямоугольные, водосливы треугольные, водосливы тр
пецоидальные, водосливы криволинейные и т. д.

В практических условиях работы гидротехнических сооружений имею
наибольшее распространение водосливы прямоугольные и отчасти во
сливы трапецоидальные.

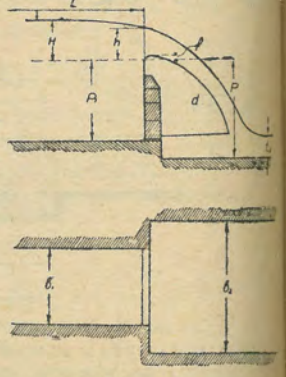
В лабораторных условиях наибольшее распространение имеют водослив
трапецоидальные и треугольные. В последнее время стали применяться
водосливы параболические.

б) Типы струй.

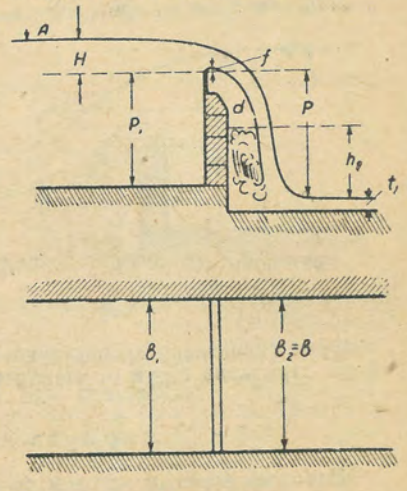
Для всех вопросов расчета водослива имеет большое значение форма струи водослива, которая встречается в следующих видах.

1. Свободная струя. Свободной струей Базен называет струю в том случае, когда в пространство под струей, обозначенное на чертеже 40 буквою *d*, обеспечен свободный доступ воздуха, так что давление под струей равно атмосферному.

2. Струя отжатая. Струя отжатая получается в том случае, если в пространство *d* под струей прекращен доступ воздуха. При прекращении доступа воздуха под струю находящийся там воздух постепенно захватывается струей воды, и пространство *d* оказывается разреженным, благодаря чему происходит уменьшение объема d, как видно по сопоставлению чертежей 40 и 41 вообще струя прижимается к стенке водослива.


Черт. 40.

3. Струя, подтопленная снизу. Если по какой-либо причине вакуум под струей увеличится настолько, что высота h_b (черт. 41) сделается равной или больше высоты стенки падения — p, то под струей исчезает воздушный мешок и все пространство под ней наполняется жидкостью. Струя получается подтопленной снизу. В этом случае за струей легко наблюдается мертвое пространство, наполненное водоворотами.



Черт. 41.

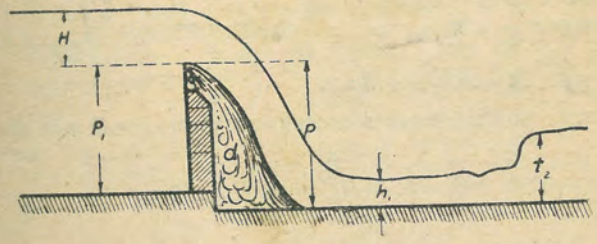
Подтопленная струя в практических условиях может появляться в трех формах.

а) Подтопленная струя с отгоном прыжка (черт. 42).

В этом случае глубина воды h_1 непосредственно ниже водослива меньше глубины t_2 нижнего бьефа. Струя сопрягается с горизонтом нижнего бьефа, так называемым прыжком. Если постепенно увеличивать высоту уровня воды в нижнем бьефе, который не сможет поддерживать сжатое сечение за водосливом, то горизонт нижнего бьефа постепенно надвинется на водослив.

b) Получив надвигание горизонта нижнего бьефа на водослив, получаем следующий тип струи — струю покрытую.

В этом случае, в сопряжении горизонтов верхнего и нижнего бьефа ясно выделяется (черт. 43) очертание струи, из-за водоворотов под струей и над струей.



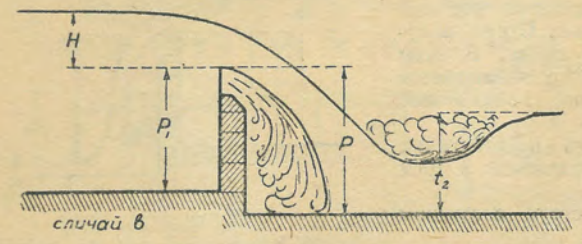
Черт. 42.

c) Если дальше увеличивать горизонт нижнего бьефа, то струя может превратиться в струю волнистую.

В этом случае нет точной линии раздела струи, как в случае „b“, что ясно по чертежу 44.

Верхний и нижний уровни сопрягаются непрерывно волнообразной поверхностью, что часто наблюдается в практических гидротехнических сооружениях.

4. Прилипшая струя. При некоторых соотношениях мертвое пространство под струей совершенно исчезает. Струя полностью прижимается к стенке водослива, превращаясь в прилипшую (черт. 45). Форма прилипшей струи для водослива с тонкой стенкой является весьма неустойчивой. Достаточно малейших нарушений в струе (сотрясение, плывущий предмет и т. д.), как изменяется форма прилипшей струи.



Черт. 43.

Прилипшая струя применяется в гидротехнике в водосливах практических форм, которые специально проектируются с таким расчетом, чтобы невозможно было отрывание струи от стенки водослива.

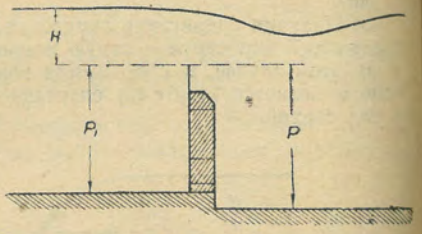
в) Общая формула для расчета водосливов.

Наиболее простым методом получения формулы общего вида для расчета расходов воды через водослив можно считать использование формулы (29) для расчета больших отверстий.

Если в формуле для расчета расхода через большие отверстия положить $h = O$, $H = H_0$ и $V_0 \neq 0$, то получим:

$$Q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}bH_0^{\frac{3}{2}}.$$

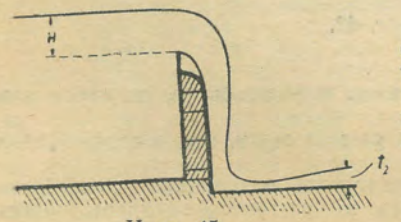
Обозначая $\frac{2}{3}\mu$ через m,



Черт. 44.

$\frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}$ через M и называя M и m коэфициентом расхода через водослив, получим общий вид формулы:

$$Q = M \cdot b \cdot H_0^{\frac{3}{2}} = mb\,H_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g}. \qquad (49)$$



Черт. 45.

При расчете наиболее сложным оказывается выбор коэфициента M, так как он зависит:

1) от типа стенки водослива (тонкая, практической формы, с широким порогом),
2) от влияния скорости подхода,
3) от влияния бокового сжатия,
4) от влияния затопления водосливной струи и

5) от формы стенки, величины напора и формы струи.

Если ввести в общую формулу коэфициенты, выражающие влияние от всех этих элементов, то получим по данным акад. Павловского общий вид формулы в следующем виде:

$$Q = M_r \sigma_f \sigma_n \sigma_n \varepsilon b H_0^{\frac{3}{2}}, \qquad (50)$$

где обозначаем:

M_r — приведенный коэфициент расхода, т. е. коэфициент расхода при

$$\sigma_f = \sigma_n = \sigma_n = 1;$$

σ_f — коэфициент формы струи;
σ_n — коэфициент полноты напора;
σ_n — коэфициент затопления;
εb — ширина водослива с учетом сжатия или практически действующая ширина водослива;
ε — коэфициент сжатия;
H_0 — полный напор, т. е. с учетом подходной скорости.

Для выявления коэфициентов расхода для практических расчетов необходимо будет остановиться на каждом из типов водослива: на водосливе с тонкой стенкой, на водосливе с широким порогом и на водосливах практических профилей.

1. НЕЗАТОПЛЕННЫЕ ВОДОСЛИВЫ.

А. Водосливы с тонкой стенкой.

1. Водослив Базена.

Незатопленный водослив с тонкой стенкой без бокового сжатия обычно называется водосливом Базена, поскольку он впервые тщательно изучен в лабораторной обстановке последним. Свои опыты Базен производил для водослива с тонкой стенкой при напорах, меньших 0,6 *м*, и при высотах стенки падения p, меньших 0,75 *м*.

В 1920 г. были произведены дополнительные опыты при той же ширине водослива 2 *м*, но при напорах до 1,24 и стенке падения до 1,13 *м*, причем эти опыты полностью подтвердили выводы Базена. Поэтому для практических целей при расчетах водослива при напорах от 0,2 до 2 *м* и при высотах стенок от 0,2 до 1,5 *м*, а может быть и несколько больших, можно совершенно спокойно пользоваться выведенной Базеном формулой. Формула Базена для водослива с острым ребром имеет следующий вид:

$$Q = \varepsilon M b \cdot H^{\frac{3}{2}}. \qquad (51)$$

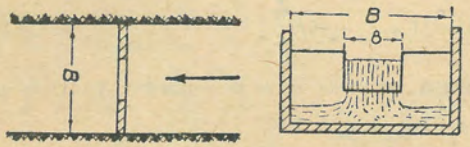
В этой формуле все обозначения известны кроме ε.

ε представляет коэфициент сжатия при переходе к водосливу с боковым сжатием (черт. 46). Учет сжатия см. стр. 293.

Коэфициент расхода M для водосливов с острым ребром по Базену определяется по формуле (черт. 43):

$$M = \left(1{,}794 + \frac{0{,}013}{H}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H + p_1}\right)^2\right]. \qquad (52)$$

В этой формуле множитель $\left(1{,}794+\frac{0{,}013}{H}\right)$ выражает коэфициент ра
хода без влияния скорости подхода, а множитель $\left[1+0{,}55\left(\frac{H}{H+p_1}\right)^{}\right.$



Черт. 46

учитывает влияние скор
сти подхода.

Для упрощения подсче
при водится таблица 22 д
определения коэфициент
расхода в пределах H до 2
и p до 1,5 *м*.

Из других формул д
расчета водосливов с то
кой стенкой можно указать формулу Ребокка, которая отличается
формулы Базена лишь коэфициентом расхода M, который определяет
следующим образом:

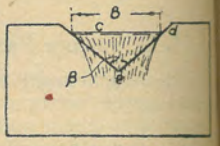
$$M=1{,}786+\frac{0{,}984}{350H-1}+0{,}236\frac{H}{p}. \qquad (5$$

2. Треугольный водослив или водослив Томсона.

Треугольный водослив является хорошим типом водослива для точны
измерений расходов, а потому часто применяется в лабораторной обс
новке для этой цели.

Общая формула расхода для треугольного водослива (черт. 47) при любом угле наклона отверстия β определяется по формуле:

$$Q=M\ \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}H^{2,5}. \qquad (54)$$

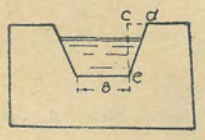


Черт. 47.

В частном случае при β, равном 90°, получаем $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=1$ и общий вид
приводится к следующему:

$$Q=MH^{2,5}. \qquad (55)$$

По данным Томсона M находится в пределах от 1,88 до 1,42, по новейшим
опытам он равен 1,37. Чаще всего принимается для
расчетов значение $M=1{,}4$.



Черт. 48.

3. Трапецоидальные водосливы и водослив Чиполетти.

Трапецоидальный водослив является весьма устойчивым в отношении коэфициентов расхода водосливом, поэтому частный случай трапецоидального водослива — водослив Чиполетти — применяется в широком масштабе для учета оросительной воды, подаваемой при ирригации, и в лабораторной практике.

Итальянский инженер Чиполетти присоединил к прямоугольной форме

Таблица 22

H \ P	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	Замечания
0,20	2,114	2,021	1,971	1,942	1,922	1,903	1,899	1,892	1,887	1,883	1,878	1,876	1,874	1,872	Значения, подчеркнутые тонкой линейкой, относятся к случаям, когда не рекомендуются для практического применения
0,30	2,200	2,089	2,022	1,978	1,948	1,927	1,911	1,899	1,890	1,883	1,876	1,871	1,867	1,864	
0,40	2,272	2,133	2,077	2,025	1,987	1,959	1,937	1,920	1,908	1,897	1,888	1,881	1,875	1,870	
0,50	2,330	2,210	2,128	2,069	2,026	1,993	1,967	1,947	1,930	1,917	1,905	1,896	1,888	1,881	
0,60	2,377	2,258	2,175	2,113	2,055	2,028	1,999	1,975	1,956	1,940	1,926	1,915	1,905	1,897	
0,70	2,415	2,301	2,216	2,151	2,101	2,061	2,029	2,002	1,981	1,963	1,948	1,935	1,923	1,914	
0,80	2,447	2,337	2,252	2,187	2,135	2,094	2,059	2,030	2,007	1,986	1,969	1,954	1,941	1,931	
0,90	2,474	2,368	2,279	2,219	2,166	2,122	2,087	2,057	2,031	2,010	1,991	1,974	1,960	1,948	
1,00	2,457	2,395	2,314	2,248	2,196	2,151	2,114	2,082	2,055	2,032	2,013	1,995	1,979	1,966	
1,10	2,517	2,419	2,340	2,276	2,222	2,177	2,139	2,107	2,078	2,054	2,033	2,015	1,999	1,983	
1,20	2,535	2,440	2,364	2,300	2,246	2,201	2,162	2,130	2,101	2,075	2,053	2,033	2,016	2,002	
1,30	2,549	2,459	2,385	2,322	2,268	2,224	2,184	2,150	2,121	2,095	2,072	2,052	2,034	2,018	
1,40	2,563	2,476	2,403	2,342	2,289	2,243	2,205	2,171	2,140	2,114	2,091	2,070	2,051	2,034	
1,50	2,574	2,491	2,420	2,361	2,308	2,263	2,224	2,190	2,160	2,133	2,109	2,087	2,068	2,050	
1,60	2,585	2,505	2,436	2,378	2,282	2,242	2,203	2,176	2,150	2,126	2,126	2,104	2,084	2,066	
1,70	2,594	2,518	2,451	2,393	2,343	2,300	2,259	2,225	2,194	2,167	2,142	2,120	2,100	2,082	
1,80	2,604	2,529	2,461	2,403	2,353	2,315	2,276	2,241	2,210	2,184	2,158	2,135	2,114	2,096	
1,90	2,612	2,540	2,477	2,422	2,378	2,330	2,291	2,256	2,225	2,198	2,173	2,151	2,130	2,110	
2,00	2,618	2,549	2,487	2,434	2,386	2,344	2,305	2,271	2,240	2,212	2,116	2,164	2,143	2,124	

выреза обычного водослива с острым ребром два прямоугольных треугольника *cde* (черт. 48), причем

$$cd = \frac{ce}{4}.$$

При таком наклоне боковых ребер водослива уширяющееся кверху отверстие должно компенсировать влияние бокового сжатия, а потому коэфициент расхода для такого водослива должен быть постоянным, равным $M = 1{,}86$.

Формула расхода получается в этом случае следующего вида:

$$Q = 1{,}865 b \sqrt[3]{H^2}. \qquad (56)$$

Здесь за b принимается ширина водослива по низу.

Пользоваться водосливом Чиполетти не следует при напорах, превышающих одну треть длины порога $\left(h \leqslant \frac{b}{3}\right)$, так как при больших напорах погрешности определения расхода возрастают.

Для практических расчетов по гидромодулю ниже приводятся таблицы расходов через стандартные размеры водосливов Чиполетти.

Таблица 23 для определения расхода воды через водослив Чиполетти при гидромодульных работах. В таблицах даются величины расходов воды для водосливов Чиполетти, находимые по величине напора воды и продолжительности ее протекания.

Пересчитанная на литры в 1 минуту для расчетов по гидромодулю формула 56 принимает вид:

$$Q = 0{,}00354375\ b\sqrt[3]{H^2}\ л \text{ в минуту}$$

при ширине порога b и высоте направления H, выраженных в миллиметрах.

По этой формуле и составлена таблица 23, которая дана для четырех размеров водосливов Чиполетти, употребляющихся в практической работе:

b . . . . . 320 *мм* = 0,150 саж.
b . . . . . 427 „ = 0,200 „
b . . . . . 480 „ = 0,225 „
b . . . . . 640 „ = 0,300 „
b . . . . . 1280 „ = 0,600 „

Переход к водосливам Чиполетти другой ширины порога может быть сделан по закону прямолинейной пропорциональности.

В первой вертикальной колонне таблиц дается высота воды над порогом водослива, выраженная в миллиметрах. Против каждой высоты напора производится расход воды через водослив в литрах для 1 минуты, 2 минут и т. д. для 10 минут, число которых проставлено на верху каждой колонны.

Таблица 23

Таблицы для определения расходов воды при гидромодульных работах в л/мин. через водосливы Чиполетти стандартных (саж.) размеров, пока еще употребляющихся в практике.

Ширина порога b = 320 *мм*

Мил. / H нап. воды в *мм*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8	12
2	3,3	6,6	9,9	13,2	16,5	19,8	23,1	26,4	29,7	33
3	6,0	12,0	18,0	24,0	30,0	36,0	42,0	48,0	54,0	60
4	9,0	18,0	27,0	33,0	45,0	51,0	63,0	72,0	81,0	90
5	12,2	25,2	37,8	50,4	63,0	75,6	83,2	100,8	113	126
6	16,8	33,6	50,0	67,2	84,0	101	118	134	151	168
7	21,0	42,0	63,0	84,0	105	126	147	163	189	210
8	25,8	51,6	77,4	103	129	155	181	206	232	258
9	30,6	61,2	92,0	122	153	184	214	245	275	306
10	36,0	72,0	108	144	180	216	252	288	324	360
11	41,4	82,8	124	166	207	248	290	331	373	414
12	47,4	94,8	142	190	237	284	332	379	427	474
13	53,4	107	160	214	267	320	374	427	481	534
14	59,4	119	178	238	297	355	416	475	535	594
15	65,0	132	198	264	330	396	462	528	594	660
16	72,6	145	218	290	363	436	508	581	653	726
17	79,2	158	238	317	396	475	554	634	713	792
18	86,4	173	259	346	432	518	605	691	778	864
19	94,2	188	283	377	471	565	660	754	848	942
20	101,4	203	304	406	507	608	710	811	913	1014
21	109,2	218	328	437	546	655	764	874	983	1092
22	117,0	234	351	468	585	702	819	936	1053	1170
23	124,8	250	374	499	624	749	874	998	1123	1248
24	133,2	266	400	533	666	799	932	1066	1199	1332
25	141,6	283	425	566	708	850	991	1133	1274	1416
26	150,0	300	450	600	750	900	1050	1200	1350	1500
27	159,0	318	477	636	795	954	1113	1272	1431	1590
28	168,0	336	504	672	840	1008	1176	1344	1512	1680
29	177,0	354	531	707	885	1062	1239	1416	1593	1770
30	185,0	372	558	744	930	1116	1302	1488	1674	1860
31	195,6	391	587	782	978	1174	1369	1565	1760	1956
32	205,2	410	616	821	1026	1231	1435	1642	1847	2052
33	214,8	430,6	644	859	1074	1289	1504	1718	1933	2148
34	224,4	449,0	673	898	1122	1346	1571	1795	2020	2244
35	234,6	469	704	938	1173	1408	1642	1877	2111	2346

Таблица 23 (продолжение) b = 320 мм

H нап. воды в мм \ Мин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	244,8	490	734	979	1224	1469	1714	1958	2203	2448
37	255,0	510	765	1020	1275	1530	1785	2040	2295	2550
38	265,2	530	795	1060	1325	1590	1855	2120	2385	2652
39	276,0	552	828	1104	1380	1656	1932	2208	2484	2760
40	286,0	574	860	1147	1434	1721	2008	3294	2581	2868
41	297,5	595	893	1190	1483	1786	2083	2381	2678	2976
42	308,4	617	925	1234	1542	1850	2159	2467	2776	3084
43	319,8	640	959	1279	1599	1919	2239	2558	2878	3198
44	331,2	662	994	1325	1656	1987	2318	2650	2981	3312
45	342,6	685	1028	1370	1713	2056	2398	2741	3083	3426
46	354,0	708	1062	1416	1770	2124	2478	2832	3186	3540
47	365,4	731	1096	1462	1827	2192	2558	2923	3289	3654
48	376,8	754	1130	1507	1884	2261	2638	3014	3391	3768
49	388,8	778	1166	1555	1944	2333	2722	3110	3499	3888
50	400,8	802	1202	1603	2004	2405	2806	3206	3607	4008
51	412,8	825	1238	1651	2064	2477	2890	3302	3715	4128
52	424,8	850	1274	1699	2124	2549	2974	3398	3823	4248
53	437,4	875	1312	1750	2187	2624	3062	3499	3937	4374
54	450,0	900	1350	1800	2250	2700	3150	3600	4050	4500
55	462,6	925	1388	1850	2313	2776	3238	3701	4163	4626
56	475,2	950	1426	1901	2376	2851	3326	3802	4277	4752
57	487,8	976	1463	1951	2439	2927	3415	3902	4390	4878
58	500,4	1001	1501	2002	2502	3002	3503	4003	4504	5004
59	513,6	1027	1541	2054	2568	3082	3596	4109	4622	5135
60	526,8	1054	1580	2107	2634	3161	3688	4214	4741	5268
61	540,0	1080	1620	2160	2700	3240	3780	4320	4860	5400
62	553,2	1106	1660	2213	2766	3319	3872	4426	4979	5532
63	567,0	1134	1701	2268	2835	3402	3969	4536	5103	5670
64	580,8	1162	1742	2323	2904	3485	4066	4646	5227	5808
65	594,0	1188	1782	2376	2970	3564	4158	4752	5346	5940
66	607,8	1216	1823	2431	3039	3647	4255	4862	5470	6078
67	621,6	1243	1865	2486	3108	3730	4351	4973	5594	6216
68	636,0	1272	1908	2544	3180	3816	4452	5088	5724	6360
69	649,8	1300	1949	2599	3249	3899	4549	5198	5848	6498
70	664,2	1328	1993	2657	3321	3985	4649	5314	5978	6642
71	678,6	1357	2036	2714	3393	4072	4750	5429	6107	6786
72	693,0	1386	2079	2772	3462	4158	4851	5544	6237	6930
73	707,4	1415	2122	2830	3537	4244	4952	5659	6367	7074
74	721,8	1444	2165	2887	3609	4331	5053	5774	6496	7218
75	736,2	1472	2209	2945	3681	4417	5153	5890	6626	7362

Таблица 23 (продолжение) b = 320 мм

H нап. воды в мм \ Мин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
76	751,2	1502	2254	3005	3756	4507	5258	6010	6761	7512
77	766,2	1532	2299	3065	3831	4597	5363	6130	6896	7662
78	781,2	1562	2344	3125	3906	4687	5468	6250	7031	7862
79	796,2	1592	2389	3185	3981	4777	5573	6370	7166	7962
80	811,2	1622	2434	3245	4056	4867	5578	6490	7301	8112
81	826,2	1652	2479	3305	4131	4957	5783	6610	7436	8262
82	841,8	1684	2525	3367	4209	5051	5893	6734	7576	8418
83	857,4	1715	2572	3430	4287	5144	6002	6859	7717	8574
84	873,0	1646	2619	3592	4365	4238	6111	6984	7857	8730
85	888,6	1777	2666	3554	4443	5332	6220	7109	7997	8886
86	905,4	1811	2716	3622	4527	5432	6338	7243	8149	9054
87	919,8	1840	2759	3679	4599	5519	6439	7358	8278	9198
88	936,0	1872	2808	3744	4680	5616	6552	7488	8424	9360
89	952,2	1904	2857	3809	4761	5713	6665	7618	8570	9522
90	968,4	1937	2905	3874	4842	5810	6779	7747	8716	9684
91	984,6	1979	2954	3938	4923	5908	6892	7877	8861	9846
92	1000,8	2002	3002	4003	5004	6005	7006	8006	9007	10008
93	1017,0	2034	3051	4068	5085	6102	7119	8136	9153	10170
94	1038,2	2066	3100	4133	5166	6199	7232	8266	9299	10332
95	1050,0	2100	3150	4200	5250	6300	7350	8400	9450	10500
96	1066,8	2134	3200	4267	5334	6401	7468	8534	9601	10668
97	1083,6	2167	3251	4334	5418	6502	7585	8669	9752	10836
98	1100,4	2201	3301	4402	5502	6602	7703	8803	9904	11041
99	1117,2	2234	3352	4469	5586	6703	7820	8938	10055	11172
100	1134,0	2268	3402	4536	5670	6804	7938	9072	10206	11340
101	1150,8	2302	3452	4603	5754	6905	8056	9206	10357	11508
102	1168,2	2336	3505	4673	5841	7009	8177	9346	10514	11682
103	1185,6	2371	3557	4742	5928	7114	8299	9485	10670	11856
104	1203,0	2406	3609	4812	6015	7218	8421	9624	10827	12030
105	1220,4	2441	3661	4882	6102	7322	8543	9763	10984	12204
106	1237,8	2475	3713	4951	6189	7427	8665	9902	11140	12378
107	1255,2	2510	3766	5021	6276	7531	8786	10042	11297	12552
108	1272,6	2545	3818	5090	6363	7636	8908	10181	11453	12726
109	1290,0	2580	3870	5160	6450	7740	9030	10320	11610	12900
110	1308,0	2616	3924	5232	6540	7848	9156	10464	11772	13080

Таблица 23 (продолжение)

Ширина порога b = 427 мм

H нап. воды в мм \ Мин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6	11,2	12,8	14,4	16,0
2	4,0	8,0	12,0	16,0	20,0	24,0	28,0	32,0	36,0	40,0
3	8,0	16,0	24,0	32,0	40,0	48,0	56,0	64,0	72,0	80,0
4	12,0	24,0	36,0	48,0	60,0	72,0	84,0	96,0	108,0	120,0
5	16,8	33,6	50,4	67,2	84,0	101,0	118	134	151	168
6	22,4	44,8	67,2	89,6	112	134	157	179	202	224
7	28,0	56,0	84,0	112	140	168	196	224	252	280
8	34,4	68,8	103	138	172	206	241	275	310	344
9	40,8	81,6	122	163	204	245	286	326	367	408
10	48,0	96,0	144	192	240	288	336	384	432	480
11	55,2	110	166	221	276	331	386	442	497	552
12	63,2	126	190	253	316	379	442	506	569	632
13	71,2	142	214	285	356	427	498	570	641	712
14	79,2	158	238	317	396	475	554	634	713	792
15	88,0	176	264	352	440	528	616	704	792	880
16	96,8	194	290	387	484	581	678	774	871	968
17	105,6	211	317	422	528	634	738	845	950	1066
18	115,2	230	346	461	576	691	806	922	1037	1152
19	125,6	251	377	502	628	754	879	1005	1130	1255
20	135,2	270	406	541	676	811	946	1082	1217	1352
21	145,6	291	437	582	728	874	1019	1165	1310	1456
22	156,0	312	468	624	780	936	1092	1248	1404	1560
23	166,4	333	499	666	832	998	1165	1333	1498	1664
24	177,6	355	533	710	888	1065	1243	1421	1598	1776
25	188,8	378	566	755	944	1133	1322	1510	1699	1888
26	200,0	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
27	212,0	424	636	848	1060	1272	1484	1696	1908	2120
28	224,0	448	672	896	1120	1344	1568	1792	2016	2240
29	236,0	472	708	944	1180	1416	1652	1888	2124	2360
30	248,0	496	744	992	1240	1488	1736	1984	2232	2480
31	260,8	522	782	1043	1304	1565	1826	2086	2347	2608
32	273,6	547	821	1094	1368	1642	1915	2189	2462	2736
33	286,4	473	859	1145	1432	1718	2005	2291	2578	2864
34	299,2	598	898	1197	1496	1795	2094	2394	2693	2992
35	312,8	626	938	1251	1564	1877	2190	2502	2815	3128

Таблица 23 (продолжение) $b = 427$ мм

H нап. воды в мм \ Мин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	326,4	653	979	1306	1632	1958	2285	2611	2938	3264
37	340,0	680	1020	1360	1700	2040	2380	2720	3060	3400
38	353,6	707	1061	1414	1768	2122	2475	2829	3182	3536
39	368,0	736	1104	1472	1840	2208	2576	2944	3312	3680
40	382,4	765	1147	1580	1912	2294	2677	3059	3442	3824
41	396,8	794	1190	1587	1984	2381	2778	3174	3571	3968
42	411,2	822	1234	1645	2056	2467	2878	3290	3701	4112
43	426,4	853	1279	1706	2132	2558	2985	3411	3838	4264
44	441,6	883	1325	1766	2208	2650	3091	3533	3974	4416
45	456,8	914	1370	1827	2284	2741	3198	3654	4111	4568
46	472,0	944	1416	1888	2360	2832	3304	3776	4248	4720
47	487,2	974	1462	1949	2436	2923	3410	3893	4385	4872
48	502,4	1005	1507	2010	2512	3014	3517	4019	4522	5024
49	518,4	1037	1555	2074	2592	3110	3629	4147	4666	5184
50	534,4	1069	1603	2138	2672	3206	3741	4275	4810	5344
51	550,4	1101	1651	2202	2752	3302	3853	4403	4954	5504
52	566,4	1133	1699	2266	2832	3398	3965	4531	5098	5664
53	583,2	1166	1750	2333	2916	3499	4082	4666	5249	5832
54	600,0	1200	1800	2400	3000	3600	4200	4800	5400	6000
55	616,8	1254	1850	2467	3084	3701	4318	4934	5551	6168
56	633,6	1267	1901	2534	3168	3802	4435	5069	5702	6336
57	650,4	1301	1951	2602	3252	3902	4553	5203	5854	6504
58	667,2	1334	2002	2669	3336	4003	4670	5338	6005	6672
59	684,8	1370	2054	2739	3424	4109	4794	5478	6163	6848
60	702,4	1405	2107	2810	3512	4214	4917	5619	6322	7024
61	720,0	1440	2760	2880	3600	4320	5040	5760	6480	7200
62	737,6	1475	2213	2950	3688	4426	5163	5901	6638	7376
63	756,0	1512	2268	3024	3780	4536	5292	6048	6804	7560
64	774,4	1549	2323	3098	3872	4646	5421	6195	6970	7744
65	792,0	1584	2376	3168	3960	4752	5544	6336	7128	7920
66	810,4	1621	2431	3242	4052	4862	5673	6483	7294	8104
67	828,8	1658	2486	3315	4144	4973	5802	6630	7459	8288
68	848,0	1696	2544	3392	4240	5088	5936	6784	7632	8480
69	866,4	1733	2599	3466	4332	5198	6065	6931	7798	8664
70	885,6	1771	2657	3542	4428	5314	6199	7085	7970	8856
71	904,8	1810	2714	3619	4524	5429	6334	7238	8143	9048
72	924,0	1848	2772	3696	4620	5544	6468	7392	8316	9240
73	943,2	1886	2830	3773	4716	5659	6602	7546	8489	9432
74	962,4	1925	2887	3850	4812	5774	6737	7699	8662	9624
75	981,6	1963	2945	3926	4908	5890	6871	7853	8834	9816

Таблица 23 (продолжение) $в = 427$ мм

Мин. / H нап. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
76	1001,6	2003	3005	4006	5008	6010	7011	8013	9014	10016
77	1021,6	2043	3065	4086	5108	6130	7151	8173	9194	10216
78	1041,6	2083	3125	4166	5208	6250	7291	8333	9374	10416
79	1061,6	2123	3185	4246	5308	6370	7431	8493	9554	10616
80	1081,6	2163	3245	4326	5408	6490	7571	8653	9734	10816
81	1101,6	2203	3305	4406	5508	6610	7711	8813	9914	11016
82	1122,4	2245	3367	4490	5612	6734	7857	8979	10102	11224
83	1143,2	2286	3430	4573	5716	6859	8002	9146	10289	11432
84	1164,0	2328	3492	4656	5820	6984	8148	9312	10476	11640
85	1184,0	2370	3554	4739	5924	7109	8294	9478	10663	11848
86	1207,2	2414	3622	4829	6036	7243	8450	9658	10865	12072
87	1226,4	2453	3679	4906	6132	7358	8585	9811	11038	12264
88	1248,0	2496	3744	4992	6240	7488	8736	9984	11232	12480
89	1269,6	2539	3809	5078	6348	7618	8887	10157	11426	12696
90	1291,2	2582	3874	5165	6456	7747	9038	10330	11621	12912
91	1312,8	2626	3938	5251	6564	7877	9190	10502	11815	13128
92	1334,8	2689	4003	5338	6672	8006	9341	10675	12010	13344
93	1356,0	2712	4068	5424	6780	8136	9492	10848	12204	13560
94	1377,6	2755	4133	5510	6880	8266	9643	11021	12398	13776
95	1400,0	2800	4200	5600	7000	8400	9800	11200	12600	14000
96	1422,4	2845	4267	5690	7112	8534	9957	11379	12802	14223
97	1444,8	2890	4334	5779	7224	8669	10114	11558	13003	14448
98	1467,2	2934	4402	5869	7336	8803	10270	11738	13205	14762
99	1489,6	2979	4469	5958	7448	8938	10427	11917	13406	14896
100	1512,0	3024	4538	6048	7560	9072	10584	12096	13608	15120
101	1534,4	3069	4603	6138	7672	9206	10741	12275	13810	15344
102	1557,6	3115	4673	6230	7788	9346	10903	12461	14018	15576
103	1580,8	3162	4742	6323	7904	9485	11066	12646	14227	15808
104	1604,0	3208	4812	6416	8020	9624	11228	12832	14436	16040
105	1627,2	3254	4882	6509	8136	9763	11390	13018	14645	16272
106	1650,4	3301	4951	6602	8252	9902	11553	13203	14854	16504
107	1673,0	3347	5021	6694	8368	10042	11715	13389	15062	16736
108	1696,8	3394	5090	6787	8484	10181	11878	13574	15271	16968
109	1720,0	3440	5160	6880	8600	10320	12040	13760	15480	17200
110	1744,0	3488	5232	6976	8720	10464	12208	13952	15696	17440

Таблица 23 (продолжение)

Ширина порога $в = 480$ мм

Мин. / H нап. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,8	3,6	5,4	7,2	9,0	10,8	12,6	14,4	16,2	18
2	4,8	9,9	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2	48
3	9,0	18,0	27,0	36,0	45,0	54,0	63,0	72,0	81,0	90
4	13,8	27,6	41,4	55,2	69,0	82,8	96,6	110	124	138
5	19,2	38,4	57,6	76,8	96,0	115	134	154	173	192
6	25,2	50,4	75,6	101	126	151	176	202	227	252
7	31,8	63,6	95,4	127	159	191	223	254	286	318
8	38,4	76,8	115	154	192	230	269	307	346	384
9	46,2	92,4	139	185	231	277	323	370	416	462
10	54,0	108	162	216	270	324	378	432	486	540
11	61,8	124	185	247	309	371	433	494	556	618
12	70,8	142	212	283	354	425	496	566	637	708
13	79,8	160	239	319	399	479	559	638	718	798
14	89,4	179	268	358	447	536	626	715	805	894
15	99,0	198	297	396	495	594	693	792	891	990
16	108,6	217	326	434	543	652	760	869	977	1086
17	119,4	239	358	478	597	716	836	955	1075	1194
18	130,2	260	391	521	651	781	911	1042	1172	1302
19	141,0	282	423	564	705	846	987	1128	1269	1410
20	152,4	305	457	610	762	914	1067	1219	1372	1524
21	163,8	328	491	655	819	983	1147	1310	1474	1638
22	175,8	352	527	703	879	1055	1231	1406	1582	1758
23	187,8	376	564	751	939	1127	1315	1502	1690	1878
24	199,8	400	599	799	999	1199	1399	1598	1798	1998
25	212,4	425	637	850	1062	1274	1487	1699	1912	2124
26	225,6	451	677	902	1128	1354	1579	1805	2030	2256
27	238,8	478	716	955	1194	1433	1672	1910	2149	2388
28	252,0	504	756	1008	1260	1512	1764	2016	2268	2520
29	265,8	532	797	1063	1329	1595	1861	2126	2392	2648
30	279,4	559	838	1118	1397	1676	1956	2235	2515	2794
31	293,4	587	880	1174	1467	1760	2054	2347	2641	2934
32	307,8	616	923	1231	1539	1847	2155	2462	2770	3078
33	322,2	644	967	1289	1611	1933	2255	2578	2900	3222
34	337,2	674	1012	1349	1686	2023	2360	2698	3035	3372
35	352,2	704	1057	1409	1761	2113	2465	2818	3170	3522
36	367,2	734	1102	1469	1836	2203	2570	2938	3305	3672
37	382,8	766	1148	1531	1914	2297	2680	3062	3445	3828
38	398,4	797	1195	1594	1992	2390	2789	3187	3586	3984
39	414,0	828	1242	1656	2070	2484	2898	3312	3726	4140
40	430,2	860	1291	1721	2151	2481	3011	3442	3872	4302

Таблица 23 (продолжение) $b = 480$ мм

H нап. воды в мм \ Мин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
41	446,4	893	1339	1786	2232	2678	3125	3571	4018	4464
42	462,6	925	1388	1850	2313	2776	3238	3701	4163	4626
43	479,4	959	1438	1918	2397	2876	3356	3835	4315	4794
44	496,2	992	1489	1985	2481	2977	3473	3970	4466	4962
45	513,0	1026	1539	2052	2565	3078	3591	4104	4617	5130
46	530,4	1061	1591	2122	2652	3182	3713	4243	4774	5304
47	547,8	1096	1643	2191	2739	3287	3855	4382	4930	5478
48	565,2	1130	1696	2261	2826	3391	3956	4522	5087	5652
49	583,2	1166	1750	2333	2916	3499	4082	4666	5249	5832
50	601,2	1202	1804	2405	3006	3607	4208	4810	5411	6012
51	619,2	1238	1858	2477	3096	3715	4334	4954	5573	6192
52	637,8	1276	1913	2551	3189	3827	4465	5102	5740	6378
53	656,4	1313	1969	2626	3282	3933	4595	5251	5908	6564
54	675,0	1350	2025	2700	3375	4050	4725	5400	6075	6750
55	693,6	1387	2081	2774	3468	4162	4855	5549	6242	6936
56	712,8	1426	2138	2851	3564	4277	4990	5702	6415	7128
57	732,0	1464	2196	2928	3660	4392	5124	5856	6588	7320
58	751,2	1502	2254	3005	3756	4507	5258	6010	6761	7512
59	771,0	1542	2313	3084	3855	4626	5397	6168	6939	7710
60	790,8	1582	2372	3163	3954	4745	5536	6326	7117	7908
61	810,6	1621	2432	3242	4053	4864	5674	6485	7295	8106
62	830,4	1661	2491	3322	4152	4982	5813	6643	7474	8304
63	850,8	1702	2552	3403	4254	5105	5956	6806	7657	8508
64	871,2	1742	2614	3485	4356	5227	6098	6970	7841	8712
65	891,6	1783	2675	3566	4458	5350	6241	7133	8024	8916
66	912,0	1824	2736	3648	4560	5472	6384	7296	8208	9120
67	933,0	1866	2799	3732	4665	5598	6531	7464	8397	9330
68	954,0	1908	2862	3816	4770	5724	6678	7632	8586	9540
69	975,0	1950	2925	3900	4875	5850	6825	7800	8775	9750
70	996,0	1992	2988	3984	4980	5976	6972	7968	8964	9960
71	1017,6	2035	3053	4070	5089	6106	7123	8141	9158	10176
72	1039,2	2078	3118	4157	5196	6235	7274	8314	9353	10392
73	1060,8	2122	3182	4243	5304	6365	7426	8486	9547	10608
74	1082,4	2165	3247	4330	5412	6494	7577	8659	9742	10824
75	1104,6	2209	3314	4418	5523	6628	7732	8837	9941	11046
76	1126,8	2254	3380	4507	5634	6761	7888	9014	10141	11268
77	1149,0	2298	3447	4596	5745	6894	8043	9192	10341	11490
78	1171,8	2344	3515	4687	5859	7031	8203	9374	10546	11718
79	1194,6	2389	3584	4778	5973	7168	8362	9557	10751	11946
80	1217,4	2435	3652	4870	6087	7304	8522	9740	10957	12174

Таблица 23 (продолжение) $b = 480$ мм

H нап. воды в мм \ Мин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
81	1240,2	2480	3721	4961	6201	7441	8681	9922	11162	12402
82	1263,0	2526	3789	5052	6315	7578	8841	10104	11367	12630
83	1286,4	2573	3859	5146	6432	7718	9005	10291	11578	12864
84	1309,8	2620	3929	5239	6549	7859	9169	14478	11788	13098
85	1333,2	2666	4000	5333	6666	7999	9332	10666	11999	13332
86	1356,6	2713	4070	5426	6783	8140	9496	10853	12209	13566
87	1380,0	2760	4140	5520	6900	8280	9660	11040	12420	13800
88	1404,0	2808	4212	5616	7020	8424	9828	11232	12636	14040
89	1428,0	2856	4284	5712	7140	8568	9996	11424	12852	14280
90	1452,0	2904	4356	5808	7260	8712	10164	11616	13068	14520
91	1476,6	2953	4430	5906	7383	8860	10336	11813	13289	14766
92	1501,2	3002	4504	6005	7506	9007	10508	12010	13511	15012
93	1525,8	3052	4577	6103	7629	9155	10681	12206	13732	15258
94	1550,4	3101	4651	6202	7752	9302	10853	12403	13954	15504
95	1575,0	3150	4725	6300	7875	9450	11025	12600	14175	15750
96	1599,6	3199	4799	6398	7998	9598	11197	12797	14396	15996
97	1624,8	3250	4874	6499	8124	9749	11374	12998	14623	16248
98	1650,0	3300	4950	6600	8250	9900	11550	13200	14850	16500
99	1675,2	3350	5026	6701	8376	10051	11726	13402	15077	16752
100	1701,0	3402	5103	6804	8505	10206	11907	13608	15309	17010
101	1726,8	3454	5180	6907	8634	10361	12088	13814	15541	17268
102	1752,6	3505	5258	7010	8763	10516	12288	14021	15773	17526
103	1778,4	3557	5335	7114	8892	10670	12449	14277	16006	17784
104	1804,2	3608	5413	7217	9021	10825	12689	14434	16238	18042
105	1830,0	3660	5490	7320	9150	10950	12810	14640	16470	18300
106	1856,4	3713	5569	7426	9282	11138	12995	14851	16708	18564
107	1882,8	3766	5648	7531	9414	11297	13180	15062	16945	18280
108	1909,2	3818	5728	7637	9546	11455	13364	15274	17183	19092
109	1935,6	3871	5807	7742	9678	11614	13549	15485	17420	19356
110	1962,0	3924	5886	7848	9810	11772	13734	15696	17658	19620
111	1989,0	3978	5967	7956	9945	11934	13923	15912	17901	19890
112	2016,0	4032	6048	8064	10080	12096	14112	16128	18144	20160
113	2043,0	4086	6129	8172	10215	12258	14301	16344	18387	20430
114	2070,0	4140	6210	8280	10350	12420	14490	16560	18630	20700
115	2097,6	4195	6293	8390	10488	12586	14683	16781	18878	20976
116	2125,2	4250	6376	8501	10626	12751	14876	17002	19127	21252
117	2152,8	4306	6458	8611	10764	12917	15070	17222	19375	21528
118	2180,4	4361	6541	8722	10902	13082	15263	17443	19624	21804
119	2208,0	4416	6624	8832	11040	13248	15456	17664	19872	22080
120	2235,6	4471	6707	8942	11178	13414	15649	17885	20120	22356

Таблица 23 (продолжение) $b = 480$ мм

Мин. / H нап. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
121	2263,8	4528	6791	9055	11319	13583	15846	18110	20374	22638
122	2292,0	4584	6876	9168	11460	13752	16044	18336	20628	22920
123	2320,2	4640	6961	9281	11601	13921	16241	18561	20882	23202
124	2348,4	4697	7045	9394	11742	14090	16439	18787	21136	23484
125	2377,2	4754	7132	9509	11886	14263	16640	19018	21395	23772
126	2406,0	4812	7218	9624	12030	14436	16842	19248	21654	24060
127	2434,8	4870	7304	9739	12174	14609	17044	19478	21913	24348
128	2463,6	4927	7391	9854	12318	14782	17245	19709	22172	24635
129	2492,4	4985	7477	9970	12462	14954	17447	19939	22432	24924
130	2521,2	5042	7564	10085	12606	15127	17648	20170	22691	25212
131	2550,0	5100	7650	10200	12750	15300	17850	20400	22950	25500
132	2579,4	5159	7738	10318	12897	15476	18055	20635	23215	25794
133	2608,8	5218	7826	10435	13044	15653	18262	20870	23479	26088
134	2638,2	5276	7915	10553	13191	15829	18467	21106	23744	26382
135	2667,6	5335	8003	10670	13338	16006	18673	21341	24008	26676
136	2697,6	5395	8093	10790	13488	16186	18889	21581	24278	26976
137	2727,6	5455	8183	10910	13638	16366	19093	21821	24548	27276
138	2757,6	5515	8273	11030	13788	16546	19303	22061	24818	27576
139	2787,6	5575	8363	11150	13938	16726	19514	22301	25088	27876
140	2817,6	5635	8453	11270	14088	16906	19723	22541	25358	28176
141	2847,6	5695	8543	11390	14238	17086	19933	22781	25628	28476
142	2878,2	5756	8635	11513	14391	17269	20147	23026	25904	28782
143	2908,8	5818	8726	11635	14544	17453	20362	23270	26179	29088
144	2939,4	5879	8818	11758	14697	17636	20576	23515	26455	29394
145	2970,0	5940	8910	11880	14850	17820	20790	23760	26730	29700
146	3000,6	6001	9002	12002	15003	18004	21004	24005	27005	30006
147	3031,2	6062	9094	12125	15156	18187	21218	24250	27281	30312
148	3062,4	6125	9187	12250	15312	18374	21437	24499	27562	30624
149	3093,6	6187	9281	12374	15468	18562	21655	24749	27842	30936
150	3124,8	6250	9374	12499	15624	18749	21874	24998	28123	31248
151	3156,0	6312	9468	12624	15780	18936	22092	25248	28404	31560
152	3187,2	6374	9562	12749	15936	19123	22310	25498	28685	31872
153	3219,0	6438	9657	12876	16095	19314	22533	25752	28971	32190
154	3250,8	6502	9752	13003	16254	19505	22755	26006	29257	32508
155	3282,6	6565	9848	13130	16413	19696	22978	26261	29543	32825
156	3314,4	6629	9943	13258	16572	19886	23201	26515	29830	33144
157	3346,2	6692	10039	13385	16731	20077	23423	26770	30116	33462
158	3378,0	6756	10134	13512	16890	20268	23646	27024	30402	33780
159	3410,4	6821	10231	13642	17052	20462	23873	27283	30694	34104
160	3442,8	6886	10328	13771	17214	20657	24100	27542	30985	34428

Таблица 23 (продолжение)

Ширина порога $b = 640$ мм

Мин. / H нап. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,4	4,8	7,2	9,6	12,0	14,4	16,8	19,2	21,6	24
2	6,6	13,2	19,8	26,4	33,0	39,6	46,2	52,8	59,4	66
3	12,0	24,0	36,0	48,0	60,0	72,0	84,0	96,0	108	120
4	18,0	36,0	54,0	72	90	108	126	144	162	180
5	25,2	50,4	75,6	101	126	151	176	202	227	252
6	33,6	67,2	101	134	168	202	235	269	302	336
7	42,0	84,0	126	168	210	252	294	336	378	420
8	51,6	103	155	206	258	310	361	413	464	516
9	61,2	122	184	245	306	367	428	490	551	612
10	72,0	144	216	288	360	432	504	576	648	720
11	82,8	166	248	331	414	497	580	662	745	828
12	94,2	188	283	377	471	565	659	754	848	942
13	106,2	212	319	425	531	637	743	850	956	1062
14	118,8	238	357	475	594	713	832	950	1069	1188
15	132,0	264	396	528	660	792	924	1056	1188	1320
16	145,2	290	436	581	726	871	1016	1162	1307	1452
17	158,4	317	475	634	792	950	1109	1267	1426	1584
18	172,2	344	517	689	861	1033	1205	1378	1550	1722
19	187,8	376	563	751	939	1127	1315	1502	1690	1878
20	202,8	406	608	811	1015	1217	1420	1622	1825	2028
21	218,4	437	655	874	1092	1310	1529	1747	1966	2184
22	234,0	468	702	936	1170	1404	1638	1872	2106	2340
23	250,2	500	751	1001	1251	1501	1751	2002	2252	2502
24	266,4	533	799	1066	1332	1598	1865	2131	2398	2664
25	283,5	567	850	1134	1417	1701	1984	2268	2551	2835
26	300,6	601	902	1202	1503	1804	2104	2405	2705	3006
27	318,0	636	954	1272	1590	1908	2226	2544	2862	3180
28	336,0	672	1008	1344	1680	2016	2352	2688	3024	3360
29	354,0	708	1062	1416	1770	2124	2478	2832	3186	3540
30	372,6	745	1118	1490	1863	2236	2608	2981	3353	3726
31	391,2	782	1174	1565	1956	2347	2738	3130	3521	3912
32	410,4	821	1231	1642	2052	2462	2873	3283	3694	4104
33	429,6	859	1289	1718	2148	2578	3007	3437	3866	4296
34	449,4	899	1348	1798	2247	2696	3146	3595	4045	4494
35	469,8	940	1409	1879	2349	2819	3289	3758	4228	4698

Таблица 23 (продолжение) $в = 640$ мм

Мин. / H изп. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	490,2	980	1471	1961	2451	2941	3431	3922	4412	4902
37	510,6	1021	1532	2042	2553	3064	3574	4085	4595	5106
38	531,0	1062	1593	2124	2655	3186	3717	4248	4779	5310
39	552,6	1105	1658	2210	2763	3316	3868	4421	4973	5526
40	573,6	1147	1721	2294	2868	3442	4015	4589	5162	5736
41	595,2	1190	1786	2381	2976	3571	4166	4762	5357	5952
42	617,2	1235	1852	2470	3087	3704	4322	4939	5557	6174
43	639,4	1279	1919	2558	3198	3838	4477	5117	5756	6396
44	661,8	1324	1985	2647	3309	3971	4633	5294	5956	6618
45	684,6	1369	2054	2738	3423	4108	4792	5477	6161	6846
46	707,4	1415	2122	2830	3537	4244	4952	5659	6367	7074
47	730,8	1462	2192	2923	3654	4385	5116	5846	6577	7308
48	754,2	1508	2263	3017	3771	4525	5279	6034	6788	7542
49	777,6	1555	2333	3110	3888	4666	5443	6221	6998	7776
50	801,6	1603	2405	3206	4008	4810	5611	6413	7214	8016
51	826,2	1652	2479	3305	4131	4957	5783	6610	7436	8262
52	850,2	1700	2551	3401	4251	5101	5951	6802	7652	8502
53	874,8	1750	2624	3499	4374	5249	6124	6998	7873	8748
54	900,0	1800	2700	3600	4500	5400	6300	7200	8100	9000
55	925,2	1850	2776	3701	4626	5551	6476	7402	8327	9252
56	950,4	1901	2851	3802	4752	5702	6653	7603	8554	9504
57	976,2	1952	2929	3905	4881	5857	6833	7810	8786	9762
58	1002,0	2004	3006	4008	5010	6012	7014	8016	9018	10020
59	1027,8	2056	3083	4111	5139	6167	7195	8222	9250	10278
60	1053,6	2107	3161	4214	5268	6322	7375	8429	9482	10536
61	1080,0	2160	3240	4320	5400	6480	7560	8640	9720	10800
62	1107,0	2214	3321	4428	5535	6642	7749	8856	9963	11070
63	1134,0	2268	3402	4536	5670	6804	7938	9072	10206	11340
64	1161,0	2322	3483	4644	5805	6966	8127	9288	10449	11610
65	1188,0	2376	3564	4752	5940	7128	8316	9504	10692	11880
66	1215,6	2431	3647	4862	6078	7294	8509	9725	10940	12156
67	1243,8	2488	3731	4975	6219	7463	8707	9950	11194	12438
68	1272,0	2544	3816	5088	6360	7632	8904	10176	11448	12720
69	1300,2	2600	3901	5201	6501	7801	9101	10402	11702	13002
70	1328,4	2657	3985	5314	6642	7970	9289	10627	11956	13284

Таблица 23 (продолжение) $в = 640$ мм

Мин. / H изп. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
71	1356,6	2713	4070	5426	6783	8140	9496	10853	12210	13566
72	1385,4	2771	4156	5542	6927	8312	9698	11083	12469	13854
73	1414,2	2828	4243	5657	7071	8485	9899	11314	12728	14142
74	1443,6	2887	4331	5774	7218	8662	10105	11549	12992	14436
75	1473,0	2946	4419	5892	7365	8838	10311	11784	13257	14730
76	1502,4	3005	4507	6010	7512	9014	10517	12019	13522	15024
77	1532,4	3065	4597	6130	7662	9194	10727	12259	13792	15324
78	1562,4	3125	4687	6250	7812	9374	10937	12499	14063	15324
79	1592,4	3185	4777	6370	7962	9554	11147	12739	14332	15924
80	1623,0	3246	4869	6492	8115	9738	11361	12984	14607	16230
81	1653,6	3307	4961	6614	8268	9922	11575	13229	14882	16536
82	1684,2	3368	5053	6737	8421	10105	11789	13474	15158	16842
83	1714,8	3430	5144	6859	8574	10289	12004	13718	15433	17148
84	1746,0	3492	5238	6984	8730	10476	12222	13968	15714	17460
85	1777,2	3554	5332	7109	8886	10663	12440	14218	15995	17772
86	1808,4	3617	5425	7234	9042	10850	12659	14467	16276	18084
87	1840,2	3680	5521	7361	9201	11041	12881	14722	16562	18402
88	1872,0	3744	5616	7488	9360	11232	13104	14976	16848	18720
89	1903,8	3808	5711	7615	9519	11423	13327	15230	17134	19038
90	1935,2	3872	5809	7745	9681	11617	13553	15490	17426	19362
91	1968,6	3937	5906	7874	9843	11812	13780	15749	17717	19686
92	2001,0	4002	6003	8004	10005	12006	14007	16008	18009	20010
93	2034,0	4068	6102	8136	10170	12204	14238	16272	18306	20340
94	2067,0	4134	6201	8268	10335	12402	14469	16536	18603	20670
95	2100,0	4200	6300	8400	10500	12600	14700	16800	18900	21000
96	2133,0	4266	6399	8532	10665	12798	14931	17064	19197	21330
97	2166,6	4333	6500	8666	10833	13000	15163	17333	19499	21636
98	2200,2	4400	6601	8801	11001	13201	15401	17602	19802	22002
99	2233,8	4468	6701	8935	11169	13403	15637	17870	20104	22338
100	2268,0	4536	6804	9072	11340	13609	15876	18144	20412	22680
101	2302,2	4604	6907	9209	11511	13813	16155	18418	20720	23022
102	2336,4	4673	7009	9346	11682	14018	16355	18691	21028	23364
103	2370,6	4741	7112	9482	11853	14224	16594	18965	21335	23706
104	2405,4	4811	7216	9 22	12027	14432	16838	19243	21649	24054
105	2440,2	4880	7321	9761	12201	14641	17081	19522	21962	24402

Таблица 23 (продолжение) $b = 640$ мм

Мин. / H нап. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
106	2475,0	4950	7425	9900	12375	14850	17325	19800	22275	24
107	2510,4	5021	7531	10042	12552	15062	17573	20083	22594	25
108	2545,8	5092	7637	10183	12729	15275	17821	20366	22912	25
109	2581,2	5162	7744	10325	12906	15487	18068	20650	23231	25
110	2616,6	5233	7850	10466	13083	15700	18316	20933	23549	26
111	2652,0	5304	7956	10608	13260	15912	18564	21216	23868	26
112	2688,0	5376	8064	10752	13440	16128	18816	21504	24192	26
113	2724,0	5448	8172	10896	13620	16344	19068	21792	24516	27
114	2760,0	5520	8280	11040	13800	16570	19320	22080	24840	27
115	2796,6	5593	8390	11186	13983	16780	19576	22373	25169	27
116	2833,2	5666	8500	11333	14166	16999	19832	22666	25499	28
117	2869,8	5740	8609	11479	14349	17219	20089	22958	25828	28
118	2907,0	5814	8721	11628	14535	17442	20349	23256	26163	29
119	2944,2	5888	8833	11777	14721	17665	20609	23554	26498	29
120	2981,4	5963	8944	11926	14907	17888	20870	23851	26833	29
121	3018,6	6037	9056	12074	15093	18112	21130	24149	27167	30
122	3055,8	6112	9167	12223	15279	18335	21391	24446	27502	30
123	3093,6	6187	9281	12374	15468	18562	21655	24749	27842	30
124	3131,4	6263	9394	12526	15657	18788	21920	25051	28183	31
125	3169,2	6338	9508	12677	15846	19015	22184	25354	28523	31
126	3207,6	6415	9623	12830	16038	19246	22453	25661	28868	32
127	3246,0	6492	9738	12984	16230	19476	22722	25968	29214	32
128	3284,4	6569	9853	13138	16422	19706	22991	26275	29560	32
129	3322,8	6646	9968	13291	16614	19937	23260	26582	29905	33
130	3361,8	6724	10085	13447	16809	20171	23533	26894	30256	33
131	3400,8	6802	10202	13603	17004	20405	23806	27206	30607	34
132	3439,8	6880	10319	13759	17199	20639	24079	27518	30958	34
133	3478,8	6958	10436	13915	17394	20873	24352	27830	31309	34
134	3517,8	7036	10553	14071	17589	21107	24625	28142	31660	35
135	3557,4	7115	10672	14230	17787	21344	24902	28459	32017	35
136	3597,0	7194	10791	14388	17985	21582	25179	28776	32373	35
137	3636,6	7273	10910	14546	18183	21820	25456	29093	32729	36
138	3676,8	7354	11030	14707	18384	22061	25738	29414	33091	36
139	3717,0	7434	11151	14868	18595	22302	26019	29736	33453	37
140	3757,2	7514	11272	15029	18786	22543	26300	30058	33815	37

Таблица 23 (продолжение) $b = 640$ мм

Мин. / H нап. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
141	3797,4	7595	11392	15190	18987	22784	26582	30379	34177	37974
142	3837,6	7675	11513	15350	19188	23026	26863	30701	34538	38376
143	3878,4	7757	11635	15514	19392	23270	27149	31027	34906	38784
144	3919,2	7838	11758	15677	19596	23515	27434	31354	35273	39192
145	3960,0	7920	11880	15840	19800	23760	27720	31680	35640	39600
146	4000,8	8002	12002	16003	20004	24005	28006	32006	36007	40008
147	4042,2	8084	12127	16169	20211	24253	28295	32338	36380	40422
148	4083,6	8167	12251	16334	20418	24502	28585	32669	36752	40836
149	4125,0	8250	12375	16500	20625	24750	28875	33000	37125	41250
150	4166,4	8333	12499	16666	20832	24998	29165	33331	37498	41664
151	4208,4	8417	12625	16834	21042	25250	29459	33667	37876	42084
152	4250,4	8501	12751	17002	21252	25502	29753	34003	38254	42504
153	4292,4	8585	12877	17170	21462	25754	30047	34339	38632	42924
154	4334,4	8669	13003	17338	21672	26006	30341	34675	39010	43344
155	4376,4	8753	13129	17506	21882	26258	30635	35011	39388	43764
156	4419,0	8838	13257	17676	22095	26514	30933	35352	39771	44190
157	4461,6	8923	13385	17846	22308	26770	31231	35693	40154	44616
158	4504,2	9008	13513	18017	22521	27025	31529	36034	40538	45042
159	4546,8	9094	13640	18187	22734	27281	31828	36374	40921	45468
160	4590,0	9180	13770	18360	22950	27540	32130	36720	41310	45900
161	4633,2	9266	13900	18533	23166	27799	32432	37066	41699	46332
162	4676,4	9353	14029	18706	23382	28058	32735	37411	42088	46764
163	4719,6	9439	14159	18878	23598	28318	33037	37757	42476	47196
164	4763,4	9527	14290	19054	23817	28580	33344	38107	42871	47634
165	4807,2	9614	14422	19229	24036	28843	33650	38458	43265	48072
166	4851,0	9702	14553	19404	24255	29106	33957	38808	43659	48510
167	4894,8	9790	14684	19579	24474	29369	34264	39158	44053	48948
168	4938,6	9877	14816	19754	24693	29632	34570	39509	44447	49386
169	4983,0	9966	14949	19932	24615	29898	34881	39864	44847	49830
170	5027,4	10055	15082	20110	25137	30164	35192	40219	45247	50274
171	5071,8	10144	15215	20287	25359	30431	35503	40574	45646	50718
172	5116,2	10232	15349	20465	25581	30697	35813	40930	46046	51162
173	5160,6	10321	15482	20642	25803	30964	36124	41285	46445	51606
174	5205,6	10411	15617	20822	26028	31234	36439	41645	46850	52056
175	5250,6	10501	15752	21002	26253	31504	36754	42005	47255	52506
176	5295,6	10591	15887	21182	26478	31774	37069	42365	47660	52956
177	5340,6	10681	16022	21362	26703	32044	37384	42725	48065	53406
178	5386,2	10772	16159	21545	26931	32317	37703	43090	48476	53862
179	5431,8	10864	16295	21727	27159	32591	38023	43454	48886	54318
180	5477,4	10955	16432	21910	27387	32864	38342	43819	49297	54774

Таблица 23 (продолжение) $b = 640$ мм

H нап. воды в мм \ Мин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
181	5523,0	11046	16559	22092	27615	33138	38661	44184	49707	55230
182	5568,6	11137	16706	22274	27843	33412	38980	44549	50117	55686
183	5614,8	11230	16844	22459	28074	33689	39304	44918	50533	56148
184	5661,0	11312	16983	22644	28305	33966	39627	45288	50849	56610
185	5707,2	11414	17122	22829	28536	34243	39950	45658	51365	57072
186	5753,4	11507	17260	23014	28767	34520	40274	46027	51781	57534
187	5799,6	11599	17399	23198	28998	34798	40597	46397	52196	57996
188	5846,4	11693	17539	23386	29232	35078	40925	46771	52618	54464
189	5893,2	11786	17680	23573	29467	35359	41252	47146	53039	58932
190	5940,0	11880	17820	23760	29700	35640	41580	47520	53460	59400
191	5986,8	11974	17960	23947	29934	35921	41908	47894	53881	59868
192	6033,6	12067	18101	24134	30168	36202	42235	48269	54302	60336
193	6081,0	12162	18243	24324	30405	36416	42567	48648	54729	60810
194	6128,4	12257	18385	24514	30642	36770	42899	49027	55156	61264
195	6175,8	12352	18527	24703	30879	37055	43231	49406	55582	61738
196	6223,2	12446	18670	24893	31116	37339	43562	49786	56009	62232
197	6271,2	12542	18814	25085	31356	37627	43898	50170	55441	62712
198	6319,2	12638	18958	25277	31596	37915	44234	50554	56873	63192
199	6367,2	12734	19102	25469	31836	38203	44570	50938	57305	63672
200	6415,2	12830	19246	25661	32076	38491	44906	51322	57737	64152
201	6463,2	12926	19390	25853	32316	38779	45242	51706	58169	64632
202	6511,2	13022	19534	26045	32556	39067	45578	52090	58601	65112
203	6559,8	13120	19679	26239	32799	39359	45919	52478	59038	65598
204	6608,4	13217	19825	26434	33042	39650	46259	52967	59476	66084
205	6657,0	13314	19971	26628	33285	39942	46599	53256	59913	66570
206	6705,6	13411	20117	26822	33528	40234	46939	53645	60350	67056
207	6754,2	13508	20263	27017	33771	40525	47280	54034	50788	67542
208	6803,4	13607	20110	27214	34017	40820	47624	54427	61231	68034
209	6852,6	13705	20558	27410	34263	41116	47968	54821	61673	68526
210	6901,8	13804	20705	27607	34509	41411	48313	55214	62116	69018
211	6951,0	13902	20853	27804	34755	41706	48657	55608	62559	69510
212	7000,8	14002	21002	28003	35004	42005	49006	56007	63007	70008
213	7050,6	14101	21152	28202	35253	42304	49354	56405	63455	70506
214	7100,4	14201	21301	28402	35502	42602	49703	56803	63904	71004
215	7150,2	14300	21451	28601	35751	42901	50051	57202	64352	71502
216	7200,0	14400	21600	28800	36000	43200	50400	57600	64800	72000
217	7249,8	14500	21749	28999	36249	43499	50749	57999	65248	72498
218	7300,2	14600	21901	29201	36501	43801	51101	58402	65702	73002
219	7350,6	14701	22052	29402	36753	44104	51454	58805	66155	73506
220	7401,0	14802	22203	29604	37005	44406	51807	59208	66609	74010

Таблица 23 (продолжение)

Ширина порога $b = 1\,280$ мм

H нап. воды в мм \ Мин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4,8	9,6	14,4	19,2	24,0	28,8	33,6	38,4	43,2	48
2	13,2	26,4	39,6	52,8	66,0	79,2	92,4	105	119	132
3	24,0	48,0	72,0	96,0	120	144	168	192	216	240
4	36,0	72,0	108	144	180	216	252	288	324	360
5	50,4	101	151	202	252	302	353	403	354	504
6	67,2	134	202	269	336	403	470	538	605	672
7	84,0	168	252	336	420	504	588	672	756	840
8	103,2	206	310	413	516	619	722	826	929	1032
9	122,4	245	367	490	912	734	857	979	1102	1224
10	144,0	288	432	576	720	864	1008	1152	1296	1440
11	165,6	331	497	662	828	994	1159	1325	1490	1656
12	188,4	377	565	754	942	1130	1319	1507	1696	1884
13	212,4	425	637	850	1062	1274	1487	1700	1912	2124
14	237,6	475	713	950	1188	1426	1663	1900	2138	2376
15	264,0	528	792	1056	1320	1584	1848	2112	2376	2640
16	290,4	581	871	1162	1452	1742	2033	2323	2614	2904
17	316,8	634	950	1267	1584	1901	2218	2534	2851	3168
18	344,4	689	1033	1378	1722	2066	2411	2755	3100	3444
19	375,6	751	1127	1502	1878	2254	2629	3005	3380	3756
20	405,6	811	1217	1622	2028	2434	2839	3245	3650	4056
21	436,8	874	1310	1747	2184	2621	3058	3494	3931	4368
22	468,0	936	1404	1872	2340	2808	3276	3744	4212	4680
23	500,4	1001	1501	2002	2502	3002	3503	4003	4504	5004
24	532,8	1066	1598	2131	2664	3197	3730	4262	4795	5328
25	567,0	1134	1701	2268	2835	3402	3969	4536	5103	5670
26	601,2	1202	1804	2405	3006	3307	4208	4810	5411	6012
27	636,0	1272	1908	2544	3180	3816	4452	5088	5724	6360
28	672,0	1344	2016	2688	3330	4032	4704	5376	6048	6720
29	708,0	1416	2124	2832	3540	4248	4956	5664	6372	7030
30	745,2	1490	2235	2981	3726	4471	5216	4962	6707	7452
31	782,4	1565	2347	3130	3912	4694	5477	6259	7042	7824
32	820,8	1642	2462	3283	4104	4925	5745	6565	7387	8208
33	859,2	1718	2578	3437	4296	5155	6014	6874	7733	8592
34	898,8	1798	2696	3595	4494	5393	6292	7190	8089	8988
35	939,6	1879	2819	3758	4698	5638	6577	7517	8453	9395

Таблица 23 (продолжение) $s = 1\,280$ мм

Мин. / H нап. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	980,4	1961	2941	3922	4902	5882	6862	7844	8824	9804
37	1021,2	2042	3064	4085	5106	6127	7148	8170	9191	10212
38	1062,0	2124	3186	4248	5310	6372	7434	7496	9558	10620
39	1105,2	2210	3316	4421	5526	6631	7736	8842	9947	11052
40	1147,2	2294	3442	4589	5736	6883	8030	9178	10325	11472
41	1190,4	2381	3571	4762	5952	7142	8333	9524	10714	11904
42	1234,8	2470	3704	4965	6174	7409	8644	9878	11113	12348
43	1279,2	2558	3838	5117	6396	7675	8954	10234	11513	12792
44	1323,6	2647	3971	5294	6618	7942	9265	10589	11912	13236
45	1369,2	2738	4108	5477	7846	8216	9584	10954	12323	13692
46	1414,8	2830	4244	5659	7074	8489	9904	11318	12733	14148
47	1461,6	2923	4385	5846	7308	8770	10231	11693	13154	14616
48	1508,4	3017	4525	6034	7542	9050	10559	12067	13576	15084
49	1555,2	3110	4666	6221	7776	9331	10886	12442	13997	15552
50	1603,2	3206	4810	6413	8016	9619	11222	12826	14429	16032
51	1652,4	3305	4958	6610	8262	9914	11567	13219	14872	16524
52	1700,4	3401	5101	6802	8502	10202	11903	13603	15304	17004
53	1749,6	3499	5249	6998	8748	10498	12247	13997	15746	17496
54	1800,0	3600	5400	7200	9000	10800	12600	14400	16200	18000
55	1850,4	3701	5531	7402	9252	11102	12953	14803	16654	18504
56	1900,8	3802	5702	7603	9504	11405	13306	15206	17107	19008
57	1952,4	3905	5857	7810	9762	11714	13667	15619	17572	19524
58	2004,0	4008	6012	8016	10020	12024	14028	16032	18036	20040
59	2055,6	4111	6167	8222	10278	12334	14389	16445	18500	20556
60	2107,2	4214	6322	8429	10536	12643	14750	16858	18965	21072
61	2160,0	4320	6480	8640	10800	12960	15120	17280	19440	21600
62	2214,0	4428	6642	8856	11070	13284	15498	17712	19926	22140
63	2268,0	4536	6804	9072	11340	13608	15876	18144	20412	22680
64	2322,0	4644	6966	9288	11610	13932	16254	18576	20898	23220
65	2376,0	4752	7128	9504	11880	14256	16632	19008	21384	23760
66	2431,2	4872	7294	9725	12156	14587	17018	19450	21881	24312
67	2487,6	4975	7463	9950	12438	14926	17413	19901	22388	24876
68	2544,0	5088	7632	10176	12720	15264	17808	20352	22896	25440
69	2600,4	5201	7801	10402	13002	15602	18203	20803	23404	26004
70	2656,8	5314	7970	10627	13284	15941	18578	21254	23911	26568
71	2713,2	5426	8140	10853	13566	16279	18992	21706	24419	27132
72	2770,8	5542	8312	11083	13854	16625	19396	22166	24937	27708
73	2828,4	5657	8485	11314	14124	16970	19799	22627	25456	28284
74	2887,2	5774	8662	11549	14436	17323	20210	23098	25985	28872
75	2946,0	5892	8838	11784	14730	17676	20622	23568	26514	29460

Таблица 23 (продолжение) $s = 1\,280$ мм

Мин. / H нап. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
76	3004,8	6010	9014	12019	15024	18029	21033	24038	27043	30048
77	3064,8	6130	9194	12259	15324	18389	21454	24518	27583	30648
78	3124,8	6250	9374	12499	15624	18749	21874	24998	28123	31248
79	3184,8	6370	9554	12739	15924	19109	22294	25118	28663	31848
80	3246,0	6492	9738	12984	16230	19476	22722	25968	29214	32460
81	3307,2	6614	9922	13229	16536	19843	23150	26458	29765	33072
82	3368,4	6737	10105	13474	16842	20210	23579	26947	30316	33685
83	3429,6	6859	10289	13718	17148	20578	24007	27437	30866	34296
84	3492,0	6984	10476	13968	17460	20952	24444	27936	31428	34920
85	3554,4	7109	10663	14218	17772	21326	24881	28435	31990	35544
86	3616,8	7234	10850	14468	18084	21701	25318	28934	32551	36168
87	3680,4	7361	11041	14722	18402	22082	25763	29443	33124	36804
88	3744,0	7488	11232	14976	18720	22464	26208	29952	33696	37440
89	3807,6	7615	11423	15230	19038	22846	26653	30461	34268	38076
90	3872,4	7745	11617	15490	19362	23234	27107	30979	34852	38724
91	3937,2	7874	11812	15749	19686	23623	27560	31498	35435	39372
92	4002,0	8004	12006	16008	20010	24012	28014	32016	36018	40020
93	4068,0	8136	12204	16272	20340	24408	28476	32544	36612	40680
94	4134,0	8268	12402	16536	20670	24804	28938	33072	37206	41340
95	4200,0	8400	12600	16800	21000	25200	29400	33600	37800	42000
96	4266,0	8532	12798	17064	21330	25596	29862	34128	38394	42660
97	4333,2	8666	13000	17333	21666	26000	30332	34666	38999	43332
98	4400,4	8801	13201	17602	22002	26402	30803	35203	39604	44004
99	4467,6	8935	13403	17870	22338	26806	31273	35741	40208	44676
100	4536,0	9072	13609	18144	22680	27218	31752	36288	40824	45360
101	4604,4	9209	13813	18418	23022	27626	32231	36835	41440	46044
102	4672,8	9346	14018	18691	23364	28037	32710	37382	42056	46728
103	4741,2	9482	14224	18965	23706	28447	33188	37930	42671	47412
104	4810,7	9622	14432	19243	24054	28865	33676	38486	43297	48108
105	4880,4	9761	14641	19522	24402	29282	34163	39043	43924	48804
106	4950,0	9900	14850	19800	24750	29700	34650	39600	44550	49500
107	5020,8	10042	15062	20083	25104	30125	35146	40166	45187	50208
108	5091,6	10183	15275	20366	25458	30550	35641	40733	45824	50916
109	5162,4	10325	15487	20650	25812	30974	36137	41299	46462	51624
110	5233,2	10466	15700	20933	26166	31400	36632	41866	47099	52332
111	5304,0	10608	15912	21216	26520	31824	37128	42432	47736	53040
112	5376,0	10752	16128	21504	26880	32256	37632	43008	48384	53760
113	5448,0	10896	16344	21792	27240	32688	38136	43584	49032	54480
114	5520,0	11040	16560	22080	27600	33120	38640	44160	49680	55200
115	5593,2	11186	16780	22373	27966	33559	39152	44746	50339	55932

Таблица 23 (продолжение) $b = 1\,280$ *мм*

Мин. / H нач. воды в *мм*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
116	5666,4	11333	16999	22666	28332	33998	39665	45331	50998	56
117	5739,6	11479	17219	22958	28698	34438	40177	45917	51656	57
118	5814,0	11628	17442	23256	29070	34884	40698	46512	52326	58
119	5888,4	11777	17666	23554	29442	35330	41219	47107	52996	58
120	5962,8	11926	17888	23851	29814	35777	41740	47702	53665	59
121	6037,2	12074	18112	24149	30186	36223	42260	48298	54335	60
122	6111,6	12223	18335	24446	30558	36670	42781	48893	55004	61
123	6187,2	12374	18562	24749	30935	37123	43310	49498	55685	61
124	6262,8	12526	18788	25051	31314	37577	43840	50102	56365	62
125	6338,4	12677	19015	25354	31692	38030	44369	50707	57046	63
126	6415,2	12830	19446	25661	32076	38491	44906	51322	57737	64
127	6492,0	12983	19476	25968	32460	38952	45444	51936	58428	64
128	6568,8	13138	19708	26275	32844	39413	45982	52550	59119	65
129	6645,6	13261	19937	26582	33228	39874	46519	53165	59810	66
130	6723,6	13447	20171	26894	33618	40342	47065	53689	60512	67
131	6801,6	13603	20405	27206	34008	40810	47611	54412	61214	68
132	6879,6	13759	20639	28518	34398	41278	48157	55037	61916	68
133	6957,6	13915	20873	27830	34788	41716	48703	55661	62618	69
134	7035,6	14081	21107	28142	35178	42214	49249	56285	63320	70
135	7114,8	14230	21344	28459	35574	42688	49801	56918	64034	71
136	7194,0	14388	21582	28776	35970	43164	50358	57552	64746	71
137	7273,2	14546	21820	29093	36366	43639	50912	58186	65459	72
138	7353,6	14707	22061	29414	36768	44122	51475	58829	66182	73
139	7434,0	14868	22302	29736	37170	44604	52038	59472	66906	74
140	7514,4	15029	22543	30058	37572	45086	52601	60115	67630	75
141	7594,8	15190	22784	30379	37970	45569	53164	60758	68353	76
142	7675,2	15350	23026	30701	38376	46051	53726	61402	69077	76
143	7756,8	15514	23270	31027	38784	46541	54298	62054	69811	77
144	7838,4	15677	23515	31354	39192	47030	54869	62707	70546	78
145	7920,8	15840	23760	31680	39600	47520	55440	64360	71280	79
146	8001,6	16003	24005	32006	40008	48010	56011	64013	72014	80
147	8084,4	16169	24253	32338	40422	48506	56591	64675	72760	80
148	8167,2	16334	24502	32669	40836	49003	57170	65338	73505	81
149	8250,0	16500	24750	33000	41250	49500	47750	66000	74250	82
150	8332,8	16666	24998	33331	41664	49997	58330	66662	74995	83
151	8416,8	16834	25250	33667	42084	50501	58918	67334	75751	84
152	8500,8	17002	25502	34003	42504	51005	59503	68006	76507	85
153	8584,8	17170	25754	34339	42924	51509	60094	68688	77263	85
154	8668,8	17338	26006	34675	43344	52013	60682	69350	78019	86
155	8752,8	17506	26258	35011	43764	52517	61270	70022	78775	87

Таблица 23 (продолжение) $b = 1\,280$ *мм*

Мин. / H нач. воды в *мм*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
156	8838,0	17676	26514	35352	44190	53028	61866	70704	79542	88380
157	8923,2	17846	26770	35693	44616	53539	62462	71386	80309	89232
158	9008,4	18017	27025	36034	45042	54050	63059	72067	81075	90084
159	9093,6	18187	27281	36374	45468	54562	63656	72748	81842	90936
160	9180,0	18360	27540	36720	45900	55080	64260	73440	82620	91800
161	9266,4	18533	27799	37066	46332	55598	64865	74131	83398	92664
162	9352,8	18706	28058	37411	46764	56117	65470	74822	84175	93528
163	9439,2	18878	28318	37757	47196	56635	66074	75514	84953	94392
164	9526,8	19054	28580	38107	47634	57161	66688	76214	85741	95268
165	9614,4	19229	28843	38458	48072	57686	67301	76915	86530	96144
166	9702,0	19404	29106	38808	48510	58212	68914	77616	87318	97020
167	9789,6	19579	29369	39158	48948	58738	68527	78317	88106	97896
168	9897,2	19754	29632	39509	49386	59263	69140	79018	88895	98772
169	9966,0	19932	29898	39864	49830	59796	69762	79728	89694	99660
170	10054,8	20110	30164	40219	50274	60329	70384	80438	90493	100548
171	10143,6	20287	30431	40574	50718	60862	71005	81149	91292	101436
172	10232,4	20465	30697	40930	51162	61394	71627	81859	92092	102324
173	10321,2	20642	30964	41285	51606	61927	72248	82570	92891	103212
174	10411,2	20822	31234	41645	52056	62467	72878	83290	93701	104112
175	10501,2	21002	31504	42005	52506	63008	73508	84010	94511	105012
176	10591,2	21182	31774	42365	52956	63547	74138	84730	95321	105912
177	10681,2	21362	32044	42725	53406	64087	74768	85450	96131	106812
178	10772,4	21545	32317	43090	53862	64634	75407	86179	96952	107724
179	10868,6	21727	32591	43454	54318	65182	76045	86909	97772	108636
180	10954,8	21910	32864	43819	54774	65729	76684	87638	98593	109548
181	11046,0	22092	33139	44184	55230	66276	77322	88368	99414	110460
182	11137,2	22274	33412	44549	55686	66823	77960	89098	100235	111372
183	11229,6	22459	33689	44918	56148	67478	78607	89837	101066	112296
184	11322,0	22644	33963	45288	56610	67932	79254	90576	101898	113220
185	11414,4	22829	34243	45658	57072	68486	79901	91315	102730	114144
186	11506,8	23014	34520	46027	57534	69041	80548	92054	103561	115068
187	11599,2	23198	34798	46397	57996	69595	81194	92794	104393	115992
188	11692,8	23386	35078	46771	58464	70157	81850	93542	105235	116928
189	11786,4	23573	35359	47146	58932	70718	82505	94291	106078	117864
190	11880,0	23760	35640	47520	59400	71280	83160	95040	106920	118800
191	11973,6	23947	35921	47894	59868	71842	83815	95789	107762	119736
192	12067,2	24134	36202	48269	60336	72403	84470	96538	108605	120672
193	12162,0	24324	36486	48647	60810	72972	85134	97296	109458	121620
194	12256,8	24514	36770	49027	61284	73541	85798	98054	110311	122568
195	12351,6	24703	37055	49406	61758	74110	86461	98813	111164	123516

Таблица 23 (продолжение) $в = 1\,280$ *мм*

Мин. / H нап. воды в *мм*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
196	12446,4	24893	37339	49786	62232	74678	87125	99571	112018	12446
197	12542,4	25085	37627	50170	62712	75254	87797	100339	112882	12542
198	12638,4	25277	37915	50554	63192	75830	88469	101107	113746	12638
199	12734,4	25469	38203	50938	63672	76406	89141	101875	114610	12734
200	12830,4	25661	38491	51322	64152	76982	89813	102643	115474	12830
201	12926,4	25853	38779	51706	64632	77558	90485	103411	116338	12926
202	13022,4	26045	39067	52090	65112	78134	91157	104179	117202	13022
203	13119,6	26239	39359	52478	65598	78718	91837	104957	118076	13119
204	13216,8	26434	39650	52867	66084	79301	92518	105734	118951	13216
205	13314,0	26628	39942	53256	66570	79884	93198	106512	119826	13314
206	13411,2	26822	40234	53645	67056	80467	93878	107290	120701	13411
207	13508,4	27017	40525	54034	67542	81050	94559	108067	121576	13508
208	13606,8	27214	40820	54427	68034	81641	95248	108854	122461	13606
209	13705,2	27410	41116	54821	68526	82231	95936	109642	123347	13705
210	13803,6	27607	41411	55214	69018	82822	96625	110429	124232	13803
211	13902,0	27804	41706	55608	69510	83412	97314	111216	125118	13902
212	14001,6	28003	42005	56007	70008	84010	98011	112013	126014	14001
213	14101,2	28202	42304	56405	70506	84607	98708	112810	126911	14101
214	14200,8	28402	42602	56803	71004	85205	99406	113606	127807	14200
215	14300,4	28601	42901	57202	71502	88802	100103	114403	128704	14300
216	14400,0	28800	43200	57600	72000	86400	100800	115200	129600	14400
217	14499,6	28999	43499	57999	72468	86998	101497	115997	130496	14499
218	14600,4	29201	43801	58402	73002	87602	102203	116803	131404	14600
219	14701,2	29402	44104	58805	73406	88207	102908	117610	132311	14701
220	14802,0	29604	44406	59208	74010	88812	103614	118416	133218	14802
221	14903	29806	44709	59512	74515	89418	104321	119224	134127	14903
222	15003	30006	45009	60012	75015	90018	105021	120024	135027	15003
223	15105	30210	45315	60420	75525	90630	105735	120840	135945	15105
224	15207	30414	45621	60828	76035	91242	106449	121656	136863	15207
225	15309	30618	45927	61236	76545	91854	107163	122472	137781	15309
226	15412	30824	46236	61648	77060	92472	107884	123296	138708	15412
227	15514	31028	46542	62056	77570	93084	108598	124112	139626	15514
228	15616	31232	46848	62464	78080	93696	109312	124928	140544	15616
229	15719	31438	47157	62876	78595	94314	110033	125752	141471	15719
230	15822	31644	47466	63288	79110	94932	110754	126576	142398	15822
231	15925	31850	47775	63700	79625	95550	111475	127400	143325	15925
232	16029	32058	48087	64116	80145	96174	112203	128232	144261	16029
233	16133	32266	48399	64532	80665	96798	112931	129064	145197	16133
234	16237	32474	48711	64948	81185	97422	113659	129896	146133	16237
235	16341	32682	49023	65364	81705	98046	114387	130728	147069	16341

Таблица 23 (продолжение) $в = 1\,280$ *мм*

Мин. / H нап. воды в *мм*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
236	16445	32890	49335	65780	82225	98670	115115	131560	148005	164450
237	16550	33100	49650	66200	82750	99300	115850	132400	148950	165500
238	16655	33310	49965	66620	83275	99930	116585	133240	149895	166550
239	16760	33520	50230	67040	83800	100560	117320	134080	150840	167600
240	16865	33730	50595	67460	84325	101190	118055	134920	151785	168650
241	16971	33942	50915	67884	84855	101826	118797	135768	152739	169710
242	17077	34154	51231	68308	85385	102462	119539	136616	153693	170770
243	17184	34368	51552	68736	85920	103104	120288	137472	154656	171840
244	17289	34578	51867	69156	86445	103734	121023	138312	155601	172890
245	17395	34790	52185	69580	86975	104370	121765	139160	156555	173950
246	17502	35004	52506	70008	87510	105012	122514	140016	157518	175020
247	17603	35216	52824	70432	88040	105648	123256	140864	158472	176080
248	17715	35430	53145	70860	88575	106290	124005	141720	159435	177150
249	17822	35644	53466	71288	89110	106932	124754	142576	160398	178220
250	17930	35860	53790	71720	89650	107580	125510	143440	161370	179300
251	18037	36074	54111	72148	90185	108222	126259	144296	162333	180370
252	18145	36290	54435	72580	90725	108870	127015	145160	163305	181450
253	18254	36508	54762	73016	91270	109524	127778	146032	164286	182540
254	18362	36724	55086	73448	91810	110172	128534	146896	165258	183620
255	18471	36942	55413	73884	92355	110826	129297	147768	166239	184710
256	18579	37158	55737	74316	92895	111474	130053	148632	167211	185700
257	18688	37376	56064	74752	93440	112128	130816	149504	168192	186880
258	18797	37594	56391	75188	93985	112782	131579	150376	169173	187970
259	18906	37812	56718	75624	94530	113436	132342	151248	170154	189060
260	19015	38030	57045	76060	95075	114090	133105	152120	171135	190150
261	19126	38252	57378	76504	95630	114756	133882	153008	172134	191260
262	19236	38472	57708	76944	96180	115416	134652	153888	173124	192360
263	19347	38694	58041	77388	96735	116082	135429	154776	174123	193470
264	19457	38914	58371	77828	97285	116742	136199	155656	175113	194570
265	19568	39136	58704	78272	97840	117408	136976	156544	176112	195680
266	19678	39356	59034	78712	98390	118068	137746	157424	177102	196780
267	19789	39578	59367	79156	98945	118734	138523	158312	178101	197890
268	19901	39802	59703	79604	99505	119406	139307	159208	179109	199010
269	20012	40024	60036	80048	100060	120072	140084	160096	180108	200120
270	20123	40246	60369	80492	100615	120738	140861	160984	181107	201230
271	20235	40470	60705	80940	101175	121410	141645	161880	182115	202350
272	20348	40696	61044	81392	101740	122088	142436	162784	183132	203480
273	20460	40920	61380	81840	102300	122760	143220	163680	184140	204600
274	20573	41146	61719	82292	102865	123438	144011	164584	185157	205730
275	20685	41370	62055	82740	103425	124110	144795	165480	186165	206850

Таблица 23 (продолжение) $s = 1\,280$ мм

Мин. / H нап. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
276	20798	41596	62394	83192	103990	124788	145586	166384	187182	207900
277	20912	41824	62736	83648	104560	125472	146384	167296	188208	209180
278	21025	42050	63075	84100	105125	126150	147175	168200	189225	210220
279	21138	42276	63414	84552	105690	126828	147966	169104	190242	211350
280	21252	42504	63756	85008	106260	127512	148764	170016	191268	212582
281	21367	42734	64101	85468	106835	128202	149569	170936	192303	213670
282	21481	42962	64443	85924	107405	128886	150367	171848	193329	214810
283	21595	43190	64785	86380	107975	129570	151165	172760	194355	215950
284	21709	43418	65127	86836	108545	130254	151963	173672	195381	217090
285	21824	43648	65472	87296	109120	130944	152768	174592	196416	218240
286	21938	43876	65814	87752	109390	131628	153536	175504	197442	219380
287	22054	44108	66162	88216	110270	132324	154378	176432	198486	220540
288	22169	44338	66507	88676	110845	133014	155183	177352	199521	221690
289	22285	44570	65855	89140	111425	133710	155995	178280	200565	222850
290	22401	44802	67203	89604	172005	134406	156807	179208	201609	224010
291	22516	45032	67548	90064	112580	135096	157612	180128	202644	225160
292	22633	45266	67899	90532	113165	135798	158431	181064	203397	226330
293	22749	45498	68247	90996	113745	136494	159243	181992	204741	227490
294	22865	45730	68595	91460	114325	137190	160055	189920	205785	228650
295	22982	45964	68946	91928	114910	137892	160874	183855	206838	229820
296	23099	46198	69297	92396	115495	138594	161693	184792	207891	230990
297	23217	46434	69651	92868	116085	139302	162519	185736	208958	232170
298	23335	46670	70005	93340	116675	140010	163345	186680	210015	233350
299	23452	46904	70356	93808	117260	140712	164164	187616	211068	234520
300	23569	47138	70707	94276	117845	141414	164983	188552	212121	235690
301	23687	47374	71061	94748	118435	142122	165809	189496	213183	236870
302	23805	47610	71415	95220	119025	142830	166635	190440	214245	238050
303	23923	47846	71769	95692	119615	143538	167451	191384	215307	239230
304	24042	48084	72126	96168	120210	144252	168294	192333	216378	240420
305	24161	48322	72483	96641	120805	144966	169127	193288	217449	241610
306	24280	48560	72840	97120	121400	145680	169960	194240	218520	242800
307	24399	48798	73197	97596	121995	146394	170793	195192	219591	243990
308	24519	49058	73557	98076	122595	147114	171633	196152	220671	245190
309	24638	49276	73914	98552	123190	147828	172466	197104	221742	246380
310	24758	49516	74274	99032	123790	148548	173305	198064	222822	247580
311	24878	49756	74634	99512	124390	149268	174146	199024	223902	248780
312	24998	49996	74994	99992	124990	149988	174986	199984	224982	249980
313	25118	50236	75354	100472	125590	150708	175826	200944	226062	251180
314	25239	50478	75717	100956	126195	151434	176673	201912	227151	252390
315	25359	50718	76077	101436	126795	152154	177513	202872	228231	253590

Таблица 23 (продолжение) $s = 1\,280$ мм

Мин. / H нап. воды в мм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
316	25480	50960	76440	101920	127400	152880	178360	203840	229320	254800
317	25601	51202	76803	102404	128005	153606	179207	204808	230409	256010
318	25722	51444	77166	102888	128610	154332	180054	205776	231498	257220
319	25844	51688	77532	103376	129220	155064	130908	206752	232596	258440
320	25965	51930	7 895	103860	129825	155790	181755	207720	233685	259650
321	26087	52174	78261	104348	130435	156522	182609	208696	234783	260870
322	26209	52418	78627	104836	131045	157254	183463	209672	235881	262090
323	26331	52662	78993	105324	131655	157986	184317	210648	236979	263310
324	26454	52908	79362	105816	132270	158724	185178	211632	238086	264540
325	26577	53154	79731	106308	132885	159462	186039	212616	239193	265770
326	26699	53398	80097	106796	133495	160194	186893	213592	240291	266990
327	26822	53644	80466	107288	134110	160932	187754	214576	241398	268220
328	26945	43890	80835	107780	134725	161670	188615	215560	242505	269450
329	27068	54136	81204	108272	135340	162408	189476	216544	243612	270680
330	27191	54382	81573	108764	135955	163146	190337	217528	244719	271910
331	27315	54630	81945	109260	136575	163890	191205	218520	245835	273150
332	27440	54880	82320	109760	137200	164640	192080	219520	246960	274400
333	27564	55128	82692	110256	137820	165384	192948	220512	248076	275640
334	27688	55376	83064	110752	138440	166128	193816	221504	249192	276880
335	27812	55624	83436	111248	139060	166872	194684	222496	250308	278120
336	27937	55874	83811	111748	139685	167622	195559	223496	251433	279370
337	28061	56122	84183	111294	140305	168366	196427	224488	252548	280610
338	28186	56372	84558	112744	140930	169116	197302	225488	253674	281860
339	28312	56624	84936	113248	141560	169872	198184	226496	254808	283120
340	28437	56874	85311	113748	142185	170622	199059	227496	255933	284370
341	28582	57124	85686	114248	142810	171372	199934	228496	257058	285620
342	28688	57376	76054	114752	143440	172128	200816	229504	258192	286880
343	28814	57628	86442	115256	144070	172884	201698	230512	259326	288140
344	29067	57882	86823	115764	144705	173646	202587	231528	260469	289410
345	29941	58134	87201	116268	145335	174402	203469	232536	261603	290670
346	29194	58388	87582	116776	145970	175164	204358	233552	262746	291940
347	29321	58642	87963	117284	146605	175926	205247	234568	263889	293210
348	29447	58894	88341	117788	147235	176682	206129	235576	265023	294470
349	29574	59148	88722	118296	147670	177444	207018	236592	266166	295740
350	29701	59402	89103	118804	148505	178206	207907	237608	267309	297010

Таблица 23 (продолжение) $b = 1\,280$ мм

H нап. воды в мм \ Мин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
351	29829	59658	89487	119316	149145	178974	208803	238632	268461	298290
352	29056	69912	89868	119824	149780	179736	209692	239648	269604	299560
353	30084	60168	90252	120336	150420	180504	210588	240672	270756	300840
354	30211	60422	90633	120844	151055	181266	211477	241688	271899	302110
355	30339	60678	91017	121356	151695	182034	212373	242713	273031	303390
356	30467	60934	91401	121868	152335	182802	213269	243736	274203	304670
357	30596	61192	91788	122384	152980	183576	214172	244768	275364	305960
358	30725	61450	92175	122900	153625	194350	215075	245800	276525	307250
359	30854	61708	92562	123416	154270	185124	215978	246832	277686	308540
360	30983	61966	92949	123932	154915	185898	216881	247864	278847	309830
361	31112	62224	93336	124448	155560	186672	217784	248896	280008	311120
362	31242	62484	93726	124968	156210	187452	218694	249936	281178	312420
363	31371	62792	94113	125484	156855	188226	219597	250968	282339	313710
364	31501	63002	94503	126001	157505	189006	220507	252008	283509	315010
365	31631	63262	94893	126524	158155	189786	221417	253048	284679	316310
366	31761	63522	95283	127044	158805	190536	222327	254088	285849	317610
367	31892	63784	95676	127568	159460	191352	223244	255136	287028	318920
368	32022	64044	96066	128088	160110	192132	224154	256176	288198	320220
369	32152	64304	96456	128608	160760	192912	225064	257216	289368	321520
370	32283	64566	96849	129132	161415	193698	225981	258264	290547	322830
371	32414	64828	97242	129656	162070	194484	226898	259312	291726	324140
372	32545	65090	97635	130180	162725	195270	227815	260360	292905	325450
373	32676	65352	98028	130704	163380	196056	228732	261408	294084	326760
374	32807	65614	98421	131228	164035	196842	229649	262456	295263	327080
375	32939	65878	98817	131756	164695	197634	230573	263512	296451	329390
376	33071	66142	99213	132284	165355	198426	231497	264568	297639	330710
377	33203	66406	99609	132812	166015	199218	232421	265624	298827	332030
378	33335	66670	100005	133340	166675	200010	233345	266680	300015	333350
379	33468	66936	100404	133872	167340	200808	234276	267744	301212	334680
380	33600	67200	100800	134400	168000	201600	235200	268800	302400	336000
381	33732	67464	101196	134928	168660	202392	236124	269856	303588	337320
382	33865	67730	101595	135460	169325	203190	237055	270920	304785	338650
383	33999	67998	101997	135996	169995	203994	237993	272992	305991	339990
384	34132	68264	102396	136528	170660	204792	238924	273056	307188	341320
385	34266	68532	102798	137064	171330	205596	239862	274128	308394	342660

Таблица 23 (продолжение) $b = 1\,280$ мм

H нап. воды в мм \ Мин.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
386	34399	68798	103197	137596	171995	206394	240793	275192	309591	343990
387	34533	69066	103599	138132	172665	207198	241731	276264	310797	345330
388	34667	69334	104001	138668	173335	208002	242669	277336	312003	346670
389	34801	69602	104403	139204	174005	208806	243607	278408	313209	348010
390	34935	69870	104805	139740	174675	209610	244545	279480	314415	349350
391	35070	70140	105210	140280	175350	210420	245490	280560	315690	350700
392	35205	70410	105615	140820	176025	211230	246435	281640	316845	352050
393	35340	70680	106020	141360	176700	212040	247380	282720	318060	353400
394	35475	70950	106425	141900	177375	212850	248325	283800	319275	355750
395	35610	71220	106830	142440	178050	213660	2492.0	284880	320490	356100
396	35745	71490	107235	142980	178725	214470	250215	285960	321705	357450
397	35880	71760	107640	143520	179400	215280	251160	287040	322920	358800
398	36016	72032	108048	144064	180080	216096	252112	288128	324144	360160
399	36151	72302	103453	144604	180755	216906	253057	289208	325359	361410
400	36287	72574	108861	145148	181435	217722	254009	290296	326583	326870
401	36423	72846	109269	145692	182115	218538	254961	291384	327807	364230
402	36560	73120	109680	146240	182800	219360	255920	292480	329040	365600
403	36697	73394	110491	146788	183485	220182	256879	293576	330273	366970
404	36833	73666	110499	147332	184165	220998	257831	294664	331497	368330
405	36970	73940	110910	147880	184850	221820	258790	295760	332730	369700
406	37107	74214	111321	148428	185535	222642	259749	296856	333963	371070
407	37244	74488	111732	148976	186220	223464	260708	297952	335196	372440
408	37382	74764	112146	149528	186910	224292	261674	299056	336438	373820
409	37519	75038	112557	150076	187595	225114	262633	300152	337671	375190
410	37657	75314	112971	150628	188285	225942	263599	301256	338913	376570
411	37795	75590	113385	151180	188975	226770	264565	302360	340155	377950
412	37933	75836	113799	151732	189665	227598	265531	303464	341397	379330
413	38071	76142	114213	152284	190355	228426	266497	304568	342639	380710
414	38209	76418	114627	152836	191045	229254	267463	305672	343881	382090
415	38347	76694	115041	153388	191735	230082	268429	306776	345123	383470
416	38486	76972	115458	153944	192430	230916	269402	307888	346374	384860
417	38626	77252	115878	154504	193130	231756	270382	309008	347634	386260
418	38765	77530	116295	155060	193825	232590	271355	310120	348885	387650
419	38904	77808	116712	155616	194520	233424	272328	311232	350136	389040
420	39043	78086	117129	156172	195215	234258	273301	312344	351387	390430

4. Водослив параболический, или Греве (Greve). Для применения параболического водослива принимают очертания его по параболе, определяемой формулой $x^2 = 2py$, где $2p$ — параметр (черт. 49).

Формула расхода в этом случае пишется:

$$Q = M \cdot H^2 \qquad (57)$$

По данным Греве коэфициент расхода M определяется по следующей формуле:

$$M = 2{,}78p^{0{,}488}. \qquad (58)$$

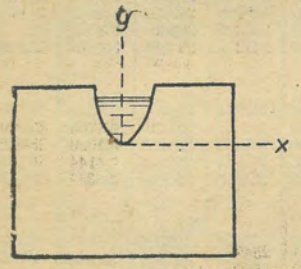
Б. Водослив с широким порогом

По опытам Базена струя отрывается от порога водослива, если $c < 0{,}5H$; при $0{,}5H < c < 0{,}66H$ наблюдается неустойчивое состояние струи и при $c < 0{,}66H$ струя прилипает к порогу; в этом случае имеем водослив с широким порогом и можем рассматривать движение воды по нему как параллельноструйное.

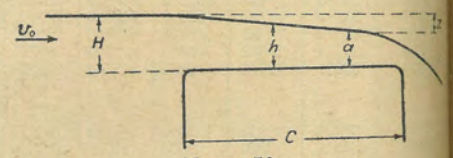
Обозначая через a_0 глубину воды в конце незатопленного водослива (черт. 50) с широким порогом, имеем общее выражение для скорости в следующем виде:

$$V = \varphi\sqrt{2g}\,\sqrt{H_0 - a_0}. \qquad (59)$$

Все обозначения в этом выражении извест-



Черт. 49.



Черт. 50.

ны из общей формулы для водосливов. Для расхода в этом случае получаем общее выражение вида:

$$Q = \varphi \cdot ba_0\sqrt{2g}\;\sqrt{H_0 - a_0}. \qquad (60)$$

Следовательно для определения расхода и скорости необходимо знать величину a_0. Определение величины a_0 в практических расчетах базируется на двух способах:

1. Согласно постулата Беланже глубина a_0 устанавливается соответствующая максимальному расходу, проходящему через водослив. В этом случае a_0 принимает значение:

$$a_0 = \frac{2}{3}H_0, \qquad (61)$$

Общая формула для расхода получает вид:

$$Q = MbH_0^{\frac{3}{2}},$$

причем коэфициент расхода $M = 0{,}385\,\varphi\sqrt{2g}$. (63)

В соответствии с величиной φ получаем следующие коэфициенты расхода M:

для $\varphi = 1{,}00$	$M = 1{,}71$
для $\varphi = 0{,}92$	$M = 1{,}57$
для $\varphi = 0{,}85$	$M = 1{,}45$

(64)

2. По способу проф. Бахметева считается, что глубина в конце порога соответствует минимуму удельной энергии на пороге водослива, т. е. принимается $a_0 = h_{kp}$, где h_{kp} — критическая глубина, определяемая из общей формулы неравномерного движения путем приравнивания знаменателя правой части нулю, откуда получается:

$$h_{kp} = \sqrt[3]{\frac{aq^2}{g}}.$$

Используя данные Бахметева, коэфициент расхода M определяется формулой:

$$M = \varphi k\,\sqrt{1-k}\;\sqrt{2g}, \qquad (65)$$

где $k = \frac{a_0}{H_0}$.

Значение k связано определенными зависимостями с коэфициентом скорости φ и с коэфициентом расхода M.

$$k = \frac{2\varphi^2}{1+2\varphi^2}, \text{ или } k = \sqrt[3]{\frac{M^2}{g}}. \qquad (66)$$

Пользуясь приведенными данными для определения k и M по Бахметеву, можем привести следующую зависимость между коэфициентами k и M.

Порог с закругленным входным ребром и плавным входом	$\varphi = 0{,}92$; $k = 0{,}63$; $M = 1{,}55$.
Порог без закругленного ребра с неплавным входом	$\varphi = 0{,}85$; $k = 0{,}59$; $M = 1{,}42$.

В последних работах Всесоюзного института гидротехники в Ленинграде определение коэфициента расхода водослива с широким порогом критикуются как по принципу Беланже, так и по принципу, положенному в основу расчета проф. Бахметевым. По их данным принцип проф. Бахметева сводится, так же как и у Беланже, к постулату, но только наибольших потерь.

Соответственно с этим Институт гидротехники в Ленинграде производит в настоящее время специальное исследование водослива с широким порогом в целях установления фактического движения воды по широкому порогу и принципов определения коэфициентов расхода.

В. Водослив с толстой стенкой и практических профилей

Водосливы с толстой стенкой и практических профилей могут быть разделены на следующие основные группы: водосливы прямоугольных профилей, трапецоидальных, полигональных и криволинейных профилей.

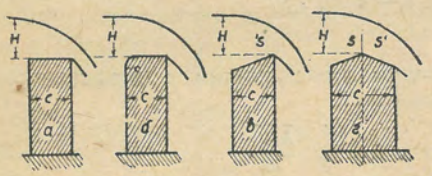
Каждая из этих групп может быть разбита на типы и подтипы, как это будет далее указано.

1. Прямоугольный профиль. По данным Базена для прямоугольного профиля (черт. 51-а) коэфициент полноты напора σ_n выражается следующей эмпирической зависимостью: $\sigma_n = 0{,}70 + 0{,}185 \cdot \frac{H}{c}$.

Для коэфициента расхода M принимаются значения согласно таблицы 24.

Таблица 24

$\frac{H}{c}$	σ_n	$\sigma_n M$	M_3
0	0,70	1,33	1,40
0,33	0,76	1,42	1,49
0,5	0,79	1,46	1,54
1,0	0,88	1,64	1,72
1,5	0,98	1,82	1,91
1,5—2,0	1,00	1,86	1,96



Черт. 51.

Значение M_3 относится к прямоугольному водосливу с закругленным или наклонным входом (черт. 51-б и в).

Вышеприведенная таблица не распространяется для значений $\frac{H}{c} < 0{,}5$, потому что при этих значениях водослив с толстой стенкой переходит в водослив с широким порогом.

Коэфициент формы для чистого прямоугольного водослива $\sigma_f = 1$, поэтому он в приведенной выше таблице не фигурирует.

2. Прямоугольный водослив с закругленным входным ребром. Для прямоугольного водослива с закругленным входным ребром основные значения коэфициента полноты напора σ_n и коэфициента M остаются те же самые, что и для прямоугольного профиля с острым ребром, но коэфициент формы по данным Базена выражается следующей зависимостью:

$$\sigma_f = 1 + \frac{r}{c}, \qquad (67)$$

где r — радиус закругления (черт. 51-б).

В среднем с достаточной осторожностью можно принимать значение $\sigma_f = 1{,}05$.

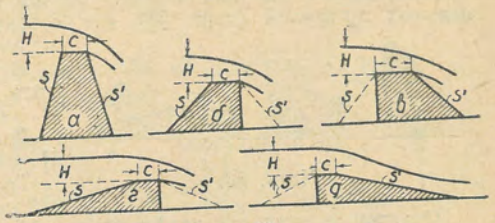
3. Прямоугольный водослив с наклонным верхом. Для прямоугольного водослива с наклонным верхом коэфициент полноты и коэфициент расхода остаются опять теми же, что и для водослива прямоугольного профиля (черт. 51-в).

Коэфициент формы водослива в этом случае принимает следующее значение: при S, большем 10, $\sigma_f = 1$, $S =$ от 10 до 5, $\sigma_f = 1{,}05$. В этом случае S представляет ctg угла наклона грани к горизонту.

Те же самые значения коэфициента формы можно применять и для водослива с двускатным склоном. Для водослива с обратным наклоном, т. е. с $\operatorname{ctg} = S_1$ (черт. 51-г), коэфициент формы сохраняет постоянное значение $\sigma_f = 1$.

4. Водосливы трапецоидальных профилей. Трапецоидальные профили правильнее всего разделить на три основных группы:

1) высокие,
2) средние,
3) низкие, или растянутые.



Черт. 52.

Приведенной классификации основных типов профилей соответствует очертание профилей, приведенное на чертеже 52.

Ниже приводится ряд таблиц для определения коэфициентов расхода.

Таблица 25

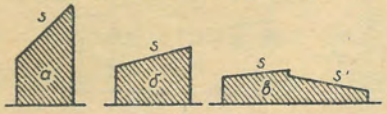
Значения коэфициента расхода M для трапецоидальных профилей по чертежу 52

Группа	Тип профилей	Тип напора		
Высокие	Тип *а* $S=1/2$, $S_1=1/2$	1,91—1,86	1,77—1,69	1,60—1,55
Средние	Тип *б* (с наклонной верховой гранью) 1. При $S=1$ 2°. При $S=2$	1,95 1,91	1,86 1,82	1,77 1,73
	Тип *в* (с наклонной низовой гранью) 1°. При $S=1$ 2°. При $S=2$	1,86 1,77	1,77 1,69	1,69—1,64 1,60—1,55*
Низкие (растянутые)	Тип *г* (с развитой понурной частью) 1°. При $S=3$ 2°. „ $S=4$ 3°. „ $S=5$ 4°. „ $S=10$	1,86 1,82 1,77 1,69	1,86 1,82 1,69 1,60	1,69 1,64 1,60 *
	Тип *д* (с развитой водосливной частью) 1°. При $S_1=3$ 2°. „ $S_1=5$ 3°. „ $S_1=10$	1,73 1, 6 1,55	1,64 1,55 *	1,55 * *

Примечание. Звездочка * обозначает переход к водосливу с широким порогом.

5. Водосливы полигональных профилей. Полигональные профили водосливов могут иметь достаточно сложные очертания, не поддающиеся какой-либо строгой классификации и систематизации их коэфициентов.

Поэтому можно для практических расчетов привести лишь типы полигональных профилей (черт. 53), где соотношение размеров выдержано в определенном масштабе.



Черт. 53.

Первый тип (*а*) — высокий профиль с резко скошенным верхом, M = от 2,00 до 2,04.

Второй тип (*б*) — средний профиль, $M = 1{,}90$.

Третий тип (*в*) — растянутый, низкий профиль, M = от 1,73 до 1,78 (68).

Отдельные значения коэфициентов M можно заимствовать из таблицы 26.

6. Водосливы криволинейных профилей. Криволинейные профили водосливов можно разделить на следующие основные типы (черт. 54):

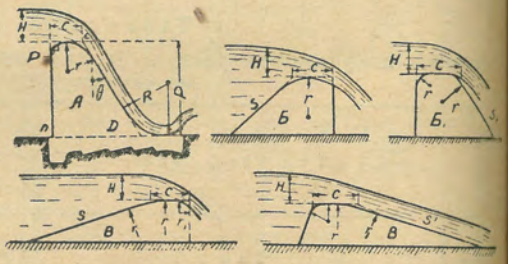
А) высокие водосливы;

Б) средние водосливы и

В) низкие, или растянутые водосливы.

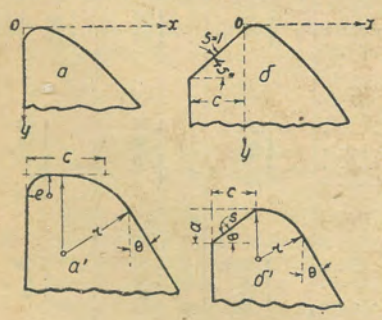
При этом последние два типа можно разделить на подтипы, с наклонной верховой (черт. 54-Б и В) и наклонной низовой гранью (черт. 54-$Б_1$ и $В_1$).

Первый тип водосливов высоких в основном можно подразделить на три основных подтипа согласно изложен. ниже.



Черт. 54.

А. Высокие профили. Очертания высоких водосливов проектируются обычно с тем расчетом, чтобы ниспадающая с водослива струя во всем своем протяжении прижималась к низовой грани для создания так называемого безвакуумного профиля водослива.



Черт. 55.

Лишь в последнее время стали применяться специальные профили водосливов с вакуумом на верхней части водослива, что дает увеличение коэфициентов расхода и возможность их доведения до значения порядка $M = 2{,}6$.

В основном (в массовом порядке) применяется тип водосливов — безвакуумный.

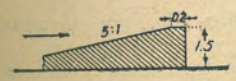
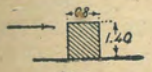
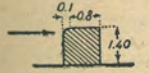
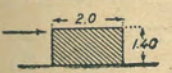
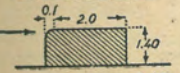
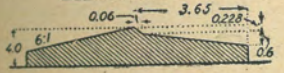
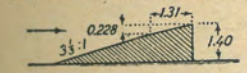
Основные очертания оголовков водосливов можно различать следующих типов:

1. Оголовки Кригера (черт. 55-а и б)
   а) с вертикально смоченной гранью и
   б) со скошенной под углом в 45° верхней частью смоченной грани.

2. Оголовки, получаемые округлением трапецоидального профиля (черт. 55-а′ и б′):
   а) с вертикальной верхней гранью;
   б) со скошенной под разным углом верхней частью напорной грани.

Таблица 26

Значения коэфициента расхода M по опытам Рафтера и Вильямса

№	СЕЧЕНИЕ (размеры в метрах)	Глубина H над ребром (в метрах) 0,457	0,610	0,762	0,914	1,07	1,220	1,372	1,524
1		1,936	1,851	1,838	1,825	1,816	1,781	1,741	1,732
2		1,936	1,851	1,838	1,825	1,816	1,781	1,763	1,772
3		—	2,073	2,029	2,029	2,042	2,069	2,113	—
4		—	2,029	2,046	2,100	2,153	2,206	2,241	—
5		2,100	1,998	2,027	2,011	2,051	2,095	2,166	—
6		—	1,572	1,595	1,670	1,741	1,820	1,931	2,046
7		—	1,710	1,763	1,825	1,905	2,002	2,036	2,162
8		—	—	1,351	1,373	1,386	1,414	1,431	1,471
9		1,617	1,572	1,555	1,539	1,599	1,612	1,623	—
10		1,816	1,781	1,843	1,887	1,905	1,914	1,940	—
11		1,936	1,940	1,914	1,958	1,998	2,029	2,041	—
12		1,980	1,998	1,953	1,940	1,967	1,958	2,020	—
13		2,100	1,993	1,967	2,002	1,998	2,414	2,046	2,095
14		1,860	1,763	1,931	1,934	2,942	2,117	2,179	—

3. Специальный тип водосливов Ребока (черт. 56).

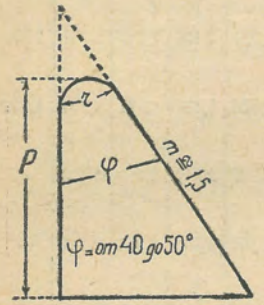
На основании сводки данных различных авторов акад. Павловским рекомендуются следующие коэфициенты для 1 и 2 типов водосливов.

1. Оголовки Кригера. а) С вертикальной смоченной гранью:

$$M = 2{,}17;\ \sigma_f = 1;$$

$$\sigma_n = 0{,}785 + 0{,}25\frac{H}{H_{max}} \text{ для значений } \frac{H}{H_{max}} = \text{от } 0{,}1 \text{ до } 0{,}8; \quad (69)$$

$$\sigma_n = 0{,}88 + 0{,}12\sqrt{\frac{H}{H_{max}}} \text{ для значений } \frac{H}{H_{max}} > 0{,}8.$$



Черт. 56.

В данном случае под H_{max} подразумевается наибольший напор, на который проектируется плотина, а под H подразумевается какой-либо напор меньше максимального, для которого необходимо определить коэфициент полноты напора.

б) С наклонной верхней частью смоченной грани:

коэфициент расхода $M = 2{,}13$, $\sigma_f = 1$;

коэфициент полноты напора применяется:

$$\sigma_n = 0{,}805 + 0{,}31\frac{H}{H_{max}} \text{ для значений } \frac{H}{H_{max}} = \text{от } 0{,}1 \text{ до } 0{,}5;$$

$$\sigma_n = \sqrt[20]{\frac{H}{H_{max}}} \text{ — для значений } \frac{H}{H_{max}} > 0{,}5. \quad (70)$$

Для удобства пользования последней формулой приводим таблицу значений корня 20-й степени из $\frac{H}{H_{max}}$.

Таблица 27

$\frac{H}{H_{max}}$	$\sqrt[20]{\frac{H}{H_{max}}}$
0,5	0,935
0,6	0,975
0,7	0,982
0,8	0,989
0,9	0,995

2. Скругленные трапецоидальные профили. а) Оголовок с вертикальной смоченной гранью:

$$M = 2{,}17 \text{ и } \sigma_f = 0{,}97.$$

Коэфициент полноты напора σ_n берется так же, как и для профилей Кригера (Creager).

б) Оголовки с вертикальной смоченной гранью и с наклонной верхней частью напорной грани:

$$M = 2{,}08$$

$$\sigma = 1{,}02 - 0{,}2S_2 - 0{,}2\left(\frac{a}{z} - 1\right). \quad (71)$$

В этом случае $S_2 = \frac{c}{a}$.

Значение a, c, и z приведено на чертеже 55-б.

Для простоты вычислений приводим таблицу значений σ:

Таблица 28

$\frac{a}{r}$	$S_1=1$	$S_2=2$	$S_3=4$
1	1,00	0,93	0,94
2	0,98	0,96	0,92
3	0,94	0,92	0,88

3. Профили Ребока. Вакуумные профили Ребока рекомендуются с вертикальной напорной гранью и наклонной низовой гранью примерно с заложением около $m_1 = 1{,}5$, чему соответствуют углы в вершине профиля около 50—60° (черт. 56).

Оголовок может очерчиваться по дуге круга; коэфициент расхода может вычисляться по следующей формуле, справедливой в пределах $p > Z > 0{,}02$ лет и $H > r\left(6 - \frac{20r}{p+3r}\right)$:

$$M = 2{,}95 \cdot \left[0{,}312 + \sqrt{0{,}30 + 0{,}01\left(5 - \frac{H}{r}\right)^2} + 0{,}09\frac{H}{p}\right],$$

где r — радиус закругления оголовка, H и p — напор и высота плотины.

Коэфициент расхода достигает максимума при $p = 3H$ и $H < r < \frac{H}{6}$ и равняется $M = 2{\cdot}62$. Для предварительных подсчетов можно рекомендовать $M' = 2{\cdot}55$.

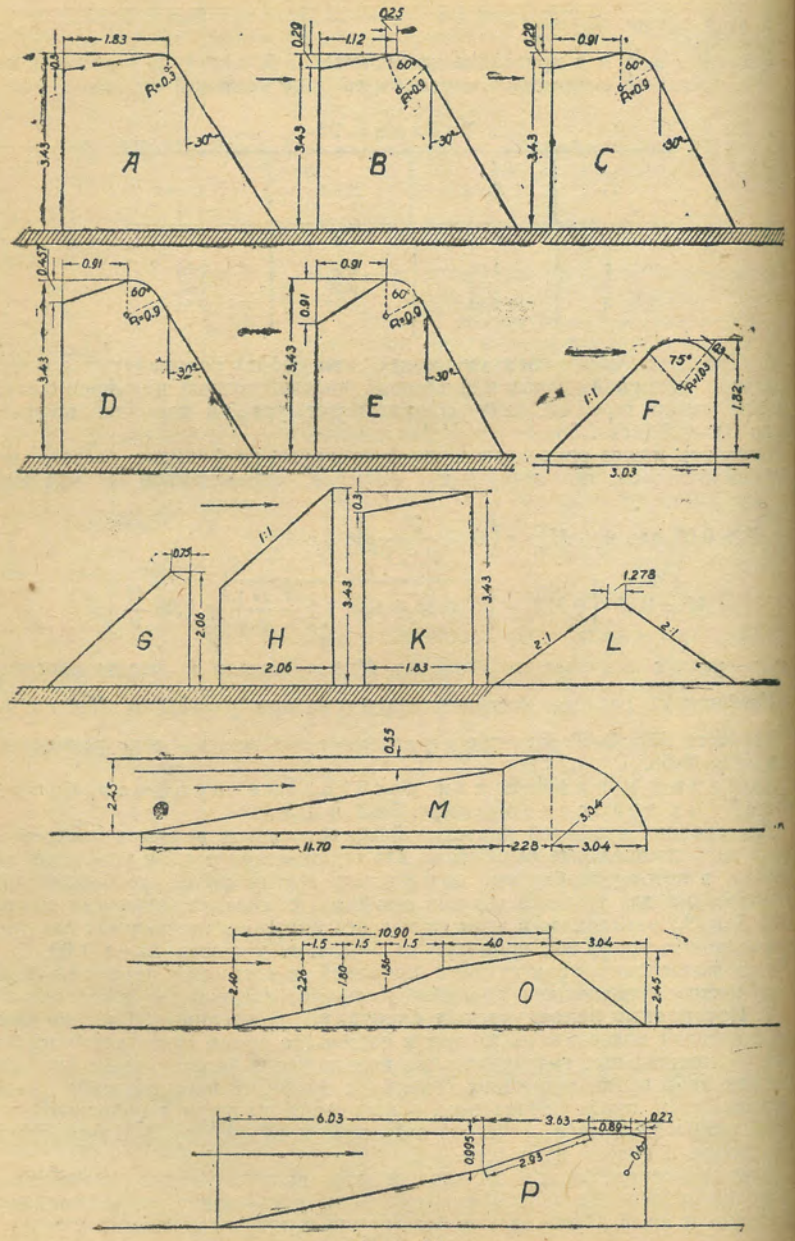
Средние и низкие или растянутые профили криволинейных водосливов (черт. 54-В и B_1).

Для средних профилей криволинейных водосливов нельзя в настоящее время дать специальные выражения для определения полных коэфициентов расхода, а потому необходимо пользоваться в этом случае коэфициентами приводимыми для трапецоидальных профилей с соответствующими наклонами S и S_1, увеличивая в этом случае все значения, приводимые для трапецоидальных профилей, примерно на 5 %, т. е. умножая их на 1,05.

Для водосливов практических профилей и составных профилей чаще всего можно пользоваться данными Вильямса, сведенными в таблице 29.

7. Построение безвакуумных очертаний водосливов. Для построения профилей водосливных плотин в настоящее время чаще всего производятся специальные гидравлические исследования безвакуумного профиля плотины либо путем испытания отдельных профилей плотины, либо путем, предложенным проф. Сабанеевым, — испытания плотины с подвижной низовой гранью, дающего расчетное очертание профиля плотины при заданных напоре и высоте водослива.

Для предварительных подсчетов и для проектирования стандартных профилей водосливов можно рекомендовать пользование выработанными Кригером и проф. Пузыревским безвакуумных профилей плотины.



Черт. 57.

Таблица 29.

Значения коэф. расхода *M* по опытам Вильямса для профилей водосливов, изображенных на черт. 57.

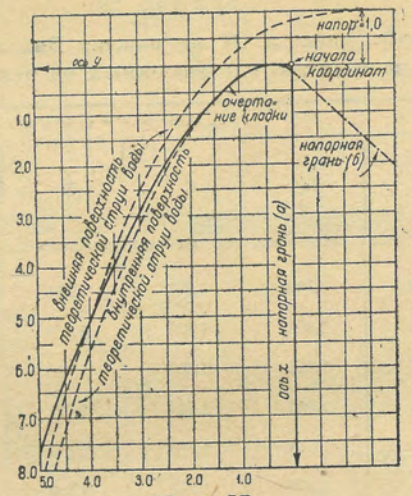
Напор в метр.	Тип профиля A	B	C	D	E	F
0,788	1,772	1,710	1,776	1,781	1,751	1,781
1,351	1,887	1,803	1,847	1,909	1,909	1,803
2,024	1,953	1,865	1,896	1,993	2,007	1,874
2,702	1,958	1,896	1,515	2,029	2,069	1,909
4,048	1,820	1,918	1,918	2,039	2,135	2,135
5,399	1,732	1,933	1,918	2,100	2,184	2,011

Напор в метр.	Тип профиля G	H	K	L	M	O	P
0,788	1,949	1,914	1,732	1,772	1,603	2,011	1,688
1,351	1,930	1,909	1,887	1,772	1,741	2,020	1,679
2,024	2,007	1,905	1,940	1,773	1,238	1,993	1,679
2,702	2,011	1,887	1,993	1,741	1,887	1,962	1,714
4,048	2,202	1,847	2,020	1,688	1,936	1,905	1,763
5,399	1,993	1,816	2,020	1,661	1,976	1,865	1,803

1. Способ Кригера. 1. В 1920 г. американский гидротехник Кригер, пользуясь данными опытов Базена по определению форм переливающейся через водослив струи, дал координаты для построения гидравлического безвакуумного профиля плотины.

Данные Кригера относятся как к типу с вертикальной напорной гранью, так и со скошенной верхней частью напорной грани.

Соответственно с этим им приводятся две таблицы для построения очертания плотины (черт. 57-а), приведенные в таблице 30.



Черт. 57а.

Таблица 30

Значения ординат безвакуумного профиля по Кригеру для напо $H_0=1$

y	Значения x к профилю a			Значения x к профилю $б$		
	кривая очертания каменной кладки	очертание струи		Кривая очертания каменной кладки	очертание струи	
		внешн. поверхн.	внутрен. поверхн.		внешн. поверхн.	внутр. поверх.
0,0	0,126	—0,81	0,126	0,043	—0,781	0,0
0,1	0,036	—0,803	0,033	0,010	—0,756	0,0
0,2	0,007	—0,772	0,007	0,000	—0,724	0,0
0,3	0,000	—0,740	0,000	0,005	—0,689	0,0
0,4	0,007	—0,702	0,007	0,023	—0,648	0,0
0,6	0,060	—0,620	0,063	0,090	—0,552	0,0
0,8	0,142	—0,511	0,153	0,189	—0,435	0,1
1,0	0,257	—0,380	0,267	0,321	—0,293	0,2
1,2	0,397	—0,219	0,410	0,480	—0,120	0,5
1,4	0,555	—0,030	0,590	0,665	—0,075	0,7
1,7	0,870	—0,305	0,920	0,992	0,433	1,4
2,0	1,22	0,693	1,31	1,377	0,860	1,4
2,5	1,96	1,50	2,10	2,14	1,71	2,3
3,0	2,82	2,50	3,11	3,06	2,76	3,3
3,5	3,82	3,63	4,26	4,08	4,00	4,6
4,0	4,93	5,00	5,61	5,24	5,42	6,0
4,5	6,22	6,51	7,15	6,58	7,07	7,6

Примечание. Координаты даны для „полного" напора $H=1$ в любых м при других величинах напора следует все числа таблиц умножить на H_0.

Кроме того Кригером даны графики, значений сопрягающих радиусов при пл для наибольших глубин за плотиной.

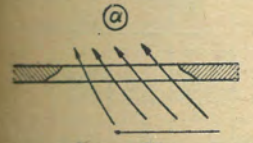
Ниже приводятся не графики, а таблица 31, переработанная из графиков акад вловским, где приняты: H — напор на плотине и p — высота плотины в метрах.

2. В 1927 г. заслуженным деятелем науки и техники проф. Пузыр ким дано более полное теоретическое решение вопроса относительно вакуумных профилей плотины. Для построений очертаний профил

Таблица 31

$\frac{H}{p}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3,0	4,2	5,4	6,5	7,5	8,5	9,6	10,6	11,6
20	4,0	6,0	7,8	8,9	10,0	11,0	12,2	13,3	14,3
30	4,5	7,5	9 7	11,0	12,4	13,5	14,7	15,8	16,8
40	1.7	8,4	11,0	13,0	14,5	15,3	17,0	18,0	19,0
50	4.8	8,8	12,2	14,5	16,5	18,0	19,2	20,3	21,3
60	4,9	8,9	13,0	15,5	18,0	20,0	21,2	22,2	23,2

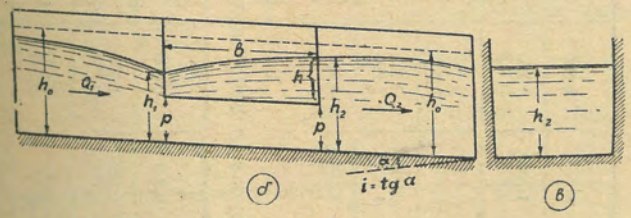
методу проф. Пузыревского ниже приводятся две таблицы 32 и 33, значения которых надо умножить на $\frac{H_0}{0{,}888}$ где H_0 толщина слоя переливающейся струи в метрах. Началом координат для профилей Пузыревским приняты верхние точки вертикальной напорной грани водослива при $x=0, y=0$ (черт. 57-а).



Черт. 58а.

Г. Боковой водослив

Боковой водослив будет в том случае, когда порог водослива расположен в боковой стенке главного канала и параллельно направлению течения. Уровень воды сильнее всего понижен у начала водослива (черт. 58-а б, и в).



Черт. 58б и в.

По опытам Энгельса расход через боковой водослив в $м^3/сек$ учитывается по формулам:

для закругленного порога (черт. 59-а):

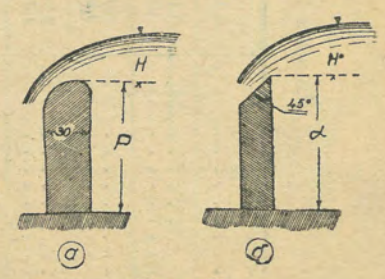
$$Q=2{,}5\sqrt[3]{b^{2,5}H^5}; \qquad (73)$$

для скошенного порога (черт. 59-б):

$$Q=2{,}2\sqrt[3]{b^{2,5}H^5}. \qquad (74)$$

Для расчетов боковых водосливов практических профилей Энгельс рекомендует пользоваться формулой:

$$Q=1{,}77\sqrt[3]{b^{2,5}H^5}. \qquad (75)$$



Черт. 59.

Таблица 32

Данные Пузыревского для очертания внутренней поверхности струй

	0,1014	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900
X		1,100	1,200	1,300	1,400	1,500	1,600	1,700	1,800
X	0,1028	1,100	1,200	1,300	1,400	1,500	1,600	1,700	1,800
Y	—0,0350	—0,109	—0,113	—0,105	—0,085	—0,052	0,000	0,050	0,115
X		2,100	2,200	2,300	2,400	2,500	2,600	2,700	2,800
Y	2,0000	2,100	2,200	2,300	2,400	2,500	2,600	2,700	2,800
	0,2050	0,292	0,339	0,490	0,607	0,710	0,830	0,960	1,093
X		3,000	3,100	3,200	3,300	3,400	—	—	—
Y	2,9000	3,000	3,100	3,200	3,300	3,400	2,463	2,670	2,895
	1,3300	1,535	1,700	1,880	2,065	2,262			
Y	3,1050	3,365	3,600	3,858	4,120	4,400	—	—	—

Таблица 33

Данные Пузыревского для очертания наружной поверхности струи

	0,1014	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900
X		1,100	1,200	1,300	1,400	1,500	1,600	1,700	1,800
X	0,0280	1,100	1,200	1,300	1,400	1,500	1,600	1,700	1,800
Y	—0,8260	—0,795	—0,768	—0,723	—0,689	—0,640	—0,581	—0,525	—0,456
X		2,100	2,200	2,300	2,400	2,500	2,600	2,700	2,800
Y	2,0000	2,100	2,200	2,300	2,400	2,500	2,600	2,700	2,800
	0,3550	—0,300	—0,205	—0,105	0,050	0,130	0,260	0,390	0,530
X		3,000	3,100	3,200	3,300	3,400	1,715	—	—
Y	2,0000	3,000	3,100	3,200	3,300	3,400	1,715	2,125	2,335
	0,8230	0,980	1,143	1,326	1,510	1,705			
Y	2,5450	2,790	3,03	3,295	3,572	3,840	—	—	—

Пример. Определить длину порога сброса при следующих данных:
Максимальный расход $Q_{max} = 10\ м^3/сек$

Нормальный расход $Q_н = 7\ м^3/сек$

Высота порога над дном $p = 1{,}5\ м$
Глубина воды в реке против нижнего конца водослива $h_2 = 1{,}9\ м$

Решение.

$$Q_{сбр} = Q_{max} - Q_н = 10 - 7 = 3\ м^3/сек$$

$$H = h_2 - p = 1{,}9 - 1{,}5 = 0{,}4\ м$$

$$3 = 1{,}77\sqrt[3]{b^{2,5}}\cdot 0{,}4^{2,5}$$

$$27 = 5{,}545\cdot b^{2,5}\cdot 0{,}4^{2,5}$$

откуда:

$$b^{2,5} = 487$$

$$b \cong 11{,}9\ м.$$

Д. Учет сжатия

1. Прямоугольный водослив. Если ширина водосливного отверстия b меньше ширины подводящего канала или если водослив получает воду из бассейна, то истечение через такие отверстия усложняется сжатием струй. В отдельных случаях (водослив Чиполетти) коэфициент расхода M оказывается устойчивее, чем при водосливе без бокового сжатия.

В водосливах имеет большое значение боковое сжатие струи и влияние на сжатие промежуточных опор — бычков и стоек. Влияние их чаще всего учитывается введением поправочного коэфициента на сжатие струй.

Этот метод учета сжатия применяется как для водосливов с острым ребром так и для водослива других форм практического профиля и с широким порогом.

А. Формула Френсиса (Francis) для коэфициента сжатия. Наиболее употребительной является формула Френсиса.

Формула Френсиса для коэфициента сжатия струи с дополнением Кризгера получает следующий вид:

$$\varepsilon = 1 - \frac{0{,}2\xi H\cdot n}{b}. \qquad (76)$$

В этой формуле n — число отверстий или 2 n — число сжатий, а ξ коэфициент берущийся по таблице 34.

Таблица 34

№ по порядку	Очертание оголовка бычка	Коэфициент ξ
1	Прямоугольное очертание оголовка бычка	1
2	Полуциркульное, заостренное в виде равностороннего треугольника очертание оголовка бычка	0,7
3	Заостренные закругления радиусом $r=1{,}703d$, где d — ширина бычка. Закругление продолжается на расстояние $c=1{,}208d$ от острого ребра бычка	0,4

Коэфициенты ξ берутся по Кригеру от 0,4 до 1,0 в зависимости от форм сжатия, вызванных устройством промежуточных бычков (см. табл. 34). При изучении в Среднеазиатском научно-исследовательском институте ирригационных сооружений с боковым отводом воды было выяснено, что формула Френсиса применима только для относительно широких отводов, или, лучше сказать, относительно широких отверстий по сравнению с напором. Правильность формулы подтвердилась для отношения $H_0 : b$ не больше 0,7 — 0,8. В остальных случаях результаты учета коэфициента сжатия по формуле Френсиса не давали правильных результатов.

Б. Формулы расхода с учетом сжатия. Довольно часто применяют для расчетов прямоугольных водосливов с тонкой стенкой формулы с учетом бокового сжатия. Из этих формул можно привести следующие, принимая обозначения B_1 — ширина подводящего канала и b — ширина водослива.

1) Формула Кинцера: $Q = MbH^{\frac{3}{2}}$, где

$$M = 1{,}9231 + 0{,}04\frac{b}{B_1} - 0{,}3442\frac{H}{p_1 + H}. \quad (7)$$

Эта формула применима при H, большем 0,1 *м*.

2) Формула Бредиса.

Формула Бредиса выведена из формулы водослива Чипполетти и потому применима в условиях, аналогичных с условиями водослива Чипполетти:

$$Q = 1{,}865\,(1{,}02b - 0{,}1H)\cdot H^{\frac{3}{2}}. \quad (7a)$$

Эта формула применена при совершенном сжатии и при

$$\frac{b}{3} > H, \text{ когда } H > 2{,}5\ см.$$

3) Формула Эгли:

$$M = \left[1{,}794 - 1{,}329\left(1 - \frac{b}{B_1}\right) + \frac{0{,}007}{H}\right]\left[1 + 0{,}55\left(\frac{b}{B}\right)^2\left(\frac{H}{H + P_1}\right)^2\right].$$

4) Формула союза швейцарских инженеров и архитекторов.

Союз швейцарских инженеров и архитекторов для определения расхода воды через водослив с тонкой стенкой рекомендует следующую формулу, основанную на собственных опытах при самых разнообразных отношениях $\frac{b}{B_1}$ для метровых размеров:

$$M = 2{,}953\left[0{,}578 + 0{,}037\left(\frac{b}{B_1}\right)^2 + C_1\right]\cdot C_2, \text{ где } C_1 = \frac{3{,}615 - 3\left(\frac{b}{B_1}\right)^2}{1000H + 1{,}6}$$

$$C_2 = 1 + 0{,}5\left(\frac{b}{B_1}\right)^4\cdot\left(\frac{H}{H + p}\right)^2. \quad (7b)$$

Приведенная формула применима при значениях:

$$p \geqslant 0{,}3\ м,\quad \frac{H}{p} \leqslant 1;\quad \frac{b}{B_1} \geqslant 0{,}3$$

$$25 : \frac{b}{B_1} \leqslant H \leqslant 0{,}8\ м.$$

Таблица 35

Значения M по формуле швейцарских инженеров для высоты стенки p 1 000 мм

H мм	$\frac{b}{B}=1{,}0$	0,9	0,8	0,7	0,6	0.5	0,4	0,3
25	2,020	—	—	—	—	—	—	—
50	1,851	1,865	1,874	1,882	1,891	1,900	—	—
75	1,843	1,843	1,843	1,843	1,843	1,847	1,847	—
100	1,843	1,835	1,829	1,820	1,820	1,816	1,816	1,816
150	1,843	1,829	1,816	1,803	1,798	1,789	1,785	1,781
200	1,851	1,829	1,812	1,794	1,785	1,776	1,772	1,767
250	1,860	1,834	1,812	1,789	1,781	1,772	1,763	1,758
300	1,869	1,833	1,812	1,789	1,776	1,767	1,754	1,750
350	1,869	1,847	1,816	1,789	1,776	1,763	1,754	1,745
400	1,896	1,851	1,820	1,789	1,776	1,758	1,750	1,741
450	1,909	1,860	1,825	1,794	1,772	1,758	1,745	1,741
500	1,918	1,869	1,829	1,794	1,772	1,758	1,745	1,736
550	1,936	1,874	1,834	1,794	1,772	1,758	1,745	1,736
600	1,944	1,882	1,838	1,798	1,776	1,758	1,745	1,736
650	1,958	1,891	1,843	1,798	1,776	1,754	1,741	1,732
700	1,971	1,900	1,847	1,803	1,776	1,754	1,741	1,732
750	1,984	1,909	1,851	1,803	1,776	1,754	1,741	1,732
800	1,998	1,918	1,856	1,807	1,776	1,754	1,741	1,732

В. Учет сжатия от стоек. Наиболее часто в гидротехнических сооружениях по ирригации применяется вместо бычков установка металлических или деревянных стоек. Сжатие струи у стоек в настоящее время почти не изучено, поэтому в этом случае приходится применять коэфициент сжатия приближенный, оцениваемый экспертным порядком.

Чаще всего коэфициент сжатия ε применяется в этом случае от 0,80 до 0,95 в соответствии с числом стоек. На каждую стойку кладутся потери на сжатие в пределах от 5 до 7%. При числе стоек более четырех коэфициент сжатия обычно применяется стандартный $\varepsilon = 0{,}80$.

Г. Сжатие в зависимости от типа входа. Для мелких ирригационных сооружений кроме учета влияния сжатия промежуточными стойками и бычками приходится вводить учет влияния на сжатие в зависимости от типа входа. Основная зависимость между типами входов и коэфициентами сжатия и скорости по данным проф. Михайлова может быть предложена для практических целей в следующем виде:

Таблица 35а

№ по порядку	Тип отверстий	ε	φ
1	Отверстие без бокового и донного сжатия; входы типа линейчатых поверхностей, раструбов и нырящих крыльев (черт. 26-в и 26-д)	1,00	0,95
2	Отверстие с боковым сжатием при закругленных краях; тип входа раструбом и конусами (черт. 26-б и 26-д) . .	0,97	0,93
3	Отверстие с боковым сжатием при острых ребрах; тип входа — обратные стенки и поступление воды из бассейна (черт. 26-а)	0,94	0, 90
4	Отверстия с плавным входом и со сжатием по дну	0,97	0,9
5	Отверстия со сжатием с боков и дна при острых ребрах. .	0,95	0,8

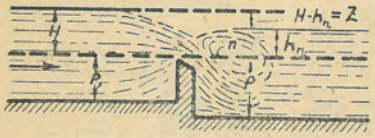
II. Затопленные водосливы.

В основном при расчете затопленных водосливов приходится рассматривать два случая учета влияния от затопления водосливов.

1. Учет влияния затопления для водослива с острой и толстой стенкой, а также для водосливов практических профилей.

2. Учет влияния затопления в водосливах с широким порогом.

1. Водосливы с острой и толстой стенкой и практических профилей.



Черт. 60.

А. Формула Базена. При рассмотрении водосливов первой группы теоретически затопление водослива учитывается при самом незначительном подтопе кромки водослива, т. е. когда $h_n > 0$ (черт. 60).

Чаще всего для водосливов с острым ребром влияние подтопа учитывается коэфициентом подтопа Базена, который определяется по следующей формуле:

$$\sigma_n = 1{,}05 \cdot \left(1 + 0{,}2 \cdot \frac{h_n}{p}\right) \sqrt[3]{\frac{z}{H}} = 1{,}05\sigma'_n, \qquad (80)$$

где коэфициент 1,05 представляет переход от свободной струи к подтопленной или волнистой.

Значение коэфициента σ'_n может приниматься лишь для значений $\frac{z}{p} < 0{,}7$, так как за этим пределом идет отгон прыжка и формула теряет смысл.

Другим пределом применимости формулы надо считать $h_n \geqslant 1{,}5$, так как за этим пределом другие имеющиеся формулы дают более точные данные.

Значение коэфициента подтопа σ_n сведены в таблицу 36.

Таблица 36

Значение коэфициента подтопления σ_n для водослива с тонкой стенкой по опытам Базена

$\frac{h_p}{p}$ \ $\frac{z}{p}$	0,00	0,5	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
0,05	1,00	0,80	0,70	0,65	0,61	0 55	0,51	0,49	0,48	0,46	0,45	0,44	0,43	0,43	0,42	0,42	0,42	0,41
0,10	1,00	0,88	0,81	0,76	0,72	0,67	0,63	0,61	0,58	0,57	0,55	0,54	0,54	0,53	0,52	0,52	0,51	0,51
0,15	1,00	0,91	0,85	0,82	0,78	0,78	0,75	0,72	0,70	0,68	0,67	0,66	0,66	0,66	0,65	0,65	0,64	0,64
0,25	1,00	0,95	0,91	0,87	0,86	0,82	0,78	0,76	0,74	0,73	0,71	0,71	0,70	0,69	0,68	0,68	0,68	0,67
0,30	1,00	0,96	0,92	0,89	0,87	0,84	0,81	0,79	0,77	0,76	0,75	0,74	0,73	0,73	0,72	0,72	0,71	0,71
0,35	1,00	0,96	0,93	0,91	0,89	0,86	0,84	0,82	0,80	0,79	0,78	0,77	0,76	0,76	0,75	0,75	0,75	0,74
0,40	1,00	0,97	0,94	0,92	0,90	0,87	0,86	0,84	0,83	0,81	0,80	0,80	0,79	0,78	0,78	0,78	0,77	0,77
0,45	1,00	0,97	0,95	0,93	0,91	0,89	0,87	0,86	0,85	0,83	0,83	0,82	0,81	0,81	0,80	0,80	0,80	0,80
0,50	1,00	0,98	0,96	0,94	0,93	0,90	0,88	0,87	0,86	0,85	0,85	0,84	0,83	0,83	0,83	0,82	0,82	0,82
0,55	1,00	0,98	0,96	0,95	0,93	0,91	0,89	0,88	0,87	0,86	0,86	0,86	0,85	0,85	0,84	0,84	0,84	0,84
0,60	1,00	0,98	0,97	0,95	0 94	0,93	0,91	0,89	0,88	0 87	0,87	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86	0,85
0,65	1,00	0,99	0,97	0,96	0,95	0,93	0,92	0,91	0,90	0,88	0,88	0,88	0,87	0,87	0,87	0,87	0,86	0,85
0,70	1,00	0,99	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,91	0,91	0,90	0,89	0,89	0,89	0,89	0,88	0,88	0,88	0,87

Для водосливов практических профилей можно пользоваться, как рекомендует проф. Бахметев, той же самой формулой, что и для водосливов с острым ребром.

Однако правильнее и повидимому более точные результаты будут получаться, если для расчетов применить формулу, полученную американскими инженерами на основании данных фактических наблюдений над затопленными водосливами практических профилей.

Б. Данные Морица и Гершеля для водосливов практических форм. Данные американских инженеров для водосливов практических форм, которые распространяются и на водосливы с толстой стенкой, сведены в таблицы 37 и 38 в зависимости от коэфициентов подтопления, или, проще, от отношения $\frac{h_n}{H}$.

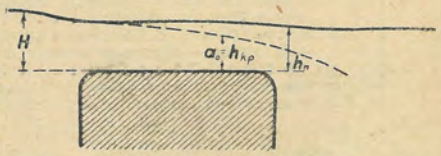
Таблица 37 Гершеля

h_n/H	σ_n
0	1,000
0,1	0,991
0,2	0,983
0,3	0,972
0,4	0,956
0,5	0,937
0,6	0,907
0,7	0,856
0,8	0,778
0,9	0,621
1,0	—

Таблица 38 Морица

$\frac{h_n}{H}$ Десятые \ Сотые	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,01	1,01	0,98	0,94	0,90	0,84	0,78	0,70	0,59	0,44
0,05	0,99	0,96	0,92	0,87	0,81	0,74	0,65	0,52	0,32

2. Водосливы с широким порогом. Проблема затопленного водослива с широким порогом получила теоретически правильное разрешение только в работах проф. Бахметева, когда им была установлена картина движения воды по широкому порогу и наличие в конце водослива критических глубин. В этом случае затопление водослива с широким порогом начинает сказываться только тогда, когда это подтопление превосходит критическую глубину, т. е. когда:



Черт. 61.

$$h_n > h_{kp} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}. \qquad (81)$$

Для приближенных расчетов критической глубины можно пользоваться соотношением:

$$h_{kp} = 0{,}6\, H_0.$$

Затопленные водосливы с широким порогом рассчитываются по формуле (черт. 61):

$$Q = \varepsilon \varphi\, b h_2 \sqrt{2 g z_0}, \qquad (82)$$

где приняты следующие обозначения:

ε — коэфициент сжатия в отверстии,
φ — коэфициет скорости,
b — ширина водослива в свету,
h_2 — глубина воды нижнего бьефа над порогом водослива, т. е. $h_2 = h_n$
z_0 — действующий напор или разность горизонтов верхнего и нижнего бьефов с учетом подходной скорости.

Отверстия гидротехнических сооружений, рассчитываются как водосливы с широким порогом, когда истечение в них происходит без сжатия по верхней кромке, т. е. при полностью открытых щитах.

Для практических расчетов можно применять данные для коэфициентов ε и φ, приводимые в таблице 39 проф. Михайловым в зависимости от размеров отверстий и типов входа.

Акад. Павловским формула для водослива с широким порогом сводится к общему виду расчетной формулы водослива:

$$Q = \sigma_n \varepsilon M b H_0^{3/2}, \tag{81}$$

где для σ_n даны в таблице 40 значения в зависимости от h_n/H, а значения ε, M, b и H_0 являются обычными для водосливов с широким порогом.

Таблица 39

Значение коэфициентов ε и φ для затопленного водослива с широким порогом по Михайлову

№ по порядку	Типы отверстий и входов	ε	φ
1	Отверстие с плавным входом без сжатия снизу и с боков. тип входа — линейчатые поверхности и раструб	1,00	0,95
2	Отверстия только с боковым сжатием при закругленных краях; тип входа — конуса, обратные стенки и поступление воды из бассейна	0,97	0,93
3	Отверстие только с боковым сжатием при острых ребрах; тип входа — обратные стенки и поступление воды из бассейна	0,94	0,90
4	Отверстие с плавным входом и сжатием по дну	0,97	0,92
5	Отверстие при острых ребрах с сжатием с боков и у дна .	0,95	0,85

Таблица 40

Значения коэфициента σ_n для затопленного водослива с широким порогом по Павловскому

h_n/H_0	σ_n	h_n/H_0	σ_n	h_n/H_0	σ_n
0,7	1,000	0,90	0,740	0,98	0,360
0,75	0,973	0,92	0,676	0,99	0,256
0,80	0,930	0,94	0,597	0,995	0,183
0,83	0,888	0,95	0,553	0,997	0,143
0,85	0,853	0,96	0,498	0,998	0,119
0,87	0,814	0,97	0,434	0,999	0,084

РАЗДЕЛ IV

РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

А. Местные сопротивления

а. Общие формулы

Потери напора при движении жидкости считают пропорциональными квадратам средних скоростей V, или соответствующим скоростным напорам:

$$h_w = \zeta \frac{V^2}{2g}, \tag{82}$$

где ζ — коэфициент сопротивления,
g — ускорение силы тяжести 9,81 *м/сек²*.

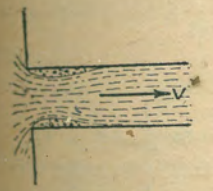
б. Практические значения коэфициентов местных сопротивлений

1. Потери при входе в трубу. а) Острое ребро (черт. 62-а):

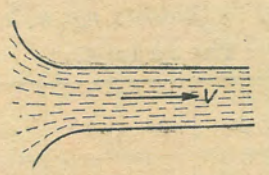
$$\zeta = 0{,}50$$

$\zeta = 0{,}05 - 0{,}10$ в зависимости от закругления.

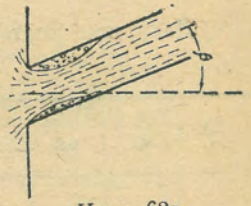
б) Закругленный (плавный) вход (черт. 62-б)



Черт. 62а.



Черт. 62б.



Черт. 62в.

При сложных трубопроводах имеем:

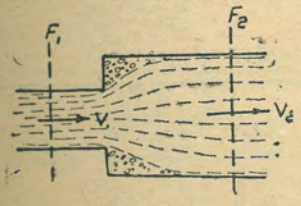
$$\Sigma h_w = \Sigma \zeta_l \frac{V_l}{2g}. \tag{83}$$

в) Труба присоединена к резервуару под углом β по Вайсбаху (черт. 62-в):

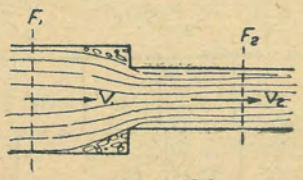
$$\zeta = 0{,}505 + 0{,}303 \sin\beta + 0{,}225 \sin^2\beta. \tag{83}$$

г) При предохранительных сетках и обратных клапанах всасывающих и заборных труб: $\zeta = 5{,}0 - 10{,}0$

2. Внезапное изменение поперечного сечения трубы. а) Внезапное расширение трубы (черт. 63-а)



Черт. 63а.



Черт. 63б.

Потери на гидравлический удар по Борда:

$$h_w = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)^2$$

$$h_w = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}:$$

$$\zeta = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 \qquad (84)$$

б) Внезапное сужение трубы по Вейсбаху (черт. 63-б)

Таблица 41

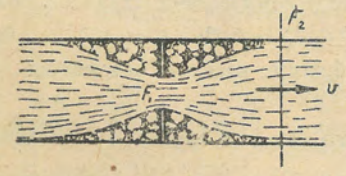
при $\frac{\omega_2}{\omega_1}$	0,01	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
ζ	0,50	0,50	0,42	0,34	0,25	0,15	0,00

в) Диафрагма (черт. 64-а) по Вайсбаху при $\omega_2 > 2{,}0\,\omega_1$

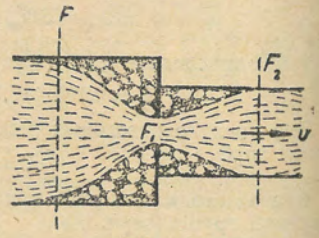
Таблица 42а

$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	231,7	51,0	19,8	9,6	5,3	3,1	1,9	1,2	0,7	0,5

г) Диафрагма (черт. 64-б)



Черт. 64а.



Черт. 64б.

Таблица 42б

$\frac{\omega_2}{\omega_2}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	25,9	17,8	17,5	7,8	3,8	1,8	0,8	0,3	0,1	0,0

д) Задвижка (черт. 65)

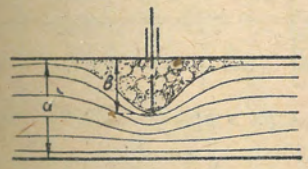
Таблица 43

$\frac{b}{a}$	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/3
ζ	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

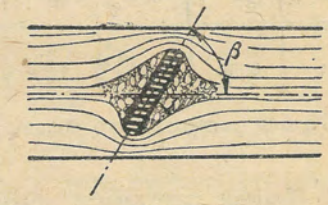
е) Поворотный клапан (черт. 66)

Таблица 44

$\beta°$	5°	10°	15°	20°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	70°
$\zeta°$	0,24	0,52	0,90	1,54	3,91	6,22	10,8	18,7	32,6	58,8	118,0	751,0



Черт. 65.

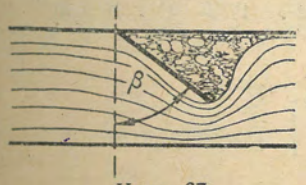


Черт. 66.

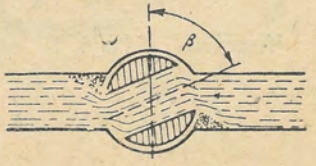
ж) Шарнирный клапан (черт. 67)

Таблица 45

$\beta°$	70°	65°	60°	55°	50°	45°	40°	35°	30°	20°	15°
ζ	1,7	2,3	3,2	4,6	6,6	9,5	14,0	20,0	30,0	62,0	90



Черт. 67.



Черт. 68.

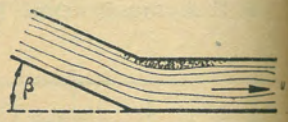
з) Кран в круглой трубе (черт. 68)

Таблица 46

β°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	40°	50°	60°	65°	82,3°
ζ	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	17,3	52,6	206	486	∞

3. Потери при изменении направления потока. а) Колено без закругления (черт. 69) по Вайсбаху для труб при $d \geqslant 30$ *мм*:

$$\zeta = 0{,}946 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 2{,}047 \sin^4 \frac{\beta}{2}. \qquad (85)$$



Черт. 69.

Значения ζ приведены ниже.

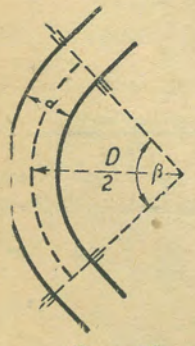
Таблица 47

β°	20°	40°	60°	80°	90°	100°	120°	140°
ζ	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,861	2,431

Фляман дает для труб большого диаметра и при $\beta = 90°$

$$\zeta = 0{,}25$$

б) Плавное закругление (колено) (черт. 70) для круглой трубы:



Черт. 70.

$$\zeta = \left[0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \frac{\beta°}{90°} = a \cdot \frac{\beta°}{90°}, \qquad (86)$$

где d — диаметр труб
D — диаметр закругления

$a = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{7}{2}}$ берется по таблице 48.

в) Для труб прямоугольного сечения и при плавном закруглении с размером b в плоскости закругления (черт. 70, где $d = b$):

$$\zeta = \left[0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{b}{D}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \cdot \frac{\beta°}{90°} = a \frac{\beta°}{90°}, \qquad (87)$$

где значения a берутся по таблице 49:

Таблица 48

$\frac{a}{D}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
a	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,403	1,978

Таблица 49

$\frac{b}{D}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
a	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,223

4) Потери при выходе из трубы и при истечении под уровень по Борда:

$$h_w = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}. \qquad (88)$$

При больших размерах водоприемника $V_2 = 0$ и тогда:

$$h_w = \frac{V_1^2}{2g} = 1 \cdot \frac{V_1^2}{2g} = \zeta \frac{V_1}{2g}. \qquad (89)$$

Коэфициент сопротивления при выходе: $\zeta = 1{,}0$

в. Формулы для потерь напора на трение по длине труб.

а — Формула Дарси (Darcy)

Чаще всего потери на трение по длине трубы считают пропорциональными квадрату средней скорости по Дарси:

$$h_w = \lambda \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g}, \qquad (90)$$

где λ — численный коэфициент, зависящий от диаметра труб и степени шероховатости стенок:

$$\lambda = \frac{8g}{C^2};$$

C — коэфициент, зависящий от материала стенок и от формы поперечного сечения потока,
L — длина рассматриваемого участка трубы в метрах,
d — диаметр трубы в метрах,
V — средняя скорость в *м/сек*,
g — ускорение силы тяжести в *м/сек²*,
Ту же формулу имеем в преобразованном виде:

$$h_w = \frac{8g}{C^2} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} = \zeta \frac{V^2}{2g}, \qquad (91)$$

где коэфициент сопротивления;

$$\zeta = \frac{8g}{C^2} \cdot \frac{L}{d}. \qquad (92)$$

Гидравлический радиус для труб

$$R = \frac{\text{площадь жив. сечения}}{\text{смоченный периметр}} = \frac{d}{4}$$

а потому вместо (90), получаем:

$$h_w = \frac{LV^2}{C^2R}; \qquad (93)$$

и вместо (92) получаем для ζ выражения:

$$\zeta = \frac{2gL}{C^2R}, \qquad (94)$$

годное для труб какого угодно профиля.

б) Формула Шези (Chèsy).

Из уравнения (93) легко получить:

$$\frac{h_w}{L} = i = \frac{v^2}{C^2R},$$

где i — пьезометрический уклон, равный разности напора, деленной на расстояние L между рассматриваемыми сечениями.

Отсюда легко находим:

$$V = C\sqrt{Ri} = S\sqrt{i} \qquad (95)$$

$$Q = \omega C\sqrt{Ri} = K\sqrt{i}, \qquad (96)$$

где K — пропускная способность сечения трубы или канала; пропускная способность отвечает расходу при уклоне $i = 1$.

S — единичная характеристика скорости, т. е. скорость при уклоне $i = 1$.

Выражение (95) носит название формулы Шези и имеет большое значение при расчете каналов.

в) Формулы для определения λ и C в формуле Шези.

1. Формула Дарси для бетонных и чистых чугунных водопроводных труб

$$\lambda = 0{,}02\left(1 + \frac{1}{40d}\right), \qquad (97)$$

где d — диаметр трубы в метрах.

Для труб загрязненных λ умножается на коэфициент загрязнения α_3 в зависимости от диаметра труб по таблице 50.

Таблица 50

d	0,1	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,8	1,00
α	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,1

2. Старая формула Куттера (Kutter) для расчета труб:

а) Общий вид формулы для метровых размеров:

$$C = \frac{100}{1 + \frac{k}{\sqrt{R}}}, \qquad (98)$$

где для труб, бывших в употреблении $k = 0{,}25$.

б) Для круглых труб $R = \frac{d}{4}$, а потому формулу Куттера можно переписать так:

$$C = \frac{100}{1 + \frac{0{,}5}{\sqrt{d}}}, \qquad (99)$$

Пропускная способность труб $K = \omega c\sqrt{R}$ при значении C по формуле Куттера при $k = 0{,}25$

Таблица 51

d мм	K л/сек	K^2 (л/сек)^2	d мм	K л/сек	K^2 (л/сек)^2
40	3,590	12,89	350	$1{,}540.10^3$	$2{,}379.10^6$
50	6,782	45,99	400	$2{,}220.10^3$	$4{,}926.10^6$
75	21,43	459,25	450	$3\,057.10^3$	$9{,}343.10^6$
100	48,10	$2.314.10^3$	500	$4{,}067.10^3$	$16{,}54.10^6$
[illegible]	89,84	$8\,072\,10^3$	600	$6\,655\,10^3$	$44{,}29\,10^6$
150	149,37	$22.31.10^3$	700	$10.08.10^3$	$101.53.10^6$
176	229,20	$52{,}53.10^3$	750	$12{,}13.10^3$	$147{,}09.10^6$
200	331,70	$110.03.10^3$	800	$14{,}42\,10^3$	$207\,87.10^6$
225	459,02	$210{,}70.10^3$	900	$19{,}76\,10^3$	$390{,}57.10^6$
250	613,59	$376{,}50\,10^3$	1000	$26{,}18.10^3$	$685{,}39.10^6$
300	$1{,}012.10^3$	$1{,}024.10^6$	1200	$42{,}53.10^3$	$1{,}809.10^6$

3. Формула Маннинга (Manning) в метровых размерах:

$$C = \frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}}, \qquad (100)$$

где n берется по шкале Гангилье-Куттера (Ganguillet-Kutter) (приведеная ниже).

По проф. Бахметеву для этой формулы можно принимать:

$\frac{1}{n} = 91$ — для чистых труб;

$\frac{1}{n} = 70$ — для грязных труб;

$\frac{1}{n} = 80$ — как среднее расчетное значение.

Ниже приведена таблица 52 для расчета труб по Маннингу.

Эти данные относятся к чугунным трубопроводам, но ими можно пользоваться вообще для расчета металлических трубопроводов, так как в грязных трубопроводах материал труб не влияет на шероховатость.

Б. Деревянные трубопроводы

Для определения потерь напора на трение в деревянных трубопроводах по американским данным можно применять формулу Scobey'я в метровых размерах:

$$i = 0{,}000885\,\frac{V^{1,8}}{d^{1,17}}, \qquad (101)$$

Таблица 52

Таблица для расчета водопроводных труб по Manning'y

мм	Чистые трубы: $\frac{1}{n}=91$		Нормальные трубы: $\frac{1}{n}=80$		Грязные трубы: $\frac{1}{n}=70$	
	$K\ \frac{литр}{сек}$	$K^2\ \frac{литр^2}{сек^2}$	$K\ \frac{литр}{сек}$	$K^2\ \frac{литр^2}{сек^2}$	$K\ \frac{литр}{сек}$	$K^2\ \frac{литр^2}{сек^2}$
40	5,308	28,17	4,66	21,77	4,083	16,67
50	9,624	92,62	8,460	71,58	7,403	54,80
75	28,37	805,1	24,94	622,2^3	21,83	476,4
100	61,11	3,734.10^3	53,72	2,886.10^3	47,01	2,209.10^3
125	110,8	12,28.10^3	97,40	9,487.10^3	85,23	7,264.10^3
150	180,2	32,46.10^3	158,4	25,09.10^3	138,6	19,21.10^3
175	271,8	73,86 10^3	238,9	75,03 10^3	209,0	43,70.10^3
200	388,0	150,6.10^3	341,1	116,4 10^3	298,5	89,08.10^3
225	531,2	282,2.10^3	467,0	218,1.10^3	408,6	167,0.10^3
250	703,5	494,9.10^3	618,5	382,5.10^3	541,2	292,8.10^3
300	1,144.10^3	1,309.10^6	1,006.10^3	1,011.10^6	0,880.10^3	774,4.10^3
350	1,726 10^3	2,978.10^6	1,517.10^3	2,301 10^6	1,327.10^3	1,762.10^6
400	2,464 10^3	6,070.10^6	2,166.10^3	4,691.10^6	1,895.10^3	3,592.10^6
450	3,373.10^3	11,38 10^6	2,965.10^3	8,792.10^6	2,594.10^3	6,731.10^6
500	4,467.10^3	19,95.10^3	3,927.10^3	15,41.10^3	3,436.10^3	11,81.10^6
600	7,264 10^3	52,76.10^6	6,386.10^3	40,78.10^6	5,587.10^3	31,22.10^6
700	10,96.10^3	120,1.10^6	9,632.10^3	92,78.10^6	8,428.10^3	71,04.10^6
750	13,17.10^3	173,4.10^6	11,58.10^3	134,1.10^6	10,13.10^3	102,6.10^6
800	15,64.10^3	244,7.10^6	13,75 10^3	189,1.10^6	12,03.10^3	144,8.10^6
900	21,42.10^3	458,6.10^6	18,83.10^3	354,5.10^6	16,47.10^3	271,4.10^6
1 000	28,36.10^3	804,5.10^6	24,93.10^3	0,622.10^9	21,82.10^3	0,476.10^9
1 200	46,12.10^3	2,127.10^9	40,66.10^3	1,644.10^9	35,48.10^3	1,259.10^9
1 400	69,57.10^3	4,840.10^9	61,16.10^3	3,741.10^9	53,52.10^3	2,864.10^9
1 600	99,33.10^3	9,866.10^9	87,32.10^3	7,625.10^9	76,41.10^3	5,838.10^9
1 800	136,0.10^3	18,49.10^9	119,5.10^3	14,29.10^9	104,6.10^3	10,94.10^9
2 000	180,1.10^3	32,43.10^9	158,3.10^3	25,08.10^9	138,5.10^3	19,19.10^9

где i — пьезометрический уклон,
V — скорость в м/сек,
d — диаметр труб в см.

Г. Пожарные рукава.

Для определения потерь напора в пожарных рукавах служит формула:

$$h_w = \zeta V^2 \frac{L}{d}, \qquad (102)$$

где ζ получает значения по таблице 53.

Таблица 53

Характер рукава	ζ
Гладкие резиновые рукава	0,00086
Обыкновенные резиновые рукава	0,000899
Гладкие внутри прорезиненные рукава	0,00163
Кожанные рукава (гладкие)	0,00137
Обыкновенные (пеньковые) рукава	0,00213

Д. Расчет простого водопровода (без ответвлений).

Основное уравнение движения жидкости в длинном трубопроводе.

Из уравнения Д. Бернулли для двух сечений I—I и II—II (черт 71), имеем:

$$H = \Sigma h_w = \lambda \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g}, \qquad (103)$$

где:

$$H = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z^2 + \frac{p_2}{\gamma}\right).$$

Следовательно разность напоров в двух рассматриваемых сечениях тратится на преодоление гидравлических сопротивлений.

В напорном трубопроводе:

Черт. 71.

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2}. \qquad (104)$$

Уравнение (103) с учетом данных по уравнению (104) преобразовывается так:

$$1)\ Q = \frac{\pi d^2}{4} V; \qquad (105)$$

$$2)\ H = \frac{16\lambda}{2g\,\pi^2 d^5} \cdot Q^2 L = \frac{0{,}0827\,\lambda\, Q^2 L}{d^5}, \qquad (106)$$

которое и является основным уравнением движения жидкости в длинном трубопроводе.

Обозначая

$$\frac{2g\pi^2 d^5}{16\lambda} = K^2 = \omega c \sqrt{R}, \tag{107}$$

имеем:

$$h_w = \frac{Q^2 L}{K^2}. \tag{108}$$

Величина K, как указано выше, называется пропускной способностью трубы. Соответственно с этим имеем:

$$Q = \omega C \sqrt{Ri} = K\sqrt{i}. \tag{109}$$

Следовательно для расчета в основном служат следующие формулы:

$$1)\ Q = \frac{\pi d^2}{4} V;\quad 2)\ H = \Sigma h_w = \frac{Q^2 L}{K^2};$$

$$3)\ i = \frac{Q^2}{K^2}.$$

По этим формулам можно решать все задачи на трубы, пользуясь таблицами пропускных способностей труб (таб. 51 и 52).

Е. Полные потери напора в трубопроводе (дюкер, насадки и пр.)

Если в рассматриваемом водопроводе имеем, кроме потерь на трение, и местные потери, то общая сумма потерь получается сложением отдельных потерь:

$$\Sigma h_w = \frac{V^2}{2g}(\zeta_{\text{вход.}} + n\zeta_{\text{закр.}} + \zeta_{\text{тр.}} + \text{и т. д.}) = \zeta\frac{V^2}{2g}, \tag{110}$$

где ζ — коэфициент сопротивления всей системы,

n — число закруглений.

В длинных трубопроводах (водопроводная сеть) местные потери составляют от 5 до 10% от общей суммы потерь, и ими пренебрегают в расчетах.

Ж. Коэфициент расхода в трубопроводе (дюкер, сифон, насадки и пр.).

Коэфициент расхода системы μ определяется по формулам:

при истечении под уровень: $\mu = \sqrt{\frac{1}{\zeta}}$, (111)

" " в атмосферу: $\mu = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}$. (112)

Приведенные значения μ подставляются в общую формулу расхода:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_o}. \tag{6}$$

3. Расчет системы трубопроводов.

а) Последовательное соединение труб (черт. 72). Для длинных трубопроводов, пренебрегая потерями напора на местные сопротивления, получаем:

$$H = \frac{L_1 Q_1^2}{K_1^2} + \frac{L_2 Q_2^2}{K_2^2} + \frac{L_3 Q_3^2}{K_3^2} + \text{и т. д.} = \sum\frac{L_i Q_i^2}{K_i^2}. \tag{5}$$

Пример. Определить расход и очертание пьезометрической линии при данных, указанных на чертеже 72 (трубы считать нормальные).

Решение.

$$H = (Z_A + Y_A) - (Z_D + Y_D) = 30\ м.$$

По таблице 52

$$H = Q^2\left(\frac{500}{K_1^2} + \frac{400}{K_2^2} + \frac{300}{K_3^2}\right) = Q^2\left(\frac{500}{374{,}10^3} + \frac{400}{116{,}10^3} + \frac{300}{24{,}6\cdot 10^3}\right);$$

$$Q = 42\ л/сек.$$

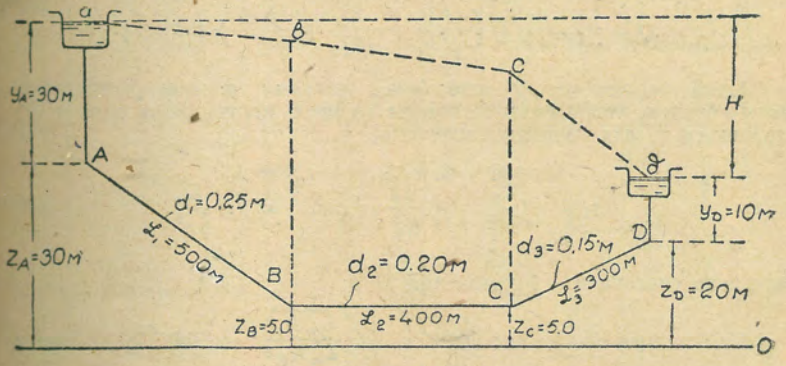
Потери на отдельных участках:

$$h_{w1} = \frac{Q^2 L_1}{K_1^2} = 2{,}36\ м.$$

$$h_{w2} = \frac{Q^2 L^2}{K^2_2} = 6{,}08\ м.$$

$$h_{w3} = \frac{Q^2 L_3}{K_3^2} = \frac{21{,}52\ м.}{29{,}96 \cong 30\ м.}$$

По этим данным строим пьезометрическую линию.



Черт. 72.

Эквивалентный трубопровод (способ Дюпюи).

Из соотношения $H = Q^2\Sigma\frac{L_i}{K_i^2}$ видно, что пропускная способность системы водопровода зависит от величины $\Sigma\frac{L_i}{K_i^2}$ и система может быть заменена трубопроводом одного диаметра d_o с пропускной способностью K_o и длиной L_o, пропускающего тот же расход:

$$Q^2\frac{L_o}{K_o^2} = Q^2\Sigma\frac{L_i}{K_i^2}$$

или

$$L_o = K_o^2\Sigma\frac{L_i}{K_i^2}. \tag{117}$$

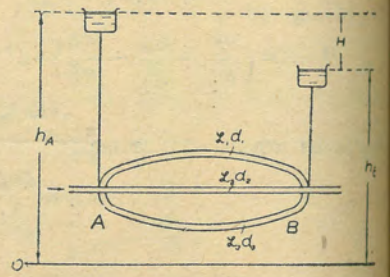
Водопровод длиной L_0 с диаметром d_0 называется эквивалентным данной системе.

б) Параллельное соединение трубопроводов (черт. 73).
Разность напоров $H = h_A - h_B$.
Расход в каждой ветви получаем из равенства:

$$H = \frac{q^2 L}{K^2}.$$

Получим уравнения:

$$q_1 = \sqrt{\frac{K_1^2}{L_1}}\sqrt{H},$$
$$q_2 = \sqrt{\frac{K_2^2}{L_2}}\sqrt{H}, \qquad (113)$$
$$q_3 = \sqrt{\frac{K_3^2}{L_3}}\sqrt{H}.$$



Черт. 73.

Полный расход Q, протекающий через систему, равен:

$$Q = \Sigma q = \sqrt{H}\left(\frac{K_1}{\sqrt{L_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{L_2}} + \frac{K_3}{\sqrt{L_3}} + \text{и. т. д.}\right).$$

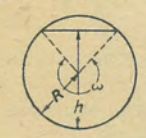
Общий расход между отдельными ветвями должен распределиться таким образом, чтобы падение напора во всех ветвях было одно и то же. Следовательно для решения задач имеем:

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n. \qquad (114)$$
$$H = q_1^2 \frac{L_1}{K_1^2} = q_2^2 \frac{L_2}{K_2^2} = \ldots = q_n^2 \frac{L_n}{K_n^2}. \qquad (115)$$

Последняя система $n-1$ уравнений вида:

$$q_n = q_m \sqrt{\frac{L_m K_n^2}{L_n K_m^2}} \qquad (116)$$

вместе с (114) дает необходимое число уравнений для решения задачи.



$\frac{h}{2R} \times 100 = 94,5\%$
$\omega = 308°09'$
Черт. 74.

И. Расчет дренажных труб.

При расчете дренажных труб следует иметь в виду нижеследующее:

1) Дренажные трубы должны работать без напора.

2) Расчет ведется при полном заполнении труб, что дает небольшой запас незаполненного пространства от поперечного сечения, так как в круглых трубах наибольший расход получается при заполнении до 94,5% от диаметра (черт. 74) или при угле $\omega = 308°09'$.

3) Сопротивления зависят:
а) от постоянного поступления воды в дрену по длине всей линии;
б) от правильной укладки труб и исправности дренажной сети.

4) Для расчета применяются те же формулы, как и для открытых каналов.

Коэфициенты шероховатости принимаются — для формулы Базена $\gamma = 0,20$ и для формулы Гангилье-Куттера $n = 0,010 - 0,016$, в среднем 0,012.

Кроме указанных формул весьма часто применяется старая формула Куттера (см. уравнение 98):

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{k + \sqrt{R}},$$

где $k = 0,27$.

Наименьшая допускаемая скорость:
а) для вязких почв $v_{min} = 0,15 - 0,20$ м/сек.
б) для песчаных почв $v_{min} = 0,35$ м/сек.
в) при попадании грязной верховодки $v_{min} = 0,60$ м/сек.

Таблица 54

Таблица для расчета дрен при глубине наполнения, равной диаметру; по формуле Куттера при $K = 0,27$

Диаметр в см	Расход в л/сек при скоростях v=0,15 м/сек	v=0,35 м/сек	v=0,60 м/сек	Пропускная способность K л/сек
3	0,11	0,25	0,42	1,5
4	0,19	0,44	0,75	3,4
5	0,29	0,69	1,18	6,4
6	0,42	0,99	1,70	10,8
7	0,58	1,35	2,31	16,7
8	0,75	1,76	3,02	24,4
9	0,95	2,23	3,82	34,1
10	1,18	2,75	4,71	45,9
12,5	1,84	4,29	7,36	85,8
15	2,65	6,18	10,60	145,0
17,5	3,61	8,42	14,43	220,0
20	4,71	11,00	18,85	318,0
25	7,36	17,18	29,45	590,0

Таблица 55

Таблица допустимых уклонов дрен

d \ v	v=0,15 м/сек	v=0,35 м/сек	v=0,60 м/сек
3	0,00509	0,02710	0,08000
4	0,00308	0,01680	0,04930
5	0,00210	0,01140	0,03360
6	0,00154	0,00839	0,02460
7	0,00119	0,00647	0,01900
8	0,00095	0,00518	0,01520
9	0,00078	0,00427	0,01250
10	0,00066	0,00359	0,01050
12,5	0,00046	0,00250	0,00736
15	0,00034	0,00182	0,00534
17,5	0,00027	0,00147	0,00432
20	0,00022	0,00119	0,00351
25	0,00016	0,00085	0,00249

РАЗДЕЛ V.

РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ И КАНАЛАХ.

А. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ.

Основной формулой для расчета каналов в открытых руслах является:

$$Q = \omega V, \tag{118}$$

где ω — площадь живого сечения в кв. метрах,
V — средняя скорость в данном сечении в м/сек.

Средняя скорость определяется из условия, что все приращение напора тратится на преодоление сопротивлений при движении. Скорость по формуле Шези определяется:

$$V = C\sqrt{R_i} = S\sqrt{i}, \tag{119}$$

где C — коэфициент, зависящий от формы и размера русла и шероховатости его стенок;

R — гидравлический радиус равный $\frac{\omega}{\chi}$;

χ — смоченный периметр сечения;

S — скоростная характеристика $S = C\sqrt{R}$;

i — уклон дна при постоянном поперечном сечении канала с постоянным уклоном и с постоянной шероховатостью стенок.
Часто i называется пьезометрическим уклоном.

Пользуясь уравнением скорости Шези, расчетную формулу для определения расхода можно представить в следующем виде:

$$Q = \omega \cdot C\sqrt{R_i} = K\sqrt{i}, \tag{120}$$

где $K = \omega C\sqrt{R}$ — пропускная способность канала или расход при единичном уклоне.

Б. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФИЦИЕНТА C И ТАБЛИЦЫ КОЭФИЦИЕНТОВ ШЕРОХОВАТОСТИ *.

Для определения коэфициента C существует большое количество формул, предложенных различными авторами. При проектировании каналов наиболее важно выбрать расчетную формулу для определения потерь на трение и правильно установить коэфициент шероховатости. Ввиду отсутствия до настоящего времени точных и проверенных строго по одной программе данных по коэфициентам шероховатости и их систематической сводки по СССР приходится при проектировании пользоваться формулами и коэфициентами, установленными большей частью по данным заграничных опытов и наблюдений. Подробное изложение и критика существующих формул и данных для расчета приведены проф. Бахметевым в книге «Равномерное движение жидкости в трубах и каналах».

В справочнике приводим лишь наиболее распространенные и рекомендуемые для пользования формулы и коэфициенты.

* Значения коэф. шероховатости специально для рек и горных потоков приведены во II томе Справочника

а) **Формула Базена** (метровые размеры):

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}, \tag{121}$$

где γ — коэфициент шероховатости, зависящий от материала стенок русла и состояния канала — прорастание его, изгиб оси, способ производства работ и т. д.

Пользование формулой Базена рекомендуется при расчетах ирригационной сети и каналов с относительно большими уклонами (порядка тысячных, но не менее 3—4 десятитысячных).

Опытные поверки формулы Базена показывают, что значения, вычисленные по ней для значений $\gamma < 0{,}16$ и гидравлических радиусов $R < 0{,}5$, дают значительные отклонения от действительных величин.

Для выбора коэфициента γ в настоящее время можно рекомендовать таблицу 56, заимствованную у King'a и несколько дополненную и исправленную на основании данных исследований в Средней Азии.

Таблица 56

Таблица значений коэфициентов шероховатости γ по Базену

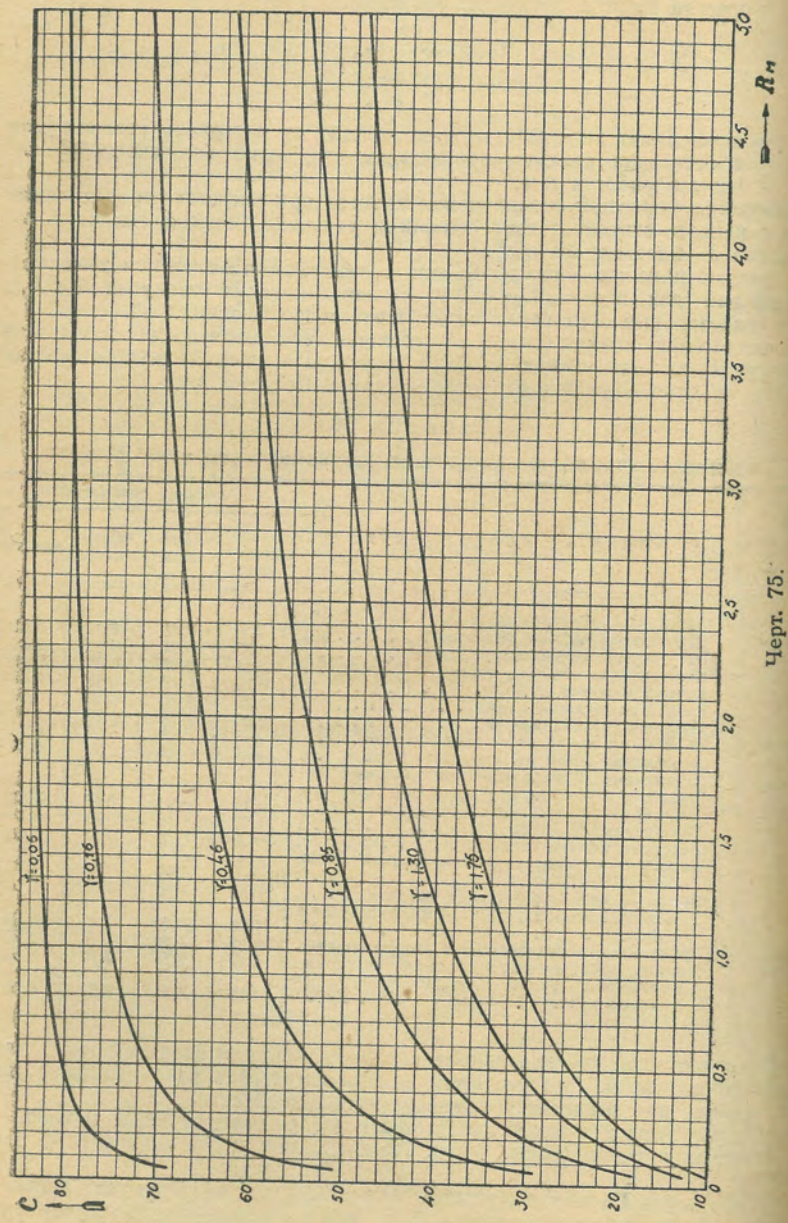
№ по порядку	Характер поверхности	Состояние поверхности: очень хорошее	хорошее	обычное	плохое
1	Штукатурка чистым цементом	—	**0,06**	0,14	0,22
2	Штукатурка цементным раствором	0,06	**0,11**	0,22	0,34
3	Кирпичная кладка на цементном растворе	0,14	**0,22**	0,34	0,50
4	Бетонированные каналы	0,14	**0,28**	0,42	0,55
5	Кладка из тесаного камня	0,22	**0,28**	0,35	0,50
6	Обычная бутовая кладка	0,30	**0,70**	1,10	1,40
7	Деревянные лотки из строганых досок	—	**0,14**	0,22	0,28
8	Деревянные лотки из нестроганых досок	—	**0,22**	0,28	0,34
9	Деревянные лотки с набитыми поперек планками, с глубиною, превышающей 4-кратную высоту планки	0,14	**0,34**	**0,42**	0,55
10	Металлические лотки новые	0,06	**0,14**	0,22	0,34
11	Лессовые каналы чистые	0,30	0,70	**0,85**	1,00
12	Лессовые каналы, заросшие травой и камышом	—	**1,00**	1,30	1,75
13	Земляные каналы в хороших условиях	0,50	0,70	**0,90**	1,10
14	Земляные каналы заросшие, с крупным камнем и пр.	1,10	1,40	**1,75**	2,15
15	Гравелистый и песчано-галечниковые каналы	0,80	1,20	1,75	2,15
16	Каналы, проложенные в скале экскаватором	1,40	1,75	**2,10**	2,35
17	Естественные русла, заросшие, с крупным камнями и пр.	1,75	**2,50**	3,50	4,00

В приведенной таблице наиболее употребительные значения выделены жирным шрифтом. Эти же коэфициенты могут быть рекомендованы для применения при расчетах крупной ирригационной сети.

Коэфициенты для рек приводятся в разделе гидрометрии во II томе.

Ниже приложены график (черт. 75) и таблица 58 для определения C по Базену.

б. **Формула Гангилье-Куттера** (метровые размеры). Формула Гангилье-Куттера применима для каналов с большими расходами и малыми уклонами.



Черт. 75.

Особенностью ее является то, что она дает зависимость коэфициента C от уклона. Коэфициент C по Гангилье-Куттеру определяется:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{i}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}001555}{i}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}}, \qquad (122)$$

где n — коэфициент шероховатости, i — уклон дна канала и R — гидравлический радиус.

Ниже приложены график 76-а и таблица 59 для определения по Гангилье-Куттеру значений C (значения для рек приведены во II томе в разделе „Гидрометрия").

в) Формула акад. Павловского для определения коэфициента C имеет вид показательной формулы

$$C = \frac{1}{n} R^y, \qquad (123)$$

где n — коэфициент шероховатости по классификации Гангилье-Куттера;

R — гидравлический радиус;

$y = 2{,}5\sqrt{n} - 0{,}13 - 0{,}75\sqrt{R}\ (\sqrt{n} - 0{,}1)$.

Для практических расчетов общее выражение для y может быть упрощено. Так для

$$R < 1\text{ м} \ldots\ldots y = 1{,}5\sqrt{n}.$$
$$R > 1\text{ м} \ldots y \cong 1{,}3\sqrt{n}.$$

Расчет по формуле акад. Павловского при $R > 2$ дает значительные отклонения от практических величин, а потому пользование его формулой в этих случаях не рекомендуется.

На стр. 322 дан график 76-б для подсчетов значений C по формуле акад. Павловского.

г) Формула Маннинга (метровые размеры). Наиболее распространенной формулой в США после формулы Гангилье-Куттера является формула Маннинга:

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{n} R^{0{,}167}, \qquad (124)$$

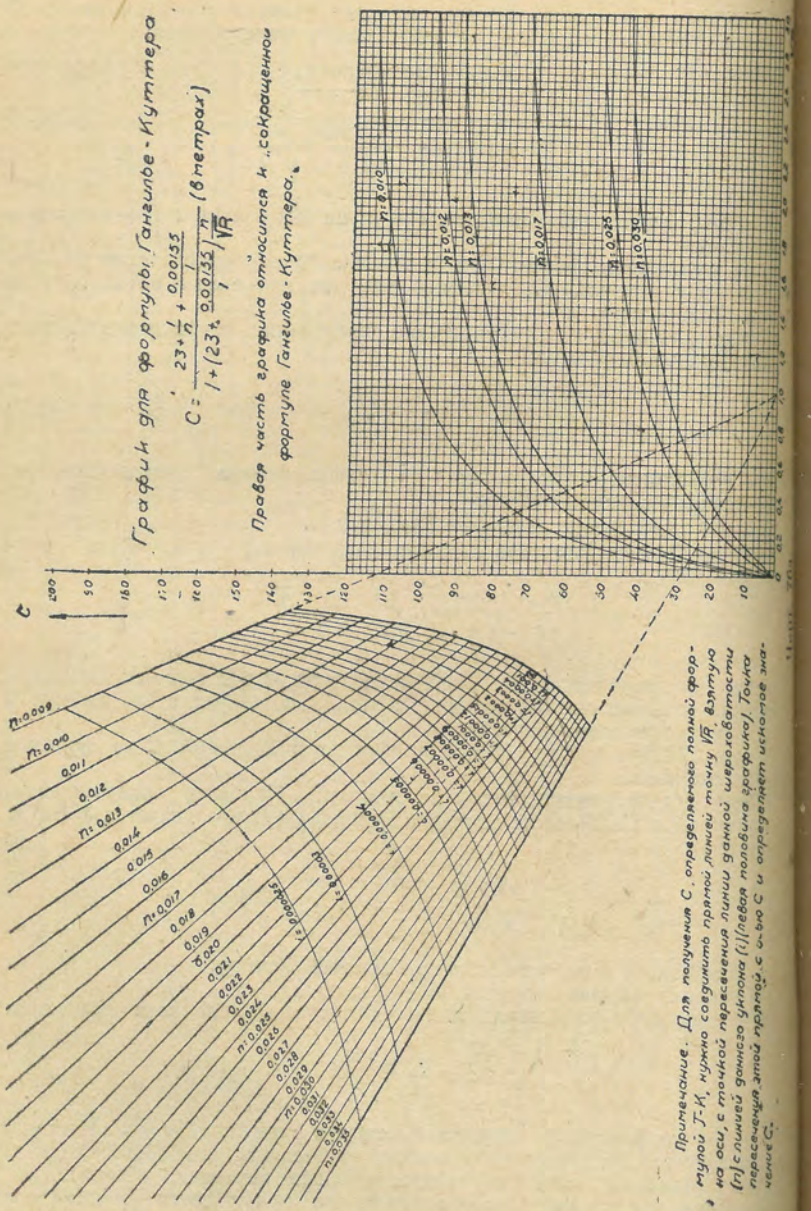
где n — коэфициент шероховатости по Гангилье-Куттеру;

R — гидравлический радиус.

д) Формула Форхгеймера отличается от предыдущей только значением показателя R:

$$c = \frac{1}{n} R^{0{,}20} \qquad (124)$$

Значения коэфициентов шероховатости n к формулам Гангилье-Куттера, акад. Павловского, Маннинга и Форхгеймера дается в таблице 55, где жирным шрифтом выделены наиболее употребительные значения, обычные для справочников; эти же значения рекомендуются при расчете крупной ирригационной сети.



Примечание. Для получения C, определенного полной формулой Г.-К., нужно соединить прямой линией $\sqrt{R}$, взятую на оси, с данной шероховатости (i) левой части графика. Пересечение этой прямой с линией данного уклона (i) правой части графика даст искомое значение C.

Таблица 57

Значение коэфициентов шероховатости n к формулам Гангилье-Куттера, Маннинга, Форхгеймера и Павловского.

№ по порядку	Характер поверхности	Состояние поверхности: очень хорошее	хорошее	обычное	плохое
1	Бетонные трубы	0,012	0,013	0,015	0,016
2	Клепаные и стальные спиральные трубы	0,013	0,015	0,017	—
3	Поверхность из чистого цемента	0,010	0,011	0,012	0,013
4	Штукатурка цементным раствором	0,011	0,012	0,013	0,015
5	Кирпичная кладка на цементном растворе	0,012	0,013	0,015	0,017
6	Бетонированные каналы, облицовка	0,012	0,014	0,016	0,018
7	Облицовка из тесаного камня	0,013	0,014	0,015	0,017
8	Обычная бутовая кладка на цементном растворе	0,017	0,020	0,025	0,030
9	Сухая бутовая кладка	0,025	0,030	0,035	0,035
	Деревянные лотки				
10	Из строганых досок	0,010	0,012	0,013	0,014
11	Из нестроганых досок	0,011	0,013	0,014	0,015
12	Из досок с наколоченными планками глубиною 50 на 4	0,012	0,015	0,016	
	Металлические лотки				
13	Полуциркульные металлические лотки чистые	0,011	0,012	0,013	0,015
	Каналы и водостоки в естественном грунте				
14	Земляные каналы правильной формы	0,017	0,020	0,0225	0,025
15	Извилистые каналы с медленным течением	0,0225	0,025	0,0275	0,030
16	Земляные каналы, вырытые землечерпалкой	0,025	0,0275	0,030	0,033
17	Каналы в лессовом грунте чистые и правильной формы	0,017	0,020	0,0225	0,025
18	Каналы в лессовом грунте засоренные и заросшие	—	0,027	0,030	0,035
19	Каналы в гравии с песком	0,020	0,025	0,027	0,030
20	Каналы в галечнике	0,025	0,027	0,030	0,033
21	Габионная кладка	—	0,030	0,035	—
22	Чисто высеченные в скале правильной формы каналы	0,025	0,030	0,033	0,035
23	Земляное дно, откосы из каменной кладки	0,028	0,030	0,033	0,035
24	Грубое каменистое дно с заросшим земляным откосом	0,025	0,030	0,035	0,040
25	Грубо высеченные в скале, неправильного сечения каналы	0,035	0,040	0,045	—
	Русло естественных рек				
26	Чистое прямое ложе без обвалов и глубоких промоин	0,025	0,0275	0,030	0,033
27	То же, что (26), но с камнями и слегка заросшее	0,030	0,033	0,035	0,040
28	Чистое извилистое ложе с небольшим количеством промоин и отмелей	0,033	0,035	0,040	0,045
29	То же, что (28), но слегка заросшее и с камнями	0,035	0,040	0,045	0,050
30	То же, что (28), в нижних плесах, с меньшим уклоном	0,040	0,045	0,050	0,055
31	То же, что (28), каменистые участки	0,045	0,050	0,055	0,060
32	Участки рек с очень медленным течением: значительно заросшие и с очень глубокими промоинами	0,050	0,060	0,070	0,080
33	Очень сильно заросшие участки рек	0,075	0,1000	0,125	0,150

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \ (м)$$

Таблица 58

R \ γ	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75
0,05	68,5	50,7	28,4	18,1	12,8	9,9
0,06	69,8	52,6	30,2	19,4	13,8	10,7
0,07	70,9	54,2	31,7	20,6	14,7	11,4
0,08	71,8	55,6	33,1	21,7	15,5	12,1
0,09	72,5	56,7	34,4	22,7	16,3	12,7
0,10	73,1	57,7	35,5	23,6	17,0	13,3
0,11	73,6	58,7	36,5	24,4	17,7	13,9
0,12	74,1	59,5	37,4	25,2	18,3	44,4
0,13	74,6	60,2	38,2	25,9	18,9	14,9
0,14	75,0	60,9	39,0	26,7	19,4	15,0
0,15	75,3	61,5	39,7	27,2	19,9	15,8
0,16	75,6	62,1	40,5	27,8	20,4	16,2
0,17	75,9	62,7	41,2	28,4	20,9	16,6
0,18	76,2	63,2	41,8	29,0	21,4	17,0
0,19	76,5	63,6	42,4	29,5	21,8	17,3
0,20	76,7	64,1	42,9	30,0	22,3	17,7
0,21	76,9	64,5	43,5	30,5	22,7	18,1
0,22	77,1	64,9	44,0	30,9	23,1	18,4
0,23	77,3	65,2	44,4	31,4	23,4	18,7
0,24	77,5	65,5	44,8	31,8	23,8	19,0
0,25	77,6	65,9	45,3	32,2	24,2	19,3
0,26	77,8	66,2	45,7	32,6	24,5	19,6
0,27	78,0	66,5	46,1	33,0	24,8	19,9
0,28	78,1	66,8	46,5	33,4	25,2	20,2
0,29	78,3	67,0	46,9	33,7	25,5	20,5
0,30	78,4	67,3	47,3	34,1	25,8	20,7
0,31	78,5	67,6	47,6	34,3	26,1	21,0
0,32	78,6	67,8	47,9	34,7	26,4	21,2
0,33	78,8	68,0	48,2	35,1	26,7	21,5
0,33	78,9	68,2	48,5	35,4	26,9	21,7
0,35	79,0	68,4	48,8	35,7	27,2	22,0
0,35	79,1	68,6	49,2	36 0	27,5	22,2
0,37	79,2	68,8	49,5	36,3	27,7	22,4
0,38	79,2	68,0	49,8	35,6	28,0	22,7
0,39	79,3	69,2	50,1	36,8	28,2	22,9
0,40	79,4	69,4	50,4	37,1	28,5	23,1
0,41	79,5	69,6	50,6	37,4	28,7	23,3
0,42	79,6	69,7	50,9	37,6	28,9	23,5
0,43	79,7	69,9	51,1	37,9	29,2	23,7
0,44	79,7	70,1	51,4	38,1	29,4	23,9

Таблица 58 (продолжение)

R \ γ	0,06	0,16	0,46	0,85	1,10	1,75
0,45	79,8	70,2	51,6	38,4	29 6	24,1
0,46	79,9	70,4	51,8	38,6	29,8	24,3
0,47	80,0	70,5	52,0	39,8	30,0	24,5
0,48	80,0	70,6	52,3	39,1	30,2	24,7
0,49	80,1	70,8	52,5	39,3	30,4	24,8
0,50	80,2	70,9	52,7	39,5	30,6	25,0
0,55	80,4	71,5	53,7	40,5	31,6	25,9
0,60	80,7	72,1	54,6	41,4	32,5	26,7
0,65	80,9	72,6	55,4	42,3	33,3	27,4
0,70	81,1	73,0	56,1	43,1	34,1	28,1
0,75	81,3	73,4	56,8	43,9	34,8	28,8
0,80	81,5	73,8	57,4	44,6	35,5	29,4
0,85	81,7	74,1	58,0	45,2	36,1	30,0
0,90	81,8	74,4	58,6	45,9	36,7	30,6
0,95	81,9	74,7	59,1	46,5	37,3	31,1
1,00	82,0	75,0	59,6	47,0	37,8	31,6
1,10	82,2	75,4	60,5	48,0	38,8	32,6
1,20	82,4	75,9	61,3	48,9	39,7	33 5
1,30	82,6	76,3	62,0	49,8	40,6	34,3
1,40	82,8	76,6	62,6	50,6	41,4	35,1
1,50	82,9	76,9	63,2	51,3	42,2	35,8
1,60	83,0	77,2	63,8	52,0	42,9	36,5
1,70	83,1	77,5	64,3	52,6	43,6	37,1
1,80	83,2	77,7	64,8	52,2	44,2	37,7
1,90	83,3	77,9	65,2	53,8	44,8	38,3
2,00	83,4	78,2	65,6	54,2	45,3	38,9
2,20	83,6	78,5	66,4	55,3	46,4	39 9
2,40	83,7	78,8	67,1	56,2	47,3	40,8
2,60	83,8	79,1	67,7	57,0	48,1	41,7
2,80	83,9	79,4	68,2	57,7	48,9	42,5
3,00	84,0	79,6	68,7	58,3	49,7	43,3
3,20	84,1	79,8	69,2	58,9	50,4	44,0
3,40	84,2	80,0	69,6	59,5	51,0	44,6
3,60	84 3	80,2	70,0	60,1	51,6	45,2
3,80	84,4	80,4	70,4	60,6	52,2	45,8
4,00	81.4	80,5	70,7	61,0	52,7	46,4
4,50	84,6	80,9	71,5	62,1	53,9	47,6
5,00	84,7	81,2	72,1	63,0	56,0	48,8
5,50	84,8	81,4	72,7	63,8	56,0	49,8
6,00	84,9	81,6	73,2	64,6	56,8	50,7
8,00	85,2	82, 3	74,8	66,9	59,5	53,7
10,00	85,3	82, 8	75,9	68 5	61,6	56,0
12,00	85,5	83,1	76,8	69.9	63,3	57,8
15 00	85,6	83,5	77, 7	71.3	65,1	60,9
20,00	85,6	85,0	7 8,8	73,0	67,3	62,5

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{i}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{i}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}} \ (м)$$

Таблица 59

Таблица значений коэфициента C по формуле Гангилье-Куттера

n	R \ i	0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,001	0,01
0,010	0,05	38	44	51	54	56	57	58
	0,10	49	56	61	65	68	70	71
	0,20	63	70	74	77	78	79	80
	0,30	72	77	81	84	85	86	87
	0,50	83	86	88	90	91	91	91
	1,00	100	100	100	100	100	100	100
	2,00	115	111	109	107	106	105	105
	3,00	124	117	113	111	110	109	108
	5,00	134	123	118	115	113	112	111
	15,00	151	135	125	121	118	117	116
0,013	0,05	28	31	35	38	40	41	42
	0,10	36	40	44	47	49	50	51
	0,20	46	50	53	56	58	59	59
	0,30	53	57	60	63	64	64	65
	0,50	62	65	67	69	69	70	70
	1,00	77	77	77	77	77	77	77
	2,00	90	87	85	84	83	82	82
	3,00	99	94	89	88	87	86	85
	5,00	108	100	93	91	90	89	88
	15,00	125	114	102	93	96	94	92
0,017	0,05	19	22	24	26	28	29	29
	0,10	25	29	32	34	35	36	36
	0,20	34	37	39	41	42	42	43
	0,30	40	43	45	46	47	47	48
	0,50	47	49	50	51	51	52	52
	1,00	58	58	58	58	58	58	58
	2,00	71	69	67	66	65	64	64
	3,00	78	74	71	70	69	68	68
	5,00	87	79	75	73	72	71	70
	15,00	105	90	83	79	77	76	75
0,020	0,05	15	18	20	21	23	23	24
	0,10	21	23	25	28	29	29	30
	0,20	28	30	32	34	35	36	36
	0,30	33	35	37	38	39	40	40
	0,50	40	41	42	43	43	44	44
	1,00	50	50	50	50	50	50	50

Таблица 59 (продолжение)

n	R \ i	0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,001	0,01
	2,00	61	59	57	56	55	55	55
	3,00	69	64	61	9	59	58	58
	5,00	76	70	66	63	62	61	61
	15,00	94	81	74	70	68	67	66
0,025	0,05	12	13	15	16	17	18	19
	0,10	17	18	19	20	21	22	22
	0,20	22	23	24	25	26	27	27
	0,30	25	28	29	30	30	31	31
	0,50	31	32	33	34	34	35	35
	1,00	40	40	40	40	40	40	40
	2,00	50	48	47	46	45	45	45
	3,00	56	53	51	49	48	48	47
	5,00	64	59	54	53	52	51	50
	15,00	81	71	63	59	57	56	55
0,030	0,05	10	11	12	13	13	14	14
	0,10	13	14	15	16	17	18	18
	0,20	18	19	19	20	21	22	22
	0,30	21	22	23	24	24	25	25
	0,50	25	26	27	27	28	29	29
	1,00	33	33	33	33	33	33	33
	2,00	42	41	40	40	39	38	38
	3,00	48	45	43	42	42	41	41
	5,00	56	51	47	45	44	43	43
	15,00	72	62	55	52	51	49	48
0,035	0,05	8	9	9	10	10	11	11
	0,10	11	12	12	13	13	14	14
	0,20	15	16	16	17	17	18	18
	0,30	18	19	19	20	20	21	21
	0,50	22	23	23	23	24	24	24
	1,00	29	29	29	29	29	29	29
	2,00	35	35	34	34	33	33	33
	3,00	42	40	38	37	36	36	35
	5,00	49	45	43	42	41	40	39
	15,00	65	56	51	47	45	44	43
0,040	0,05	6	7	7	8	8	9	9
	0,10	9	10	11	11	12	12	12
	0,20	13	14	14	15	15	16	16
	0,30	15	16	17	18	18	18	18
	0,50	19	19	20	20	21	21	21
	1,00	25	25	25	25	25	25	25
	2,00	32	31	31	30	30	29	29
	3,00	37	35	34	33	33	32	32
	5,00	44	41	39	38	37	36	35
	15,00	59	52	46	43	42	41	40

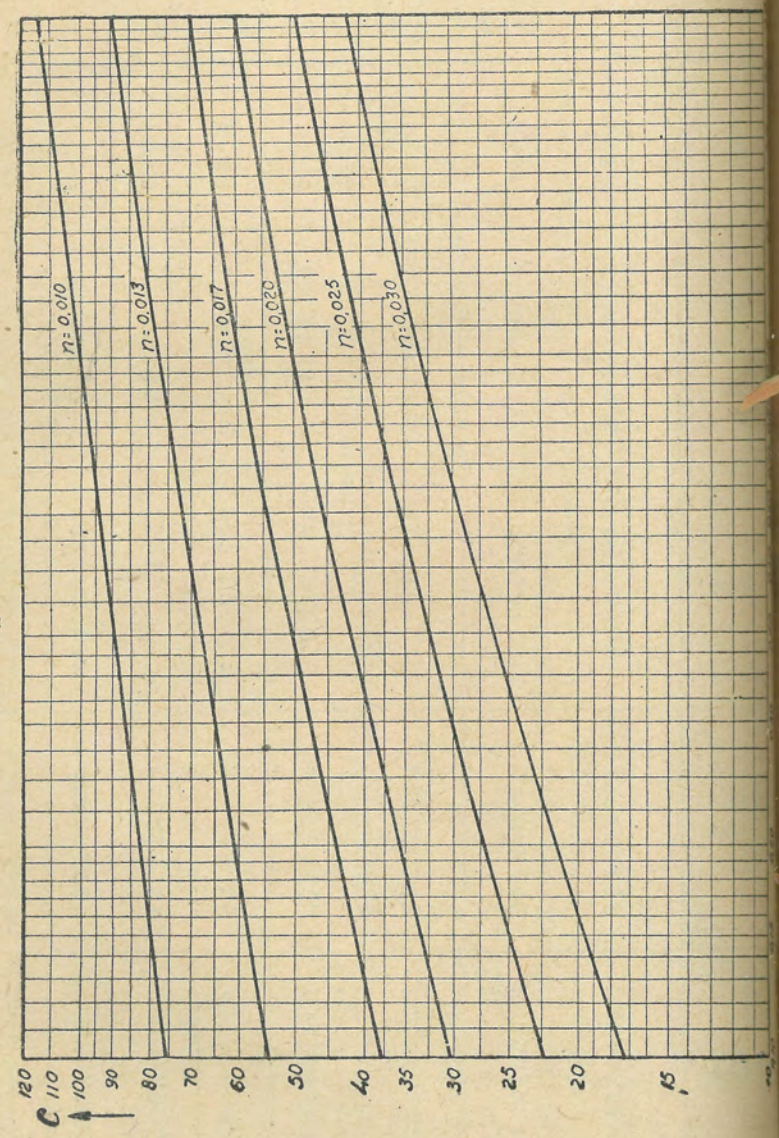


График для формул проф. Павловского

$$C = \frac{1}{n} R^y \text{ (в метрах).}$$

В. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОДСЧЕТА ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КАНАЛОВ.

А. Основные формулы (черт. 77).

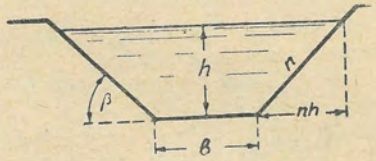
ширина канала по дну — b;
глубина воды — h;

заложение откоса — $n = \frac{nh}{h} = \operatorname{ctg}\beta$; (125)

площадь живого сечения — $\omega = (b + nh)\,h$;

гидравлический радиус — $R = \frac{\omega}{\chi}$;

смоченный периметр — $\chi = b + 2h\sqrt{1+n^2} = b + \zeta h$.



Черт. 77.

Для упрощения приводится таблица 60 значений ζ, вычисленных по приведенной выше формуле:

Таблица 60

n	0	1/2	3/4	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2	2,5	3
ζ	2,00	2,24	2,50	2,83	3,20	3,61	4,03	4,47	5,39	6,33

Б. Наивыгоднейшее сечение.

Гидравлически наивыгоднейшее поперечное сечение канала будет такое, которое при заданном Q и i требует наименьшую площадь поперечного сечения, следовательно наименьшее количество земляных работ.

При прежних обозначениях для трапецоидальных профилей элементы гидравлически наивыгоднейшего профиля определяются условиями:

$$b = 2h\,(\sqrt{1+n^2} - n) = Ah,$$
$$\omega = h^2\,(2\sqrt{1+n^2} - n) = Bh^2, \qquad (126)$$
$$R = \frac{h}{2}.$$

Значения величин A и B к формулам (126) даны в таблице 61.

Таблица 61

$n=0$	1/4	1/2	3/4	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2	2 1/2	3
$A=2{,}000$	1,562	1,236	1,000	0,828	0,702	0,606	0,532	0,472	0,385	0,325
$B=2{,}000$	1,812	1,734	1,750	1,828	1,950	2,107	2,282	2,468	2,882	3,324

В. Пользование основными формулами.

Определение расхода делается по формуле:

$$Q = K\sqrt{i},$$

где $K = f(h)$ для определенных b, n, ζ.

Следовательно возможно пользоваться графиками K для расчетов канал

Точно так же скорость чаще всего определяется по уравнениям:

$$V = S\sqrt{i},$$

где $S = f(h)$ при определенном b, n и ζ. Значения K и S легко предс вляются в виде графиков.

В расчетах каналов с равномерным режимом встречаются следующ случаи для решения:

а) определение расхода или скорости;

б) определение уклона;

в) подбор профиля поперечного сечения канала.

Первые два случая решаются достаточно просто, так как неизвест является лишь одна величина. Самое решение обычно проводится в дующей табличной форме:

Таблица 62

b	h	ω	χ	R	C	S	K	v	Q
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Иногда графы 7 и 8 не вычисляются.

Решение задач последнего (3) типа представляет собою проектирова канала. Для этого удобно пользоваться готовыми таблицами для расче каналов Тутышкина, графиками Лапшиной, таблицами Кузнецова и др.

Основная схема расчетов может быть сведена для трех случаев в сл дующую таблицу.

Таблица 63

Тип	Дано	Определить	Схема решения
1	b, n, h, i γ или n	Q или V	K и S по форме таблицы 62, затем находят Q или v
2	Q, b, n, h γ или n	i	K и S находят по форме таблицы 62. Уклон определяю по уравнению $i = Q^2/K^2$
3	Q, i γ или n	b, n, h	Прежде всего определяют по расходу Q и уклону i зна чения K и S по уравнениям: $K = \frac{Q}{\sqrt{i}}$ и $S = \frac{V}{\sqrt{i}}$. После этого по таблицам или графикам находят подхо дящие значения элементов сечения каналов. В случае отсутствия таблиц и графиков необходимо делать под бор, пользуясь таблицей 62 и по ней давая графическое изображение зависимостей K и S.

Г. Допускаемая скорость и условия неразмываемости русла.

При расчете каналов необходимо иметь в виду, что для назначения скоростей существуют два предела:

1) предел высший — скорости не должны превосходить скоростей, размывающих русло;

2) предел низший — скорости в каналах должны быть не ниже тех, при которых происходит перенос взвешенных в воде частиц, т. е. каналы должны быть незаиляемыми.

1. Максимальные допустимые скорости. Максимальные допустимые скорости следует различать для двух видов каналов — каналов в естественных грунтах и каналов с искусственным креплением.

а) Максимальные скорости для естественных грунтов.

Максимальные скорости для естественных грунтов более правильно определять по данным, приведенным Обществом гражданских инженеров САСШ в 1925 г., выработанным на основании специальных анкетных обследований целой серии каналов. Основные данные для глубины каналов около 1 *м* и нормальной их извилистности рекомендуются по таблице 64, где пределы для мелкой сети взяты по данным СССР.

Таблица 64

Таблица предельно допустимых скоростей для естественных грунтов

№ по пор.	Характеристика грунта и крепления	Скорости в *м/сек* для каналов глубиной до 1,0 *м*		
		Чистая вода	Вода с коллоид. наносом	Вода с неколоид. наносом
1	Тончайший илистый грунт (коллоидальный)	0,15	—	—
2	Мелкий, песок чистый, сыпучий	0,45	0,75	0,45
3	Аллювиальный грунт	0,60	1,05	0,60
4	То же, что 3, но коллоидальный	1,25	1,50	0,90
5	Слабый глинистый грунт, легкий суглинок	0,55	0,75	0,60
6	Обыкновенная плотная глина, лесс влажный, плотный	0,75	1,05	0, 0
7	Гравий средний до 1 *см*, глинистый грунт средней плотности	0,75	1,50	1,15
8	Плотная глина, коллоидальный „шох", третичная глина, мергеля	1,15 1,20	1,50 1,80	0,90 2,00
9	Крупный грубый песок	1,50	1,70	2,00
10	Гравий крупный и мелкая галька	1,80	1,80	1,50
11	Крупная галька			
12	Булыжник, каменистый грунт, песчаники и конгломерат рыхлый	1,80	1,80	2,80 1,50
13	Сланцы	—	—	3,50
14	Эоценовый известняк плотный конгломерат	—	—	5,00
15	Твердая скала (граниты, порфиры)	—	—	—
16	Мелкая ирригационная сеть в грунт. легких	—	0,65	—
	„ „ „ „ „ тяжелых	—	0,70 — 0,80	—

В каналах с глубинами более 1 *м* разрешается скорость увеличивать на 0,15 м/сек. Для каналов с большей извилистостью рекомендуется скорость уменьшать на 15%. Точно так же скорости в каналах, идущих в полной насыпи и с подсыпным дном, должны быть снижены на 15%. В мелкой сети лучше скорости брать не выше 0,4—0,5 м/сек.

б) Предельные скорости для креплений. Как допускаемые скорости при креплениях каналов могут быть приняты следующие скорости *м/сек*:

Таблица 65

№ по пор.	Типы креплений	*м/сек*
1	Дерновка плашмя	0,80
2	Дерновка в стенку, чием, крепление камышом	1,80
3	Крепление хворостяными плетнями	2,50
4	Одиночная мостовая, камышит	2,50
5	Двойная мостовая	3,50
6	Кирпичная кладка из железняка на цементном растворе, бетонное крепление при мягких наносах	4,50
7	Крепление каменной, крупной кладкой мостовой из крупного рваного камня, бутовая кладка, габионы	5,0
8	Бетонирование при чистой воде не более	10,0
9	Деревянные лотки, быстротоки и другие сооружения не более	20,0
10	Тесаный гранит	10,0

2. Заиляющие скорости. Каналы проверяются на заиление только в том случае, когда уклон их находится в пределах от 0,0001 до 0,002, так как каналы при уклонах, меньших 0,0001, и обычных расчетных расходах почти невозможно получить незаиляемыми, а каналы при уклонах больше 0,0 всегда имеют скорости, достаточные для переноса взвешенных частиц.

Кроме того необходимо учитывать возможность зарастания каналов сорной растительностью, для чего в них необходимо поддерживать скорость в среднем не ниже 0,5 *м/сек*, приведенный предел конечно не относится к расчету мелкой и мельчайшей ирригационной сети.

Незаиляемость каналов обеспечивается, если скорости в каналах больше или близки к критическим незаиляющим скоростям. Критическая скорость определяется по эмпирическим формулам:

а) по Кеннеди (Kennedy) $v_{кр} = Kh^m$;

б) по Ласею (Lacy) $v_{кр} = LR^{0,5}$, (127)

где $v_{кр}$ — критическая скорость в *м/сек*, при которой не происходит отложения определенных фракций, влекомых потоком наносов во взвешенном состоянии.

Таблица 66

№ по пор.	Наименование систем	K	L
1	Баридоабская система по Кеннеди	0,546	0,64
2	Мадрасская система — по Кеннеди	0,397	0,55
3	Система Бирма по — Кеннеди	0,545	0,57
4	Для системы Синда — по Кеннеди	0,410	0,64
5	Для Нижнечинабской системы по Линдлею	0,570	0,57
6	Для сиамских систем — по Линдлею	0,346	0,66
7	Для нильских условий Египта	0,365	0,61
8	Для системы Халеб в Египте	0,282	0,43
9	Для Калифорнийской системы	0,585	0,64
10	По Морицу для мутной воды	0,60 — 0,71	0,64
11	По Морицу для относительно чистой воды	0,47 — 0,60	0,50

K и L — коэфициенты к формулам Кеннеди и Лассея, зависящие от насыщенности воды насосами и от их крупности.

h — наибольшая глубина воды в канале в метрах;

R — гидравлический радиус;

m — коэфициент, по Кеннеди $m = 0,64$.

Коэфициенты L и K зависят от свойств наносов, поэтому при проектировании новых систем или их переустройстве, а также при проектировании деривационных каналов эти значения должны быть определены специальными исследованиями. Для каналов северной Индии (Баридоабская система с проверкой затем на Пенджабинских каналах) по исследованиям Кеннеди K в метрических мерах равно 0,546, что для коэфициента Лассея дает $L = 0,64$

Лассеем расчетные данные к его формуле даются в следующем виде

Таблица 67

№ по пор.	Наименование систем	L
1	Для Баридоабской системы	0,640
2	Для Чинабских систем по Линдлею	0,630
3	Для Мадрасских систем по Кеннеди	0,430
4	Для р. Аракса на основании специальных однолетних исследовательских работ с пересчетом на формулу Лассея	0,650

Ввиду большой затруднительности установления размеров коэфициента K и показателя степени m к формуле Кеннеди приводим имеющиеся данные для этих коэфициентов для отдельных систем.

Влияние коэфициентов L и K для ирригационных систем должно изменяться в зависимости от продвижения воды по различным каналам. Так магистральный канал должен считаться на более высокие коэфициенты L и K, распределители — на более пониженные, а оросительная сеть — на еще более пониженные. Общий предел понижения иногда достигает до 25%. Для грубой ориентировки при проектировании может быть предложена таблица 68 поправочных коэфициентов.

Таблица 68

№ по порядку	Характеристика источников орошения	Поправочный коэфициент η	Исправленные значения K	Исправленные значения L
1	Горные речки и потоки большей мутности с очень крупным песком во взвешенном состоянии	1,30	0,70	0,83
2	Верхнее течение рек и потоков с крупным песком	1,15	0,62	0,74
3	Река в верхних частях долин и потоки с песком средней крупности	1,0	0,546	0,64
4	Среднее течение рек и потоков с мелким песком	0,94	0,516	0,60
5	Нижнее течение рек и потоков с самым мелким песком	0,80	0,44	0,51
6	Спокойное течение рек и потоков с илистыми наносами (тип реки Нила)	0,67	0,36	0,45
7	Реки и потоки с весьма легким илистым наносом	0,50	0,27	0,32

Для ирригационных систем Союза законченных исследований по заиляемости каналов нет, а потому можно применять следующие методы для определения коэфициентов L и K.

1. При переустройстве систем. При переустройстве систем или расширении существующих систем коэфициенты L и K могут быть определены опытным путем. Необходимо найти незаиляемые и притом неразмываемые участки каналов — практически каналы с нулевой ежегодной очисткой. Лучше всего эти участки выбирать на магистральных каналах, из которых будет питаться переустраиваемая система. На избранных участках измеряются средняя скорость и поперечное живое сечение, определяется средняя и наибольшая глубина. На основании этих данных легко вычислять коэфициенты L и K. Лучше, если таких участков будет обследовано в каждой изучаемой системе несколько — порядка 10. Коэфициенты L и K определяются по уравнениям:

$$K = \frac{v_{кр}}{h^{0,64}} \quad \text{и} \quad L = \frac{v_{кр}}{R^{0,5}}. \tag{128}$$

2. При проектировании новых систем. При невозможности найти незаиляемые участки или при проектировании новых систем коэфициенты L и K могут быть определены по приближенному методу Паркера. Для существующих систем берут со дна каналов пробы наносов, причем лучше пробы наносов брать из каналов, расположенных непосредственно выше намеченных к переустройству; для новых каналов пробы наносов берутся в ближайших выше расположенных от источника орошения каналах, находящихся приблизительно в таких же условиях. Производится механический анализ взятых наносов и определяется гидравлическая крупность наносов с выделением песчанистых фракций со скоростью падения более 20 *мм/сек* или диаметр более 0,3 *мм*; тогда коэфициенты L и K определяют по формулам:

$$\begin{aligned} K &= 0{,}0137\ p, \\ L &= 0{,}0160\ p, \end{aligned} \tag{129}$$

где p — процент по объему от всего количества наносов песчаных фракций для данной системы.

3. В случае отсутствия на изучаемых системах устойчивых каналов с ежегодной нулевой очисткой возможно применение для определения коэфициентов L и K способа, предложенного проф. Михайловым.

На изучаемой системе ставятся специальные исследования с определением поперечных профилей, средних скоростей и с определением количества проносимых наносов во взвешенном состоянии.

При замерах в двух створах проходящей воды с учетом ее добегания от одного створа до другого выбирают для определения L и K те значения расходов, при которых количество наносов в верхнем и нижнем створах оказываются постоянными. Точки с такими мгновенными устойчивыми элементами являются точками, характеризующими кривую незаиляемости данного канала. Эти точки наносятся на общий график, и по ним строится кривая незаиляемости, для которой и подсчитываются коэфициенты L и K.

4. Для безусловно заиляющихся каналов. В случае невозможности запроектировать незаиляющийся канал по условиям рельефа или характеру грунта в котором идет канал (например хивинские условия в Средней Азии), рекомендуется поддерживать на протяжении всего канала одну и ту же скорость, по возможности близкую к скорости в источнике орошения.

Д. Устойчивые профили каналов.

а) Общие данные. При проектировании сбросов из различных каналов довольно часто приходится пропускать воду по естественным логам или по склонам с достаточно большими скоростями по размываемым естественным уклонам. В этом случае такие каналы разрабатывают себе русло точно также, как любой горный поток или река. Чаще всего форма русла получается гиперболической или параболической. Если обозначить допускаемую скорость при угле заложения откоса горизонтами β в канале через v_∂ и через v_e скорость, при которой начинается размыв русла (скорость эрозии), через φ — угол естественного откоса грунта в воде и через β — переменный угол заложения откоса канала, тогда связь между допускаемой скоростью для устойчивого русла v_∂ и скоростью эрозии v_e по Koechlin'y выражается следующим образом:

$$v_\partial^4 = v_e^4 \left(1 - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \varphi}\right). \tag{130}$$

При $\beta = 0$, т. е. для скорости у стержня, где касательная горизонтальна имеем:

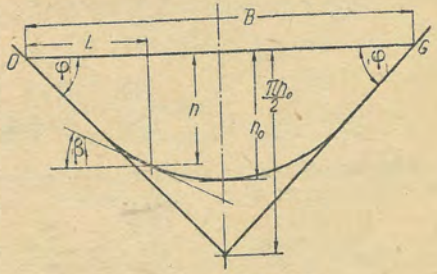
$$v_\partial = v_e$$

При $\beta = \varphi$, т. е. для верхнего предела заложения откоса, $v_\partial = 0$.

В приведенных ниже формулах значение λ представляет собой коэфициент шероховатости русла, выраженный следующим образом:

$$\lambda = \frac{2g}{C^2}, \tag{130}$$

причем значение C^2 может определяться по любой из имеющихся формул Базена, Гангилье-Куттера, Павловского или Маннинга (формулы 121—124).



Черт. 78.

Для определения ординат размыва естественного русла, учитывая его гиперболическую форму, получаем по данным Koechlinia (см. черт. 78) следующую зависимость:

$$h = \frac{\lambda v_e^2}{2gi} \sin \frac{2gi \operatorname{tg} \varphi}{\lambda v_e^2}\, z. \tag{131}$$

Для определения максимальной глубины h_0 необходимо иметь:

$$\sin \frac{2gi \operatorname{tg} \varphi}{\lambda v_e^2} z = 1. \tag{132}$$

Тогда получаем:

$$h_0 = \frac{\lambda v_e^2}{2gi}.$$

Для определения водного зеркала устойчивого русла, которое обозначим через B, необходимо определить в общем виде зависимость между глубинами и абсциссами z (см. черт. 78).

Эта зависимость получается:

$$h = h_0 \sin \frac{z \operatorname{tg} \varphi}{h_0}. \tag{133}$$

Для получения зеркала достаточно положить $h = 0$ и $z = B$, тогда получаем:

$$B = \frac{\pi \lambda v_e^2}{2gi \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\pi h_0}{\operatorname{tg} \varphi}. \tag{134}$$

Соответственно с этим уравнение 133 легко преобразовывается следующим образом:

$$h = h_0 \sin \frac{\pi}{B} z. \tag{135}$$

Для определения живого сечения устойчивого русла необходимо вычислить интеграл

$$\omega = \int_{z=0}^{z=B} h dz = h_0 \int_0^B \sin \frac{\pi}{B} z dz.$$

После вычисления интеграла получаем:

$$\omega = \frac{2h_0^2}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\lambda v_e^4}{2g^2 i^2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{2}{\pi} h_0 B. \tag{136}$$

Выражение для площади живого сечения при параболическом устойчивом русле может быть дано в виде:

$$\omega = \frac{2}{3} h_0 B.$$

Смоченный периметр устойчивого русла определяется следующим образом:

$$\chi = \int_{z=0}^{z=B} \sqrt{dz^2 + dh^2} = \int_0^B \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \frac{\pi}{B} z} \, dz. \tag{137}$$

В данном случае имеем для определения смоченного периметра эллиптический интеграл.

Рассматривая полученные Koechlin'ом формулы, заметим:

1) зависимость устойчивого русла определяется исключительно углом естественного откоса грунта в воде, т. е. величиной φ;

2) изменение продольного профиля является функцией коэфициента шероховатости γ, скорости размыва v_e, угла естественного откоса φ и уклона i. Следовательно для каждого уклона, соответствующего определенным естественным условиям грунта возможно получение только одного продольного профиля.

б) Определение устойчивости уклона для заданного расхода. Средняя скорость в продольном профиле определяется обычной формулой Шези:

$$v = C\sqrt{Ri}.$$

Для определения коэфициента C для широкого русла довольно часто при расчете устойчивых каналов пользуются формулой:

$$C = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} + \frac{\gamma}{3} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt[3]{R^2}\sqrt{i}}{\mu}}. \tag{138}$$

Значение μ не является постоянным, а меняется в зависимости от глубины и турбулентности движения.

Для практических подсчетов C значение μ можно принимать по формуле:

$$\mu = \frac{\gamma}{6g} \cdot \frac{v_1 \lambda \sqrt{R}}{A}, \tag{139}$$

где v_1 является максимальной скоростью при наибольших глубинах, A — коэфициент; для обычных условий, когда $R < 3$ *м* и $v < 3$ *м/сек*, можно принимать $A \cong 0{,}6$. Допуская $v_1 = v_\partial$, т. е. считая, что допускаемая скорость является как раз той максимальной скоростью, которая соответствует устойчивым каналам при образовании наибольших глубин, можно получить упрощенное выражение для μ:

$$\mu = 17 \frac{\sqrt{R}}{A} v_\partial \lambda. \tag{140}$$

Подставляя полученные данные в общую формулу для C, получим:

$$C = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} (1 + A\sqrt{R}). \tag{141}$$

Следовательно для определенного грунта и определенного предельного угла естественного откоса существует только один профиль для данного расхода Q. Если в уравнении 132 обозначить:

$$h_0 i = \frac{\lambda v_e^2}{2g} = D,$$

то получим:

$$v_e = \sqrt{\frac{D\,2g}{\lambda}}. \tag{142}$$

Пользуясь этим уравнением, уравнением Шези и приближенным выражением для радиуса $\left(R = \frac{\omega}{\chi}\right.$ и принимая $\chi \cong B$, имеем $\left. R = \frac{2h_0}{\pi}\right)$, получаем общее выражение для скорости в устойчивых руслах:

$$V_y = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \left[1 + A\sqrt{\frac{2h_0}{\pi}}\right] \sqrt{\frac{2h_0 i}{\pi}}; \tag{143}$$

производя преобразования, уравнение 143 легко приводится к следующему виду:

$$V_y = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}}\left[1 + 0{,}8\,A\sqrt{\frac{D}{i}}\right]0{,}8\sqrt{D}. \qquad (144)$$

Для определения выражения для расхода достаточно значение скорости V_y умножить на ω; тогда получаем следующие выражения для определения расхода:

$$Q = \frac{1{,}6h_0^2}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}\left[1 + 0{,}8A\sqrt{\frac{D}{c}}\right]\sqrt{D}.$$

$$Q = \frac{1{,}6v_e}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\left[1 + 0{,}8\,A\sqrt{\frac{D}{i}}\right]\frac{D^2}{i^2}. \qquad (145)$$

Приняв во внимание, что $h_0 = \frac{D}{i}$ и что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi h_0}{B}$ легко получаем:

$$Q = \frac{1{,}6v_e}{\operatorname{tg}\varphi}\left[1 + 0{,}8A\sqrt{h_0}\right]\cdot h_0^2; \qquad (146)$$

$$Q = 0{,}5\,v_e\left[1 + 0{,}8A\sqrt{h_0}\right]h_0 B.$$

По уравнению 145 видим, что наибольшая глубина увеличивается вместе с увеличением расхода. Отношение $\frac{h_0}{B} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pi}$ для устойчивого русла при любых расходах остается величиной постоянной.

Пользуясь общим выражением для расхода (146) и выражением для площади поперечного сечения, легко можно определить среднюю скорость в устойчивом русле, которая определяется следующим выражением:

$$V_y = 0{,}8v_e\left[1 + 0{,}8A\sqrt{h_0}\right], \qquad (147)$$

или принимая значение A, для условий, фактически встречающихся при расчетах имеем:

$$V_y = 0{,}8V_e\left[1 + 0{,}48\sqrt{h_0}\right]. \qquad (147)$$

РАЗДЕЛ VI

НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ И КАНАЛАХ.

1. Диференциальное уравнение неравномерного движения.

Общее уравнение неравномерного движения жидкости в открытых руслах было выведено в 30-х годах прошлого столетия.

Чаще всего вывод основного уравнения связывается с именем Беланже, но повидимому независимо от работ Беланже, эта же задача была решена Poncelet.

При выводе общего уравнения неравномерного установившегося движения Беланже рассматривал течение, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Предполагается, что частицы воды двигаются почти что по прямым линиям, что дает возможность пренебрегать центробежными силами, обусловленными криволинейным движением.

2. Допускается, что живые сечения потока изменяются настолько медленно, что является возможным считать скорость всех частиц перпендикулярной к живому сечению.

Таким образом при выводах общего уравнения неравномерного движения пренебрегают составляющими скоростей в плоскости живого сечения, которые безусловно всегда существуют, раз сечение изменяется.

Второе условие позволяет считать все струи истечения почти параллельными между собой, поэтому является совершенно безразличным, которую из струй принимать за ось потока.

Чаще всего принимают за ось потока линию свободной поверхности продольного профиля потока.

Для установившегося медленно изменяющегося движения водотока с открытым руслом выведено общее уравнение следующего вида (черт. 79):

$$i = \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{V^2}{2g}\right) + \frac{V^2}{C^2R}. \qquad (148)$$

В этой формуле приняты следующие обозначения:

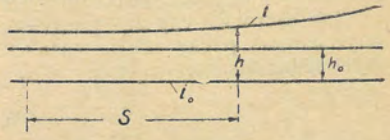
i — поверхностный уклон в рассматриваемом сечении AB;

v — средняя скорость;

R — гидравлический радиус;

C — коэфициент Шези;

α — коэфициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей поперечного сечения;



Черт. 79.

L и S — длина или расстояние от некоторой постоянной точки, от которой отсчитывают расстояния до сечения AB;

g — ускорение силы тяжести.

Интегрирование общего уравнения неравномерного движения представляет значительную трудность и разрешимо только для частных случаев. В частном случае для призматических русел, т. е. для русел, не меняющих формы поперечного сечения вдоль потока, общее уравнение приводится к виду:

$$-\frac{dh}{ds} = \frac{i_0 - \frac{Q_2}{C^2R\omega^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2B}{g\omega^3}} = i_0\frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - \frac{N_{кр}}{N}}, \qquad (149)$$

где кроме принятых выше обозначений введены следующие:

Q — расход в рассматриваемом сечении при глубине h;

B — ширина потока по верху, или зеркало потока;

ω — площадь поперечного сечения, или живое сечение;

i_0 — уклон дна, или уклон равномерного режима;

$N = \frac{\omega^3}{B}$ — контрольное отношение;

$$N_{кр} = \frac{\omega^3_{кр}}{B_{кр}} = \frac{\alpha Q^2}{g}.$$

Общее уравнение неравномерного движения [(см. уравнение (149)] при анализе его показывает, что оно имеет разрыв непрерывности тогда, когда знаменатель правой части этого уравнения обращается в нуль. Это соот-

ветствует критическим условиям движения потока и минимуму удельной энергии сечения потока. Приравнивая нулю знаменатель общего уравнения неравномерного движения, получаем:

$$1-\frac{\alpha Q^2 B}{g\omega^3}=0. \tag{150}$$

Уравнение (150) легко преобразуется так:

$$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{\omega_{кр}^3}{B_{кр}};\quad \frac{\omega_{кр}}{B_{кр}}=\frac{\alpha V^2}{g};\quad \frac{\omega_{кр}^3}{B_{кр}}=\frac{\alpha i_0 C_0}{g}\omega^2 R. \tag{151}$$

Для определения критических элементов ($h_{кр}$, $\omega_{кр}$, $B_{кр}$ и т. д.) необходимо решать подбором уравнения (151).

При практических расчетах быстротоков, консольных перепадов и в других случаях, когда имеем движения воды по трапецоидальному или параболическому руслу, необходимо пользоваться приведенным общим уравнением для определения критических элементов сечения.

Для частного случая движения потока по бесконечно широкому прямоугольному руслу общее уравнение может быть решено и дает следующую зависимость:

$$h_{кр}=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}, \tag{152}$$

Пользуясь уравнением (151), можно получить зависимость для критической глубины в следующем виде:

$$h_{кр}=h_0\sqrt[3]{\frac{\alpha C_0^2 i_0}{g}}. \tag{153}$$

В этом уравнении элементы со значком 0 обозначают гидравлические данные для равномерного режима.

2. Нормальные и критические глубины. Критический уклон.

Нормальной глубиной будем называть глубину наполнения при равномерном движении жидкости при определенном уклоне дна — i_0. Глубину равномерного режима будем обозначать через h_0. В дальнейшем все обозначения со значком 0 будут соответствовать элементам равномерного режима. При наполнении h_0 числитель правой части общего уравнения неравномерного движения обращается в нуль.

Критической глубиной, как указано выше, называется такая глубина, при которой знаменатель правой части общего уравнения неравномерного движения обращается в нуль. Все элементы, соответствующие критическому состоянию потока, в дальнейшем будем обозначать значком „кр".

Критическим уклоном называется тот уклон дна водотока, при котором для данной формы русла и заданного расхода нормальная глубина равномерного движения $h_0=h_{кр}$.

Зная общее выражение для критической глубины, легко получить общее выражение для критических уклонов:

$$i_{кр}=\frac{g}{\alpha C^2_{кр}}\cdot\frac{\chi_{кр}}{B_{кр}}. \tag{154}$$

Для широких русел $X_{кр}=B_{кр}$ и тогда общее выражение для критического уклона принимает вид:

$$i_{кр}=\frac{g}{\alpha C^2_{кр}}. \tag{155}$$

3. Форма свободной поверхности водотоков при неравномерном движении.

В дальнейшем будем различать две формы свободной поверхности: *А* — криволинейная форма свободной поверхности водотока и *Б* — прямолинейная форма свободной поверхности.

А. При исследовании общего уравнения неравномерного движения для водотоков постоянной ширины следует различать три случая:

1. Глубина равномерного режима больше критической глубины, т. е. спокойное течение:

$$h_0>h_{кр}.$$

2. Глубина равномерного режима меньше критической глубины, т. е. бурное течение:

$$h_0<h_{кр}.$$

3. Глубина равномерного режима равна глубине критической:

$$h_0=h_{кр}.$$

Для каждого из этих случаев, проводя линии глубин равномерного и критического режимов параллельно дну водотока, получаем три зоны движения жидкости в каждом случае.

Верхнюю зону будем обозначать буквой *А*, вторую зону — *Б* и третью зону — *В*.

Результат исследования общего уравнения неравномерного движения сведен в таблицу 69.

При изучении неравномерного движения жидкости необходимо рассматривать два случая кривых свободной поверхности: кривые подпора и кривые спада.

В прежней терминологии под кривыми подпора подразумевались такие кривые, которые имели глубины больше глубин равномерного режима при уклонах меньше критического. В этом случае отношения $\frac{h}{h_0}$ имели значения больше 1.

Кривые спада имели отношение $\frac{h}{h_0}$ меньше 1 и следовательно имели глубины меньше глубины равномерного режима при уклонах меньше критического. Однако при переходе в практических расчетах к конструированию быстротоков пришлось иметь кривые спада, имеющие отношение $\frac{h}{h_0}$ больше 1.

Это заставляет в настоящее время классификацию кривых спада и кривых подпора определять следующими условиями:

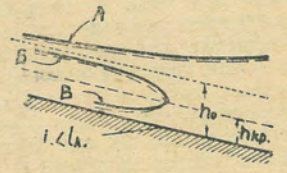
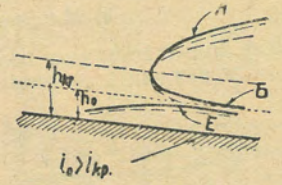
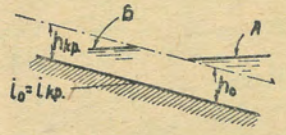
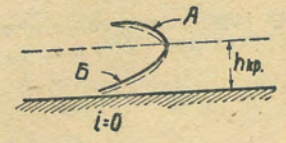
кривыми подпора называют такие свободные поверхности, при которых глубины по мере движения возрастают, а кривыми спада называют такие свободные поверхности, при которых глубины по мере движения падают.

Таблица форм сво

Уклон i_0	Формула для $\frac{dh}{ds}$	Случай	Зона	Переменные h	k	N
Уклон по течению (нисходящий) i_0	$i\frac{1-(K_0:K)^3}{1-(N_{kp}:N)}$	$h_0>h_{kp}$	А	$h>h_0>h_{kp}$	$K>K_0$	$N>N_{kp}$
		след.	Б	$h_0>h>h_{kp}$	$K<K_0$	$N>N_{kp}$
		$i_0<i_{kp}$	В	$h_0>h_k>h$	$K<K_0$	$N<N_{kp}$
		$h_0<h_{kp}$	А	$h>h_{kp}>h_0$	$K>K_0$	$N>N_{kp}$
		след.	Б	$h_{kp}>h>h_0$	$K>K_0$	$N<N_{kp}$
		$i_0>i_{kp}$	В	$h_{kp}>h_0>h$	$K<K_0$	$N<N_{kp}$
		$h_0=h_{kp}$	А	$h<h_{kp}$	$K<K_0$	$N>N_{kp}$
		след.				
		$i_0=i_{kp}$	Б	$h>h_{kp}$	$K<K_0$	$N<N_{kp}$
Равен нулю $i_0=0$	$\frac{-i_k(K_{kp}:K)^3}{1-(N_{kp}:N)}$	$h=\infty$	А	$h>h_{kp}$	$K>K_k$	$N>N_{kp}$
		$i_0=0$	Б	$h<h_{kp}$	$K>K_k$	$N<N_{kp}$
Против течения $i_0<0$	$\frac{-i_0[1+(K_0:K)^3]}{1-(N_{kp}:N)^3}$	$h_0'\gtrless h_{kp}$	А	$h>h_{kp}$	$K>K_0'$	$N>N_{kp}$
		след.				
		$i_0\gtrless i_{kp}$	Б	$h<h_{kp}$	$K<K_0'$	$N<N_{kp}$

Таблица 69

ной поверхности

Числитель	Знаменатель	$\frac{dh}{ds}$	Глубина по течению	Схема (течение всюду слева направо)
+	+	+	возрастает	
−	+	−	убывает	
−	−	+	возрастает	
+	+	+	возрастает	
+	−	−	убывает	
−	−	+	возрастает	
−	−	+	возрастает	
+	+	+	возрастает	
−	+	−	убывает	
−	−	+	возрастает	
−	+	−	убывает	
−	−	+	возрастает	

В обоих случаях возможно отношение $\frac{h}{h_0}$ в пределах от нуля, переходя через 1, до 10—15 и выше.

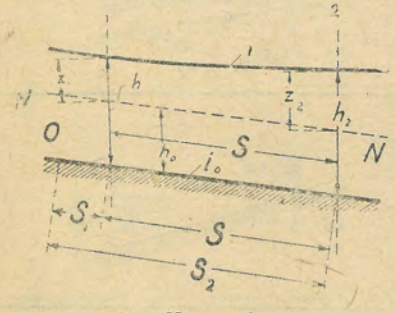
[4. Способы интегрирования общего уравнения неравномерного движения.

Общее уравнение неравномерного движения интегрируется для частных случаев; так Брессом (Bresse) и Дюпюи-Рюльманом (Düpuit-Rühlmann) даны решения для бесконечно широкого прямоугольного русла, Толкмиттом (Tolkmitt) дано решение для широкого параболического русла, Бахметевым дано решение для трапецоидальных русел, Батиклем (Baticle) дано решение при помощи гидравлического параметра. Кроме того существует ряд приближенных способов интегрирования неравномерного движения.

Нами приводятся лишь формулы Бахметева, Батикля и формулы приближенных расчетов, так как формулы Бресса, Толкмитта и Дюпюи-Рюльмана легко получаются из общей формулы проф. Бахметева.

а) Метод проф. Бахметева

Проф. Бахметевым дано полное решение общего уравнения неравномерного движения для трапецоидальных или правильных полигональных сечений каналов для прямых, обратных и нулевых уклонов.



Черт. 80.

В основном способ Бахметева основан на следующей предложенной им зависимости (черт. 80):

$$\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2=\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^x. \qquad (156)$$

Эта зависимость указывает, что квадрат отношения пропускных способностей каналов, или расходных характеристик равен какой-то степени x от отношения соответствующих глубин, причем показатель x проф. Бахметевым назван гидравлическим показателем русла.

Для определения гидравлического показателя русла (x) необходимо решить уравнение (156), и тогда получаем:

$$x=2\,\frac{\lg\frac{K_2}{K_1}}{\lg\frac{h_2}{h_1}}=2\,\frac{\lg K_2-\lg K_1}{\lg h_2-\lg h_1}. \qquad (157)$$

Размеры гидравлического показателя русла x могут меняться, поэтому его надо вычислять для отдельных участков с небольшими интервалами в глубинах. Только после анализа значений x для отдельных участков можно принимать для расчета значение x или общее для всего потока или для отдельных участков.

1) прямой уклон: $i_0>0$.

Вводя приведенную зависимость (156) в общее уравнение неравномерного движения, получаем после интегрирования:

$$\frac{i_0S}{h_0}=\eta_2-\eta_1-(1-j)\,[Б(\eta_2)-Б(\eta_1)]. \qquad (158)$$

Это же уравнение может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{i_0S}{h_0}=\eta_2-\eta_1-(1-j)\int_{h_1}^{h_2}\frac{d\eta}{\eta^x-1}, \qquad (159)$$

где

$$\eta_2=\frac{h_2}{h_0},\quad \eta_1=\frac{h_1}{h_0},$$

S — длина участка и

$$j=\frac{\alpha\, i_0C^2}{g}\cdot\frac{B}{\chi}.$$

$Б(\eta)$ — значения интегралов вида

$$Б(\eta)=-\int\frac{d\eta}{\eta^x-1}.$$

Значения $Б(\eta)$ вычислены и сведены в таблицы 70—79 для различных значений x.

Так как значения x взяты при подсчете таблиц с достаточно крупными интервалами, для вычисления интегралов проф. Бахметева часто приходится пользоваться интерполяционной формой для $Б(\eta)$, где значения со значками a и b соответствуют имеющимся в таблицах значениям гидравлического показателя русла x:

$$Б(\eta)=Б_a(\eta)+\frac{x-x_a}{x_b-x_a}\,[Б_b(\eta)-Б_a(\eta)]. \qquad (160)$$

Вычисление значений $Б(\eta)$ ведется для двух случаев:

Случай 1-й: $\eta<1$.

$$Б(\eta)=\int\frac{d\eta}{1-\eta^x}=\int(1+\eta^x+\eta^{2x}+\eta^{3x}+\dots)\,d\eta. \qquad (161)$$

$$Б(\eta)=\eta+\frac{\eta x+1}{x+1}+\frac{\eta^{2x}+1}{2x+1}+\frac{\eta^{3x}+1}{3x+1}+\dots+\text{const}.$$

Случай 2-й: $\eta>1$.

$$Б(\eta)=-\int\frac{d\eta}{\eta^x-1}=2\int\frac{z^{k-3}\,dz}{1-z^k}.$$

$$Б(\eta)=2\int(z^{k-3}+z^{2k-3}+z^{3k-3}+\dots)\,dz,$$

где

$$z^2=\frac{1}{\eta}\ \text{и}\ k=2x.$$

После интегрирования и подстановки значений имеем

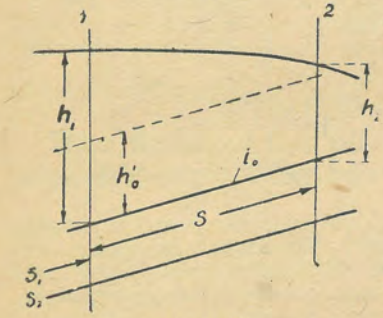
$$Б(\eta)=\frac{\eta^{1-x}}{x-1}+\frac{\eta^{1-2x}}{2x-1}+\frac{\eta^{1-3x}}{3x-1}+\dots+\text{const}. \qquad (162)$$

Для практических расчетов значений C следует вычислять для средней глубины при $\frac{h_2+h_1}{2}$, или, точнее, нужно брать для средней глубины в каждом вычисляемом интервале.

Общее решение уравнений неравномерного движения проф. Бахметева включает в себя и частный случай уравнения Бресса и Толкмитта. Поэтому, пользуясь уравнением проф. Бахметева при гидравлическом показателе русла $x=3$, получаем точное решение по Брессу. При гидравлическом показателе $x=4$, получаем в определенных пределах решение по Толкмитту.

При решении отдельных вопросов по формуле проф. Бахметева могут встречаться два основных случая расчетов:

1. Дана глубина в начале и в конце участка; требуется определить длину участка. В этом случае решение уравнения проф. Бахметева оказывается достаточно простым, потому что длина определяется через все известные элементы.



Черт. 81.

2. Имеются длина участка и глубина в начале или в конце участка; требуется найти конечную или начальную глубину. В этом случае оказываются известными левая часть уравнения проф. Бахметева и только часть членов в правой части уравнения, и по существу остается неизвестным выражение:

$$-\eta+(1-j)\,B(\eta).$$

Поэтому для решения уравнения в этом случае приходится производить подбор таких значений η и функций проф. Бахметева, соответствующих этим значениям η, чтобы они были равны численному выражению правой части уравнения, состоящей из известных величин.

Так как в большинстве случаев приходится производить вычисления таких глубин, которые приближаются в значительной степени к глубинам равномерного режима, то проще всего первые приближения при расчете для определения величин η_l делать таким образом: уменьшить или увеличить правую часть уравнения на единицу в соответствии со знаком η_l и полученную разность разделить на $(1-j)$. Тогда получаем примерные значения функций проф. Бахметева, по которым легко по таблицам выбрать и найти подходящие значения.

2) кривая свободной поверхности при обратном уклоне, т. е. $i_0<0$ (черт. 81).

Для кривой свободной поверхности при обратном уклоне необходимо в уравнение неравномерного движения ввести вместо i_0 обратный уклон $-i_0$. Соответственно с этим получаем общее уравнение неравномерного движения в следующем виде:

$$\frac{l_0 S}{h_0'}=-\eta_2'+\eta_1'+(1+j')\,[B'(\eta_2')-B'(\eta_1')], \tag{163}$$

где приняты следующие обозначения:

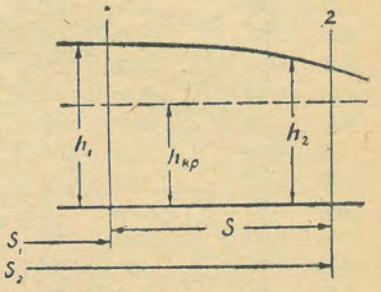
$$\eta'=\frac{h}{h_0},\quad j'=\frac{\alpha i_0 C^2}{g}\frac{B}{\chi},\quad B'(\eta')=\int\frac{d\eta'}{1+(\eta')^x}. \tag{164}$$

h_0' представляет глубину равномерного режима при расчетном расходе с учетом прямого уклона дна (i_0'), т. е. при движении воды в обратном направлении по принятому руслу.

Интеграл приведенного выше уравнения $B'(\eta')$ для широкого прямоугольного русла дает:

$$B'(\eta')=\frac{1}{6}\ln\frac{1+(\eta')^3}{1+\eta'+(\eta')^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\eta'-1}{\sqrt{3}}. \tag{165}$$

В последнее время под руководством акад. Павловского для интеграла $B'(\eta')$ составлены специальные таблицы (80—89), которые приведены ниже, для различных значений гидравлического показателя русла. Гидравлический показатель русла определяется обычным способом, как и для кривой свободной поверхности при прямом уклоне. Ввиду того что таблицы для кривой свободной поверхности подсчитаны лишь для определенных значений в отдельных случаях с достаточно большими интервалами, возможно для уточнения пользоваться интерполяционной формулой для вычисления кривой поверхности:



Черт. 82.

$$B'(\eta')=B'_a(\eta')+\frac{x-x_a}{x_b-x_a}\,[B'_b(\eta')-B'_a(\eta')]. \tag{166}$$

3) кривая свободной поверхности при горизонтальном дне, т. е. $i=0$ (черт. 82).

Так как при горизонтальном дне невозможно дать решения уравнения через элементы равномерного режима, уравнение кривой свободной поверхности для горизонтального дна решается, в зависимости от элементов критического уклона и критической глубины, путем подстановки в общие уравнения неравномерного движения вместо i_0 его значения, равного нулю, и замены расхода воды через элементы критического уклона. После соответствующих преобразований акад. Павловским получена следующая формула для расчета кривых свободной поверхности:

$$\frac{i_{кр}S}{h_{кр}}=(j_{кр}-1)\,(\xi_2-\xi_1)-\frac{1}{x+1}\,[(\xi_2^{x+1}-\xi_2)-(\xi_1^{x+1}-\xi_1)] \tag{167}$$

$$\frac{i_{кр}S}{h_{кр}}=j_{кр}\,(\xi_2-\xi_1)-[B^0(\xi_2)-B^0(\xi_1)],$$

где

$$i_{кр}=\frac{g}{\alpha C_{кр}^2}\cdot\frac{\chi_{кр}}{B_{кр}};\quad \xi=\frac{h}{h_{кр}};$$

$$j_{кр}=\frac{\alpha i_{кр}C_{кр}^2}{g}\cdot\frac{B_{кр}}{\chi_{кр}};$$

x — гидравлический показатель русла; (168)

$$B^0(\xi)=\frac{1}{x+1}\,\zeta^{x+1}+\text{const}$$ (далее см. стр. 373).

Таблица 70 проф. Бахметева

Канал с прямым уклоном: $i_0 > 0$ $x = 2{,}0$

η	$Б(\eta)$	$+\Delta$	η	$Б(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$
0,00	0	0,050	0,85	1,256	0,037	1,07	1,693	0,064	1,44	0,856	0,009
0,05	0,050	0,050	0,86	1,293	0,040	1,08	1,629	0,056	1,45	0,847	0,009
0,10	0,100	0,051	0,87	1,333	0,042	1,09	1,573	0,051	1,46	0,838	0,009
0,15	0,151	0,052	0,88	1,375	0,046	1,10	1,522	0,045	1,47	0,829	0,008
0,20	0,203	0,052	0,89	1,421	0,051	1,11	1,477	0,041	1,48	0,821	0,008
0,25	0,255	0,054	0,90	1,472	0,027	1,12	1,436	0,038	1,49	0,813	0,008
0,30	0,309	0,056	0,905	1,499	0,028	1,13	4,398	0,035	1,50	0,805	0,038
0,35	0,365	0,059	0,910	1,427	0,030	1,14	1,363	0,032	1,55	0,767	0,034
0,40	0,424	0,061	0,915	1,557	0,032	1,15	1,331	0,030	1,60	0,733	0,030
0,45	0,485	0,064	0,920	1,589	0,033	1,16	1,301	0,028	1,65	0,703	0,028
0,50	0,549	0,070	0,925	1,622	0,036	1,17	1,273	0,026	1,70	0,675	0,025
0,55	0,619	0,074	0,930	1,658	0,038	1,18	1,247	0,025	1,75	0,650	0,024
0,60	0,693	0,016	0,935	1,696	0,012	1,19	1,222	0,023	1,80	0,626	0,021
0,61	0,709	0,016	0,940	1,738	0,044	1,20	1,199	0,022	1,85	0,605	0,020
0,62	0,725	0,016	0,945	1,782	0,049	1,21	1,177	0,021	1,90	0,585	0,019
0,63	0,741	0,017	0,950	1,831	0,054	1,22	1,156	0,020	1,95	0,566	0,017
0,64	0,758	0,017	0,955	1,885	0,060	1,23	1,136	0,019	2,0	0,549	0,031
0,65	0,775	0,017	0,960	1,945	0,068	1,24	1,117	0,019	2,1	0,518	0,028
0,66	0,792	0,018	0,965	2,013	0,079	1,25	1,098	0,017	2,2	0,490	0,024
0,67	0,810	0,019	0,970	2,092	0,092	1,26	1,081	0,016	2,3	0,466	0,022
0,68	0,829	0,019	0,975	2,184	0,113	1,27	1,065	0,016	2,4	0,444	0,020
0,69	0,848	0,019	0,980	2,297	0,145	1,28	1,049	0,016	2,5	0,424	0,019
0,70	0,867	0,020	0,985	2,442	0,204	1,29	1,033	0,015	2,6	0,405	0,016
0,71	0,887	0,020	0,990	2,646	0,354	1,30	1,018	0,014	2,7	0,389	0,015
0,72	0,907	0,021	0,995	3,000	∞	1,31	1,004	0,014	2,8	0,374	0,014
0,73	0,928	0,022	1,000	∞	∞	1,32	9,990	0,013	2,9	0,360	0,014
0,74	0,950	0,022	1,005	2,997	0,345	1,33	0,977	0,013	3,0	0,346	0,032
0,75	0,972	0,024	1,010	2,652	0,202	1 34	0,964	0,012	3,5	0,294	0,039
0,76	0,996	0,024	1,015	2,450	0,143	1,35	0,952	0,012	4,0	0,255	0,029
0,77	1,020	0,025	1,020	2,307	0,110	1,36	0,940	0,012	4,5	0,226	0,023
0,78	1,045	0,026	1,025	2,197	0,090	1,37	0,928	0,011	5,0	0,203	0,035
0,79	1,071	0,027	1,030	2,107	0,076	1,38	0,917	0,011	6,0	0,168	0,042
0,80	1,098	0,029	1,035	2,031	0,065	1,39	0,906	0,010	8,0	0,126	0,026
0,81	1,127	0,029	1,040	1,996	0,058	1,40	0,896	0,010	10,0	0,100	
0,82	1,156	0,032	1,045	1,908	0,051	1,41	0,886	0,010			
0,83	1,188	0,033	1,05	1,857	0,089	1,42	0,876	0,010			
0,84	1,221	0,035	1,06	1,768	0,075	1,43	0,866	0,010			

Таблица 71 проф. Бахметева

$x = 2{,}5$ Канал с прямым уклоном: $i_0 > 0$

η	$Б(\eta)$	$+\Delta$	η	$Б(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,050	0,85	1,138	0,031	1,07	1,105	0,052	1,44	0,463	0,007
0,05	0,050	0,050	0,86	1,169	0,033	1,08	1,053	0,044	1,45	0,456	0,006
0,10	0,100	0,050	0,87	1,202	0,035	0,09	1,009	0,040	1,46	0,450	0,006
0,15	0,150	0,051	0,88	1,237	0,038	1,10	0,969	0,036	1,47	0,444	0,006
0,20	0,201	0,052	0,89	1,275	0,041	1,11	0,933	0,032	1 48	0 438	0,006
0,25	0,252	0,051	0,90	1,316	0,023	1,12	0,901	0,029	1,49	0,432	0,006
0,30	0,304	0,053	0,905	1,339	0,023	1,13	0,872	0,026	1,50	0,426	0,027
0,35	0,357	0,054	0,910	1,362	0,024	1,14	0,846	0,025	1,55	0,399	0,023
0,40	0,411	0,057	0,915	1,386	0,026	1,15	0,821	0,023	1,60	0,376	0,021
0,45	0,468	0,059	0,920	1,412	0,028	1,16	0,798	0,022	1,65	0,355	0,019
0,50	0,527	0,063	0,925	1,440	0 029	1,17	0,776	0,020	1,70	0,336	0,018
0,55	0,590	0,067	0,930	1,469	0,031	1,18	0,756	0,019	1,75	0,318	0,015
0,60	0,657	0,014	0,935	1,500	0,034	1,19	0,737	0,018	1,80	0,303	0,014
0,61	0,671	0,014	0,940	1 534	0,036	1,20	0,719	0,017	1,85	0,289	0,013
0,62	0,685	0,014	0,945	1,570	0,040	1,21	0,702	0 016	1,90	0,276	0,012
0,63	0,699	0,015	0,950	1,610	0,044	1,22	0,686	0,015	1,95	0,264	0,011
0,64	0,714	0,015	0,955	1,654	0,048	1,23	0,671	0,014	2,0	0,253	0,020
0,65	0,729	0,015	0,960	1,702	0,056	1,24	0,657	0,014	2,1	0,233	0,017
0,66	0,744	0,016	0,965	1,758	0,062	1,25	0,643	0,013	2,2	0,216	0,015
0,67	0,760	0,016	0,970	1,820	0,076	1,26	0,630	0,012	2 3	0,201	0,013
0,68	0,776	0,016	0,975	1,896	0,089	1,27	0,618	0,012	2,4	0,188	0,012
0,69	0,792	0,017	0,980	1,985	0,115	1,28	0,606	0,012	2,5	0,176	0,011
0,70	0,809	0 017	0,985	2,100	0,164	1,29	0,594	0,012	2,6	0,165	0,010
0,71	0,826	0,018	0,990	2,264	0,280	1,30	0,582	0,011	2,7	0,155	0,009
0,72	0,844	0,018	0,995	2,544	∞	1,31	0,571	0,010	2,8	0,146	0 008
0,73	0,862	0,019	1,000	∞	∞	1,32	0,561	0,010	2,9	0,138	0,007
0,74	0,881	0,019	1,005	2,139	0,274	1 33	0,551	0,009	3,0	0,131	0,028
0,75	0,9 0	0,020	1,010	1,865	0,161	1,34	0,542	0,009	3,5	0,103	0,019
0,76	0,920	0,020	1,015	1,704	0,113	1,35	0,533	0,009	4,0	0,084	0,014
0,77	0,940	0,021	1,020	1,591	0,087	1,36	0,524	0,008	4,5	0,070	0,010
0,78	0,961	0,022	1,025	1,504	0,072	1,37	0,516	0,008	5,0	0,060	0,014
0,79	0,983	0,023	1,030	1,432	0,060	1,38	0,508	0,008	6,0	0,046	0,017
0,80	1,006	0,024	1,035	1,372	0,052	1,39	0,500	0,008	8,0	0,029	0,008
0,81	1,030	0,025	1,035	1,320	0,046	1,40	0,492	0,008	10,0	0,021	
0,82	1,055	0,026	1,045	1,274	0,040	1,41	0,484	0,008			
0,83	1,081	0,028	1,05	1,234	0,070	1,42	0,477	0,007			
0,84	1,109	0,029	1,06	1,164	0,059	1,43	4,470	0,007			

Таблица 72 проф. Бахметева

Канал с прямым уклоном: $i > 0$ $x = 3{,}0$

η	$Б(\eta)$	$+\Delta$	η	$Б(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,050	0,85	1,065	0,027	1,07	0,790	0,041	1,44	0,283	0,005
0,05	0,050	0,050	0,86	1,092	0,028	1,08	0,749	0,036	1,45	0,278	0,005
0,10	0,100	0,050	0,87	1,120	0,031	1,09	0,713	0,033	1,46	0,273	0,005
0,15	0,150	0,050	0,88	1,151	0,032	1,10	0,680	0,028	1,47	0,268	0,005
0,20	0,200	0,051	0,89	1,183	0,035	1,11	0,652	0,026	1,48	0,263	0,004
0,25	0,251	0,051	0,90	1,218	0,019	1,12	0,626	0,024	1,49	0,259	0,004
0,30	0,302	0,052	0,905	1,237	0,020	1,13	0,602	0,021	1,50	0,255	0,020
0,35	0,354	0,053	0,910	1,257	0,021	1,14	0,581	0,020	1,55	0,235	0,017
0,40	0,407	0,054	0,915	1,278	0,022	1,15	0,561	0,019	1,60	0,218	0,015
0,45	0,461	0,056	0,920	1,300	0,023	1,16	0,542	0,017	1,65	0,203	0,014
0,50	0,517	0,058	0,925	1,323	0,025	1,17	0,525	0,015	1,70	0,189	0,012
0,55	0,575	0,062	0,930	1,348	0,026	1,18	0,510	0,015	1,75	0,177	0,011
0,60	0,637	0,013	0,935	1,374	0,029	1,19	0,495	0,015	1,80	0,166	0,010
0,61	0,650	0,013	0,940	1,403	0,031	1,20	0,480	0,013	1,85	0,156	0,009
0,62	0,663	0,013	0,945	1,434	0,033	1,21	0,467	0,013	1,90	0,147	0,008
0,63	0,676	0,013	0,950	1,467	0,037	1,22	0,454	0,012	1,95	0,139	0,007
0,64	0,689	0,014	0 955	1,504	0,041	1,23	0,442	0,011	2,0	0,132	0,013
0,65	0,703	0,014	0,960	1,545	0,047	1,24	0,431	0,011	2,1	0,119	0,011
0,66	0,717	0,014	0,965	1,592	0,053	1,25	0,420	0,010	2,2	0,108	0,010
0,67	0,731	0,015	0,970	1,645	0,063	1,26	0,410	0,010	2,3	0,098	0,008
0,68	0,746	0,015	0,975	1,708	0,076	1,27	0,400	0,009	2,4	0,090	0,008
0,69	0,761	0,015	0,980	1,784	0,098	1,28	0,391	0,009	2,5	0,082	0,006
0,70	0,776	0,015	0,985	1,882	0,137	1,29	0,382	0,009	2,6	0,076	0,006
0,71	0,791	0,016	0,990	2,019	0,231	1,30	0,373	0,008	2,7	0,070	0,005
0,72	0,807	0,016	0,995	2,250	∞	1,31	0,365	0,008	2,8	0,065	0,005
0 73	0,823	0,017	1,000	∞	∞	1,32	0,357	0,008	2,9	0,060	0,004
0,74	0,840	0,017	1,005	1,647	0,228	1,33	0,349	0,008	3,0	0,056	0,015
0,75	0,857	0,017	1,010	1,419	0,128	1,34	0,341	0,007	3,5	0,041	0,010
0,76	0,874	0,018	1,015	1,291	0,098	1,35	0,534	0,006	4,0	0,031	0,006
0,77	0,892	0,019	1,020	1,193	0,074	1,36	0,328	0,006	4,5	0,025	0,005
0,78	0,911	0,019	1,025	1,119	0,058	1,37	0,322	0,006	5,0	0,020	0,006
0,79	0,930	0,020	1,030	1,061	0,051	1,38	0,316	0,006	6,0	0,014	0,005
0,80	0,950	0,021	1,035	1,010	0,043	1,39	0,310	0,006	8,0	0,009	0,005
0,81	0,971	0,022	1,040	0,967	0,038	1,40	0,304	0,006	10,0	0,005	
0,82	0,993	0,023	1,045	0,929	0,033	1,41	0,298	0,005			
0,83	1,016	0,024	1,05	0,896	0,058	1,42	0,293	0,005			
0,84	1,040	0,025	1,05	0,838	0,048	1,43	0,288	0,005			

Таблица 73 проф. Бахметева

$x = 3{,}25$ Канал с прямым уклоном: $i_0 > 0$

η	$Б(\eta)$	$+\Delta$	η	$Б(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,050	0,85	1,038	0,025	1,07	0,683	0,037	1,44	0,226	0,004
0,05	0,050	0,050	0,86	1,063	0,027	1,08	0,646	0,033	1,45	0,222	0,004
0,10	0,100	0,050	0,87	1,090	0,028	1,09	0,613	0,029	1,46	0,218	0,004
0,15	0,150	0,050	0,88	1,118	0,030	1,10	0,584	0,026	1,47	0,214	0,004
0,20	0,200	0,050	0,89	1,148	0,033	1,11	0,558	0,024	1,48	0,210	0,004
0,25	0,250	0,051	0,90	1,181	0,018	1,12	0,534	0,022	1,49	0,206	0,004
0,30	0,301	0,051	0,905	1,199	0,019	1,13	0,512	0,019	1,50	0,202	0,017
0,35	0,352	0,053	0,910	1,218	0,019	1,14	0,493	0,018	1,55	0,185	0,015
0,40	0,405	0,053	0,915	1,236	0,020	1,15	0,475	0,017	1,60	0,170	0,013
0,45	0,458	0,055	0,920	1,257	0,022	1,16	0,458	0,015	1,65	0,157	0,012
0,50	0,513	0,057	0,925	1,279	0,023	1,17	0,443	0,015	1,70	0,145	0,010
0,55	0,570	0,060	0,930	1,302	0,025	1,18	0,428	0,014	1,75	0,135	0,009
0,60	0,630	0,012	0,935	1,327	0,027	1,19	0,414	0,013	1,80	0,126	0,008
0,61	0,612	0,013	0,940	1,354	0,028	1,20	0,401	0,012	1,85	0,118	0,007
0,62	0,655	0,013	0,945	1,382	0,031	1,21	0,389	0,011	1,90	0,111	0,007
0,63	0,668	0,013	0,950	1,413	0,034	1,22	0,378	0,010	1,95	0,104	0,006
0,64	0,681	0,013	0,955	1,447	0,038	1,23	0,368	0,010	2,0	0,098	0,011
0,65	0,694	0,013	0,960	1,485	0,043	1,24	0,358	0,010	2,1	0,087	0,009
0,66	0,707	0,014	0,965	1,528	0,049	1,25	0,348	0,009	2,2	0,078	0,008
0,67	0,721	0,014	0,970	1,577	0,057	1,26	0,339	0,009	2,3	0,070	0,006
0,68	0,735	0,014	0,975	1,634	0,071	1,27	0,330	0,008	2,4	0 064	0,006
0,69	0,749	0,015	0,980	1,705	0,090	1,28	0,322	0,008	2,5	0,058	0,005
0,70	0,763	0,015	0,985	1,795	0,127	1,29	0,314	0,008	2,6	0,053	0,005
0,71	0,778	0,015	0,990	1,922	0,216	1,30	0,306	0,007	2,7	0,048	0,004
0,72	0,793	0,016	0,995	2,138	∞	1,31	0,299	0,007	2,8	0,044	0,003
0,73	0,808	0,016	1,000	∞	∞	1,32	0,292	0,007	2,9	0,041	0,003
0,74	0,824	0,017	1,005	1,477	0,212	1,33	0,285	0,006	3,0	0,038	0,011
0,75	0,841	0,016	1,010	1,265	0,125	1,34	0,279	0,006	3,5	0,027	0,007
0,76	0,857	0,017	1,015	1,140	0,087	1,35	0,273	0,006	4,0	0,020	0,005
0,77	0,874	0,018	1,020	1,053	0,067	1,36	0,267	0,006	4,5	0,015	0,003
0,78	0,892	0 019	1,025	0,986	0,054	1,37	0,261	0,006	5,0	0,012	0,004
0,79	0,911	0,019	1,030	0,932	0,046	1,38	0,255	0,006	6,0	0,008	0,003
0,80	0,930	0,019	1,035	0,886	0,040	1,39	0,250	0,005	7,0	0,005	0,001
0,81	0,949	0,021	1,040	0,846	0,035	1,40	0,245	0,005	8,0	0,004	0,001
0,82	0,970	0,022	1,045	0,811	0,031	1,41	0,240	0,005	9,0	0,003	0,001
0,83	0,992	0,022	1,05	0,780	0,053	1,42	0,235	0,004	10,0	0,002	
0,84	1,014	0,024	1,06	0,727	0,044	1,43	0,231	0,005			

Таблица 74 проф. Бахметева

Канал с прямым уклоном: $i > 0$ $x = 3{,}5$

η	$E(\eta)$	$+\Delta$	η	$E(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$E(\eta)$	$-\Delta$	η	$E(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,050	0,85	1,016	0,023	1,07	0,599	0,035	1,44	0,184	0,004
0,05	0,050	0,050	0,86	1,039	0,025	1,08	0,564	0,030	1,45	0,180	0,004
0,10	0,100	0,050	0,87	1,064	0,027	1,09	0,534	0,027	1,46	0,176	0,003
0,15	0,150	0,050	0,88	1,091	0,029	1,10	0,507	0,024	1,47	0,173	0,004
0,20	0,200	0,050	0,89	1,120	0,031	1,11	0,483	0,022	1,48	0,169	0,003
0,25	0,250	0,051	0,90	1,151	0,077	1,12	0,461	0,019	1,49	0,166	0,003
0,30	0,301	0,051	0,905	1,168	0 017	1,13	0,442	0,018	1,50	0,163	0,015
0,35	0,352	0,052	0,910	1,185	0,019	1,14	0,424	0,017	1,55	0,148	0,011
0,40	0,404	0,053	0,915	1,204	0,019	1,15	0,407	0,016	1,60	0,135	0,010
0,45	0,456	0,054	0,920	1,223	0,020	1,16	0,391	0,014	1,65	0,124	0,008
0,50	0,510	0,056	0,925	1,243	0,022	1,17	0,377	0,013	1,70	0,114	0,007
0,55	0,566	0,059	0,930	1,265	0,023	1,18	0,364	0,012	1,75	0,105	0,007
0,60	0,625	0,012	0,935	1,288	0,025	1,19	0,352	0,011	1,80	0 097	0,006
0,61	0,637	0,012	0,940	1,313	0,026	1,20	0,341	0,011	1,85	0,090	0,005
0,62	0,649	0,012	0,945	1,339	0,029	1,21	0,330	0,010	1,90	0,084	0,005
0,63	0,661	0,013	0,950	1,368	0,032	1,22	0,320	0,010	1,95	0,079	0,005
0,64	0,674	0,013	0,955	1,400	0,036	1,23	0,310	0,009	2,0	0,074	0,004
0,65	0,687	0,013	0,960	1,436	0,040	1,24	0,301	0,009	2,1	0,065	0,003
0,66	0,700	0,013	0,965	1,476	0,046	1,25	0,292	0,008	2,2	0,057	0,003
0,67	0,713	0,013	0,970	1,522	0,054	1,26	0,284	0,008	2,3	0,051	0,003
0,68	0,726	0,014	0,975	1,576	0,066	1,27	0,276	0,007	2,4	0,046	0,002
0,69	0,740	0,014	0,980	1,642	0,084	1,28	0,269	0,007	2,5	0,041	0,002
0,70	0,754	0,014	0,985	1,726	0,118	1,29	0,262	0,007	2,6	0,037	0,0022
0,71	0,768	0,014	0,990	1,844	0,199	1,30	0,255	0,007	2,7	0,034	0,0061
0,72	0,782	0,015	0,995	2,043	∞	1,31	0,248	0,006	2,8	0,031	0,0037
0,73	0,797	0,015	1,000	∞	∞	1,32	0,242	0,006	2,9	0,026	0,0022
0,74	0,812	0,016	1,005	1,329	0,191	1,33	0,236	0,006	3,0	0,028	0,0015
0,75	0,828	0,016	1,010	1,138	0,116	1,34	0,230	0,005	3,5	0,018	0,0017
0,76	0,844	0,016	1,015	1,022	0,082	1,35	0,225	0,006	4,0	0,012	0,0014
0,77	0,860	0,017	1,020	0,940	0,061	1,36	0,219	0,005	4,5	0,009	0,0006
0,78	0,877	0,018	1,025	0,879	0,052	1,37	0,214	0,005	5,0	0,007	
0,79	0,895	0,018	1,030	0,827	0,042	1,38	0,209	0,004	6,0	0,004	
0,80	0,913	0,019	1,035	0,785	0,037	1,39	0,205	0,005	8,0	0,002	
0,81	0,932	0,020	1,040	0,748	0,032	1,40	0,200	0,004	10,0	0,001	
0,82	0,952	0,020	1,045	0,716	0,028	1,41	0,196	0,004			
0,83	0,972	0,001	1,05	0,688	0,049	1,42	0,192	0,004			
0,84	0,993	0,023	1,06	0,639	0,040	1,43	0,188	0,004			

Таблица 75 проф. Бахметева

$x = 3{,}75$ Канал с прямым уклоном: $i_0 > 0$

η	$E(\eta)$	$+\Delta$	η	$E(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$E(\eta)$	$-\Delta$	η	$E(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,050	0,85	0,997	0,023	1,07	0,529	0,032	1,44	0,151	0,004
0,05	0,050	0,050	0,86	1,020	0,024	1,08	0,497	0,029	1,45	0,147	0,003
0,10	0,100	0,050	0,87	1,044	0,025	1,09	0,469	0,025	1,46	0,144	0,003
0,15	0,150	0,050	0,88	1,069	0,027	1,10	0,444	0,022	1,47	0,141	0,003
0,20	0,200	0,050	0,89	1,096	0,030	1,11	0,422	0,020	1,48	0,138	0,003
0,25	0,250	0,050	0,90	1,126	0,016	1,12	0,402	0,018	1,49	0,135	0,003
0,30	0,300	0,051	0,905	1,142	0,016	1,13	0,384	0,016	1,50	0,132	0,013
0,35	0,351	0,052	0,910	1,158	0,017	1,14	0,368	0,015	1,55	0,119	0,011
0,40	0,403	0,052	0,915	1,175	0,018	1,15	0,353	0,014	1,60	0,108	0,010
0,45	0,455	0,055	0,920	1,193	0,019	1,16	0,359	0,013	1,65	0,098	0,008
0,50	0,508	0,056	0,925	1,212	0,020	1,17	0,326	0,012	1,70	0,090	0,007
0,55	0,563	0,057	0,930	1,232	0,022	1,18	0,314	0,012	1,75	0,083	0,007
0,60	0,620	0,012	0,935	1,254	0,024	1,19	0,302	0,010	1,80	0,076	0,006
0,61	0,632	0,012	0,940	1,278	0,025	1,20	0,292	0,010	1,85	0,070	0,005
0,62	0,644	0,012	0,945	1,304	0,027	1,21	0,282	0,010	1,90	0,065	0,005
0,63	0,656	0,012	0,950	1,331	0,030	1,22	0,272	0,009	1,95	0,060	0,004
0,64	0,668	0,013	0,955	1,361	0,033	1,23	0,263	0,008	2,0	0,056	0,008
0,65	0,681	0,012	0,960	1,394	0,037	1,24	0,255	0,008	2,1	0,048	0,006
0,66	0,693	0,013	0,965	1,431	0,043	1,25	0,247	0,007	2,2	0,042	0,005
0,67	0,706	0,013	0,970	1,474	0,050	1,26	0,240	0,007	2,3	0,037	0,004
0,68	0,719	0,013	0,975	1,524	0,062	1,27	0,233	0,007	2,4	0,033	0,003
0,69	0,732	0,014	0,980	1,586	0,079	1,28	0,226	0,006	2,5	0,030	0,003
0,70	0,746	0,013	0,985	1,665	0,111	1,29	0,220	0,006	2,6	0,027	0,003
0,71	0,759	0,014	0,990	1,776	0,189	1,30	0,214	0,006	2,7	0,024	0,002
0,72	0,773	0,014	0,995	1,965	∞	1,31	0,208	0,005	2,8	0,022	0,002
0,73	0,787	0,015	1,000	∞	∞	1,32	0,203	0,006	2,9	0,020	0,0022
0,74	0,802	0,015	1,005	1,216	0,185	1,33	0,197	0,005	3,0	0,0178	0,0061
0,75	0,817	0,016	1,010	1,031	0,109	1,34	0,192	0,005	3,5	0,0117	0,0037
0,76	0,833	0,016	1,015	0,922	0,075	1,35	0,187	0,004	4,0	0,0080	0,0022
0,77	0,849	0,016	1,020	0,847	0,058	1,36	0,183	0,005	4,5	0,0058	0,0015
0,78	0,865	0,017	1,025	0,789	0,047	1,37	0,178	0,004	5,0	0,0043	0,0017
0,79	0,882	0,017	1,030	0,742	0,040	1,38	0,174	0,005	6,0	0,0026	0,0014
0,80	0,899	0,018	1,035	0,702	0,034	1,39	0,169	0,004	8,0	0,0012	0,0006
0,81	0,917	0,019	1,040	0,668	0,030	1,40	0,165	0,004	10,0	0,0006	
0,82	0,936	0,019	1,045	0,638	0,026	1,41	0,161	0,003			
0,83	0,955	0,020	1,05	0,612	0,046	1,42	0,158	0,001			
0,84	0,975	0,022	1,06	0,566	0,037	1,43	0,154	0,003			

Таблица 76 проф. Бахметева

Канал с прямым уклоном: $i_0 > 0$ $x = 4{,}0$

η	$E(\eta)$	$+\Delta$	η	$E(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$E(\eta)$	$-\Delta$	η	$E(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,050	0,85	0,980	0,022	1,07	0,471	0,030	1,44	0,125	0,00
0,05	0,050	0,050	0,86	1,002	0,023	1,08	0,441	0,026	1,45	0,122	0,00
0,10	0,100	0,050	0,87	1,025	0,024	1,09	0,415	0,023	1,46	0,119	0,00
0,15	0,150	0,050	0,88	1,049	0,026	1,10	0,392	0,020	1,47	0,116	0,00
0,20	0,200	0,050	0,89	1,075	0,028	1,11	0,372	0,018	1,48	0,113	0,00
0,25	0,250	0,050	0,90	1,103	0,015	1,12	0,354	0,017	1,49	0,111	0,00
0,30	0,300	0,051	0,905	1,118	0,016	1,13	0,337	0,015	1,50	0,109	0,00
0,35	0,351	0,051	0,910	1,134	0,016	1,14	0,322	0,014	1,55	0,097	0,00
0,40	0,402	0,052	0,915	1,150	0,017	1,15	0,308	0,013	1,60	0,087	0,00
0,45	0,454	0,053	0,920	1,167	0,018	1,16	0,295	0,012	1,65	0,079	0,00
0,50	0,507	0,054	0,925	1,185	0,019	1,17	0,283	0,011	1,70	0,072	0,00
0,55	0,561	0,056	0,930	1,204	0,021	1,18	0,272	0,010	1,75	0,066	0,00
0,60	0,617	0,011	0,935	1,225	0,022	1,19	0,262	0,010	1,80	0,060	0,00
0,61	0,628	0,012	0,940	1,247	0,024	1,20	0,252	0,009	1,85	0,055	0,00
0,62	0,640	0,012	0,945	1,271	0,026	1,21	0,243	0,008	1,90	0,050	0,00
0,63	0,652	0,012	0,950	1,297	0,028	1,22	0,235	0,008	1,95	0,046	0,00
0,64	0,664	0,012	0,955	1,325	0,031	1,23	0,227	0,008	2,0	0,043	0,00
0,65	0,678	0,012	0,960	1,356	0,035	1,24	0,219	0,007	2,1	0,033	0,00
0,66	0,688	0,012	0,965	1,391	0,040	1,25	0,212	0,007	2,2	0,032	0,00
0,67	0,700	0,013	0,970	1,431	0,048	1,26	0,205	0,006	2,3	0,0279	0,00
0,68	0,713	0,013	0,975	1,479	0,058	1,27	0,199	0,006	2,4	0,0245	0,00
0,69	0,726	0,013	0,980	1,537	0,074	1,28	0,193	0,006	2,5	0,0216	0,00
0,70	0,739	0,013	0,985	1,611	0,103	1,29	0,187	0,005	2,6	0,0192	0,00
0,71	0,752	0,014	0,990	1,714	0,175	1,30	0,182	0,006	2,7	0,0171	0,00
0,72	0,766	0,014	0,995	1,889	∞	1,31	0,176	0,005	2,8	0,0153	0,00
0,73	0,780	0,014	1,000	∞	∞	1,32	0,171	0,004	2,9	0,0137	0,00
0,74	0,794	0,014	1,005	1,107	0,171	1,33	0,167	0,005	3,0	0,0123	0,00
0,75	0,808	0,015	1,010	0,936	0,100	1,34	0,162	0,004	3,5	0,0077	0,00
0,76	0,823	0 015	1,015	0,836	0,070	1,35	0,158	0,005	4,0	0,0052	0,00
0,77	0,838	0,016	1,020	0,766	0,054	1,36	0,153	0,004	4,5	0,0037	0,00
0,78	0,854	0,016	1,025	0,712	0,044	1,37	0,149	0,004	5,0	0,0027	0,00
0,79	0,870	0,017	1,030	0,668	0,036	1,38	0,145	0,003	6,0	0,0015	0,00
0,80	0,887	0,017	1,035	0,632	0,032	1,39	0,142	0,004	8,0	0,0007	0,00
0,81	0,904	0,018	1,040	0,600	0,028	1,40	0,138	0,003	10,0	0,0004	
0,82	0,922	0,018	1,045	0,572	0,024	1,41	0,135	0,004			
0,83	0,940	0,020	1,05	0,548	0,042	1,42	0,131	0,003			
0,84	0,960	0,020	1,06	0,506	0,035	1,43	0,128	0,003			

Таблица 77 проф. Бахметева

$x = 4{,}50$ Канал с прямым уклоном: $i_0 > 0$

η	$E(\eta)$	$+\Delta$	η	$E(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$E(\eta)$	$-\Delta$	η	$E(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,050	0,85	0,954	0,020	1,07	0,381	0,026	1,44	0,087	0,002
0,05	0,050	0,050	0,86	0,974	0,021	1,08	0,555	0,023	1,45	0,085	0,002
0,10	0,100	0,050	0,87	0,995	0,022	1,09	0,332	0,020	1,46	0,083	0,002
0,15	0,150	0,050	0,88	1,017	0,023	1,10	0,312	0,018	1,47	0,081	0,002
0,20	0,200	0,050	0,89	1,040	0,026	1,11	0,294	0,015	1,48	0,079	0,002
0,25	0,250	0,050	0,90	1,066	0,014	1,12	0,279	0,014	1,49	0,077	0,002
0,30	0,300	0,050	0,905	1,080	0,014	1,13	0,265	0,013	1,50	0,075	0,009
0,35	0,350	0,051	0,910	1,094	0,015	1,14	0,252	0,012	1,55	0,066	0,008
0,40	0,401	0,051	0,915	1,109	0,015	1,15	0,240	0,011	1,60	0,058	0,006
0,45	0,452	0,052	0,920	1,124	0,017	1,16	0,229	0,011	1,65	0,052	0,005
0,50	0,504	0,052	0,925	1,141	0,017	1,17	0,218	0,009	1,70	0,047	0,005
0,55	0,566	0,055	0,930	1,158	0,019	1,18	0,209	0,009	1,75	0,042	0,004
0,60	0,611	0,011	0,935	1,177	0,020	1,19	0,200	0,008	1,80	0,038	0,004
0,61	0,622	0,012	0,940	1,197	0,021	1,20	0,192	0,007	1,85	0,034	0,003
0,621	0,634	0,011	0,945	1,218	0,023	1,21	0,185	0,007	1,90	0,031	0,003
0,63	0,645	0,012	0,950	1,241	0,026	1,22	0,178	0,007	1,95	0,028	0,002
0,64	0,657	0,011	0,955	1,267	0,028	1,23	0,171	0,007	2,0	0,026	0,0043
0,65	0,668	0,012	0,960	1,295	0,032	1,24	0,164	0,006	2,1	0,0217	0,0033
0,66	0,680	0,012	0,965	1,327	0,036	1,25	0,158	0,005	2,2	0,0184	0,0027
0,67	0,692	0,012	0,970	1,363	0,042	1,26	0,153	0,006	2,3	0,0157	0,0022
0,68	0,704	0,012	0,975	1,405	0,052	1,27	0,147	0,005	2,4	0,0135	0,0018
0,69	0,716	0,012	0,980	1,457	0,066	1,28	0,142	0,005	2,5	0,0117	0,0015
0,70	0,728	0,013	0,985	1,523	0,092	1,29	0,137	0,004	2,6	0,0102	0,0013
0,71	0,741	0,013	0,990	1,615	0,156	1,30	0,133	0,004	2,7	0,0089	0,0011
0,72	0,754	0,013	0,995	1,771	∞	1,31	0,129	0,004	2,8	0,0078	0,0009
0,73	0,767	0,013	1,000	∞	∞	1,32	0,125	0,004	2,9	0,0069	0,0008
0,74	0,780	0,014	1,005	0,954	0,162	1,33	0,121	0,004	3,0	0,0031	0,0025
0,75	0,794	0,014	1,010	0,792	0,089	1,34	0,117	0,004	3,5	0,0036	0,0014
0,76	0,808	0,014	1,015	0,703	0,062	1,35	0,113	0,004	4,0	0,0022	0,0007
0,77	0,822	0,015	1,020	0,641	0,047	1,36	0,110	0,003	4,5	0,0015	0,0005
0,78	0,837	0,015	1,025	0,594	0,039	1,37	0,107	0,003	5,0	0,0010	0,0005
0,79	0,852	0,015	1,030	0,555	0,033	1,38	0,104	0,003	6,0	0,0005	0,0003
0,80	0,867	0,016	1,035	0,522	0,027	1,39	0,101	0,003	8,0	0,0002	0,0001
0,81	0,883	0,016	1,040	0,495	0,025	1,40	0,098	0,003	10,0	0,0001	
0,82	0,900	0,017	1,045	0,470	0,022	1,41	0,095	0,003			
0,83	0,917	0,018	1,05	0,448	0,037	1,42	0,092	0,002			
0,84	0,935	0,019	1,06	0,411	0,030	1,43	0,090	0,003			

Таблица 78 проф. Бахметева

Канал с прямым уклоном: $i_0 > 0$ $x = 5{,}0$

η	$Б(\eta)$	$+\Delta$	η	$Б(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,050	0,85	0,936	0,018	1,07	0,315	0,024	1,44	0,063	0,00
0,05	0,050	0,050	0,86	0,954	0,019	1,08	0,291	0,019	1,45	0,061	0,00
0,10	0,100	0,050	0,87	0,973	0,021	1,09	0,272	0,018	1,46	0,059	0,00
0,15	0,150	0,050	0,88	0,994	0,022	1,10	0,254	0,015	1,47	0,057	0,00
0,20	0,200	0,050	0,89	1,016	0,023	1,11	0,239	0,014	1,48	0,056	0,00
0,25	0,250	0,050	0,90	1,039	0,013	1,12	0,225	0,013	1,49	0,054	0,00
0,30	0,300	0,050	0,905	1,052	0,013	1,13	0,212	0,011	1,50	0,053	0,00
0,35	0,350	0,051	0,910	1,065	0,014	1,14	0,201	0,010	1,55	0,046	0,00
0,40	0,401	0,051	0,915	1,079	0,014	1,15	0,191	0,010	1,60	0,040	0,00
0,45	0,452	0,051	0,920	1,093	0,015	1,16	0,181	0,008	1,65	0,035	0,00
0,50	0,503	0,052	0,925	1,108	0,016	1,17	0,173	0,008	1,70	0,0309	0,00
0,55	0,555	0,053	0,930	1,124	0,017	1,18	0,165	0,008	1,75	0,0274	0,00
0,60	0,608	0,011	0,935	1,141	0,018	1,19	0,157	0,007	1,80	0,0244	0,00
0,61	0,619	0,011	0,940	1,159	0,020	1,20	0,150	0,006	1,85	0,0218	0,00
0,62	0,630	0,011	0,945	1,179	0,021	1,21	0,144	0,006	1,90	0,0195	0,00
0,63	0,641	0,011	0,950	1,200	0,023	1,22	0,138	0,006	1,95	0,0175	0,00
0,64	0,652	0,012	0,955	1,223	0,025	1,23	0,132	0,005	2,0	0,0158	0,00
0,65	0,664	0,011	0,960	1,248	0,029	1,24	0,127	0,005	2,1	0,0130	0,00
0,66	0,675	0,012	0,965	1,277	0,033	1,25	0,122	0,005	2,2	0,0108	0,00
0,67	0,687	0,011	0,970	1,310	0,039	1,26	0,117	0,004	2,3	0,0090	0,00
0,68	0,698	0,012	0,975	1,349	0,046	1,27	0,113	0,005	2,4	0,0076	0,00
0,69	0,710	0,012	0,980	1,395	0,061	1,28	0,108	0,004	2,5	0,0064	0,00
0,70	0,722	0,012	0,985	1,456	0,083	1,29	0,104	0,004	2,6	0,0055	0,00
0,71	0,734	0,012	0,990	1,539	0,141	1,30	0,100	0,003	2,7	0,0047	0,00
0,72	0,746	0,013	0,995	1,680	∞	1,31	0,097	0,003	2,8	0,0041	0,00
0,73	0,759	0,013	1,000	∞	∞	1,32	0,094	0,004	2,9	0,0035	0,00
0,74	0,772	0,013	1,005	0,826	0,145	1,33	0,090	0,003	3,0	0,0031	0,00
0,75	0,785	0,013	1,010	0,681	0,079	1,34	0,987	0,003	3,5	0,0016	0,00
0,76	0,798	0,013	1,015	0,602	0,055	1,35	0,084	0,003	4,0	0,0010	0,00
0,77	0,811	0,014	1,020	0,547	0,043	1,36	0,081	0,002	4,5	0,0006	0,00
0,78	0,825	0,014	1,025	0,504	0,035	1,37	0,079	0,003	5,0	0,0004	0,00
0,79	0,833	0,015	1,030	0,479	0,029	1,38	0,076	0,002	6,0	0,0002	0,00
0,80	0,854	0,015	1,035	0,440	0,025	1,39	0,074	0,003	8,0	0,0001	0,00
0,81	0,869	0,016	1,040	0,415	0,022	1,40	0,071	0,002	10,0	0,0000	
0,82	0,885	0,016	1,045	0,393	0,019	1,41	0,069	0,002			
0,83	0,901	0,017	1,05	0,374	0,032	1,42	0,067	0,002			
0,84	0,918	0,018	1,06	0,342	0,027	1,43	0,065	0,002			

Таблица 79 проф. Бахметева

$x = 5{,}50$ Канал с прямым уклоном: $i_0 > 0$

η	$Б(\eta)$	Δ	η	$Б(\eta)$	$\pm\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$	η	$Б(\eta)$	$-\Delta$
0	0	0,050	0,85	0,920	0,017	1,07	0,264	0,020	1,44	0,046	0,002
0,05	0,050	0,050	0,86	0,937	0,019	1,08	0,244	0,019	1,45	0,044	0,001
0,10	0,100	0,050	0,87	0,956	0,019	1,09	0,255	0,015	1,46	0,043	0,002
0,15	0,150	0,050	0,88	0,975	0,021	1,10	0,210	0,013	1,47	0,041	0,001
0,20	0,200	0,050	0,89	0,996	0,022	1,11	0,197	0,011	1,48	0,040	0,001
0,25	0,250	0,050	0,90	1,018	0,011	1,12	0,184	0,010	1,49	0,039	0,001
0,30	0,300	0,050	0,905	1,029	0,012	1,13	0,173	0,009	1,50	0,038	0,006
0,35	0,350	0,050	0,910	1,041	0,013	1,14	0,163	0,008	1,55	0,032	0,004
0,40	0,400	0,051	0,915	1,054	0,013	1,15	0,154	0,003	1,60	0,028	0,003
0,45	0,451	0,051	0,920	1,067	0,014	1,16	0,146	0,007	1,65	0,0240	0,0031
0,50	0,502	0,051	0,925	1,081	0,015	1,17	0,139	0,007	1,70	0,0209	0,0026
0,55	0,553	0,053	0,930	1,096	0,016	1,18	0,132	0,006	1,75	0,0183	0,0022
0,60	0,606	0,010	0,935	1,112	0,016	1,19	0,125	0,005	1,80	0,0161	0,0020
0,61	0,616	0,011	0,940	1,128	0,018	1,20	0,119	0,006	1,85	0,0141	0,0016
0,62	0,627	0,011	0,945	1,146	0,020	1,21	0,114	0,004	1,90	0,0125	0,0014
0,63	0,638	0,011	0,950	1,166	0,021	1,22	0,108	0,005	1,95	0,0111	0,0012
0,64	0,649	0,011	0,955	1,187	0,024	1,23	0,104	0,004	2,0	0,0099	0,0020
0,65	0,660	0,011	0,960	1,211	0,026	1,24	0,099	0,004	2,1	0,0079	0,0015
0,66	0,671	0,011	0,965	1,237	0,030	1,25	0,095	0,004	2,2	0,0064	0,0012
0,67	0,682	0,011	0,970	1,267	0,035	1,26	0,091	0,004	2,3	0,0042	0,0009
0,68	0,693	0,012	0,975	1,302	0,042	1,27	0,087	0,003	2,4	0,0043	0,0007
0,69	0,705	0,011	0,980	1,344	0,056	1,28	0,083	0,003	2,5	0,0036	0,0005
0,70	0,716	0,012	0,985	1,400	0,076	1,29	0,080	0,003	2,6	0,0031	0,0005
0,71	0,728	0,012	0,990	1,476	0,129	1,30	0,077	0,003	2,7	0,0023	0,0004
0,72	0,740	0,012	0,995	1,605	∞	1,31	0,074	0,003	2,8	0,0022	0,0003
0,73	0,752	0,012	1,000	∞	∞	1,32	0,071	0,002	2,9	0,0019	0,0003
0,74	0,764	0,012	1,050	0,730	0,132	1,33	0,068	0,003	3,0	0,0016	0,0008
0,75	0,776	0,013	1,010	0,598	0,073	1,34	0,066	0,002	3,5	0,00080	0,00037
0,76	0,789	0,013	1,015	0,525	0,051	1,35	0,063	0,002	4,0	0,00043	0,00019
0,77	0,802	0,014	1,020	0,474	0,039	1,36	0,061	0,002	4,5	0,00024	0,00008
0,78	0,816	0,013	1,025	0,435	0,032	1,37	0,059	0,002	5,0	0,00016	0,00009
0,79	0,829	0,014	1,030	0,403	0,027	1,38	0,057	0,002	6,0	0,00007	0,00005
0,80	0,843	0,014	1,035	0,376	0,022	1,39	0,055	0,002	8,0	0,00002	0,00001
0,81	0,857	0,015	1,040	0,354	0,019	1,40	0,053	0,002	10,0	0,00001	
0,82	0,872	0,015	1,045	0,335	0,017	1,41	0,051	0,002			
0,83	0,887	0,016	1,05	0,318	0,030	1,42	0,049	0,001			
0,84	0,903	0,017	1,06	0,288	0,024	1,43	0,047				

Таблица 80 проф. Бахметева

Канал с обратным уклоном дна: $i_0 < 0$ $x = 2{,}0$

η_1'	$Б'(\zeta)$	Δ	η_1'	$Б'(\zeta)$	Δ	η_1'	$Б'(\zeta)$	Δ	η_1'	$Б'(\zeta)$	Δ
0	0	0,050	0,81	0,680	0,006	1,14	0,851	0,004	1,47	0,973	0,004
0,05	0,050	0,049	0,82	0,686	0,006	1,15	0,855	0,004	1,48	0,977	0,003
0,10	0,099	0,049	0,83	0,692	0,006	1,16	0,859	0,005	1,49	0,980	0,003
0,15	0,148	0,048	0,84	0,698	0,006	1,17	0,864	0,004	1,50	0,983	0,013
0,20	0,196	0,048	0,85	0,704	0,006	1,18	0,868	0,004	1,55	0,997	0,014
0,25	0,244	0,047	0,86	0,710	0,005	1,19	0,872	0,004	1,60	1,012	0,015
0,30	0,291	0,045	0,87	0,715	0,006	1,20	0,876	0,004	1,65	1,026	0,014
0,35	0,336	0,044	0,88	0,721	0,006	1,21	0,880	0,004	1,70	1,039	0,013
0,40	0,380	0,042	0,89	0,727	0,005	1,22	0,884	0,004	1,75	1,052	0,013
0,45	0,422	0,041	0,90	0,732	0,006	1,23	0,888	0,004	1,80	1,064	0,012
0,50	0,463	0,039	0,91	0,738	0,005	1,24	0,892	0,004	1,85	1,075	0,011
0,55	0,502	0,038	0,92	0,743	0,006	1,25	0,896	0,004	1,90	1,086	0,011
0,60	0,540	0,007	0,93	0,749	0,005	1,26	0,900	0,004	1,95	1,097	0,011
0,61	0,547	0,007	0,94	0,754	0,005	1,27	0,904	0,004	2,00	1,107	0,010
0,62	0,554	0,008	0,95	0,759	0,005	1,28	0,908	0,004	2,10	1,123	0,016
0,63	0,562	0,007	0,96	0,764	0,005	1,29	0,911	0,003	2,20	1,144	0,021
0,64	0,569	0,007	0,97	0,770	0,005	1,30	0,915	0,004	2,30	1,161	0,017
0,65	0,576	0,007	0,98	0,775	0,005	1,31	0,919	0,004	2,40	1,176	0,015
0,66	0,583	0,007	0,99	0,780	0,005	1,32	0,922	0,003	2,50	1,190	0,014
0,67	0,590	0,007	1,00	0,785	0,005	1,33	0,926	0,004	2,60	1,204	0,014
0,68	0,597	0,006	1,01	0,790	0,005	1,34	0,930	0,004	2,70	1,216	0,012
0,69	0,603	0,007	1,02	0,795	0,005	1,35	0,933	0,003	2,80	1,228	0,012
0,70	0,610	0,007	1,03	0,800	0,005	1,36	0,937	0,004	2,90	1,239	0,011
0,71	0,617	0,007	1,04	0,805	0,005	1,37	0,940	0,003	3,00	1,249	0,010
0,72	0,624	0,006	1,05	0,810	0,005	1,38	0,944	0,004	3,5	1,293	0,044
0,73	0,630	0,007	1,06	0,815	0,004	1,39	0,947	0,003	4,0	1,324	0,031
0,74	0,637	0,006	1,07	0,819	0,005	1,40	0,951	0,004	4,5	1,351	0,027
0,75	0,643	0,006	1,08	0,824	0,004	1,41	0,954	0,003	5,0	1,373	0,022
0,76	0,649	0,007	1,09	0,828	0,005	1,42	0,957	0,003	6,0	1,405	0,032
0,77	0,656	0,006	1,10	0,833	0,004	1,43	0,960	0,004	8,0	1,447	0,042
0,78	0,662	0,006	1,11	0,837	0,005	1,44	0,964	0,003	10,0	1,471	0,024
0,79	0,668	0,006	1,12	0,842	0,004	1,45	0,967	0,003			
0,80	0,674	0,006	1,13	0,846	0,005	1,46	0,970	0,003			

Таблица 81 проф. Бахметева

$x = 2{,}50$ Канал с обратным уклоном дна: $i_0 = 0$

η_1'	$Б'(\zeta)$	Δ	η_1'	$Б'(\zeta)$	Δ	η_1'	$Б'(\zeta)$	Δ	η_1'	$Б'(\zeta)$	Δ
0	0	0,050	0,81	0,706	0,006	1,14	0,876	0,004	1,47	0,989	0,002
0,05	0,050	0 050	0,82	0,712	0,003	1,15	0,880	0,004	1,48	0,991	0,003
0,10	0,100	0,050	0,83	0,718	0,006	1,16	0,884	0,004	1,49	0,994	0,003
0,15	0,150	0,048	0,84	0,724	0,006	1,17	0,888	0,004	1,50	0,997	0,013
0,20	0,198	0,048	0,85	0,730	0,006	1,18	0,892	0,004	1,55	1,010	0,012
0,25	0,246	0,049	0,86	0,736	0,006	1,19	0,896	0,004	1,60	1,022	0,011
0,30	0,295	0 047	0,87	0,742	0,006	1,20	0,900	0,004	1,65	1,033	0,011
0,35	0,342	0,047	0,88	0,748	0,006	1,21	0,904	0,004	1,70	1,044	0,010
0,40	0,389	0,045	0,89	0,754	0,006	1,22	0,908	0,004	1,75	1,054	0,010
0,45	0,434	0,043	0,90	0,760	0,006	1,23	0,912	0,004	1,80	1,064	0,009
0,50	0,477	0,041	0,91	0,765	0,006	1,24	0,916	0,003	1,85	1,073	0,009
0,55	0,518	0,040	0,92	0,771	0,006	1,25	0,919	0,004	1,90	1,082	0,008
0,60	0,558	0,008	0,93	0,777	0,005	1,26	0,923	0,004	1,95	1,090	0,008
0,61	0,556	0,008	0,94	0,782	0,005	1,27	0,927	0,003	2,00	1,098	0,013
0,62	0,574	0,007	0,95	0,787	0,006	1,28	0,930	0,004	2,10	1,112	0,013
0,63	0,581	0,008	0,96	0,793	0,005	1,29	0,934	0,003	2,20	1,125	0,012
0,64	0,589	0,007	0,97	0,798	0,005	1,30	0,937	0,003	2,30	1,137	0,011
0,65	0,596	0,008	0,98	0,803	0,006	1,31	0,940	0,003	2,40	1,148	0,009
0,66	0,604	0,007	0,99	0,809	0,004	1,32	0,943	0,004	2,50	1,157	0,009
0,67	0,611	0,008	1,00	0,813	0,004	1,33	0,947	0,004	2,60	1,166	0,008
0,68	0,619	0,007	1,01	0,817	0,006	1,34	0,951	0,003	2,70	1,174	0,007
0,69	0,626	0,007	1,02	0,823	0,004	1,35	0,954	0,003	2,80	1,181	0,007
0,70	0,633	0,007	1,03	0,827	0,004	1,36	0,957	0,003	2,90	1,188	0,006
0,71	0,640	0,008	1,04	0,831	0,005	1,37	0,960	0,003	3,00	1,194	0,024
0,72	0,648	0,007	1,05	0,836	0,005	1,38	0,963	0,003	3,5	1,218	0,019
0,73	0,655	0,007	1,06	0,841	0,005	1,39	0,966	0,003	4,0	1,237	0,014
0,74	0,662	0,006	1,07	0,846	0,005	1,40	0,969	0,003	4,5	1,251	0,009
0,75	0,668	0,007	1,08	0,851	0,005	1,41	0,972	0,003	5,0	1,260	0,008
0,76	0,675	0,006	1,09	0,856	0,004	1,42	0,975	0,003	6,0	1,272	0,008
0,77	0,681	0,007	1,10	0,860	0,004	1,43	0,978	0,003	8,0	1,290	0,003
0,78	0,688	0,006	1,11	0,864	0,004	1,44	0,980	0,003	10,0	1,298	
0,79	0,694	0,006	1,12	0,868	0,004	1,45	0,983	0,003			
0,80	0,700	0,006	1,13	0,872	0,004	1,46	0,986	0,003			

Таблица 82 проф. Бахметева

Канал с обратным уклоном дна: $i_0 < 0$ $x = 2{,}75$

η'	$Б'(\zeta)$	Δ	η'	$Б'(\zeta)$	Δ	η'	$Б'(\zeta)$	Δ	η'	$Б'(\zeta)$	Δ
0	0	0,050	0,81	0,717	0,006	1,14	0,889	0,004	1,47	0,996	0,003
0,05	0,050	0,050	0,82	0 723	0,006	1,15	6,893	0,004	1,48	0,998	0,003
0,10	0,100	0,050	0,83	0,729	0,007	1,16	0,897	0,004	1,49	1,001	0,003
0,15	0,150	0,050	0,84	0,736	0,006	1,17	0,901	0,004	1,50	1,004	0,011
0,20	0,194	0,049	0,85	0,742	0 006	1,18	0,905	0,003	1,55	1,015	0,011
0,25	0,249	0,048	0 86	0,748	0,006	1,19	0,908	0,003	1,60	1,023	0,011
0,30	0,297	0,048	0,87	0,754	0,006	1,20	0,911	0,004	1,65	1,037	0,010
0,35	0,345	0,046	0,88	0,760	0,005	1,21	0,915	0,004	1,70	1,047	0,009
0,40	0,391	0,046	0,89	0,765	0,006	1,22	0,919	0,003	1,75	1,056	0,008
0,45	0,437	0,044	0,90	0,771	0,006	1,23	0,922	0,004	1,80	1,064	0,008
0,50	0,481	0,042	0,91	0,777	0,006	1,24	0,926	0,003	1,85	1,072	0,008
0,55	0,523	0,042	0,92	0 783	0,005	1,25	0,929	0,004	1,90	1,080	0,007
0,60	0,565	0,008	0,93	0,788	0,005	1,26	0,933	0,003	1,95	1,087	0,007
0,61	0,573	0,008	0,94	0,793	0,006	1,27	0,936	0,004	2,00	1,094	0,012
0,62	0,581	0,008	0,95	0,799	0,005	1,28	0 940	0,003	2,10	1,106	0,011
0,63	0,589	0,007	0,96	0,804	0,003	1,29	0,943	0,004	2,20	1,117	0,010
0,64	0,596	0,008	0,97	0,810	0 004	1,30	0 947	0,003	2,30	1,127	0 009
0,65	0,604	0,008	0,98	0,814	0,006	1,31	0,950	0,004	2,40	1,136	0,007
0,66	0,612	0,007	0,99	0,820	0,004	1,32	0,954	0,003	2,50	1,143	0,007
0,67	0,619	0,008	1,00	0,824	0,005	1,33	0,957	0,004	2,60	1,150	0,006
0,68	0,627	0,007	1,01	0,829	0,005	1,34	0 961	0,003	2,70	1,156	0,006
0,69	0,634	0,008	1,02	0,834	0,005	1,35	0,964	0,004	2,80	1,162	0,006
0,70	0,642	0,007	1,03	0,839	0,005	1,36	0,967	0,003	2,90	1,168	0,005
0,71	0,649	0,007	1,04	0,844	0,004	1,37	0,970	0,003	3,00	1,173	0,018
0,72	0,656	0,007	1,05	0,848	0,006	1,38	0,973	0,002	3,50	1,191	0,013
0,73	0,663	0,007	1,06	0,854	0,005	1,39	0,975	0,002	4,00	1,204	0,009
0,74	0,670	0,007	1,07	0,859	0,004	1,40	0,977	0,003	4,50	1,213	0,007
0,75	0,677	0,007	1,08	0,863	0,005	1,41	0,980	0,003	5,00	1,220	0,010
0,76	0,684	0,007	1,09	0,868	0,004	1,42	0,983	0,003	6,00	1,230	0,009
0,77	0,601	0,007	1,10	0,872	0,005	1,43	0,986	0,002	8,00	1,239	0,005
0,78	0,698	0,006	1,11	0,877	0,004	1,44	0,988	0,002	10,00	1,244	
0,79	0,704	0,006	1,1	0,881	0,004	1,45	0,990	0,003			
0,80	0,710	0,007	1,13	0,885	0,004	1,46	0,993	0,003			

Таблица 83

x = 2,0; x = 2,85; x = 2,50; x = 2,75; x = 3,00

Канал с обратным уклоном дна: $i_0 < 0$

η'	$Б'(\eta')$	Δ	η'	$Б'(\eta')$	Δ	η'	$Б'(\eta')$	Δ	η'	$Б'(\eta')$	Δ
0	0	0.050	0.81	0.727	0.006	1.14	0.899	0.004	1.47	1 003	0.002
0.05	0.050	0.050	0.82	0.733	0.007	1.15	0.903	0.004	1.48	1.005	0.002
0.10	0.100	0.050	0.83	0.740	0.006	1.16	0.907	0.004	1.49	1.007	0.002
0.15	0.150	0.049	0.84	0.746	0.006	1.17	0.911	0.004	1.50	1.009	0.011
0.20	0.199	0.049	0.55	0.752	0.006	1.18	0.915	0.004	1.55	1.020	0.010
0.25	0.248	0.049	0.86	0.758	0.006	1.19	0.918	0.003	1.60	1.030	0.009
0.30	0.297	0.049	0.87	0.764	0.006	1.20	0.921	0.003	1.65	1.039	0.009
0.35	0.346	0.047	0.88	0.770	0.006	1.21	0.925	0.004	1.70	1.048	0.009
0.40	0.393	0.047	0.89	0.776	0.006	1 22	0.920	0.004	1.75	1.057	0.008
0.45	0.440	0.045	0.90	0.781	0.005	1.23	0.932	0.003	1.80	1.065	0.007
0.50	0.485	0.043	0.91	0.787	0.006	1.24	0.935	0 003	1.85	1.072	0.007
0.55	0.528	0.043	0.92	0.793	0.006	1.25	0.938	0.003	1.90	1.079	0.006
0.60	0.571	0,008	0.93	0.799	0.006	1.26	0.942	0.004	1.95	1.085	0.005
0.61	0.579	0.008	0.94	0.804	0.005	1.27	0.945	0.003	2.00	1.090	0.010
0.62	0.587	0.008	0.95	0.809	0.005	1.28	0.948	0.003	2.10	1.100	0.009
0.63	0.595	0.007	0.96	0.815	0.006	1.29	0.952	0.004	2.20	1.109	0.008
0.64	0.602	0.008	0.97	0.820	0.005	1.30	0.955	0.003	2.30	1.117	0.007
0.65	0.610	0.008	0.98	0.825	0.005	1.31	0.958	0.003	2.40	1.124	0.007
0.66	0.618	0.008	0.99	0.830	0.005	1.32	0.961	0.003	2.50	1.131	0.006
0.67	0.626	0.008	1.00	0.834	0.004	1.33	0.964	0.003	2.60	1.137	0.005
0.68	0.634	0.007	1.01	0.840	0 006	1.34	0.967	0.003	2.70	1.142	0.004
0.69	0.641	0.008	1.02	0.845	0.005	1.35	0.970	0.00	2.80	1.146	0.004
0.70	0.649	0.008	1.03	0.850	0.005	1.36	0.973	0.003	2.90	1.150	0.004
0.71	0.657	0.007	1.04	0.855	0.005	1.37	0.976	0.003	3 00	1.154	0.011
0.72	0.664	0.008	1.05	0.859	0.004	1.38	0.979	0.003	3.50	1.165	1.011
0.73	0.672	0.007	1.06	0.864	0.005	1.39	0.981	0.002	4.00	1.176	0.007
0.74	0.679	0.007	1 07	0.869	0.005	1.40	0.084	0.003	4.50	1.183	0.005
0.75	0.686	0.007	1.08	0.873	0.004	1.41	0.986	0.002	5.00	1.188	0.009
0.76	0.693	0.007	1.09	0.877	0.004	1.42	0.989	0.003	6.00	1.195	0.006
0.7	0.700	0.007	1.10	0.881	0.004	1.43	0.992	0 003	8.00	1.201	0.002
0.78	0.707	0.007	1.11	0.886	0.005	1.44	0.995	0.003	10.00	1.203	
0.79	0.713	0.006	1.12	0.891	0.005	1.45	0.997	0 002			
0.80	0.720	0.007	1.13	0.895	0.004	1.46	1.000	0.003			
		0.007			0.004			0.003			

Таблица 84

Канал с обратным уклоном дна: $i_0 < 0$ x = 3,25

η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ
5	0		0.81	0.733		1.14	0.907		1.47	1.007	
0.05	0.050	0.050	0.82	0.740	0.007	1.15	0.911	0.004	1.48	1.009	0.002
0.10	0.100	0.050	0.83	0.747	0.007	1.16	0.914	0.003	1.49	1.011	0.002
0.15	0.150	0.050	0.84	0.753	0.006	1.17	0.918	0.004	1.50	1.013	0.002
0.20	0.200	0.049	0.85	0.760	0.007	1.18	0.922	0.004	1.55	1.023	0.010
0.25	0.249	0.050	0.86	0.766	0.006	1.19	0.926	0.004	1.60	1.033	0.010
0 30	0.298	0.049	0.87	0.772	0.006	1.20	0.929	0.003	1.65	1.041	0.008
0.35	0.347	0.049	0.88	0.778	0.006	1.21	0.933	0.004	1.70	1.049	0.008
0.40	0.395	0.048	0.89	0 784	0.006	1.22	0.937	0.004	1.75	2.059	0.007
0.45	0.442	0.047	0.90	0.790	0.006	1.23	0.941	0.003	1.80	1.063	0.007
0.50	0.488	0.046	0.91	0.796	0.006	1.24	0.944	0.003	1.85	1.069	0.006
0.55	0.532	0.044	0.92	0.802	0.006	1.25	0.947	0.003	1.90	1.075	0.006
0.60	0.576	0.044	0.93	0.807	0.005	1.26	0.950	0.003	1.95	1.080	0.005
0.61	0.584	0.008	0.94	0.813	0.006	1.27	0.953	0.003	2 00	1.085	0.005
0.62	0.592	0.008	0.95	0.818	0.005	1 28	0.956	0.003	2.10	1.094	0.009
0.63	0.600	0.008	0.96	0 824	0.006	1.29	0.959	0.003	2.20	1.102	0.008
0.61	0.608	0 008	0.97	0.829	0.005	1.30	0.962	0.003	2.30	1.109	0.007
0.65	0.616	0.008	0.98	0.834	0.005	1.31	0.965	0.003	2.40	1.115	0.006
0.66	0.623	0.007	0.99	0.839	0.005	1.32	0.968	0.003	2.50	1.119	0.004
0.67	0.631	0.008	1.00	0.845	0.006	1.33	0.971	0.003	2.60	1.123	0.004
0.68	0.639	0.008	1.01	0.850	0.005	1.34	0.974	0.003	2.70	1.127	0.004
0.69	0.647	0.008	1.02	0.855	0.005	1.35	0.977	0.003	2.80	1.131	0.004
0.70	0.655	0.008	1.03	0.859	0.004	1.36	0.980	0.003	2.90	1.134	0.003
0.71	0.662	0.007	1.04	0.864	0.005	1.37	0.983	0.003	3.00	1.137	0.003
0.72	0.670	0.008	1.05	0.869	0.005	1.38	0.986	0.003	3.5	1.148	0.011
0.73	0.678	0.008	1.06	0 873	0.004	1.39	0.988	0.002	4.0	1.155	0.007
0.74	0.685	0.007	1.07	0.878	0.005	1.40	0.990	0.002	4.5	1.160	0.005
0.75	0.692	0.007	1.08	0.882	0.004	1.41	0.993	0.003	5.0	1.163	0.003
0.76	0.700	0.008	1.09	0.887	0.005	1.42	0.995	0.002	6.0	1.167	0.004
0.77	0.707	0.007	1.10	0.891	0.004	1.43	0.998	0.003	8.0	1.170	0.003
0.78	0.713	0.006	1.11	0.895	0.004	1.44	1.001	0.003	10.0	1.172	0.002
0.79	0.720	0.007	1.12	0.899	0.004	1.45	1.003	0.002			
0.80	0.727	0.007	1.13	0.903	0.004	1.46	1.005	0.002			
		0.006						0.002			

Таблица 85

x = 3,50 Канал с обратным уклоном дна: $i_0 < 0$

η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ
0	0		0.81	0.841		1.14	0.913		1.47	0.009	
0.05	0.050	0.050	0.82	0.848	0.007	1.15	0.917	0.004	1.48	1.010	0.001
0.10	0.100	0.050	0.83	0.855	0.007	1.16	0.921	0.004	1.49	1.012	0.002
0.15	0.150	0.050	0.84	0.761	0.006	1.17	0.925	0.004	1.59	1.014	0.002
0.20	0.200	0.050	0.85	0.767	0.006	1.18	0.928	0.003	1.55	1.023	0.009
0.25	0.250	0.050	0.86	0.774	0.007	1.19	0.931	0.003	1.60	1.032	0.009
0.30	0.299	0.049	0.87	0.780	0.006	1.20	0.935	0.004	1.65	1.040	0.008
0.35	0.348	0.049	0.88	0.780	0.006	1.21	0.939	0.004	1.70	1.047	0.007
0.40	0.396	0.048	0.89	0.792	0.006	1.22	0.943	0.004	1.75	1.053	0.006
0.45	0.444	0.048	0.90	0.798	0.006	1.23	0.946	0.003	1.80	1.059	0.006
0.50	0.490	0.046	0.91	0.804	0.006	1.24	0.949	0.003	1.85	1.065	0.005
0.55	0.534	0.044	0.92	0.810	0.006	1.25	0.952	0.003	1.90	1.070	0.004
0.60	0.579	0.045	0.93	0.815	0.005	1.26	0.955	0.003	1.95	1.074	0.004
0.61	0.588	0.009	0.94	0.820	0.005	1.27	0.958	0.003	2 00	1.078	0.004
0.62	0.596	0.008	0.95	0.826	0.006	1.28	0.961	0.003	2.10	1.085	0.007
0.63	0.605	0.009	0.96	0.831	0.005	1.29	0.964	0.003	2.20	1.092	0.007
0.64	0.613	0.008	0.97	0.837	0.005	1.30	0.966	0.002	2.30	1.097	0 005
0.65	0.621	0.008	0.98	0.842	0.005	1.31	0.969	0.003	2.40	1.102	0.005
0.66	0.630	0.009	0.99	0.847	0.005	1.32	0.972	0.003	2.50	1.106	0.004
0.67	0.638	0.008	1.00	0.841	0.004	1.33	0.974	0.002	2.60	1.110	0.004
0.68	0.646	0.008	1.01	0.846	0.005	1.34	0.977	0.003	2.70	1.113	0.003
0.69	0.653	0.007	1.02	0.862	0.006	1.35	0.980	0.003	2.80	1.116	0.003
0.70	0.661	0.008	1.03	0.863	0 004	1.36	0.983	0.003	2.90	1.119	0.003
0.71	0.668	0.007	1.04	0 871	0.005	1.37	0.986	0.003	3.00	1.121	0.002
0.72	0.676	0.008	1.05	0.875	0.004	1.38	0.989	0 003	3.50	1.129	0.008
0.73	0.683	0.007	1.06	0.879	0.004	1.39	0.991	0.002	4.00	1.134	0.005
0.74	0.691	0.008	1.07	0.884	0.005	1.40	0.993	0.002	4.50	1.137	0.003
0.75	0.698	0.007	1.08	0.888	0.004	1.41	0.995	0.002	5.00	1.139	0.002
0.76	0.705	0.007	1.09	0.892	0.004	1.42	0.998	0 003	6.00	1.142	0.003
0.77	0.712	0.007	1.10	0.897	0.005	1.43	1.001	0.003	8.00	1.144	0.002
0.78	0.720	0.008	1.11	0.901	0.004	1.44	1.003	0.002	10.00	1.145	0.001
0.79	0.727	0.007	1.12	0.905	0.004	1.45	1.005	0.002			
0.80	0.734	0.007	1.13	0.909	0.004	1.46	1.007	0.002			
		0.007									

Таблица 86

Канал с обратным уклоном дна: $i_0 < 0$ $x = 3{,}75$

η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ
0	0	0.050	0.81	0.748	0.006	1.14	0.924	0.004	1.47	1.016	0.001
0.05	0.050	0.050	0.82	0.754	0.007	1.15	0.928	0.004	1.48	1.018	0.001
0.10	0.100	0 050	0.83	0.761	0.006	1.16	0.932	0.003	1.49	1.019	0.002
0.15	0.150	0.050	0.84	0.767	0.007	1.17	0.935	0.004	1.50	1.020	0.009
0.20	0.200	0.050	0.85	0.774	0.007	1.18	0.939	0.003	1.55	1.029	0.008
0.25	0.200	0.049	0.86	0.781	0.006	1.19	0.942	0.004	1.60	1.037	0.007
0.30	0.299	0.049	0.87	0.787	0.007	1.20	0.946	0.003	1.65	1.044	0.006
0.35	0.348	0.048	0.88	0.794	0.005	1.21	0.949	0.003	1.70	1.050	0.006
0.40	0.396	0.048	0.89	0.799	0.006	1.22	0.952	0.003	1.75	1.056	0.005
0.45	0.444	0.049	0.90	0.805	0.006	1.23	0.955	0.003	1.80	1.061	0.005
0.50	0.493	0.049	0.91	0.811	0.005	1.24	0.958	0.003	1.85	1.066	0.004
0.55	0.542	0.049	0.92	0.817	0.006	1 25	0.961	0.003	1.90	1.070	0.004
0.60	0.583	0.009	0.93	0.823	0.005	1.26	0.964	0.003	1.95	1.074	0.004
0.61	0.592	0.008	0.94	0.828	0 006	1.27	0.967	0.003	2.00	1.078	0.004
0.62	0.600	0.009	0.95	0.834	0.005	1.28	0.970	0.003	2.10	1.084	0.006
0.63	0.609	0.008	0.96	0.839	0.006	1.29	0.973	0.0003	2.20	1.090	0.006
0.64	0.617	0.008	0.97	0.845	0.005	1.30	0.976	0.002	2.30	1.094	0.004
0.65	0.625	0.008	0.98	0.850	0.006	1.31	0.979	0.003	2.40	1.098	0.004
0.66	0.633	0.008	0 99	0.855	0.006	1.32	0.981	0.002	2.50	1.101	0.003
0.67	0.641	0 007	1.00	0.861	0.006	1.33	0.984	0.003	2.60	1.104	0.003
0.68	0.649	0.008	1.01	0.867	0.006	1.34	0.936	0.003	2.70	1.107	0.003
0.69	0.957	0.008	1.02	0.873	0.006	1.35	0.989	0.002	2.80	1.109	0.002
0.70	0.665	0.008	1.03	0.879	0.006	1.36	0 991	0.003	2.90	1.111	0.002
0.71	0.673	0.008	1.04	0.884	0.005	1.37	0.994	0.002	3.00	1.112	0.001
0.72	0.681	0.007	1.05	0.888	0.004	1.38	0.996	0.003	3.50	1.118	0.005
0.73	0.688	0.007	1.06	0.892	0.004	1.39	0.999	0.002	4.00	1.122	0.004
0.74	0 695	0.008	1.07	0.896	0.004	1.40	1.101	0.002	4.50	1.124	0.002
0.75	0.703	0.007	1.08	0.900	0.004	1.41	1.003	0.002	5.00	1.126	0.002
0.76	0.710	0.007	1.09	0.904	0.004	1.42	1.005	0.002	6.00	1.127	0.001
0.77	0.717	0.007	1.10	0.908	0.004	1.43	1.008	0.003	8.00	1.129	0.002
0.78	0.724	0.007	1.11	0.912	0,004	1.44	1.010	0.002	10.00	1.129	
0.79	0.732	0.008	1.12	0.916	0.004	1.45	1.012	0.002			
0.80	0.740	0.008	1.13	0.920	0.004	1.46	1.014	0.002			
		0.008						0.002			

Таблица 87

$x = 4{,}0$ Канал с обратным уклоном дна: $i_0 < 0$

η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ
0	0	0.050	0.81	0.753	0.007	1.14	0.927	0.004	1.47	1.013	0.002
0.05	0.050	0.050	0.82	0.760	0.006	1.15	0.931	0.004	1.48	1.015	0.002
0.10	0.100	0.050	0.83	0.766	0.007	1.16	0.935	0.003	1.49	1.017	0.002
0.15	0.150	0.050	0.84	0.773	0.007	1.17	0.938	0.004	1.50	1.019	0.009
0.20	0.200	0.050	0.85	0.780	0.006	1.18	0.942	0.004	1.55	1.028	0.006
0.25	0.250	0.050	0.86	0.786	0.006	1.19	0.916	0.003	1.60	1.034	0.006
0.30	0.300	0.049	0.87	0.792	0.007	1.20	0.949	0 003	1.65	1 040	0.006
0.35	0.349	0.018	0.88	0.799	0.006	1.21	0.952	0.003	1.70	1.046	0.005
0.40	0.397	0.049	0.89	0.805	0.006	1.22	0.955	0.003	1.75	1.051	0.005
0.45	0.446	0.047	0.90	0.811	0.006	1.23	0.958	0.003	1.80	1.056	0.004
0.50	0.493	0.046	0.91	0.817	0.006	1.24	0.961	0.003	1.85	1.060	0.004
0.55	0.539	0.046	0.92	0.823	0.006	1.25	0.964	0.003	1.90	1.034	0.003
0.60	0.585	0.009	0.93	0·829	0.006	1.26	0.967	0.003	1.95	1.067	0.003
0.61	0.594	0.009	0.94	0.835	0.006	1.27	0.970	0.003	2.00	1.070	0.005
0.62	0.603	0.009	0.95	0.840	0.005	1.28	0.973	0.003	2.10	1.075	0.004
0.63	0.612	0.008	0 93	0.846	0.006	1.29	0.975	0.002	2.20	1.079	0.004
0.64	0.620	0.009	0.97	0.851	0.005	1.30	0 978	0.003	2.30	1.083	0.003
0.65	0.629	0.009	0.98	0.857	0.006	1.31	0.981	0.003	2.40	1.086	0.003
0.66	0.633	0.008	0.99	0.861	0.004	1.32	0.984	0.003	2.50	1.089	0.002
0.67	0 646	0.008	1.00	0.867	0.006	1.33	0.986	0.002	2.60	1.091	0.002
0.68	0.654	0.008	1.01	0.872	0.005	1.34	0.989	0.003	2.70	1.093	0 002
0.69	0.662	0.008	1.02	0.876	0.004	1.35	0.991	0.002	2.80	1.095	0.002
0.70	0.670	0.008	1.03	0.881	0.005	1.36	0.993	0.002	2.90	1.097	0.001
0.71	0.678	0.008	1.04	0.887	0.006	1.37	0.995	0.002	3.00	1.098	0.004
0.72	0.686	0.008	1.05	0.891	0.004	1.38	0.997	0.002	3.50	1.102	0 003
0.73	0.694	0.008	1.06	0.895	0.004	1.39	0.998	0.001	4.00	1.105	0.002
0.74	0.702	0.007	1.07	0.900	0.005	1,40	1.000	0.002	4.50	1.107	0.002
0.75	0.709	0.008	1.08	0.904	0.004	1.41	1.002	0.002	5.00	1.109	0.001
0.76	0.717	0.007	1.09	0.908	0.004	1.42	1. 04	0.002	6.00	1.110	
0.77	0.724	0.007	1.10	0.912	0.004	1.43	1.006	0.002	8.00	1 110	
0.78	0.731	0.007	1.11	0.916	0.004	1.44	1.008	0.002	10.00	1.110	
0.79	1.738	0.007	1.12	0.920	0.004	1.45	1 010	0.002			
0.80	0.746	0.007	1.13	0.924	0.004	1.46	1.012	0.002			
					0.003			0.001			

Таблица 88

Канал с обратным уклоном дна: $i_0 < 0$ $\mathbf{x = 4{,}50}$

η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ
0	0		0.81	0.762		1.14	0.939		1.47	1.019	
0.05	0.050	0.050	0.82	0.769	0.007	1.15	0.943	0.004	1.48	1.021	0.002
0.10	0.100	0.050	0.83	0.776	0.007	1.16	0.946	0.003	1.49	1.022	0.001
0.15	0.150	0.050	0.84	0.783	0.007	1.17	0.949	0.003	1.50	1.023	0.001
0.20	0.200	0.050	0.85	0.790	0.007	1.18	0.952	0.003	1.55	1.030	0.007
0.25	0.250	0.050	0.86	0.797	0.007	1.19	0.955	0.003	1.60	1.035	0.005
0.30	0.300	0.050	0.87	0.803	0.006	1.20	0.959	0.004	1.65	1.040	0.005
0.35	0.349	0.049	0.88	0.809	0.006	1.21	0.962	0.003	1.70	1.044	0.004
0.40	0.398	0.049	0.89	0.816	0.007	1.22	0.965	0.003	1.75	1.048	0.004
0.45	0.447	0.049	0.90	0.822	0.006	1.23	0.968	0.003	1.80	1.052	0.004
0.50	0.495	0.048	0.91	0.820	0.006	1.24	0.971	0.003	1.85	1.055	0.003
0.55	0.542	0.047	0.92	0.834	0.006	1.25	0.974	0.003	1.90	1.058	0.003
0.60	0.589	0.047	0.93	0.840	0.006	1.26	0.976	0.002	1.95	1.060	0.002
0.61	0.589	0.000	0.94	0.846	0.006	1.27	0.979	0.003	2.00	1.062	0.002
0.62	0.607	0.009	0.95	0.852	0.006	1.28	0.982	0.003	2.10	1.066	0.004
0.63	0.616	0.009	0.96	0.857	0.005	1.29	0.984	0.002	2.20	1.069	0.003
0.64	0.625	0.009	0.97	0.863	0.006	1.30	0.986	0.002	2.30	1.072	0.003
0.65	0.634	0.009	0.98	0.868	0.005	1.31	0.989	0.003	2.40	1.074	0.002
0.66	0.643	0.009	0.99	0.873	0.005	1.32	0.991	0.002	2.50	1.076	0.002
0.67	0.652	0.009	1.00	0.879	0.006	1.33	0.994	0.003	2.60	1.077	0.001
0.68	0.660	0.008	1.01	0.885	0.006	1.34	0.995	0 002	2.70	1.078	0.001
0.69	0.668	0.008	1.02	0.890	0.005	1.35	0.998	0.002	2.80	1.079	0.001
0.70	0.677	0.009	1.03	0.894	0.004	1.36	1.000	0.002	2.90	1.080	0.001
0.71	0.685	0.008	1.04	0.899	0.005	1 37	1.002	0.002	3.00	1.031	0.001
0.72	0.694	0.009	1.05	0.904	0.005	1.38	1.004	0.002	3.50	1.083	0.002
0.73	0.702	0 008	1.06	0 908	0.004	1.39	1.006	0.002	4.00	1.085	0.002
0.74	0.710	0.008	1.07	0.912	0.004	1.40	1.007	0.001	4.50	1.086	0.001
0.75	0.717	0.007	1.08	0.917	0.005	1.41	1.009	0.002	5.00	1.086	—
0.76	0.725	0.008	1.09	0.921	0.004	1.42	1.011	0.002	6.00	1.086	—
0.77	0.733	0.008	1.10	0.924	0.003	1.43	1.013	0.002	8.00	1.087	0.001
0.78	0.740	0.007	1.11	0.928	0.004	1.44	1.015	0.002	10.00	1.087	—
0.79	0.748	0.008	1.12	0.932	0.004	1.45	1.016	0.001			
0.80	0.755	0.007	1.13	0.936	0.004	1.46	1.018	0.002			
		0.007			0.003			0.001			

Таблица 89

$\mathbf{x = 5{,}0}$ Канал с обратным уклоном дна: $i_0 < 0$

η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ	η_1'	$Б'(\eta_1')$	Δ
0	0		0.81	5.770		1.14	0.947		1.47	1.020	
0.05	0.050	0.050	0.82	0.777	0.007	1.15	0.950	0.003	1.48	1.020	—
0.10	0.100	0.050	0.83	0.784	0.007	1.16	0.953	0.003	1.49	1.021	0.001
0.15	0.150	0.050	0.84	0.791	0.007	1.17	0.957	0.004	1.50	1.022	0.001
0.20	0.200	0.050	0.85	0.798	0.007	1.18	0.960	0.003	1.55	1.028	0.006
0.25	0.250	0.050	0.86	0.804	0.006	1.19	0.963	0.003	1.60	1.032	0.004
0.30	0.300	0.050	0.87	0.811	0.007	1.20	0.966	0.003	1.65	1.036	0.003
0.35	0.350	0.050	0.88	0.818	0.007	1.21	0.969	0.003	1.70	1.039	0.003
0.40	0.400	0.050	0.89	0.824	0.006	1.22	0.972	0.003	1.75	1.042	0.003
0.45	0.449	0.049	0.90	0.831	0.007	1.23	0.974	0.002	1.80	1.045	0.003
0.50	0.497	0.048	0.91	0.837	0.006	1.24	0.977	0.003	1.85	1.047	0.002
0.55	0.545	0.048	0.92	0.844	0.007	1.25	0.979	0 002	1.90	1.049	0.002
0.60	0.592	0.047	0.93	0.850	0.006	1.26	0.982	0.003	1.95	1.051	0.002
0.61	0.601	0.009	0.94	0.856	0.006	1.27	0.984	0.002	2.00	1.053	0.002
0.62	0.610	0.009	0.95	0.861	0.005	1.28	0.987	0.003	2.10	1.056	0.003
0.63	0.620	0.010	0.96	0.867	0.006	1.29	0.989	0.002	2.20	1.058	0.002
0.64	0.629	0.009	0.97	0.872	0.005	1.30	0.991	0.002	2.30	1.060	0.002
0.65	0.638	0.009	0.98	0.878	0.006	1.31	0.993	0.002	2.40	1.061	0.001
0.66	0.647	0.009	0.99	0.883	0.005	1.32	0.995	0.002	2.50	1.062	0.001
0.67	0.656	0.009	1.00	0.887	0.004	1.33	0.997	0.002	2.60	1.063	0.001
0.68	0.665	0.009	1.01	0.893	0.006	1.34	0.999	0.002	2.70	1.063	—
0.69	0.674	0.009	1.02	0.898	0.005	1.35	1.001	0.002	2.80	1.064	0.001
0.70	0.682	0.008	1.03	0.902	0.004	1.36	1.002	0.001	2.90	1.065	0.001
0.71	0.690	0.008	1.04	0.907	0.005	1.37	1.004	0.002	3.00	1.065	—
0.72	0.699	0.009	1.05	0.911	0.004	1.38	1.006	0.002	3.50	1.066	0.001
0.73	0.707	0.008	1.06	0.915	0.004	1.39	1.008	0.002	4.00	1.067	0.001
0.74	0.716	0.009	1.07	0.919	0.004	1.40	1.009	0.001	4.50	1.067	—
0.75	0.724	0.008	1.08	0.923	0.004	1.41	1.011	0.002	5.00	1.068	0.001
0.76	0.731	0.007	1.09	0 927	0.004	1.42	1.012	0.001	6.00	1.068	—
0.77	0.739	0.008	1.10	0.931	0.004	1.43	1.014	0.002	9 00	1.068	—
0.78	0.747	0.008	1.11	0.935	0.004	1.44	1.016	0.002	10.00	1.068	—
0.79	0.754	0.007	1.12	0.939	0.004	1.45	1.017	0.001			
0.80	0.762	0.008	1.13	0.943	0.004	1.46	1.019	0.002			
								0.001			

Таблица 90

Канал с обратным уклоном дна: $i_0 < 0$ $\mathbf{x = 5{,}50}$

η'	$Б'(\eta')$	Δ	η'	$Б'(\eta')$	Δ	η'	$Б'(\eta')$	Δ	η'	$Б'(\eta')$	Δ
0	0	0.050	1.81	0.776	0.007	1.14	0.955	0.003	1.47	1.020	0.001
0.05	0.050	0.050	1.82	0.783	0.007	1.15	0.958	0.003	1.48	1.021	0.001
0.10	0.100	0.050	1.83	0.790	0.007	1.16	0.961	0.003	1.49	1.022	0.001
0.15	0.150	0.050	1.84	0.798	0.007	1.17	0.964	0 002	1.50	1.023	0 004
0.20	0.200	0.050	1.85	0.805	0.007	1.18	0.966	0.003	1.55	1.027	0.005
0.25	0.250	0.050	1.86	0.812	0.007	1.19	0.966	0.002	1.60	1.032	0.003
0.30	0.300	0.050	1.87	0.819	0.007	1.20	0.971	0.003	1.65	1.035	0.003
0.35	0.350	0.050	1.88	0.826	0.006	1.21	0.974	0.003	1.70	1.038	0 002
0.40	0.400	0.050	1.89	0.832	0.007	1.22	0.97.	0.002	1.75	1.040	0.002
0.45	0.450	0.0 0	1.90	0.839	0.006	1.23	0.979	0.003	1.80	1.042	0.002
0.50	0.498	0.048	1.91	0.845	0.006	1.24	0.982	0.003	1.85	1.044	0.002
0.55	0.547	0.049	1.92	0.851	0.006	1.25	0.985	0.002	1.90	1.046	0.001
0.60	0.595	0 048	1.93	0.857	0.006	1.26	0.987	0.002	1.95	1.047	0.001
0.61	0.604	0.009	1.94	0.864	0.007	1.27	0.989	0.002	2.00	1.048	0.002
0.62	0.613	0.009	1.95	0.869	0.005	1.28	0.991	0.002	2.10	1.050	0.001
0 63	0.622	0.009	1.96	0.875	0.006	1.29	0.993	0.002	2.20	1.051	0.001
0.64	0.631	0.009	1.97	0.881	0.006	1.30	0.995	0.002	2.30	1.052	0.001
0.65	0.940	0.009	1.98	0.886	0.005	1.31	0.997	0.002	2.40	1.053	0.001
0.66	0.650	0.010	1.99	0 891	0.005	1.32	0.998	0.001	2.50	1.054	0.001
0 67	0.659	0.009	2.00	0.897	0.006	1.33	1.000	0.002	2.60	1 055	—
0.68	0.668	0.009	1.01	0.903	0.006	1.34	1.002	0.002	2.70	1.055	—
0.69	0.677	0.009	1.02	0.908	0.005	1.35	1.004	0.002	2.80	1.055	0 001
0.70	0.686	0.009	1.03	0.912	0.004	1.36	1.006	0.002	2.90	1.055	-
0.71	0.694	0.008	1.04	0.917	0.005	1.37	1.008	0.002	3.00	1.056	—
0.72	0.703	0.009	1.05	0.921	0.004	1.38	1.009	0.001	3.5	1.056	—
0.73	0.712	0.009	1.06	0.925	0.004	1.39	1.011	0.002	4.0	1.056	—
0.74	0.720	0.008	1.07	0.929	0.004	1.40	1.012	0.001	4.5	1.057	—
0.75	0.728	0.008	1.08	0.933	0.004	1 41	1.013	0.001	5.0	1.057	
0.76	0.736	0.008	1.09	0.937	0.004	1.42	1.015	0.002	6.0	1.057	
0.77	0.744	0.008	1.10	0.941	0.004	1.43	1.016	0.001	8.0	1.057	
0.78	0.752	0.008	1.11	0.945	0.004	1.44	1.017	0.001	10.0	1.057	
0.79	0.760	0.008	1.12	0.9 9	0 004	1.45	1.018	0 001			
0.80	0.768	0.008	1.13	0.952	0.003	1.46	1.019	0.001			
					0.003			0.0 1			

Таблица 91 проф. Бахметева

Канал с горизонтальным дном: $i_0 = 0$ $x = 2{,}0$

ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ
0	0	.0001	0,85	.2047	.0073	1,22	0,605	0,015	1,68	1,581	0,057
0,05	.0001	.0002	0,86	.2120	.0075	1,23	0,620	0,015	1,70	1,638	0,058
0,10	.0003	.0008	0,87	.2195	.0077	1,24	0,635	0,016	1,72	1,696	0,060
0,15	.0011	.0016	0,88	.2272	.0078	1,25	0,651	0,016	1,74	1,756	0,061
0,21	.0027	.0025	0,89	.2350	.0080	1,26	0,667	0,016	1,76	1,827	0,063
0,25	.0052	.0038	0,90	.2430	.0082	1,27	0,683	0,016	1,78	1,880	0,064
0,30	.0090	.0053	0,91	.2512	.0084	1,28	0,699	0,017	1,80	1,945	0,065
0,35	.0143	.0070	0,92	.2596	.0085	1,29	0,716	0,016	1,82	2,009	0,067
0,40	.0213	.0091	0,93	.2681	.0088	1,30	0,732	0,017	1,84	2,076	0,069
0,45	.0304	.0113	0,94	.2769	.0089	1,31	0,749	0,018	1,86	2,145	0,070
0,50	.0417	.0137	0,95	.2858	.0091	1,32	0,767	0,017	1,88	2,215	0,071
0,55	.0554	.0166	0,96	.2949	.0093	1,33	0,784	0,018	1,90	2,286	0,073
0,60	.0720	.0036	0,97	.3042	.0095	1,34	0,802	0,018	1,92	2,359	0,075
0,61	.0756	.0038	0,98	.3137	.0097	1,35	0,820	0,019	1,94	2,434	0,076
0,62	.0794	.0039	0,99	.3234	.0099	1,36	0,839	0,018	1,96	2,510	0,077
0,63	.0833	.0041	1,00	0.3333	0.0101	1,37	0,857	0,019	1,98	2,587	0,080
0,64	.0874	.0041	1,01	0.3434	0.0103	1,38	0,876	0,019	2,00	2,667	0,205
0,65	.0915	.0043	1,02	0.3537	0.0106	1,39	0,895	0,020	2,05	2,872	0,215
0,66	.0958	.0045	1,03	0.3643	0.0107	1,40	0,915	0,019	2,10	3,087	0,226
0,67	.1003	.0045	1,04	0,375	0,011	1,41	0,934	0,020	2,15	3,313	0,236
0,68	.1048	.0047	1,05	0,389	0,011	1,42	0,954	0,021	2,20	3,549	0,248
0,69	.1095	.0048	1,06	0,397	0,011	1,43	0,975	0,020	2,25	3,797	0,259
0,70	.1143	.0050	1,07	0,408	0,012	1,44	0,995	0,021	2,30	4,056	0,270
0,71	.1193	.0051	1,08	0,420	0,012	1,45	1,016	0,021	2,35	4,326	0,282
0,72	.1244	.0053	1,09	0,432	0,012	1,46	1,037	0,022	2,40	4,608	0,294
0,73	.1297	.0054	1,10	0,444	0,012	1,47	1,059	0,022	2,45	4,902	0,306
0,74	.1351	.0055	1,11	0,456	0,012	1,48	1,081	0,022	2,50	5,208	0,319
0,75	.1406	.0057	1,12	0,468	0,013	1,49	1,103	0,022	2,55	5,527	0,332
0,76	.1463	.0059	1,13	0,481	0,012	1,50	1,125	0,045	2,60	5,859	0,344
0,77	.1522	.0060	1,14	0,493	0,014	1,52	1,170	0,047	2,65	6,203	0,358
0,78	.1582	.0061	1,15	0,507	0,013	1,54	1,217	0,048	2,70	6,561	0,371
0,79	.1643	.0064	1,16	0,520	0,014	1,56	1,265	0,050	2,75	6,932	0,385
0,80	.1707	.0065	1,17	0,534	0,014	1,58	1,315	0,050	2,80	7,317	0,399
0,81	.1772	.0066	1,18	0,548	0,024	1,60	1,365	0,052	2,85	7,716	0,414
0,82	.1838	.0068	1,19	0,562	0,014	1,62	1,417	0,053	2,90	8,130	0,427
0,83	.1906	.0070	1,20	0,576	0,015	1,64	1,470	0,055	2,95	8,557	0,443
0,84	.1976	.0071	1,21	0,591	0,014	1,66	1,525	0,056	3,00	9,000	

Таблица 92 проф. Бахметева

Канал с горизонтальным дном: $i_0 = 0$ $x = 2{,}5$

ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ
0	0		0,85	.1618		1,22	0,573	0,017	1,68	1,756	0,074
0,05	0	—	0,86	.1685	.0067	1,23	0,590	0,017	1,70	1,830	0,077
0,10	.0001	.0001	0,87	.1755	.0070	1,24	0,607	0,017	1,72	1,907	0,079
0,15	.0004	.0003	0,88	.1826	.0071	1,25	0,624	0,018	1,74	1,986	0,081
0,20	.0010	.0006	0,89	.1900	.0074	1,26	0,642	0,018	1,76	2,067	0,083
0,25	.0022	.0012	0,90	.1976	.0076	1,27	0,660	0,018	1,78	2,150	0,086
0,30	.0042	.0020	0,91	.2054	.0078	1,28	0,678	0,019	1,80	2,236	0,088
0,35	.0073	.0031	0,92	.2134	.0080	1,29	0,697	0,019	1,82	2,324	0,090
0,40	.0116	.0043	0,93	.2216	.0082	1,30	0,716	0,019	1,84	2,414	0,093
0,45	.0175	.0059	0,94	.2301	.0085	1,31	0,735	0,020	1,86	2,507	0,096
0,50	.0252	.0077	0,95	.2388	.0087	1,32	0,775	0,020	1,88	2,603	0,098
0,55	.0552	.0100	0,96	.2477	.0089	1,33	0,755	0,021	1,90	2,701	0,101
0,60	.0478	.0126	0,97	.2568	.0091	1,34	0,796	0,021	1,92	2,802	0,104
0,61	.0506	.0028	0,98	.2662	.0094	1,35	0,817	0,021	1,94	2,906	0,106
0,62	.0536	.0030	0,99	0,276	.0098	1,36	0,838	0,022	1,96	3,012	0,109
0,63	.0567	.0031	1,00	0,286	0,010	1,37	0,860	0,022	1,98	3,121	0,111
0,64	.0599	.0032	1,01	0,296	0,010	1,38	0,882	0,023	2,00	3,232	0,292
0,65	.0632	.0033	1,02	0,306	0,011	1,39	0,905	0,023	2,05	3,524	0,310
0,66	.0667	.0035	1,03	0,317	0,011	1,40	0,928	0,023	2,10	3,834	0,330
0,67	.0703	.0036	1,04	0,328	0,011	1,41	0,951	0,024	2,15	4,164	0,348
0,68	.0740	.0037	1,05	0,339	0,011	1,42	0,975	0,024	2,20	4,512	0,370
0,69	.0779	.0041	1,06	0,350	0,012	1,43	0,999	0,025	2,25	6,882	0,390
0,70	.0820	.0041	1,07	0,362	0,012	1,44	1,024	0,025	2,30	5,272	0,412
0,71	.0861	.0044	1,08	0,374	0,012	1,45	1,049	0,025	2,35	5,684	0,435
0,72	.0905	.0045	1,09	0,386	0,013	1,46	1,074	0,026	2,40	6,119	0,458
0,73	.0950	.0046	1,10	0,399	0,013	1,47	1,100	0,027	2,45	6,577	0,482
0,74	.0996	.0048	1,11	0,412	0,013	1,48	1,127	0,027	2,50	7,059	0,506
0,75	.1044	.0049	1,12	0,425	0,013	1,49	1,154	0,027	2,55	7,565	0,532
0,76	.1093	.0051	1,13	0,438	0,014	1,50	1,181	0,056	2,60	8,097	0,558
0,77	.1144	.0053	1,14	,0452	0,014	1,52	1,237	0,058	2,65	8,655	0,585
0,78	.1197	.0055	1,15	0,466	0,014	1,54	1,295	0,060	2,70	9,240	0,614
0,79	.1252	.0057	1,16	0,480	0,015	1,56	1,355	0,062	2,75	9,854	0,636
0,80	.1309	.0058	1,17	0,495	0,015	1,58	1,417	0,064	2,80	10,49	0,68
0,81	.1367	.0059	1,18	0,510	0,015	1,60	1,481	0,065	2,85	11,17	0,70
0,82	.1426	.0062	1,19	0,525	0,016	1,62	1,546	0,068	2,90	12,87	0,73
0,83	.1488	.0064	1,20	0,541	0,016	1,64	1,614	0,070	2,95	13,60	0,76
0,84	.1552	.0066	1,21	0,557	0,016	1,66	1,684	0,072	3,00	13,36	

Таблица 93 проф. Бахметева

Канал с горизонтальным дном: $i_0 = 0$ $x = 3{,}0$

ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ
0	0	—	0,85	.1305	.0063	1,22	0,554	0,018	1,68	1,992	0,096
0,05	0	—	0,86	.1368	.0064	1,23	0,572	0,019	1,70	2,088	0,100
0,10	0	.0001	0,87	.1432	.0067	1,24	0,591	0,019	1,72	2,188	0,104
0,15	.0001	.0003	0,88	.1499	.0070	1,25	0,610	0,020	1,74	2,292	0,107
0,20	.0004	.0005	0,89	.1569	.0071	1,26	0,630	0,020	1,76	2,399	0,111
0,25	.0009	.0011	0,90	.1640	.0074	1,27	0,650	0,021	1,78	2,510	0,114
0,30	.0020	.0017	0,91	.1714	.0077	1,28	0,671	0,021	1,80	2,624	0,119
0,35	.0037	.0027	0,92	.1791	.0079	1,29	0,692	0,022	1,82	2,743	0,123
0,40	.0064	.0038	0,93	.1870	.0082	1,30	0,714	0,022	1,84	2,866	0,126
0,45	.0102	.0054	0,94	.1952	.0084	1,31	0,736	0,023	1,86	2,992	0,131
0,50	.0156	.0073	0,95	.2036	.0087	1,32	0,759	0,023	1,88	3,123	0,135
0,55	.0229	.0095	0,96	.2123	.0090	1,33	0,782	0,024	1,90	3,258	0,139
0,60	.0324	.0022	0,97	.2213	.0093	1,34	0,806	0,024	1,92	3,397	0,144
0,61	.0346	.0023	0,98	.2306	.0096	1,35	0,830	0,025	1,94	3,542	0,149
0,62	.0369	.0025	0,99	.2402	.0098	1,36	0,855	0,026	1,96	3,690	0,152
0,63	.0394	.0025	1,00	0,250	1,010	1,37	0,881	0,026	1,98	3,841	0,158
0,64	.0419	.0027	1,01	0,260	0,011	1,38	0,907	0,026	2,00	4,000	0,415
0,65	.0446	.0028	1,02	0,271	0,010	1,39	0,933	0,027	2,05	4,415	0,447
0,66	.0474	.0030	1,03	0,281	0,011	1,40	0,960	0,028	2,10	4,862	0,480
0,67	0504	.0031	1,04	0,292	0,012	1,41	0,988	0,028	2,15	5,342	0,514
0,68	.0535	.0032	1,05	0,304	0,012	1,42	1,016	0,029	2,20	5,856	0,551
0,69	.0564	.0033	1,06	0,316	0,012	1,43	1,045	0,030	2,25	6,407	0,589
0,70	.0600	.0035	1,07	0,328	0,012	1,44	1,075	0,030	2,30	6,996	0,629
0,71	.0635	.0037	1,08	0,340	0,013	1,45	1,105	0,031	2,35	7,625	0,669
0,72	.0672	.0038	1,09	0,353	0,013	1,46	1,136	0,031	2,40	8,294	0,714
0,73	.0710	.0040	1,10	0,366	0,014	1,47	1,167	0,032	2,45	9,008	0,758
0,74	.0750	.0041	1,11	0,380	0,014	1,48	1,199	0,033	2,50	9,766	0,804
0,75	.0791	.0043	1,12	0,394	0,014	1,49	1,232	0,034	2,55	10,57	0,85
0,76	.0834	.0045	1,13	0,408	0,014	1,50	1,266	0,069	2,60	11,42	0,91
0,77	.0879	.0046	1,14	0,422	0,015	1,52	1,335	0,071	2,65	12,33	0,96
0,78	.0925	.0049	1,15	0,437	0,016	1,54	1,406	0,074	2,70	13,29	1,01
0,79	.0974	.0050	1,16	0,453	0,016	1,56	1,480	0,078	2,75	14,30	1,07
0,80	.1024	.0051	1,17	0,469	0,016	1,58	1,558	0,080	2 80	15,37	1,12
0,81	.1075	.0055	1,18	0,485	0,016	1,60	1,638	0,084	2,85	16,49	1,19
0,82	.1130	.0055	1,19	0,501	0,017	1,62	1,722	0,086	2,90	17,68	1.25
0,83	.1186	.0059	1,20	0,518	0,018	1,64	1,808	0,090	2,95	18,93	1,32
0,84	.1245	.0060	1,21	0,536	0,018	1,66	1,898	0,094	3,00	20,25	

Таблица 94 проф. Бахметева

Канал с горизонтальным дном: $i_0 = 0$ $x = 3{,}25$

ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ
0	0	—	0,85	.1179	.0060	1,22	0,548	0,019	1,68	2,134	0,110
0,05	0	—	0,86	.1239	.0063	1,23	0,567	0,020	1,70	2,244	0,114
0,10	0	.0001	0,87	.1302	.0065	1,24	0,587	0,020	1,72	2,358	0,119
0,15	.0001	.0002	0,88	.1367	.0067	1,25	0,607	0,021	1,74	2,477	0,123
0,20	.0003	.0004	0,89	.1434	.0070	1,26	0,628	0,022	1,76	2,600	0,128
0,25	.0007	0007	0,90	.1504	.0072	1,27	0,650	0,022	1,78	2,728	0,133
0,30	.0074	0013	0,91	.1576	.0075	1,28	0,672	0,022	1,80	2,861	0,138
0,35	.0027	.0021	0,92	.1651	.0078	1,29	0,694	0,023	1,82	2,999	0,142
0,40	.0048	.0031	0,93	.1729	.0080	1,30	0,717	0,024	1,84	3,141	0,147
0,45	.0079	.0045	0,94	.1809	.0083	1,31	0,741	0,025	1,86	3,288	0,154
0,50	.0124	.0061	0,95	.1892	.0086	1,32	0,766	0,025	1,88	3,442	0,151
0,55	.0185	.0083	0,96	.1978	.0089	1,33	0,791	0,025	1,90	3,600	0,164
0,60	.0268	.0020	0,97	.2067	.0092	1,34	0,816	0,026	1,92	3,764	0,169
0,61	.0288	.0020	0,98	.2159	.0096	1,35	0,842	0,027	1,94	3,933	0,176
0,62	.0308	.0022	0,99	.2255	.0098	1,36	0,869	0,028	1,96	4,109	0,181
0,63	.0330	.0023	1,00	0,2353	0,0102	1,37	0,897	0,028	1,98	4,290	0,187
0,64	.0353	.0023	1,01	0,2455	0,0105	1,38	0,925	0,029	2,00	4,477	0,495
0,65	.0387	.0028	1,02	0,256	0,011	1,39	0,954	0,029	2,05	4,972	0,536
0,66	.0402	.0025	1,03	0,267	0,011	1,40	0,983	0,030	2,10	5,508	0,580
0,67	.0429	.0027	1,04	0,278	0,011	1,41	1,013	0,031	2,15	6,088	0,624
0,68	.0457	.0029	1,05	0,289	0,012	1,42	1,044	0,032	2,20	6,712	0,674
0,69	.0486	.0031	1,06	0,301	0,013	1,43	1,076	0,032	2,25	7,386	0,723
0,70	.0517	.0032	1,07	0,314	0,012	1,44	1,108	0,033	2,30	8,109	0,776
0,71	.0549	.0033	1,08	0,326	0,013	1,45	1,141	0,034	2,35	8,885	0,831
0,72	.0582	.0035	1,09	0,339	0,014	1,46	1,175	0,035	2,40	9,716	0,894
0,73	.0617	.0037	1,10	0,353	0,014	1,47	1,210	0,035	2,45	10,61	0,95
0,74	.0654	.0039	1,11	0,367	0,014	1,48	1,245	0,036	2,50	11,56	1,01
0,75	.0693	.0040	1,12	0,381	0,015	1,49	1,281	0,037	2,55	12,57	1,08
0,76	.0733	.0042	1,13	0,396	0,015	1,50	1,318	0,077	2,60	13,65	1,15
0,77	0,775	.0043	1,14	0,411	0,015	1,52	1,395	0,079	2,65	14,80	1,23
0,78	.0818	.0046	1,15	0,426	0,016	1,54	1,474	0,083	2,70	16,03	1,30
0,79	.0864	.0047	1,16	0,442	0,016	1,56	1,557	0,087	2,75	17,33	1,38
0,80	.0911	.0050	1,17	0,458	0,017	1,58	1,644	0,090	2,80	18,71	1,46
0,81	.0961	.0051	1,18	0,475	0,018	1,60	1,734	0,094	2,85	20,17	1,55
0,82	.1012	.0054	1,19	0,493	0,018	1,62	1,828	0,098	2,90	21,72	1,63
0,83	.1066	.0056	1,20	0,511	0,018	1,64	1,926	0,102	2,95	23,35	1,73
0,84	.1122	.0057	1,21	1,529	0,019	1,66	2,028	0,106	3,00	25,08	

Таблица 95 проф. Бахметева

Канал с горизонтальным дном: $i_0 = 0$ $x = 3{,}5$

ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ	ξ	$E_0(\xi)$	Δ
0	0	—	0,85	.1070	.0057	1,22	0,544	0,020	1,68	2,294	0,126
0,05	0	—	0,86	.1127	.0061	1,23	0,564	0,021	1,70	2,420	0,131
0,10	0	—	0,87	.1189	.0062	1,24	0,585	0,022	1,72	2,551	0,136
0,15	0	.0002	0,88	.1250	.0065	1,25	0,607	0,022	1,74	2,687	0,142
0,20	.0002	.0002	0,89	.1315	.0063	1,26	0,629	0,023	1,76	2,829	0,147
0,25	.0004	.0006	0,90	.1383	.0071	1,27	0,652	0,023	1,78	2,976	0,154
0,30	.0010	.0010	0,91	.1454	.0073	1,28	0,675	0,024	1,80	3,130	0,159
0,35	.0020	.0016	0,92	.1527	.0076	1,29	0,699	0,025	1,82	3,289	0,166
0,40	.0036	.0025	0,93	.1603	.0079	1,30	0,724	0,025	1,84	3,455	0,172
0,45	.0061	.0037	0,94	.1682	.0082	1,31	0,749	0,026	1,86	3,627	0,179
0,50	.0093	.0053	0,95	.1764	.0085	1,32	0,775	0,027	1,88	3,806	0,186
0,55	.0151	.0072	0,96	.1849	.0089	1,33	0,802	0,027	1,90	3,992	0,193
0,60	.0223	.0017	0,97	.1938	.0091	1,34	0,829	0,029	1,92	4,185	0,199
0,61	.0240	.0019	0,98	.2029	.0095	1,35	0,858	0,029	1,94	4,384	0,207
0,62	.0259	.0019	0,99	.2124	.0098	1,36	0,887	0,029	1,96	4,591	0,215
0,63	.0278	.0020	1,00	0,2222	0,0102	1,37	0,916	0,031	1,98	4,806	0,222
0,64	.0298	.0022	1,01	0,2324	0,0106	1,38	0,947	0,031	2,00	5,028	0,591
0,65	.0320	.0023	1,02	0,243	0,011	1,39	0,978	0,032	2,05	5,619	0,644
0,66	.0343	.0024	1,03	0,254	0,011	1,40	1,010	0,033	2,10	6,263	0,699
0,67	.0367	.0025	1,04	0,265	0,012	1,41	1,043	0,034	2,15	6,962	0,759
0,68	.0392	.0026	1,05	0,277	0,012	1,42	1,077	0,034	2,20	7,721	0,822
0,69	.0418	.0028	1,06	0,289	0,012	1,43	1,111	0,036	2,25	8,543	0,893
0,70	.0446	.0030	1,07	0,301	0,013	1,44	1,147	0,036	2,30	9,431	0,959
0,71	.0476	.0031	1,08	0,314	0,013	1,45	1,183	0,037	2,35	10,39	1,03
0,72	.0507	.0032	1,09	0,327	0,014	1,46	1,210	0,038	2,40	11,42	1,11
0,73	.0539	.0034	1,10	0,341	0,014	1,47	1,258	0,039	2,45	12,53	1,19
0,74	.0573	.0036	1,11	0,355	0,015	1,48	1,297	0,040	2,50	13,72	1,28
0,75	.0609	.0037	1,12	0,370	0,015	1,49	1,337	0,041	2,55	15,00	1,37
0,76	.0646	.0039	1,13	0,335	0,016	1,50	1,378	0,084	2,60	16,37	1,47
0,77	.0685	.0041	1,14	0,401	0,016	1,52	1,462	0,089	2,65	17,84	1,56
0,78	.0726	.0043	1,15	0,417	0,016	1,54	1,551	0,093	2,70	19,40	1,68
0,79	.0769	.0045	1,16	0,433	0,017	1,56	1,644	0,097	2,75	21,08	1,78
0,80	.0814	.0047	1,17	0,450	0,018	1,58	1,741	0,102	2,80	22,86	1,89
0,81	.0861	.0049	1,18	0,468	0,018	1,60	1,843	0,105	2,85	24,75	2,02
0,82	.0910	.0051	1,19	0,486	0,019	1,62	1,948	0,111	2,90	26,77	2,14
0,83	.0961	.0053	1,20	0,505	0,019	1,64	2,059	0,115	2,95	28,91	2,27
0,84	.1014	.0056	1,21	5,524	0,020	1,66	2,174	0,120	3,00	31,18	

Таблица 96 проф. Бахметева

Канал с горизонтальным дном: $i_0 = 0$ $x = 3{,}75$

ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ
0	0	—	0,85	.0973	.0055	1,22	0,541	0,021	1,68	2,475	0,143
0,05	0	—	0,86	.1028	.0059	1,23	0,563	0,022	1,70	2,618	0,146
0,10	0	—	0,87	.1087	.0060	1,24	0,585	0,023	1,72	2,767	0,157
0,15	0	.0001	0,88	.1147	.0063	1,25	0,608	0,023	1,74	2,924	0,163
0,20	.0001	.0002	0,89	.1210	.0066	1,26	0,631	0,024	1,76	3,087	0,170
0,25	.0003	.0004	0,90	.1276	.0069	1,27	0,655	0,025	1,78	3,257	0,177
0,30	.0007	.0007	0,91	.1345	.0072	1,28	0,680	0,026	1,80	3,434	0,185
0,35	.0014	.0013	0,92	.1417	.0074	1,29	0,706	0,026	1,82	3,619	0,192
0,40	.0027	.0020	0,93	.1491	.0078	1 30	0,732	0,027	1,84	3,812	0,201
0,45	.0047	.0031	0,94	.1569	.0081	1,31	0,759	0,028	1,86	4,013	0,209
0,50	.0078	.0045	0,95	.1650	.0084	1,32	0 787	0,029	1,88	4,222	0,218
0,55	.0123	.0063	0,96	.1734	.0088	1,33	0,816	0,029	1,90	4,440	0,226
0,60	.0186	.0015	0,97	.1822	.0091	1,34	0,845	0,031	1,92	4,666	0,236
0,61	.0201	.0016	0,98	.1913	.0097	1,35	0,876	0,031	1,94	4,902	0,245
0,62	.0217	.0018	0,99	.201	0,010	1,36	0,907	0,032	1,96	5,147	0,254
0,63	.0235	.0018	1,00	0,211	0,010	1,37	0,939	0,033	1,98	5,401	0,264
0,64	.0253	.0019	1,01	0,221	0,010	1,38	0,972	0,034	2,00	5,665	0,705
0,65	.0272	.0020	1,02	0,231	0 011	1,39	1,006	0,035	2,05	6,370	0,773
0,66	.0292	.0022	1,03	0,242	0,012	1,40	1,041	0,036	2,10	7,143	0,844
0,67	.0314	.0023	1,04	0,254	0,011	1,41	1,077	0,037	2,15	7,987	0,922
0,68	.0337	.0024	1,05	0,265	0,013	1,42	1,114	0,037	2,20	8,909	1,003
0,69	.0361	.0026	1,06	0,278	0,012	1,43	1,151	0,039	2,25	9,912	1,088
0,70	.0387	0.027	1,08	0,290	0,013	1,44	1,190	0,040	2,30	11,00	1,18
0,71	.0414	.0028	1,08	0,303	0,014	1,45	1,230	0,040	2,35	12,18	1,29
0,72	.0442	.0030	1,09	0,317	0,014	1,46	1,270	0,042	2,40	13,47	1,38
0,73	.0472	.0032	1,10	0,331	0,015	1,47	1,312	0,043	2,45	14,85	1,50
0,74	.0504	.0033	1,11	0,346	0,015	1,48	1,355	0,044	2,50	16,35	1,61
0,75	.0537	.0035	1,12	0,361	0,015	1,49	1,399	0,046	2,55	17,96	1,74
0,76	.0572	.0036	1,13	0,376	0,016	1,50	1,445	0,093	2,60	19,70	1,86
0,77	.0608	.0339	1,14	0,392	0,017	1 52	1,538	0,099	2,65	21,56	2,01
0,78	.0647	.0040	1,15	0,409	0,017	1,54	1,637	0,103	2,70	23,57	2,14
0,79	.0687	.0042	1,16	0,426	0,018	1,56	1,740	0,109	2,75	25,71	2,30
0,80	.0729	.0045	1,17	0,444	0 018	1,58	1,849	0,114	2,80	28,01	2,46
0,81	.0774	.0046	1,18	0,462	0,019	1,60	1,963	0,119	2,85	30,47	2,62
0,82	.0820	.0049	1,19	0,481	0,020	1,62	2,082	0,125	2,90	33,09	2,80
0,83	.0869	.0051	1,20	0,501	0,920	1,64	2,207	0,131	2,95	35,89	2,98
0,84	.0920	.0053	1,21	0,521	0,020	1,66	2,338	0,137	3,00	38,87	

Таблица 97 проф. Бахметева

Канал с горизонтальным дном: $i_0 = 0$ $x = 4{,}0$

ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ
0	0	—	0,85	.0887	.0054	1,22	0,541	0,022	1,68	2,677	0,163
0,05	0	—	0,86	.0941	.0056	1,23	0,563	0,023	1,70	2,840	0,171
0,10	0	—	0,87	.0997	.0059	1,24	0,586	0,024	1,72	3,011	0,167
0,15	0	.0001	0,88	.1056	.0061	1,25	0,610	0,025	1,74	3,190	0,188
0,20	.0001	.0001	0,89	.1117	.0064	1,26	0,635	0,026	1,76	3,378	0,196
0,25	.0002	.0003	0,90	.1181	.0067	1,27	0,661	0,026	1,78	3,574	0,205
0,30	.0005	.0006	0,91	.1248	.0070	1,28	0,687	0,027	1,80	3,779	0,115
0,35	0011	.0010	0,92	.1318	.0073	1,29	0,714	0,029	1,82	3,994	0,224
0,40	.0021	.0016	0,93	.1391	.0077	1,30	0,743	0,029	1,84	4,218	0,234
0,45	.0037	.0026	0,94	.1468	.0080	1,31	0,772	0,030	1,86	4,452	0,245
0,50	.0063	.0038	0,95	.1548	.0083	1,32	0,802	0,030	1,88	4,697	0,255
0,55	.0101	.0055	0,96	.1631	.0086	1,33	0,832	0,032	1,90	4,952	0,266
0,60	.0156	.0013	0,97	.1717	.0091	1,34	0,864	0,033	1,92	5,218	0,278
0,61	.0169	.0014	0,98	.1808	.0094	1,35	0,897	0,033	1,94	5,496	0,289
0,62	.0183	.0015	0,99	.1902	.0098	1,36	0,930	0,035	1,96	5,785	0,301
0,63	.0198	.0017	1,00	0,200	0,010	1,37	0,965	0,035	1,98	6,086	0,314
0,64	.0215	.0017	1,01	0,210	0,011	1,38	1,001	0,037	2,00	6,400	0,841
0,65	.0232	.0018	1,02	0,221	0,011	1,39	1,038	0,038	2,05	7,241	0,927
0,66	.0250	.0020	1,03	0,232	0,011	1,40	1,076	0,039	2,10	8,168	1,020
0,67	.0270	.0021	1,04	0,243	0,012	1,41	1,115	0,040	2,15	9,188	1,122
0,68	.0291	.0022	1,05	0,255	0,013	1,42	1,155	0,041	2,20	10,31	1,22
0,69	.0313	.0023	1,06	0,268	0,013	1,43	1,196	0,042	2,25	11,53	1,34
0,70	.0336	.0025	1,07	0,281	0,013	1,44	1,238	0,044	2,30	12,87	1,46
0,71	.0361	.0026	1,08	0,294	0,014	1,45	1,232	0,045	2,35	14,33	1,60
0,72	.0387	.0028	1,09	1,308	0,014	1,46	1,327	0,046	2,40	15,93	1,73
0,73	.0415	.0029	1,10	0,322	0,015	1,47	1,373	0,047	2,45	17,66	1,87
0,74	.0444	.0031	1,11	0,337	0,015	1,48	1,420	0,049	2,50	19,53	2,03
0,75	.0475	.0032	1,12	0,352	0,016	1,49	1,469	0,050	2,55	21,56	2,20
0,76	.0507	.0034	1,13	0,368	0,017	1,50	1,519	0,104	2,60	23,76	2,38
0,77	.0541	.0036	1,14	0,385	0,017	1,52	1,623	0,109	2,65	26,14	2,56
0,78	.0577	.0038	1,15	0,402	0,018	1,54	1,732	0,115	2,70	28,70	2,76
0,79	.0615	.0040	1,16	0,420	0,018	1,56	1,847	0,122	2,75	31,46	2,96
0,80	.0655	.0042	1,17	0,438	0,019	1,58	1,969	0,128	2,80	34,42	3,19
0,81	.0697	.0044	1,18	0,457	0,020	1,60	2,097	0,135	2,85	37,61	3,41
0,82	.0741	.0047	1,19	0,477	0,021	1,62	2,232	0,141	2,90	41,02	3,66
0,83	.0788	.0048	1,20	0,498	0,021	1,64	2,373	0,148	2,95	44,68	3,92
0,84	.0836	.0051	1,21	0,519	0,022	1,66	2,521	0,156	3,00	48,60	

Таблица 98 проф. Бахметева

Канал с горизонтальным дном: $i_0 = 0$ $x = 4{,}5$

ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ
0,20	.0000	.0001	0,88	.0900	.0053	1,24	0,594	0,026	1,70	3,366	0,224
0,25	.0001	.0001	0,89	.0958	.0060	1,25	0,620	0,023	1,72	3,590	0,235
0,30	.0002	.0004	0,90	.1018	.0064	1,26	0,648	0,029	1,74	3,825	0,248
0,35	.0006	.0006	0,91	.1082	.0067	1,27	0,677	0,030	1,76	4,073	0,262
0,40	.0012	.0011	0,92	.1149	.0071	1,28	0,707	0,031	1,78	4,335	0,276
0,45	.0023	.0017	0,93	.1220	.0074	1,29	0,738	0,032	1,80	4,609	0,291
0,50	.0040	.0028	0,94	.1294	.0077	1,30	0,770	0,033	1,82	4,898	0,304
0,55	.0068	.0041	0,95	.1371	.0082	1,31	0,803	0,034	1,84	5,202	0,318
0,60	.0109	.0011	0,96	.1453	.0035	1,32	0,837	0,036	1,86	5,520	0,335
0,61	.0120	.0011	0,97	.1538	.0089	1,33	0,873	0,036	1,88	5,855	0,350
0,62	.0131	.0012	0,98	.1627	.0094	1,34	0,909	0,038	1,90	6,205	0,368
0,63	.0143	.0013	0,99	.1721	.0099	1,35	0,947	0,039	1,92	6,573	0,386
0,64	.0156	.0014	1,00	0,182	0,010	1,36	0,986	0,041	1,94	6,959	0,404
0,65	.0170	.0015	1,01	0,192	0,011	1,37	1,027	0,042	1,96	7,363	0,423
0,66	.0185	.0016	1,02	0,203	0,011	1,38	1,069	0,043	1,98	7,786	0,442
0,67	.0201	.0017	1,03	0,214	0,012	1,39	1,112	0,045	2,00	8,228	1,197
0,68	.0218	.0018	1,04	0,226	0,012	1,40	1,157	0,046	2,05	9,425	1,335
0,69	.0236	.0020	1,05	0,238	0,012	1,41	1,203	0,048	2,10	10,76	1,49
0,70	.0256	.0020	1,06	0,250	0,014	1,42	1,251	0,049	2,15	12,25	1,65
0,71	.0276	.0022	1,07	0,264	0,014	1,43	1,300	0,051	2,20	13,90	1,83
0,72	.0298	.0024	1,08	0,278	0,014	1,44	1,351	0,052	2,25	15,73	2,02
0,73	.0322	.0025	1,09	0,292	0,015	1,45	1,403	0,054	2,30	17,75	2,23
0,74	.0347	.0027	1,10	0,307	0,016	1,46	1,467	0,056	2,35	19,98	2,45
0,75	.0374	.0028	1,11	0,323	0,016	1,47	1,513	0,058	2,40	22,43	2,69
0,76	.0402	.0030	1,12	0,339	0,017	1,48	1,571	0,059	2,45	25,12	2,96
0,77	.0432	.0032	1,13	0,356	0,018	1,49	1,630	0,061	2,50	28,08	3,22
0,78	.0464	.0033	1,14	0,374	0,018	1,50	1,691	0,123	2,55	31,30	3,53
0,79	.0497	.0036	1,15	0,392	0,019	1,52	1,819	0,135	2,60	34,83	3,85
0,80	.0533	.0038	1,16	0,411	0,020	1,54	1,954	0,144	2,65	33,68	4,19
0,81	.0571	.0039	1,17	0,431	0,021	1,56	2,098	0,152	2,70	42,87	4,55
0,82	.0610	.0042	1,18	0,452	0,021	1,58	2,250	0,162	2,75	47,42	4,94
0,83	.0652	.0045	1,19	0,473	0,023	1,60	2,412	0,170	2,80	52,36	5,35
0,84	.0697	.0047	1,20	0,496	0,023	1,62	2,582	0,180	2,85	57,71	5,80
0,85	.0744	.0049	1,21	0,519	0,024	1,64	2,762	0,191	2,90	63,51	6,26
0,86	.0793	.0052	1,22	0,543	0,025	1,66	2,953	0,201	2,95	69,77	6,76
0,87	.0845	.0055	1,23	0,568	0,026	1,68	3,154	0,212	3,00	76,53	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 99 проф. Бахметева

Канал с горизонтальным дном: $i_0 = 0$ $\kappa = 5{,}0$

ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ
0	0	—	0,88	.0774	.0054	1,24	0,603	0,030	1,70	4,023	0,292
0,25	0	.0001	0,89	.0828	.0058	1,25	0,636	0,031	1,72	4,315	0,310
0,30	.0001	.0002	0,90	.0886	.0060	1,26	0,667	0,032	1,74	4,625	0,329
0,35	.0003	.0004	0,91	.0946	.0065	1,27	0,699	0,034	1,76	4,954	0,347
0,40	.0007	.0007	0,92	.1011	.0067	1,28	0,733	0,035	1,78	5,301	0,368
0,45	.0014	.0012	0,93	.1078	.0072	1,29	0,768	0,036	1,80	5,669	0,388
0,50	.0026	.0020	0,94	.1150	.0075	1,30	0,804	0,038	1,82	6,057	0,411
0,55	.0046	.0032	0,95	.1225	.0080	1,31	0,842	0,040	1,84	6,468	0,433
0,60	.0078	.0008	0,96	.1305	.0083	1,32	0,882	0,041	1,86	6,901	0,458
0,61	.0086	.0003	0,97	.1388	.0089	1,33	0,923	0,042	1,88	7,359	0,482
0,62	.0094	.0010	0,98	.1077	.0093	1,34	0,965	0,044	1,90	7,841	0,508
0,63	.0104	.0010	0,99	.157	0,010	1,35	1,009	0,046	1,92	8,349	0,536
0,64	.0114	.0012	1,00	0,167	0,010	1,36	1,055	0,047	1,94	8,885	0,564
0,65	.0126	.0012	1,01	0,177	0,011	1,37	1,102	0,049	1,96	9,449	0,591
0,66	.0138	.0013	1,02	0,188	0,011	1,38	1,151	0,051	1,93	10,04	0,63
0,67	.0151	.0014	1,03	0,199	0,012	1,39	1,202	0,053	2,00	10,67	1,70
0,68	.0165	.0015	1,04	0,211	0,012	1,40	1,255	0,055	2,05	12,37	1,92
0,69	.0180	.0016	1,05	0,223	0,013	1,41	1,310	0,056	2,10	14,29	2,17
0,70	.0196	.0017	1,06	0,236	0,014	1,42	1,366	0,059	2,15	16,46	2,44
0,71	.0213	.0019	1,07	0,250	0,014	1,43	1,425	0,061	2,20	18,90	2,72
0,72	.0232	.0020	1,08	0,264	0,015	1,44	1,486	0,063	2,25	21,62	3,05
0,73	.0252	.0020	1,09	0,279	0,016	1,45	1,549	0,065	2,30	24,67	3,40
0,74	.0274	.0023	1,10	0,295	0,017	1,46	1,614	0,068	2,35	28,07	3,78
0,75	.0297	.0024	1,11	0,312	0,017	1,47	1,682	0,070	2,40	31,85	4,20
0,76	.0321	.0026	1,12	0,329	0,018	1,48	1,752	0,072	2,45	36,05	4,64
0,77	.0347	.0028	1,13	0,347	0,019	1,49	1,824	0,074	2,50	40,69	5,13
0,78	.0375	.0030	1,14	0,366	0,019	1,50	1,898	0,157	2,55	45,82	5,66
0,79	.0405	.0032	1,15	0,385	0,021	1,52	2,055	0,168	2,60	51,48	6,24
0,80	.0437	.0034	1,16	0,406	0,021	1,54	2,223	0,179	2,65	57,72	6,85
0,81	.0471	.0033	1,17	0,427	0,023	1,56	2,402	0,191	2,70	64,57	7,51
0,82	.0507	.0033	1,18	0,450	0,023	1,58	2,593	0,203	2,75	72,08	8,24
0,83	.0545	.0040	1,19	0,473	0,025	1,60	2,796	0,217	2,80	80,32	8,99
0,84	.0585	.0044	1,20	0,498	0,025	1,62	3,013	0,230	2,85	89,31	9,83
0,85	.0629	.0045	1,21	0,523	0,027	1,64	3,243	0,244	2,90	99,14	10,66
0,86	.0674	.0049	1,22	0,550	0,027	1,66	3,487	0,260	2,95	109,8	11,7
0,87	.0723	.0051	1,23	0,577	0,029	1,68	3,747	0,276	3,00	121,5	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 100 проф. Бахметева

Канал с горизонтальным дном: $i_0 = 0$ $x = 5{,}5$

ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ	ξ	$Б_0(\xi)$	Δ
0	0	—	0,88	.0670	.0051	1,24	0,623	0,033	1,70	4,842	0,382
0,25	0	.0001	0,89	.0721	.0054	1,25	0,656	0,035	1,72	5,224	0,408
0,30	.0001	.0001	0,90	.0775	.0058	1,26	0,691	0,036	1,74	5,632	0,431
0,35	.0002	.0002	0,91	.0833	.0062	1,27	0,727	0,038	1,76	6,066	0,462
0,40	.0004	.0003	0,92	.0895	.0065	1,28	0,765	0,040	1,78	6,528	0,492
0,45	.0009	.0003	0,93	.0960	.0069	1,29	0,805	0,042	1,80	7,020	0,523
0,50	.0017	.0015	0,94	.1029	.0073	1,30	0,847	0,043	1,82	7,543	0,556
0,55	.0032	.0024	0,95	.1102	.0078	1,31	0,890	0,045	1,84	8,099	0,589
0,60	.0056	.0006	0,96	.1180	.0082	1,32	0,935	0,047	1,86	8,688	0,625
0,61	.0062	.0007	0,97	.1262	.0087	1,33	0,982	0,049	1,88	9,313	0,663
0,62	.0069	.0007	0,98	.1349	.0092	1,34	1,031	0,051	1,90	9,976	0,704
0,63	.0076	.0009	0,99	.1441	.0098	1,35	1,082	0,053	1,92	10,68	0,74
0,64	.0085	.0009	1,00	0,1539	0,0101	1,36	1,135	0,055	1,94	11,42	0,79
0,65	.0094	.0009	1,01	0,164	0,011	1,37	1,190	0,058	1,96	12,21	0,83
0,66	.0103	.0011	1,02	0,175	0,011	1,38	1,248	0,060	1,98	13,04	0,89
0,67	.0114	.0011	1,03	0,186	0,012	1,39	1,308	0,063	2,00	13,93	2,42
0,68	.0125	.0013	1,04	0,198	0,013	1,40	1,371	0,065	2,05	16,35	2,77
0,69	.0138	.0013	1,05	0,211	0,014	1,41	1,436	0,067	2,10	19,12	3,16
0,70	.0151	.0015	1,06	0,225	0,014	1,42	1,503	0,070	2,15	22,28	3,59
0,71	.0166	.0016	1,07	0,239	0,015	1,43	1,573	0,073	2,20	25,87	4,07
0,72	.0182	.0017	1,08	0,254	0,015	1,44	1 646	0,076	2,25	29,94	4,60
0,73	.0199	.0018	1,09	0,269	0,017	1,45	1,722	0,079	2,30	34,54	5,18
0,74	.0217	.0020	1,10	0,286	0,017	1,46	1,801	0,081	2,35	39,72	5,83
0,75	.0237	.0021	1,11	0,303	0,018	1,47	1,882	0,085	2,40	45,55	6,53
0,76	.0258	.0023	1,12	0,321	0,019	1,48	1,967	0,088	2,45	52,08	7,31
0,77	.0281	.0025	1,13	0,340	0,020	1,49	2,055	0,091	2,50	59,39	8,16
0,78	.0306	.0026	1,14	0,360	0,022	1,50	2,146	0,193	2,55	67,55	9,03
0,79	.0332	.0029	1,15	0,382	0,022	1,52	2,339	0,208	2,60	76,63	10,10
0,80	.0361	.0030	1,16	0,404	0,023	1,54	2,547	0,223	2,65	86,73	11,21
0,81	.0391	.0032	1,17	0,427	0,024	1,56	2,770	0,239	2,70	97,94	12,37
0,82	.0423	.0035	1,18	0,451	0,026	1,58	3,009	0,255	2,75	110,3	13,8
0,83	.0458	.0037	1,19	0,477	0,026	1,60	3,265	0,274	2,80	124,1	15,1
0,84	.0495	.0040	1,20	0,503	0,028	1,62	3,539	0,294	2,85	139,2	16,6
0,85	.0535	.0042	1,21	0,531	0,029	1,64	3,833	0,314	2,90	155,8	18,4
0,86	.0577	.0045	1,22	0,560	0,031	1,66	4,147	0,336	2,95	174,2	20,1
0,87	.0622	.0048	1,23	0,591	0,032	1,68	4,483	0,359	3,00	194,3	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

Все остальные обозначения являются общими для уравнения неравномерного движения.

Для упрощения подсчетов приведены $Б_0(\xi)$ в зависимости от гидравлического показателя русла x в таблицах 91—100.

В тех случаях, когда приходится брать промежуточное значение для гидравлического показателя русла, приходится пользоваться интерполяционной формой общего уравнения в следующем виде:

$$Б_0(\xi) = Б_a^0(\xi) + \frac{x - x_a}{x_b - x_a}[Б_b^0(\xi) - Б_a^0(\xi)]. \tag{169}$$

Для русла бесконечной ширины, т. е. при $x = 3$ и при $j_{кр} = 1$, профессором Журиным дается для формулы свободной поверхности при горизонтальном дне для многоступенчатых перепадов следующий вид:

$$\frac{i_{кр}}{h_{кр}} S = \frac{3}{4} - \frac{h_1}{h_{кр}}, \tag{170}$$

где h_1 — сжатое сечение на ступени перепада.

б) Метод проф. Михайлова.

Некоторым неудобством при пользовании формулой проф. Бахметева является необходимость вычисления j по элементам средних глубин на рассматриваемом участке данного потока; поэтому проф. Михайловым введено следующее дополнительное уравнение к выдвинутому проф. Бахметевым:

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^y, \tag{171}$$

где y — гидравлический показатель живой площади.

Значение гидравлического показателя живой площади определяется по формуле:

$$y = 2\frac{\lg\frac{\omega_2}{\omega_1}}{\lg\frac{h_2}{h_1}} = 2\frac{\lg\omega_2 - \lg\omega_1}{\lg h_2 - \lg h_1}. \tag{172}$$

Вставляя по приведенной зависимости выражение произвольной площади ω через живое сечение равномерного режима ω_0, в зависимости от отношения глубины в степени y, общее уравнение неравномерного режима можем свести к следующему:

$$\mp\frac{i_0 S}{h_0} = -(\eta_2 - \eta_1) + [Б(\eta_2) - Б(\eta_1)] - j_1 y\,[M(\eta_2) - M(\eta_1)], \tag{173}$$

где $Б(\eta_2)$ и $Б(\eta_1)$ являются функциями, вычисляемыми по таблицам проф. Бахметева для соответственного гидравлического показателя русла x,

$$j_1 = \alpha\frac{i_0 \cdot C_0 R_0}{2gh_0} \tag{174}$$

и y является гидравлическим показателем живой площади.

$$M(\eta_l) = \int\frac{\eta^{x-y-1}d\eta}{1-\eta^x}. \tag{175}$$

Приведенный интеграл решается для случая $\eta < 1$ и для случая $\eta > 1$ в следующем виде:

$\eta > 1$

$$M(\eta) = \frac{\eta^{-y}}{y} + \frac{\eta^{-x-y}}{x+y} + \frac{\eta^{-2x-y}}{2x+y} + \cdots + \eta^{\frac{(n-1)x-y}{(n-1)x+y}} + \text{const.} \quad (176)$$

$\eta < 1$

$$M(\eta) = \frac{\eta^{x-y}}{x-y} + \frac{\eta^{2x-y}}{2x-y} + \frac{\eta^{3x-y}}{3x-y} + \cdots + \eta^{\frac{nx-y}{nx-y}} + \text{const.} \quad (177)$$

В приведенном уравнении проф. Михайлова необходимо брать знак минус (—) тогда, когда производятся расчеты кривых спада на водосливах, т. е. при падении горизонта от равномерного режима к более низкому, и для кривых подпора, и соответственно знак + (плюс) — в том случае, когда рассчитываются кривые спада на быстротоках и консолях, т. е. когда уменьшение глубины идет путем приближения их к глубине равномерного режима. За сечение со значком 2 всегда выбирают сечения, наиболее удаленные от равномерного режима.

Формула проф. Михайлова легко обращается в формулу Бресса для широких прямоугольных русел, когда $y = 2$ и $x = 3$.

При значениях $y = 2$ и $x = 4$ формула проф. Михайлова превращается в определенных пределах в формулу Толкмитта.

Приведенная проф. Михайловым зависимость от гидравлических показателей русла и живой площади может быть преобразована в зависимости от гидравлического показателя живой площади и гидравлического показателя скорости, который определяется по уравнению:

$$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 = \left(\frac{C_2\sqrt{R_2}}{C_1\sqrt{R_1}}\right) = \left(\frac{h_2}{n_1}\right)^z, \quad (178)$$

где z — гидравлический показатель скорости.

Соответственно с этим будем иметь:

$$x = y + z. \quad (179)$$

Следовательно гидравлический показатель русла x может быть заменен через $(y + z)$, и общее уравнение будет строиться только в зависимости от гидравлических показателей живой площади и гидравлического показателя скорости.

Гидравлический показатель живой площади и гидравлический показатель скорости легко получаются на основании материалов полевого исследования при изучении естественных водотоков, а потому в этом виде общее уравнение будет применимо для построения кривых свободных поверхностей естественных водотоков.

5. Построение кривых свободных поверхностей для естественных русел.

В естественных водотоках поперечные профили и уклон дна вообще сильно меняются вдоль по течению. Поэтому кривая свободной поверхности водотока в этих случаях может быть построена лишь приближенно. Для этого водоток разбивается на отдельные участки, для каждого из которых более или менее точно принимают некоторое среднее поперечное сечение и средний уклон дна.

При этом средний уклон дна чаще всего определяют как частное от деления имеющегося на участке падения горизонта воды на его длину. Для каждого из таких отдельных участков можно строить кривую свободной поверхности двумя способами: непосредственно по уравнению (148) неравномерного движения или используя имеющиеся таблицы для расчетов кривых свободных поверхностей. Первый способ предложен проф. Бахметевым, а второй способ построения является предложением Тольмана (Tolmann). Кроме того имеется ряд специальных приемов построения кривых свободных поверхностей для естественных русел.

а) способ проф. Бахметева.

Применение общего уравнения неравномерного движения для отдельных участков (черт. 83) дает:

$$y_2 - y_1 = \frac{\alpha}{2g}(v_2^2 - v_1^2) + \int \frac{v^2}{C^2R}. \quad (180)$$

В этом случае через y обозначаем расстояние от некоторой горизонтальной плоскости сравнения лежащей выше поверхности воды до горизонтов воды в соответствующих сечениях.

Вводя необходимое преобразование, уравнение (180) может быть представлено в следующем виде, пользуясь средним на участке значением $K = K_{ср}$.

$$y_2 - y_1 = Q^2\left[\frac{\alpha}{2g}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right) + \frac{L_2 - L_1}{K_{ср}^2}\right]. \quad (181)$$

В этом случае элементы со значком 2 являются известными и относятся к конечному сечению. Расход Q также известен. Взяв какое-либо сечение, обозначаемое значком 1, т. е. по существу задавшись расстоянием L_1, легко по приведенному выше уравнению путем последовательных попыток находить y_1, при котором уравнение удовлетворяется.

Если скорости вдоль потока уменьшаются можно пренебрегать первым слагаемым в правой части уравнения, соответственно чему упростятся и необходимые подсчеты.



Черт. 83.

б) способ Тольмана

Способ Тольмана (Tolmann), предложенный в 1905 г., сводится в основном к замене имеющихся неправильных сечений русла идеальными сечениями или приведенными. Чаще всего приведенные сечения приводятся к прямоугольному или параболическому руслу.

а) Приведение естественных сечений к прямоугольному руслу представлено на чертеже 83. В естественном состоянии глубина равномерного режима — h_0, уклон дна — i_0, средняя ширина реки — B_0, средняя ширина в подпертом состоянии — B.

Для приведенного прямоугольного русла ширина берется также B, а нормальная его глубина h_n определяется из уравнения:

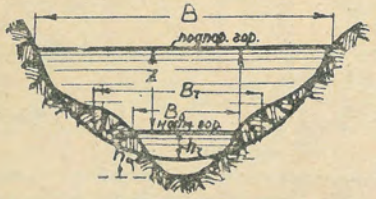
$$Q = B \cdot C_0 h_n^{\frac{3}{2}} \sqrt{i_0}, \quad (182)$$

т. е. приведенное русло при нормальном режиме должно пропускать тот же самый расход воды, как и естественное русло. Определив размеры прямоугольного сечения с необходимыми элементами равномерного режима,

можно для этого сечения пользоваться обычными таблицами для расчета кривых подпора, в частности приведенными в справочнике таблицами проф. Бахметева.

б) Приведение сечения к параболическому руслу.

Способ приведения сечения к параболическому руслу показан на чертеже 84. Кроме обозначений, приведенных в разделе „а", в настоящем случае вводится еще обозначение z, представляющее среднюю для участка величину подпора. Элементы приведенного русла h_n и B_n находятся по уравнениям:



Черт. 84.

$$\left.\begin{aligned} Q &= 0{,}55\, B_n C_0 h_n^{\frac{3}{2}} \sqrt{i} \\ B_n &= B\sqrt{\frac{h_n}{h_n + z}} \end{aligned}\right\} \quad (183)$$

Первое из приведенных уравнений определяет элементы равномерного режима для естественных расходов при параболическом русле. Второе уравнение дает зависимость зеркала от параболической формы русла. Получив элементы приведенного русла, можно расчеты производить по формуле проф. Бахметева при $x = 4$, что соответствует выводу Толкмитта (Tolkmitt), сделанному специально для параболического русла.

в) объемный способ.

При составлении проекта гидроэлектрических установок на реках св. Лаврентия и Миссисипи американские инженеры применили объемный метод для определения кривых подпора. Объемный метод заключается в основном в следующем. Определяется поверхностный уклон при определенном подпоре и затем по полученному уклону и выбираемой отметке подпора определяется длина кривой подпора. Такой метод определения кривой подпора возможен только в том случае, когда имеется достаточно подробный план съемки участка реки, на котором делается расчет кривой подпора. Подсчет кривой подпора производится следующим образом.

1. Отметка в конце участка обычно известна; отметкой в другом конце участка задаются; средняя подпорная отметка участка $y'_{ср}$ равна средней арифметической отметке в начале и в конце участка. Путем сравнения полученной средней отметки $y'_{ср}$ с естественной средней отметкой в данном участке реки при неподпертом горизонте, которую обозначаем через $y_{ср}$, получаем высоту подпора:

$$dh' = y'_{ср} - y_{ср}. \quad (184)$$

2. После этого вычисляют гидравлические элементы подпертого горизонта, принимая во внимание следующие данные; средняя ширина горизонта на подпертом уровне равняется:

$$B'_{ср} = B_{ср} + 2ndh_0, \quad (185)$$

где m коэфициент заложения откосов, который принимался при американских расчетах в среднем $n = 6$.

3. Средняя площадь живого сечения:

$$\omega'_{ср} = \omega_{ср} + \frac{B_{ср} + B'_{ср}}{2} dh'. \quad (186)$$

4. Смоченный периметр определяется:

$$\chi_{ср} = B'_{ср} + h'_{ср} = B'_{ср} + h_{ср} + dh'. \quad (187)$$

5. Соответственно с полученными величинами гидравлический радиус определяется:

$$R'_{ср} = \frac{\omega'_{ср}}{\chi_{ср}}.$$

6. Средняя скорость течения при подпертом горизонте в русле определяется:

$$V'_{ср} = \frac{Q}{\omega'_{ср}}.$$

7. После определения всех перечисленных выше величин легко определяется поверхностный уклон кривой подпора i':

$$i' = \frac{(V'_{ср})^2 \cdot n^2_{ср}}{(R'_{ср})^{\frac{4}{3}}}.$$

После этого по вычисленному уклону и выбираемой отметки в начале и в конце рассматриваемого участка кривой подпора определяется длина.

При расчетах необходимы бывают данные, получаемые из результатов съемки реки; сюда относятся:

1. Определение средней ширины реки при данном естественном уровне воды $B_{ср}$. $B_{ср}$ определяется как частное от деления площади зеркала воды на длину участка, т. е., обозначая площадь зеркала воды через Ω, а длину участка через S, имеем:

$$B_{ср} = \frac{\Omega}{S}.$$

2. Определяется средняя глубина при данном естественном уровне реки и берется обычно по измеренным глубинам в натуре как среднее арифметическое на рассматриваемом участке.

3. Смоченный периметр для естественных условий определяется по следующему уравнению:

$$\chi_{ср} = B_{ср} + h_{ср}. \quad (192)$$

4. Используя полученные данные, легко определяются $R_{ср}$ и $V_{ср}$:

$$R_{ср} = \frac{\omega_{ср}}{\chi_{ср}}; \quad V_{ср} = \frac{Q}{\omega_{ср}}, \quad (193)$$

где расход Q принимается тот же, при котором замерены естественные горизонты.

5. После этого легко определяется коэфициент шероховатости русла, используя для расчетов формулу Маннинга (126) и Шези (Chésy):

$$n_{ср} = \frac{1}{V_{ср}} R_{ср}^{\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{2}}, \tag{194}$$

где через i обозначаем уклон свободной поверхности воды при естественном горизонте.

В подсчетах коэфициент шероховатости в среднем принимается постоянным для всех условий, в том числе и для подпертого горизонта, а потому вычисление производится для элементов подпертого горизонта через $n_{ср}$.

Объемный способ, предложенный американскими инженерами для рек св. Лаврентия и Миссисипи, был продемонстрирован американской экспертизой при Днепрострое в 1926 г.; по заверениям главного американского консультанта Купера предлагаемый им способ дает достаточно точные данные для расчетов кривых подпоров при наличии съемки русла реки необходимой точности.

г) способ Батикля.

В 1921 г. Батикль (Baticle) опубликовал способ построения кривых свободной поверхности в зависимости от гидравлического параметра, который по его предложению выражается:

$$Z = \sqrt[5]{\omega^2 R}. \tag{195}$$

Батикль для профилей любой формы дает диференциальное уравнение кривых подпора, пренебрегая изменением C в следующем виде:

$$\frac{ids}{a} = \frac{Z^5}{Z^5 - Z_0^5} dZ. \tag{196}$$

В этом уравнении индексом „0“ отмечена величина Z при нормальной глубине. Величина же a представляет сокращенное обозначение следующего вида:

$$a = \frac{dh}{dZ} = \frac{h_m - h_0}{Z_m - Z_0}, \tag{197}$$

причем h_m и Z_m относятся к месту наибольшего подпора.

Вводя обозначение $\xi = \frac{Z}{Z_0}$ общее уравнение получаем в виде:

$$\frac{i_0 S}{a Z_0} = B(\zeta_2) - B(\zeta_1),$$

где

$$B(\zeta) = \int \frac{\zeta^5}{\zeta^5 - 1} \zeta d. \tag{198}$$

Для определения функций Батикля $B(\zeta)$ составлена таблица 101.

Батикль свой прием интегрирования свободной поверхности вывел путем сравнения полученных в натуре нескольких кривых подпора на существующих каналах с теоретическими расчетами, при этом расхождение, как указывает автор, оказалось весьма незначительным.

Таблица 101 Baticle'я для построения кривых подпора

$\zeta = \frac{Z}{Z_0}$	$B(\zeta)$	Δ	$\zeta = \frac{Z}{Z_0}$	$B(\zeta)$	Δ
1,000	— ∞	—	1,7	1,6691	1065
1,001	— 0,1366	1392	1,8	1,7756	1049
1,002	+ 0,0026	817	1,9	1,8805	1037
1,003	0,0843	581	2,0	1,9842	1028
1,004	0,1424	452	2,1	2,0870	1022
1,005	0,1876	371	2,2	2,1892	1018
1,006	0,2247	314	2,3	2,2910	1014
1,007	0,2561	273	2,4	2,3924	1011
1,008	0,2834	242	2,5	2,4935	1010
1,009	0,3076	217	2,6	2,5945	1008
1,01	0,3293	447	2,7	2,6953	1006
1,02	0,4740	872	2,8	2,7959	1006
1,03	0,5612	636	2,9	2,8965	1104
1,04	0,6248	509	3,0	2,9969	2007
1,05	0,6757	426	3,2	3,1976	2005
1,06	0,7183	372	3,4	3,3981	2004
1,07	0,7555	329	3,6	3,5985	2003
1,08	0,7884	299	3,8	3,7988	2002
1,09	0,8183	274	4,0	3,9990	2002
1,10	0,8457	493	4,2	4,1992	2007
1,12	0,8950	438	4,4	4,3993	2001
1,14	0,9338	398	4,6	4,5994	2001
1,16	0,9786	639	4,8	4,7995	2001
1,18	1,0155	344	5,0	4,9996	5001
1,20	1,0499	778	5,5	5,4997	5001
1,25	1,1277	722	6	5,9998	10001
1,30	1,1999	661	7	6,9999	10000
1,35	1,2660	628	8	7,9999	10001
1,40	1,3288	1186	9	9,0000	10000
1,50	1,4474	1127	10	10,0000	
1,60	1,5601	1090	∞	∞	

6. Приближенные вычисления свободной поверхности.

а) метод проф. Чарномского и Хестеда

Проф. Чарномский при своих работах в связи с Волховстроем дал решение уравнения неравномерного движения, пользуясь общим уравнением Бернулли. Независимо от этого и параллельно с ним Хестед (Husted) принял тот же самый метод использования общего уравнения Бернулли для вывода формулы для расчета свободной поверхности при неравномерном режиме. Результаты их работ дают (черт. 85):

а) по Чарномскому:

$$S=\frac{(h_2-h_1)\sqrt{1-i_0^2}+\frac{\alpha\left(v_2^2-v_1^2\right)}{2g}}{i_0-i_f}, \tag{199}$$

где

$$i_f=\frac{1}{2C^2}\left(\frac{v_2^2}{R_2}+\frac{v_1^2}{R_1}\right).$$

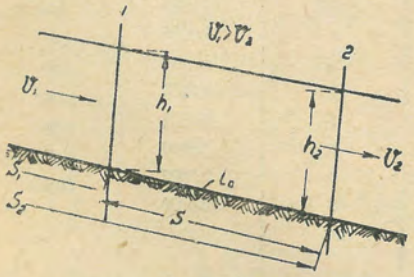
б) Общая формула Хестеда имеет следующий вид:

$$S=\frac{(h_2-h_1)+\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}}{i_0-i_f}, \tag{200}$$

где

$$i_f=\frac{v_{\text{ср}}^2}{C_{\text{ср}}^2 R_{\text{ср}}}.$$

Как видим, общие выражения проф. Чарномского и Хестеда почти ничем не отличаются, если не считать добавочного множителя к члену (h_2-h_1), введенного проф. Чарномским в виде $\sqrt{1-i_0^2}$, который принимается в расчет для уклонов i_0, больших 0,01. Для уклонов же, меньших 0,01, множителем $\sqrt{1-i_0^2}$ можно пренебрегать. Тогда, полагая $\alpha=1$, общее уравнение проф. Чарномского ничем не будет отличаться от уравнения Хестеда.



Черт. 85.

Прием использования уравнения Бернулли для расчета свободной поверхности при неравномерном режиме оказывается особо применимым при расчетах сбросных консолей и коротких лотков с большим уклоном, где применение расчетов по проф. Чарномскому или Хестеду дает часто наиболее верные результаты, судя по опытным данным.

Исследования, произведенные в Среднеазиатском институте водного хозяйства проф. Замариным, показали, что в формуле Хестеда и соответственно и в формуле проф. Чаркомского учет потерь уклоном, т. е. способ вычисления i_f, оказывается

недостаточно точным и приходится вводить для совпадения расчетов с опытными данными поправочный коэфициент. Вычисление потерь по Хестеду оказывается примерно на 30—35% меньше фактически наблюденных. Поэтому вычисление потерь уклона i_f должно быть увеличено процентов на 30—35 или к общей формуле вычисления потерь по Хестеду следует вводить поправочный коэфициент, который должен иметь значение от 1,3 до 1,35, т. е.:

$$i_f=\eta\frac{v_{\text{ср}}^2}{C_{\text{ср}}^2 R_{\text{ср}}}. \tag{201}$$

При расчетах свободной поверхности по проф. Чарномскому и Хестеду необходимо учитывать, что все вычисления производятся лишь для небольших разностей глубин h_2 и h_1, а поэтому оба метода напоминают способ приближенного суммирования, так как при расчетах приходится требуемую разность глубин, или требуемую длину участка, разбивать на целую серию интервалов, для которых производятся самостоятельные подсчеты и затем уже общие длины суммируются путем сложения результатов по отдельным интервалам.

Проще всего расчеты по проф. Чарномскому и Хестеду сводить в таблицы, аналогичные таблицам, какие применяются при способах приближенного интегрирования или суммирования.

б) способ приближенного интегрирования.

Способ приближенного интегрирования, или, точнее, непосредственного суммирования, является одним из простейших способов интегрирования общего уравнения неравномерного движения, но он дает и наиболее сходные результаты с опытными данными как лабораторными, так и полученными в натуре.

Непосредственное суммирование по способу предложенному проф. Бахметевым в общем виде и переработанному проф. Журиным, производится по следующей формуле:

$$\frac{\delta h}{\delta S}=i_0\frac{1-\left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1-j\left(\frac{K_0}{K}\right)^2}=i_0\frac{\beta^2-1}{\beta^2-j}, \tag{202}$$

где

$$\beta=\frac{K}{K_0}.$$

Решая это уравнение относительно δS, получаем:

$$\delta S=\frac{\delta h}{i_0}\left(1-\frac{1-j}{1-\beta^2}\right).$$

Обозначая выражение $\left(1-\frac{1-j}{1-\beta^2}\right)$ через $\psi(h)$ можно написать:

$$\delta S=\frac{1}{i_0}\psi(h)\,\delta h.$$

Производя интегрирование путем суммирования, получаем:

$$S=\frac{1}{I_0}\sum\frac{1}{2}\left[\psi(h_m)+\psi(h_{m+1})\right]\delta h_{m,\,m+1}, \tag{204}$$

где $\delta h_{m,\,m+1}$ является приращением глубины при переходе от одного сечения к другому.

В этой формуле приняты приращения достаточно малые, а потому их значения обозначены через δh и δS.

Определение общей длины производится путем разбивки общего приращения глубины на небольшие интервалы, для которых находятся соответствующие значения по формулам (202) и (208) для первой и второй глубины.

После определения частных длин они суммируются для получения общей длины спада или подпора.

Значение j обычно выражается в среднем для каждого из участков, а в отдельных случаях может быть принято средним для всего участка. Чаще всего результаты подсчетов способом непосредственного суммирования производятся в таблицах следующего вида.

Таблица 102

h	β	$1-\beta^2$	j	$1-j$	$\psi(h)$	$\frac{1}{2}[\psi(h\ )+\psi(h_{,n+1})]$	S	ΣS
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Заполнение приведенной таблицы невозможно без наличия специальных графиков для определения величин K. В случае отсутствия под руками графиков для определения величин K подсчеты величин K должны быть сведены в таблицу следующего вида.

Таблица 103

h	b	ω	χ	R	C	K

Прямолинейная форма свободной поверхности (лотки переменного сечения)

Неравномерное движение потока жидкости при постоянной глубине может происходить только при медленном изменении ширины потока. Поэтому интегрирование общего уравнения неравномерного движения для этого случая дает форму кривой поверхности, ограничивающей ширину потока. Решение общего уравнения для этого случая дано инж. Леви (черт. 86) в следующем виде:

$$S=\frac{1}{i_0}\frac{\alpha Q^2}{g}\sum\left[\frac{\psi_2(\omega)+\psi_1(\omega)}{2}\right](\omega_2-\omega_1), \qquad (205)$$

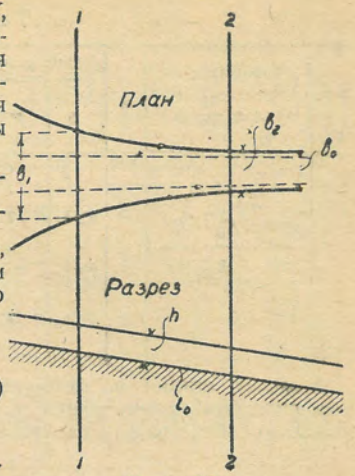
где

$$\psi(\omega)=\frac{C^2R}{(K_0^2-K^2)\,\omega}.$$

Все остальные обозначения α, Q, i_0, K, K_0, C, R, ω являются обычными для расчетов неравномерного движения. Приведенная формула для расчетов неравномерного движения при постоянной глубине упрощается для русла прямоугольного большой ширины и параболического следующим образом.

Если ввести в приведенную формулу обозначения $\beta=\frac{B}{B_0}$, где B — ширина по верху русла при рассматриваемом горизонте, а B_0 та же ширина русла при равномерном режиме, то получаем для прямоугольного русла большой ширины:

$$S=\frac{1}{2i_0}\frac{\alpha Q^2}{g\omega_0^2}\left[\lg\frac{\beta_2^2}{1-\beta_2^2}-\lg\frac{\beta_1^2}{1-\beta_1}\right]. \qquad (206)$$



Черт. 86.

Та же формула для широкого параболического русла получает вид

$$S=\frac{1}{i_0}\frac{9\alpha Q^2}{8g\omega_0^2}\left[\lg\left(1-\frac{1}{\beta_2^2}\right)-\lg\left(1-\frac{1}{\beta_1^2}\right)\right]. \qquad (207)$$

Вторая формула для широкого параболического русла справедлива лишь для значений $\beta<1$.

Чаще всего пользуются для расчетов формулой 205; результаты расчетов сводят в таблицу 104.

Таблица 104

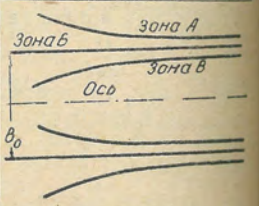
$\frac{\alpha Q^2}{g i_0}$	b	ω	R	C	C^2R	K^2	$K_0^2-K^2$	$\psi(\omega)$	δS	S
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
const										

Проф. Журиным для того же случая дана следующая формула для расчетов неравномерного движения при постоянной глубине:

$$\frac{\delta b}{\delta S}=\frac{K_0^2-K^2}{K_0^2K^2}\cdot\frac{g\omega^3}{\alpha h}. \qquad (208)$$

Анализируя приведенное выше уравнение (208), отметим, что с изменением ширины русла для установившегося медленно изменяющегося движения получаются следующие формы русла.

Таблица 105

Данный уклон	Формула для $\frac{\delta b}{\delta S}$	Зоны	Переменные b	Переменные K	Знаки	Ширина по течению	
	$\frac{g\omega^3}{\alpha H}\cdot\frac{K_0^2-K^2}{K_0^2K^2}$	А	$b>b_0$	$K>K_0$	−	сужается	
		Б	$b=b_0$	$K=K_0$	0	постоянная	
		В	$b<b_0$	$K<K_0$	+	расширяется	

Подсчет ширин по формуле проф. Журина делается тоже приближенным способом суммирования; в частном случае для $i_0 > 0$ уравнение (208) можно преобразовать в следующее:

$$\delta S = \frac{\sigma}{1-\eta^2}\cdot\frac{\alpha h}{g}\,\delta b = f(b)\,\delta b, \qquad (209)$$

где

$$\eta^2 = \left(\frac{K}{K_0}\right)^2;\quad \sigma = \frac{K_0^2}{\omega^3};$$

$$f(b) = \frac{\sigma}{1-\eta^2}\cdot\frac{\alpha h}{g} = \frac{\delta S}{\delta b}.$$

Техника вычисления по формуле (209) достаточно ясна по таблице 106.

Таблица 106

b	K	η	η^2	$1-\eta^2$	ω	ω^2	σ	$\frac{\sigma}{1-\eta^2}$	$f(b)$	Sl	$\ll$	S
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Колонки 2 и 6-9 заполняются после особых подсчетов, производимых по специальной таблице для вычисления пропускной способности (табл. 109) или по специальным графикам.

г) Примеры расчета кривых свободной поверхности

а) Кривые спада. В качестве примеров расчета приводим поверочные расчеты кривой свободной поверхности в лотке Джар-Тегерменской консоли при том наибольшем расходе, который был замерен Среднеазиатским институтом водного хозяйства и глубинах, которые практически наблюдены. Поверочные расчеты кроме показательных примеров дадут еще наглядное представление о точности расчетов кривых спада по разным способам. Кроме того даем пример расчета быстротоков переменной ширины.

Пример 1-й.

Расход — 531 *м*²/*сек*, ширина лотка — 0,5 *м*, сечение лотка прямоугольное. Уклон лотка на исследуемом участке $i_0 = 0{,}157$, глубина равномерного режима для коэфициента шероховатости $\gamma = 0{,}16$, определенном Среднеазиатским институтом водного хозяйства, равно $h = 0{,}153$ *м*. Длина лотка, на которой можно проследить кривую спада, на основании замеренных глубин равняется около 15—17 *м*. Наблюденный горизонт по лотку начиная от критической глубины у входа с интервалами через 1 *м* показан на черт. 87 и в таблице 107.

Таблица 107

Номера сечений	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Глубина (в метрах).	0,449	0,363	0,314	0,280	0,261	0,256	0,235	0,226	0,233

Таблица 107 (продолжение)

Номера сечений	10	11	12	13	14	15	16	17
Глубина (в метрах).	0,217	0,216	0,212	0,206	0,190	0,202	0,199	0,184

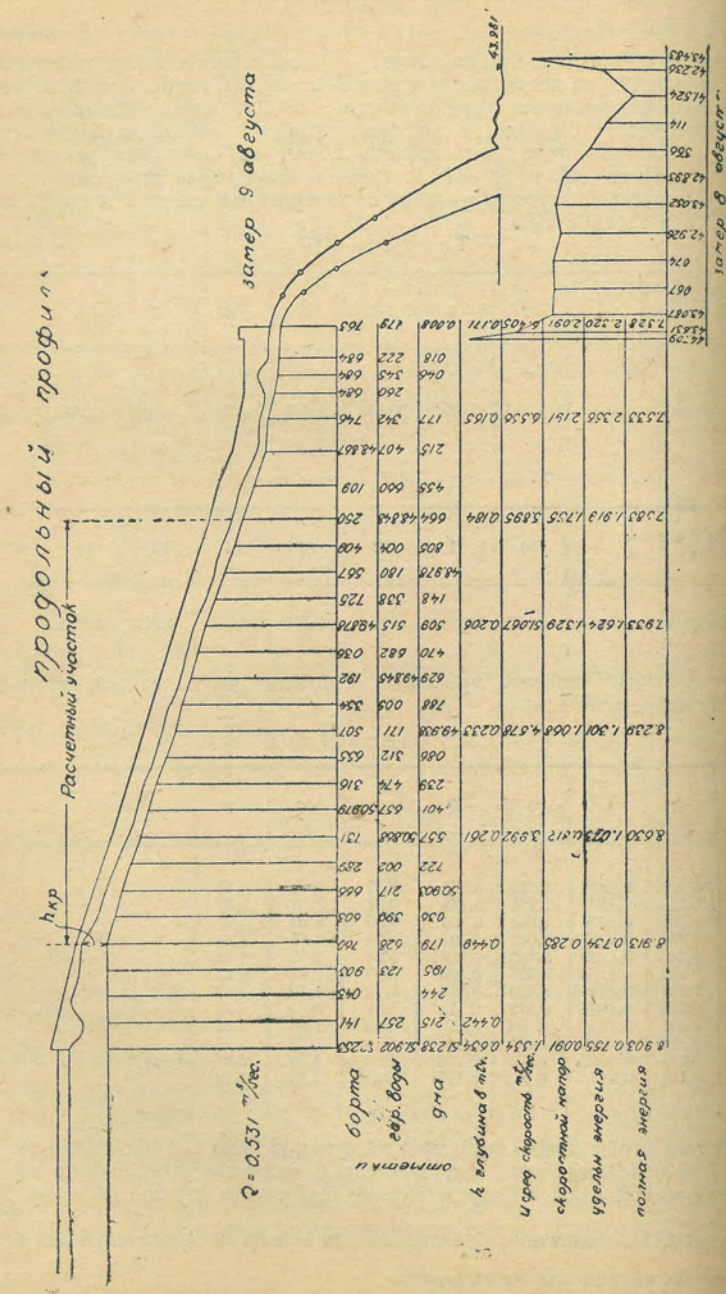
Для удобства расчета приводим основные расчетные элементы для лотка и замеренных глубин.

Таблица 108

№ № по поряд.	h	ω	ψ	R	C	K	V	
1	0,449	0,2215	1,298	0,161	60,2	5,60	2,37	
2	0,314	0,1570	1,128	0,139	60,8	3,56	3,38	
3	0,261	0,1305	1,022	0,128	60,0	2,80	4,07	
4	0,251	0,1255	1,002	0,125	60,0	2,67	4,23	
5	0,240	0,1200	0,980	0,1225	59,7	2,51	4,33	$Q=0{,}531$
6	0,233	0,1165	0,966	0,1205	59,6	2,42	4,56	
7	0,217	0,108 5	0,934	0,116	59,2	2,19	4,90	$\gamma=0{,}16$
8	0,206	0,1030	0,912	0,113	59,0	2,04	5,16	
9	0,202	0,1010	0,904	0,112	58,8	1,99	5.26	
10	0,184	0, 0920	0,868	0,106	58,4	1,75	5.78	
11	0,175	0, 8875	0,850	0,103	58,3	1,63	6,07	
12	0,153	0,076 5	0,805	0,195	58,2	1,35	7,89	

Для того чтобы можно было производить подсчеты при значениях $\alpha = 1{,}1$ и $\alpha = 1$ на отдельных участках, вычисляем значение коэфициента восстановления живой силы и гидравлические показатели русла по проф. Бахметеву.

В подсчетах обозначены j_i значения для $\alpha = 1{,}1$ и j'_i значения для $\alpha = 1$.



Черт. 87.

1. Участок с глубинами от 0,449 до 0,314 *м*.

$$j_1 = \frac{ai_0B}{g} \cdot \frac{C^2_{ср}}{\chi_{ср}} = 26{,}3;\ j_1' = 23{,}9.$$

$$x_1 = 2\,\frac{\lg K_2 - \lg K_1}{\lg h_2 - \lg h_1} = 2{,}52.$$

2. Участок с глубинами от 0,314 до 0,261 *м*.

$$j_2 = 27{,}2;\ j_2' = 24{,}7;\ x_2 = 2{,}56.$$

3. Участок с глубинами от 0,261 до 0,233 *м*.

$$j_3 = 31{,}7;\ j_3' = 28{,}8;\ x_3 = 2{,}74.$$

4. Участок с глубинами от 0,233 до 0,206 *м*.

$$j_4 = 33{,}7;\ j_4' = 30{,}6;\ x_4 = 2{,}75.$$

5. Участок с глубинами от 0,206 до 0,184 *м*.

$$j_5 = 34{,}2;\ j_5' = 31{,}1;\ x_5 = 2{,}74.$$

6. Участок с глубинами от 0,184 до 0,153 *м*.

$$j_6 = 35{,}3;\ j_6' = 32{,}0;\ x_6 = 2{,}88.$$

Значение гидравлического показателя всего лотка получается:

$$x_{ср} = 2{,}65.$$

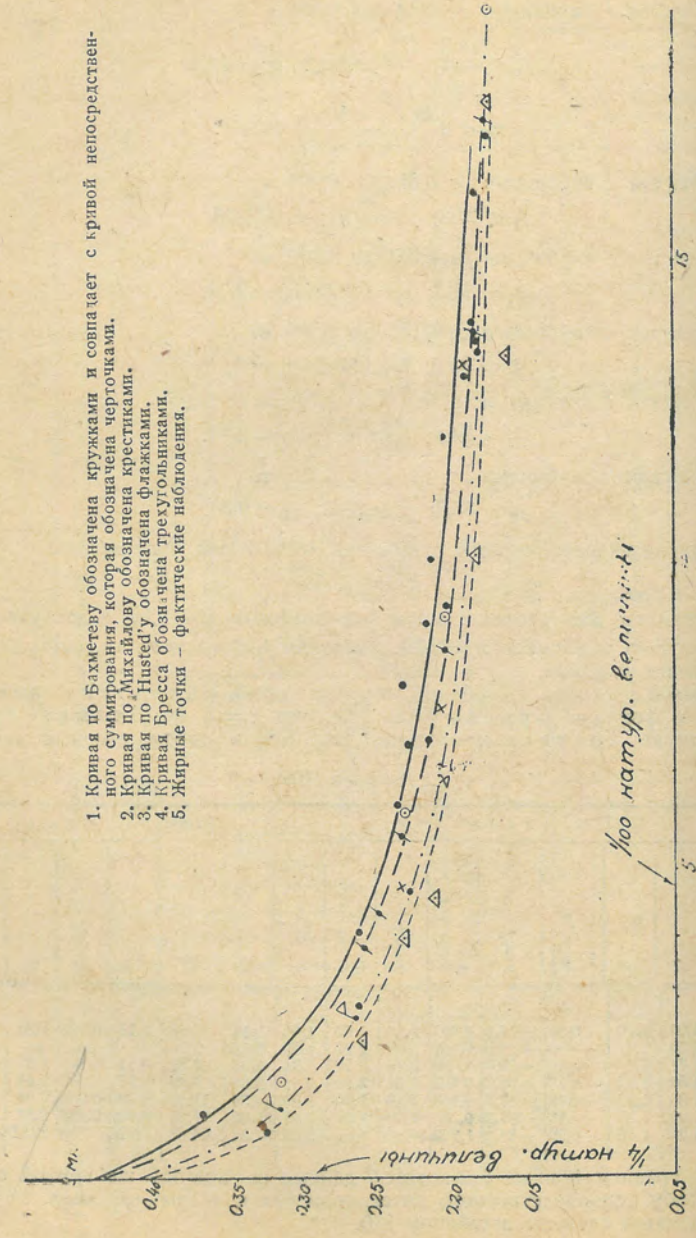
Принимаем для расчетов в 1 и 2-го участков $x = 2{,}50$, а для участков 3, 4, 5 и 6-го принимаем $x = 2{,}75$. Значения j_i принимаем те, которые вычислены по участкам.

Данные расчетов по общей формуле проф. Бахметева применительно к формуле Бресса (при значении $x = 3$ по Бахметеву) и по формуле Хестеда приведены (табл. 109) в общем сводном виде.

Таблица 109

Сечения по табл. 108	По Бахметеву									Bresse	Husted			
	τ_2	τ_1	$\tau_2 - \tau_2$	$1 - j$	$a = \frac{}{Б(\tau_1) - Б(\tau_1)}$	$b = a\,(1-j)$	$n = b + (\tau_2 - \tau_1)$	$S = \frac{h_0 n}{i_0}$	ΣS	ΣS	Θ	$i_0 - i_f$	S	ΣS
1–2	2,93	2,10	−0,83	−25,3	0,097	2,45	1,62	1,58	1,58	0,68	0,16	0,131	1.22	1,22
2–3	2,10	1,71	−0,39	−26,2	0,099	2,60	2.21	2,17	3,75	2,75	—	—	—	2.80
3–6	1,71	1,52	−0,19	−30,7	0,080	2,46	2.27	2,21	5,96	3,89	0,19	0,103	1,85	4 ,65
6–8	1,52	1,35	−0,17	−32,7	0,103	3,37	3,20	3,12	9,08	6,49	0,27	0,095	2,84	7• 49
8–10	1,35	1,20	−0,15	−33,2	0,166	5,55	5,40	5,26	14,34	11,08	0.32	0 053	6,04	1 3.53
10–11	1,20	1,10	−0,10	−34,2	0,225	7,70	7,60	7,41	28,85	17,65	0,09	0,033	2,37	15,90
11–12	1,20	1,00	−0,20	−34,2	1,293	44,30	44,1	43,00	57,34	44,88	0,72	0,003	240,0	255.9

Для сравнений ниже приводятся данные расчета той же кривой спада по способу непосредственного интегрирования или суммирования. Результаты расчетов сведены в таблицу 110.



Черт. 88.

Таблица 110

h	$1-\beta^2$	$1-j$	$\psi(h)$	$\frac{1}{2}[\psi(h_2)+\psi(h_1)]$	δS	S
0,449	—16,20	—23,20	— 0,43	0,280	1,78	1,78
0,314	— 5,95	—28,00	— 3,70	0,310	1,97	3,75
0,261	— 3,30	—30,00	— 8,09	0,086	0,55	4,33
0,251	— 2,92	—30,70	— 9,05	0,114	0,73	5,03
0,240	— 2,45	—30,90	—11,61	0,086	0,55	5,58
0,233	— 2,23	—31,30	—13,05	0,237	1,51	7,09
0,217	— 1,64	—32,10	—18,60	5,241	1,54	8,63
0,206	— 1,29	—32,60	—25,25	0,807	0,15	13,78
0,184	— 0,68	—33,50	—48,20	0,543	3,46	17,24
0,175	— 0,46	—33,90	—72,60	—	—	—

Те же самые расчеты, произведенные по формуле проф. Михайлова, и дают при значении гидравлического показателя живого сечения y, равного 2, коэфициент восстановления живой силы:

$$j_1 = \frac{1{,}1 \cdot 0{,}157 \cdot 57{,}22 \cdot 0{,}095 \cdot 2}{2 \cdot 9{,}85 \cdot 0{,}153} = 35{,}4$$

Сводная таблица расчета дается в следующем виде:

Таблица 111

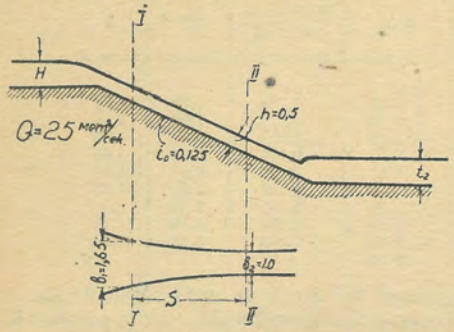
Сечения	τ_2	τ_1	$\Delta = -(\tau_2 - \tau_1)$	$B(\tau_1)$		$a = B(\tau_2) - B(\tau_1)$	$M(\tau_1)$	
				2	1		2	1
1—2	2,93	2,10	—0,83	0,136	0,233	—0,097	0,077	0,122
2—3	2,10	1,71	—0,39	0,233	0,332	—0,099	0,122	0,194
3—6	1,71	1,52	—0,19	0,251	0,331	—0,080	0,190	0,254
6—8	1,52	1,35	—0,17	0,331	0,434	—0,103	0,254	0,344
8—10	1,35	2,20	—0,15	0,434	0,600	—0,166	0,344	0,486
10—11	1,20	1,10	—0,10	0,600	0,825	—0,225	0,486	0,705

Таблица 111 (продолжение)

Сечения	$b = M(\tau_2) - M(\tau_1)$	$j_1 y$	$c = bj_1 y$	$\Sigma\eta = \Delta + a + c$	$\zeta = \frac{\Sigma\eta h_0}{i_0}$	ΣS	ΣS при $\alpha = 1{,}50 - 1{,}35 - 1{,}0$
1—2	—0,045	35,4	1,60	0,67	0,65	0,65	1,22 [1]
2—3	—0,072	35,4	2,53	2,06	2,00	2,65	3,80
3—6	—0,064	35,4	2,37	2,10	2,05	4,70	5,35
6—8	—0,090	35,4	3,19	2,92	2,85	7,55	8,70
8—10	—0,142	35,4	5,04	5,73	5,60	13,15	14,30
10—11	—0,219	35,4	7,86	7,53	7,35	18,50	21,15

[1] Значения: $\alpha = 1{,}50$ для участка 1 — 2 и $\sigma S^2 = 1{,}22$ м.
$\alpha = 1{,}35$ для участка 1 — 3 и $\sigma S = 2{,}58$ м.

Результаты всех расчетов представлены на общем графике (черт. 88), по которому видно, что на протяжении первых 5 *м*, наиболее точные результаты дает формула непосредственного суммирования.



Черт. 89.

Кривые, построенные по данным проф. Бахметева, Хестеда, Бресса и проф. Михайлова и полученные непосредственным суммированием в конце лотка, т. е примерно на 17-м его метре, почти сходятся.

Пример 2-й. Быстроток переменного сечения.

Для примера расчетов быстротоков переменного сечения, т. е. расчетов на неравномерное движение при постоянной глубине, приведем расчет быстротока переменного сечения при уклоне $i_0 = 0{,}125$, расходе $Q = 25$ *м³/сек* (черт. 89). Найдем длину участка быстротока при сужении его ширины $b_1 = 1{,}65$ до $b_2 = 1$ при глубине $h = 0{,}5$ *м*. Пользуясь приведенным выше уравнением (см. уравнение 205) и формулой Гангилье-Куттера (Ganguillet-Kutter) при коэфициенте шероховатости для бетона $n = 0{,}014$, производим расчеты.

Таблица 112

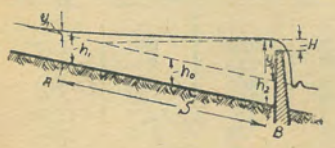
l	ω	R	C	C^2R	$K_0^2 - K^2$	$\varphi(\omega)$	δS	S
1,65	1,200	0,350	61,30	1,316,0	—1,696,0	—0,64	2,20	0,00
1,40	1,075	0,335	60,90	1,242,5	—1,235,8	—0,94	2,51	2,20
1,20	0,975	0,325	60,50	1,189,5	—930,0	—1,30	3,60	4,71
1,00	0,875	0,313	60,10	1,130,0	—665,0	—1,95	—	8,31

По данным, полученным в таблице 112, возможно нанести на чертеже продольный разрез и план быстротока временного сечения.

д). Примеры расчета кривых подпора

а) Кривые подпора в правильных руслах.

Для примера расчета кривой подпора в правильном русле приводим следующий расчет.



Черт. 90.

Определить высоту подпора y_1 на расстоянии $L = 3{,}000$ *м* от плотины, если нормальная глубина $H = 1{,}75$, уклон $i_0 = 0{,}0002$ и глубина воды у плотины $h_2 = h_0 + y_2 = 4$ *м* (черт. 90).

Решаем по способу проф. Бахметева для бесконечно широкого прямоугольного русла, что отвечает данным Бресса (Bresse), основное уравнение неравномерного движения (см. уравнение 158), получаем вид:

$$0{,}3429 = \frac{4}{1{,}75} - \eta_1 - \left(1 - \frac{1{,}1 \cdot 37{,}5^2 \cdot 0{,}0002}{9{,}81}\right)\left[Б\left(\frac{4{,}0}{1{,}75}\right) - Б\left(\eta_1\right)\right].$$

В приведенной формуле принято

$$C_0 = \frac{87}{1 + \frac{1{,}75}{\sqrt{1{,}75}}} = 37{,}5.$$

После упрощений в приведенной формуле получаем:

$$0{,}3429 = 2{,}2860 - \eta_1 - 0{,}9685 \cdot [Б\,(2{,}2860) - Б\,(\eta_1)].$$

Значение $Б$ (2,2860) найдено интерполяцией, по таблицам проф. Бахметева при $x = 3$.

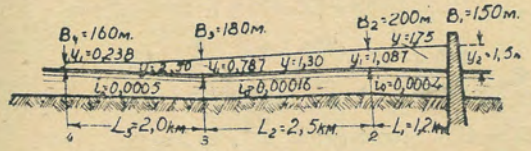
Подставляя полученную величину $Б(\eta_2)$ находим: $\eta_1 - 0{,}9685\ Б(\eta_1) = 1{,}8472$.

Для подбора значений η_1 приходится задаваться различными значениями η_1, подбирать функцию $Б(\eta_1)$ и брать их разность. Подбор приходится повторять до тех пор, пока не получим величину 1,8472. При этом легко устанавливаем: $\eta_1 = 1{,}9779$. Отсюда:

$$y_1 = 1{,}9779 \cdot 1{,}75 - 1{,}75 = 1{,}71\ м.$$

б) Интегрирование кривой подпоров в естественных руслах.

Построим кривую подпора для естественного русла реки разбитого на три участка, пользуясь методом Тольмана (Tolmann), размеры и отдельные



Черт. 91.

элементы русла и его отдельных участков приведены на чертеже 91. Расход воды $Q = 21$ *м³/сек*. Подпор у плотины, расположенный в конце участка $y_2 = 1{,}5$ *м*. По предположению Тольмана живое сечение реки заменяется некоторым идеальным руслом, по которому проходил бы заданный расход Q при равномерном режиме при ширине B_0, равной средней ширине зеркала русла при уклоне i_0 и глубине h_0.

На основании этих данных и принимая $R = h_0$, получаем по уравнению (см. уравн. 182):

$$Q = \omega \cdot C \cdot \sqrt{h_0 i_0} = B_0 h^{\frac{3}{2}} C_0 \sqrt{i_0},$$

откуда: $$h_0^{\frac{3}{2}} = \frac{Q}{B_0 C_0 \cdot \sqrt{i_0}}.$$

При заданных Q и i_0 и вычисляя B_0, как среднее арифметическое из заданных ширин русла на концах участка, т. е. $B_0 = \frac{B_1 + B_2}{2}$, получаем уравнение с двумя неизвестными: h_0 и C_0.

Задаваясь величиной C_0, определяем h_0 и подставляем для проверки значения h_0 в формулу Базена для C, и, если оказывается при проверочном расчете оно достаточно близким к тому, которым задавались при расчетах, подбор считают оконченным.

Результаты таких подсчетов по отдельным участкам получаются:

1-й участок — средняя ширина идеального русла, приведенного к прямоугольному сечению, равняется:

$$B_1 = \frac{150 + 200}{2} = 175 \text{ м};$$

$$h_0^{\frac{3}{2}} = \frac{200}{175\, C_0 \sqrt{0{,}0004}} = \frac{57{,}14}{C_0}.$$

Задаваясь $C_0 = 35$, получаем:

$$h_0 = \left(\frac{57{,}14}{35}\right)^{\frac{2}{3}} = 1{,}39 \text{ м}.$$

Проверяем C_0 и получаем:

$$C_0 = \frac{87}{1 + \frac{1{,}75}{\sqrt{1{,}39}}} = 35.$$

Следовательно подбор сделан правильно.

2-й участок

$$B_0 = \frac{200 + 180}{2} = 190 \text{ м}; \quad h_0^{\frac{3}{2}} = \frac{83{,}21}{C_0}.$$

Задаваясь $C_0 = 42{,}5$, получаем: $h_0 = 1{,}565$ м.

3-й участок

$$B_9 = \frac{180 + 160}{2} = 170 \text{ м};$$

$$h_0^{\frac{3}{2}} = \frac{52{,}63}{C_0}.$$

Задаваясь $C_0 = 28{,}6$, получаем: $h_0 = 1{,}503$.

Определив основные элементы идельного русла при равномерном режиме, можно все построения произвести по таблицам проф. Бахметева при $x = 3$ как для бесконечно широкого русла.

1-й участок

$$\frac{i_0 S}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1 - j)\,[Б(\eta_2) - Б(\eta_1)],$$

где: $i_0 = 0{,}0004$, $h_0 = 1{,}39$, $S = 1\,200$ м, $h_2 = 1{,}39 + 1{,}50 = 2{,}89$ м,

$$j = \frac{\alpha\, i_0 C^2}{g} \cdot \frac{B}{\chi} \cong 0;$$

$$\eta_2 = \frac{2{,}89}{1{,}39} = 2{,}08; \quad Б(\eta_2) = 0{,}122;$$

$$\eta_1 - Б(\eta_1) = 0{,}345 + 2{,}08 - 0{,}122 = 1{,}613,$$

откуда при $x = 3$ находим: $-\eta_1 = 1{,}77$ и $h_1 = 1{,}77 \cdot 1{,}39 = 2{,}46$ м.

2-й участок

При $h_0 = 1{,}565$ м, $i = 0{,}00016$, $S = 2{,}500$ м,

$h_2 = 2{,}46$ м, $\eta_2' = \frac{2{,}46}{1{,}565} = 1{,}57$, $j \cong 0$, $Б(\eta_2') = 0{,}228$; получаем:

$$\eta_1' - Б(\eta_1') = -0{,}266 + 1{,}570 - 0{,}228 = 1{,}076,$$

откуда при $x = 3$ находим $\eta_1' = 1{,}39$ и следовательно

$$h_1' = 1{,}39 \cdot 1{,}565 = 2{,}18 \text{ м}.$$

3-й участок

При $h_0 = 1{,}503$ м, $i_0 = 0{,}0005$, $S = 2\,000$ м,

$h_2 = 2{,}18$ м, $\eta_2'' = \frac{2{,}18}{1{,}503} = 1{,}445$, $j \cong 0$,

$Б(\eta_2'') = 1{,}281$; получаем:

$$\eta_1'' - Б(\eta_1'') = -0{,}665 + 1{,}445 - 0{,}281 = 0{,}499,$$

откуда находим: $\eta_1'' = 1{,}12$ и $h_1'' = 1{,}12 \cdot 1{,}503 = 1{,}685$ м.

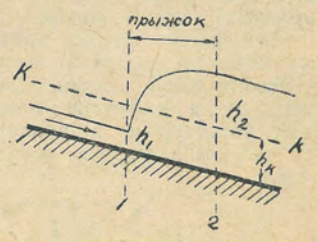
7. Теория прыжка.

Прыжком в гидравлике называют форму перехода бурного движения жидкости в спокойное (чертеж 92). Эта форма сопряжения бурного и спокойного движения осуществляется переходом с одной ветви кривой удельной энергии на другую, как это можно видеть на чертеже 93, изображающем изменение кривой удельной энергии, выраженное уравнением:

$$E = \frac{\alpha V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \qquad (210)$$

или в общем виде для движения в каналах:

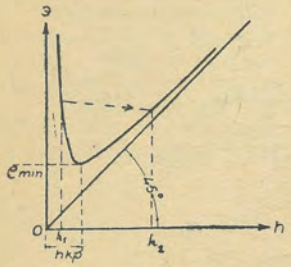
$$E = \frac{\alpha V^2}{2g} + h. \qquad (211)$$



Черт. 92.

Если бы не учитывалась затрата энергии на образование прыжка, высота прыжка определялась бы по общему уравнению Бернулли следующим уравнением, предложенным Беланже:

$$Z = h_2 - h_1 = \alpha \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}. \qquad (212)$$



Черт. 93.

Поскольку данные вычисления высоты прыжка по формуле Беланже давали несколько преувеличенные результаты, что сознавал и сам Беланже, в дальнейшем Baussinesq'ом были сделаны попытки учесть силу трения при образовании прыжка и соответственно с этим вывести общий закон изменения глубин при прыжке. Таким образом было выведено общее уравнение Belanger-Baussinesq'а следующего вида для определения взаимных глубин h_2 и h_1 (черт. 87).

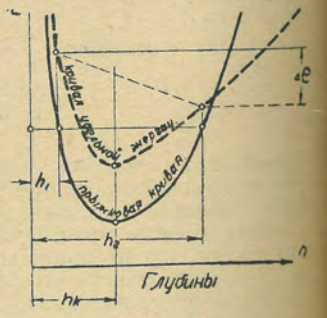
$$\frac{\alpha Q^2}{g\omega_2} + \omega_2 y_2 = \frac{\alpha Q^2}{g\omega_1} + \omega_1 y_1, \qquad (213)$$

где y — расстояние от поверхности до центра тяжести сечения.

Таким образом по приведенному уравнению ясно, что совокупности членов уравнения для сечения до прыжка и после прыжка, после учета потерь, оказываются равными; общее выражение по терминологии проф. Журина, названное прыжковой функцией, обозначается:

$$\theta(h) = \frac{\alpha Q^2}{g\omega} + \omega y. \qquad (214)$$

Уравнение (214) указывает, что взаимные глубины соответствуют двум одинаковым значениям прыжковой функции. Общий вид кривой прыжковой функции напоминает собой кривую удельной энергии, но правая ветвь расположена круче, чем у кривой удельной энергии. Если нанести кривую удельной энергии и кривую прыжковой функции на общую диаграмму (черт. 94), то заметим, что для перехода по кривой удельной энергии от одной сопряженной глубины к другой необходимо этот переход производить наклонной прямой ab, наклон которой должен выражать потерю напора.



Черт. 94.

Тот же расчет по кривой прыжковой функции производится путем проведения горизонтальной линии. Для прямоугольного русла выражение прыжковой функции упрощается, и уравнение оказывается возможно решить относительно сопряженных глубин, и тогда получаем:

$$h_2 = \frac{h_1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{8\alpha q^2}{g h_1^3}} - 1\right] = \frac{h_1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{8 h_{кр}^3}{h_1^3}} - 1\right]. \qquad (215)$$

Благодаря взаимности имеем:

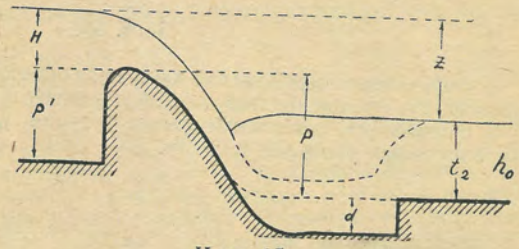
$$h_1 = \frac{h_2}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{8\alpha q^2}{g h_2^3}} - 1\right] = \frac{h_2}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{8 h_{кр}^3}{h_2^3}} - 1\right].$$

Уравнение прыжковой функции необходимо при всех вычислениях по затоплению прыжка. Во всех случаях, когда необходимо бывает в нижнем бьефе водосливных плотин или перепадов на каналах создать глубины, затопляющие прыжок или дающие надвинутые прыжки, следует пользоваться уравнением прыжковой функции. Для этого глубина в нижнем бьефе путем образования колодца постепенно увеличивается до тех пор, пока количество энергии, получаемое в сжатом сечении при падении струи на дно нижнего бьефа, не будет соответствовать, с учетом потерь на образование прыжка, количеству энергии при полной глубине нижнего бьефа (t_2 + глубина колодца). Более подробно эти расчеты можно найти в следующем разделе.

8. Расчет водобойных колодцев.

Водобойные колодцы в гидротехнических сооружениях применяют в том случае, когда бывает необходимо затопить прыжок, который может образоваться при переливе воды через водосливы, перепады и быстротоки. Затопление прыжка возможно производить двумя методами:

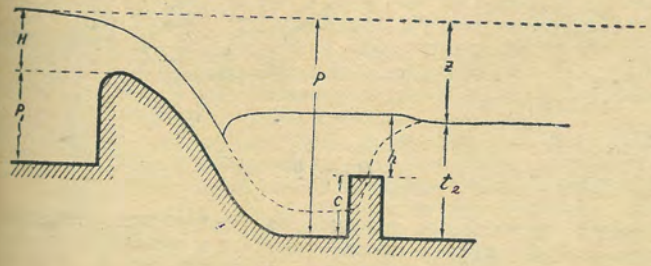
1. Путем заглубления определенной части дна нижнего бьефа с тем, чтобы образовать в точке падения жидкости глубину, достаточную для затопления прыжка (черт. 95а).



Черт. 95а.

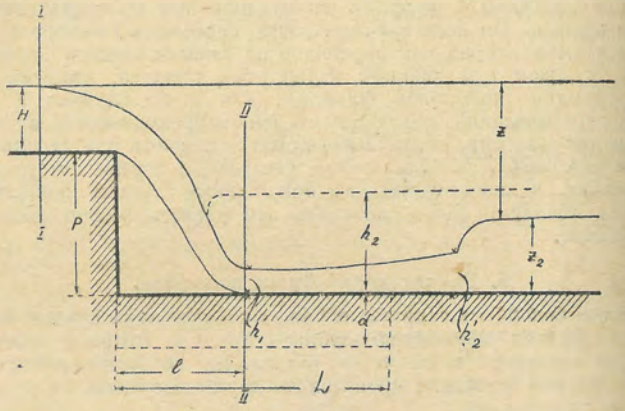
2. Путем возведения у дну нижнего бьефа поперечной стенки, подпирающей воду в нижнем бьефе до требуемого горизонта, обеспечивающего затопление прыжка (черт. 95б).

Как в первом, так и во втором случае необходимо бывает выяснение следующих основных элементов при расчете перепадов и водосливных плотин (черт. 96):



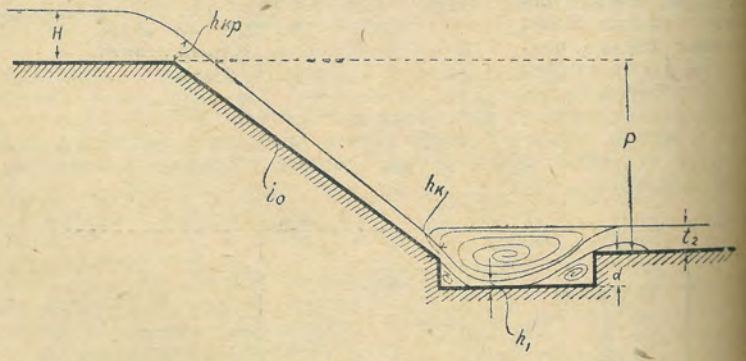
Черт. 95б.

1. Расчет сжатого сечения в точке падения жидкости на дно водобойного колодца (h_1).
2. Расчет сопряженной глубины с глубиной, образуемой в сжатом сечении (h_2).
3. Определение места падения струи на уровне нижнего бьефа (l).



Черт. 96.

4. Определение необходимой длины для образования достаточно мощного бассейна для погашения энергии образующейся при падении воды (L).
5. Определение очертания сливной грани плотины при безвакуумных или вакуумных профилях (см. стр. 290—292).



Черт. 97.

При расчете водобойных колодцев на быстротоках расчет несколько изменяется, хотя в основных чертах остается тем же самым (черт. 97).
1. Определяется сжатое сечение в конце быстротока $h_к$ и при падении воды в водобойный колодец (h_1).

2. Определяется сопряженная глубина, достаточная для затопления прыжка (h_2).
3. Устанавливаются необходимые и достаточные размеры водобойного колодца.

Расчет водобойных колодцев на основании имеющихся теоретических данных и практических к ним коэфициентов оказывается недостаточно изученным. Размеры колодцев, запроектированных по расчетным данным, часто оказываются недостаточными, и колодцы работают неудовлетворительно. Поэтому в последнее время считается наиболее правильным ни одного из крупных сооружений по сопряжению бьефов не пускать в строительство, не проверив его лабораторным путем. Лабораторные испытания, как правило, надо считать необходимыми для всех сооружений, проектируемых для индивидуальной постройки. Сооружения массового порядка, т. е. типовые сооружения, должны проектироваться на основании уже имеющихся данных об удовлетворительной работе построенных сооружений или, точно так же как и индивидуальные сооружения, должны проходить лабораторные испытания. Лабораторные испытания дают наиболее правильные результаты при относительно крупных масштабах моделирования. Наиболее желательными масштабами моделирования в последнее время признавались масштабы $^1/_{10}$—$^1/_{25}$ натуральной величины, а для крупных сооружений как предел $^1/_{50}$.

а) Расчет сжатого сечения

Расчет сжатого сечения необходимо рассматривать для двух самостоятельных случаев:
1. Истечение жидкости через водослив.
2. Истечение жидкости на водосливе из-под щита.

1. В первом случае при свободном истечении (черт. 91) и при следующих элементах: H_0 — полный напор с учетом подходной скорости в верхнем бьефе, p — высота стенки падения, t_2 — глубина воды в нижнем бьефе — необходимо бывает на основании сравнения расходов в сечениях I — I и II — II по заданному расходу Q и при известных для колодца — ширине по дну (b), заложении откосов (n) и величине полного напора над дном нижнего бьефа ($H_0 + p$) дать зависимость глубины сжатого сечения (h_1) от этих элементов по уравнению:

$$Q = \varphi (b + nh_1) h_1 \sqrt{2g (H_0 + p - h_1)}, \qquad (216)$$

где h_1 — глубина сжатого сечения, а остальные обозначения известны.

В данном уравнении является наименее выясненным коэфициент скорости φ, которым приходится задаваться для расчетов. Предельное значение φ, которое может давать наибольший запас при расчетах, обычно принимают $\varphi = 0{,}95$. Однако, учитывая большие скорости по дну нижнего бьефа в сжатом сечении и относительно большее влияние шероховатости дна, в этом случае часто принимают $\varphi = 0{,}85$.

При пользовании приведенным уравнением для определения глубины сжатого сечения h_1 необходимо помнить, что данное уравнение справедливо только в том случае, когда ширина входного отверстия перепада или водослива не сильно отличается от ширины по дну в нижнем бьефе, так как в том случае, когда ширина по дну в нижнем бьефе значительно больше ширины входного отверстия, струя при падении на дно нижнего бьефа не успевает занять полностью всего сечения и явления, происходящие при

растекании струи по дну нижнего бьефа, конечно вызывают дополнительные потери, которые никакими расчетами в настоящее время не учитываются.

Приведенное уравнение для определения сжатого сечения для условий прямоугольного широкого русла в значительной степени упрощается, так как все расчеты можно производить на погонный метр ширины сооружения. В этом случае общее уравнение принимает вид:

$$q = \varphi h_1 \sqrt{2g} \sqrt{H_0 + p - h_1}$$

или:

$$\frac{q}{\varphi \sqrt{2g}} = h_1 \sqrt{H_0 + p - h_1}. \qquad (217)$$

В обоих случаях, и в общем и в частном виде для прямоугольного широкого русла, уравнение для определения глубины сжатого сечения решается подбором. Для этого достаточно все известные члены уравнения перенести в одну сторону, оставив во второй половине уравнения члены, зависящие от h_1. Тогда подбор значений производится достаточно просто.

2. При расчете сжатого сечения при истечении из-под щита на водосливе или перепаде расчет в общих чертах сводится к тому же самому: составляется уравнение равенства расходов для сечений I — I, II — II (черт. 98), которое в этом случае принимает следующий вид:

$$Q = \varphi (b + nh_1) h_1 \sqrt{2g (H_u + p - h_1)}. \qquad (218)$$

В уравнении H_u обозначает остаточный напор или напор за исключением потерь, происходящих при протекании жидкости в отверстии.

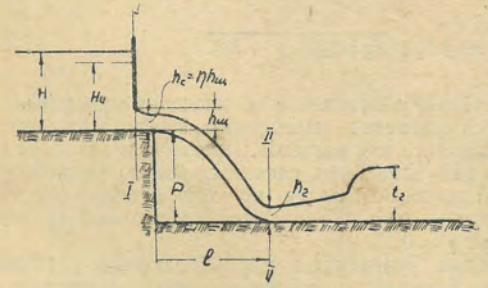
Согласно данным проф. Бахметева, остаточный или идеальный напор определяется по уравнению:

$$H_u = \varphi^2 H_0 + (1 - \varphi^2) \eta h_{щ}, \qquad (219)$$

где приняты следующие обозначения:

φ — скоростной коэфициент, принимаемый, как и при расчетах свободного перелива через водосливы и перепады, в пределах от 0,85 до 0,95.

η — коэфициент сжатия при истечении из-под щита. Размеры сжатия в достаточной степени не изучены и принимаются во всех расчетах $\eta = 0{,}75 - 0{,}65$.

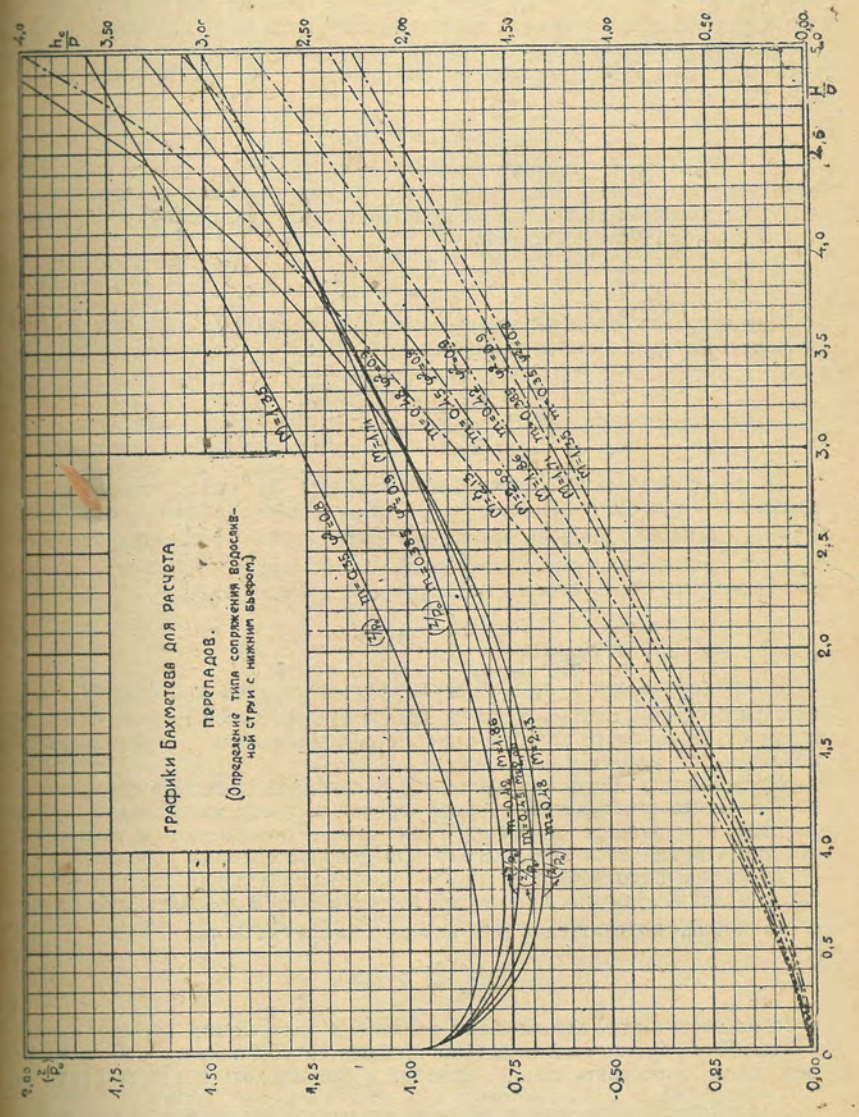


Черт. 98.

$h_{щ}$ — представляет высоту открытия отверстия или высоту поднятия щита.

3. Для быстротоков сжатое сечение приходится определять по уравнениям неравномерного движения, причем расчеты по уравнениям неравномерного движения производятся чаще всего при коротких быстротоках с большим уклоном по формулам проф. Чарномского или Хестеда, в прочих случаях по формулам проф. Бахметева.

4. В тех случаях, когда применяют конструкции перепадов с наклонными стенками, которые представляют по существу средние условия между



Черт. 99.

перепадом и быстротоком, расчет сжатого сечения производится как для перепадов, т. е. без учета тех потерь на трение, которые возможны в быстротоке, или по данным американской практики (см. уравнение 231).

Для практических расчетов глубин колодцев проф. Бахметевым построен график (черт. 99). Пользование им описано во 2-м примере расчета (см. стр. 410).

б) Определение сопряженных глубин

На втором этапе расчета водобойных колодцев приходится определять глубины, сопряженные с полученной по расчетам глубиной сжатого сечения h_1. Расчеты сопряженных глубин производятся по приведенной выше прыжковой функции уравнение (214).

$$\Theta(h)=\frac{\alpha Q^2}{g\omega}+y\omega.$$

Для широких прямоугольных русел прыжковая функция дает простое решение, которое приведено в уравнении 215:

$$h_2=\frac{h_1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8h_{кр}^3}{h_1^3}}-1\right].$$

После определения сопряженной глубины h_2 выясняется отгон или затопление прыжка путем сравнения сопряженной глубины h_2 с глубиной нижнего бьефа t'_2, причем за глубину нижнего бьефа t'_2 принимается не только собственно глубина нижнего бьефа, но также и та глубина, которая дополнительно образуется при заглублении колодца, т. е.:

$$t'_2=t_2+d,$$

где d — глубина колодца.

В том случае, когда h_2 оказывается больше t'_2, прыжок отогнан, следовательно расчеты сжатого сечения для различных высот падения в зависимости от образуемого колодца приходится производить до тех пор, пока не получается затопления прыжка.

Надо иметь в виду, что минимальной глубиной колодцев для расходов до 1 $м^3$ считается 0,3 $м$, а во всех прочих случаях минимальная глубина колодца принимается в 0,5 $м$. Этим самым определяют и те пределы, которыми приходится пользоваться при подборе глубины колодцев.

Довольно часто бывает достаточно после определения сжатого сечения h_1 определить величину прыжковой функции $\Theta(h_1)$ и сравнить эту величину с величиной, подсчитанной для нижнего бьефа t'_2. Когда

$$\Theta(t'_2)>\Theta(h_1), \qquad (220)$$

прыжок оказывается затопленным и никаких дальнейших расчетов не требуется. При обратном соотношении приходится увеличивать размер колодцев, вновь определять сжатое сечение и производить повторные расчеты.

в) Определение точки падения струи на дно нижнего бьефа.

При определении точки падения струи на дно нижнего бьефа приходится производить расчет возможного движения струи воды, при ее падении на дно нижнего бьефа под влиянием двух скоростей: горизонтальной скорости истечения и силы падения; следовательно кривая падения воды должна быть выражена параболой. Наибольшее затруднение представляет определение той струйки, относительно которой должны быть произведены расчеты для получения вероятных результатов. Чаще всего расчеты относят к средней струйке воды, т. е. к струйке, находящейся на половине высоты напора верхнего бьефа или на высоте $\left(p+\frac{H}{2}\right)$ относительно дна нижнего бьефа. В отдельных случаях рекомендуется определять падение струек, расположенных на свободной поверхности в верхнем бьефе и у дна верхнего бьефа, и за расчетную принимать среднюю величину между ними.

Ввиду некоторых затруднений с теоретическим расчетом места падения струи при переливе через водослив был произведен целый ряд опытов, на основании которых даны зависимости между расстоянием от стенки падения до точки падения струи (черт. 96 и 98) и основными элементами: напором верхнего бьефа H и высотой стенки падения p, причем эта зависимость выражается следующим образом:

$$l\cong 1{,}5\sqrt{Hp} \quad \text{или} \quad l=\tfrac{2}{3}\sqrt{2H(2p+H)}. \qquad (221)$$

Теоретический расчет производится следующим образом: время падения струи от рассматриваемой точки до дна нижнего бьефа определяется по общей формуле для равномерно-ускоренного движения:

$$t=\sqrt{\frac{2(p+\xi H)}{g}}, \qquad (222)$$

где коэфициент ξ измеряется в пределах от $\xi=0$ до $\xi=1$, в зависимости от расположения рассматриваемой струйки.

Кроме того для определения точки падения струи на дно нижнего бьефа необходимо бывает знать величину максимальной скорости, или расчетной скорости, с которой вода поступает с гребня водослива.

Для определения максимальной расчетной скорости приходится рассматривать два отдельных случая: истечение через водослив и истечение из-под щита. При рассмотрении случая истечения через водослив необходимо рассматривать опять-таки два основных случая: истечение через водослив с широким порогом и истечение через водослив с острым ребром и практических профилей.

1. Определение максимальных скоростей при истечении через водослив с широким порогом производится по той глубине, которая устанавливается на конце водослива, т. е. по критической глубине. Таким образом максимальная скорость на трапецоидальном водосливе с широким порогом будет равна:

$$V_{max}=\frac{Q}{(b+nh_{кр})h_{кр}}. \qquad (223)$$

2. При истечении через водослив с острым ребром и водосливы практических профилей максимальную скорость теоретическими расчетами получить не удается, поэтому приходится пользоваться отдельными фактическими наблюдениями и теми примерными поправочными коэфициентами, которые дают в расчетах удовлетворительные результаты. В этом случае приходится определять среднюю скорость истечения через водослив при использовании имеющегося напора верхнего бьефа и к этому вводить поправочный коэфициент, причем размер поправочного коэфициента

в настоящее время недостаточно уточнен и пока что применяется равным 1,5. Таким образом расчетная формула принимает следующий вид:

$$V_{max} = \frac{1{,}5\,Q}{(b + nH)H}. \tag{224}$$

3. При истечении из-под щита на водосливах и перепадах расчетная максимальная скорость определяется по сжатому сечению, которое образуется непосредственно после выхода струи из-под щита, т. е. с учетом коэфициента сжатия $\eta = 0{,}65 - 0{,}75$. Таким образом расчетная скорость определяется по формуле:

$$V_{max} = \frac{1}{\eta}\,\frac{Q}{bh_{щ}}. \tag{225}$$

4. При расчетах скорости на перепадах, в которых в верхнем бьефе имеет место бурное течение, следует пользоваться фактической скоростью верхнего бьефа:

$$V_{max} = \frac{Q}{(b + nH)H}.$$

г) Длина водобойного колодца.

а) Длины колодцев перепадов.

Общая длина водобойного колодца должна зависеть в основном от размеров того водоворота (черт. 96), который может образоваться в нижнем бьефе, причем длина колодца должна была бы соответствовать хотя бы примерно наибольшей возможной длине водоворота или вальца.

Расчет водобойных колодцев по методам вихревой теории будет приведен особо, поэтому в общем разделе останавливаемся только на тех приближенных методах, которые существуют для определения длины водобойных колодцев.

Для определения длины водобойных колодцев существует целый ряд теоретически выведенных и эмпирических формул. Из них приведем следующие:

Формула Этчевери (Etcheverry): $L = 3\sqrt{Hz}$, (226)

где z разность верхнего и нижнего бьефов.

По Дейша $L = 3\sqrt{Hp}$. (227)

По данным проф. Журина, которым для определения размеров длины колодца были использованы кривые очертания водосливов безвакуумных профилей Кригера (Creager) с введением коэфициента запаса 2, формула выражается следующим образом:

$$L = 3{,}2\sqrt{H_0 \cdot (p + 0{,}83\,H_0)}. \tag{228}$$

При расчетах длины колодца по параболе падения струи длина колодца определяется по следующей формуле:

$$L = \beta t V_{max}, \tag{229}$$

где коэфициент β обычно принимался равным 2, время принималось как время падения средней струйки или в отдельных случаях как время, среднее для падения верхней и нижней струйки, т. е. t равно:

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Проф. Михайловым дана формула для определения длины колодца с учетом падения струи по параболе и с введением коэфициента запаса β в зависимости от отношения $\frac{H}{p}$ в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{для} & \dfrac{H}{p} < 0{,}3, & L = 2{,}75\sqrt{H_0 p} + h, \\ \text{для} & \dfrac{H}{p} < 1{,}0, & L = 3{,}5\sqrt{H_0 p} + h, \\ \text{для} & \dfrac{H}{p} > 1{,}0, & L = 4{,}5\sqrt{H_0 p} + h, \end{array}\right\} \tag{230}$$

где за h принята глубина слоя воды, переваливающегося через нижнюю стенку водослива (черт. 95б).

По данным американской практики для колодцев-перепадов с наклонными стенками размеры их принимаются следующие:

$$d = {}^1\!/_4\,\sqrt{pt_2}; \quad L = p + 1{,}5\,t_2. \tag{231}$$

Для грубых подсчетов по американским данным возможно глубину и длину колодца принимать:

$$d = \frac{p + z}{5}. \quad L = (4 - 5)(t_2 + d). \tag{232}$$

Формула акад. Павловского:

$$L = l + 3\,(H + d - h_1). \tag{233}$$

Формула инж. Шаумяна:

$$L = l + 2{,}5\,(h_2 - h_1)\left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)^2, \tag{233}$$

где l — длина отлета струи, определяемая по уравнению (221); h_1 и h_2 — сопряженные глубины.

б) Длина колодцев быстротоков

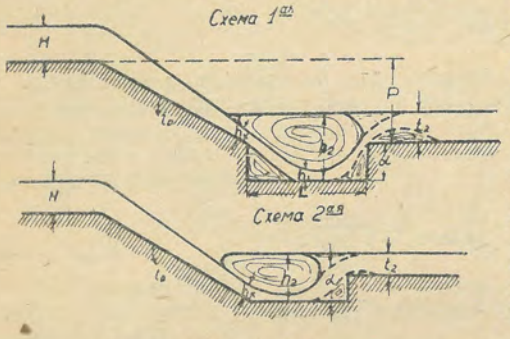
Колодцы быстротоков могут проектироваться следующих двух типов (черт. 100).

1. Сочетание быстротока с нормальным типом водобойного колодца (схема 1).

2. Вытягивание быстротока до дна водобойного колодца и образование в этом случае своеобразного типа колодца при быстротоках (схема 2).

Расчет размера колодцев в первом случае ничем не отличается от расчетов колодцев-перепадов; только в этом случае безусловно более рационально принимать более высокие коэфициенты запаса для длин колодца.

При расчете колодцев быстротоков второго типа никаких достаточно удовлетворительных формул для определения размеров длин колодцев не имеется. В настоящее время пользуются при расчете длины колодцев быстротоков следующими формулами:



Черт. 100.

I. Формула проф. Ахутина:

$$L = 3\sqrt{d\cdot\left(h_к + \frac{v_к^2}{2g}\right)}, \quad (234)$$

где $h_к$ и $v_к$ — глубина и скорость воды в конце быстротока; d — глубина колодца.

Формула проф. Ахутина применима для колодцев как первого, так и второго типов.

II. Формула проф. Михайлова:

$$L = 1{,}4\sqrt{\frac{Q(p+H_0)}{\left(b+nt_2'\right)t_2'}}, \quad (235)$$

где все обозначения известны кроме $t_2' = t_2 + d$, т. е. суммарной глубины колодца и нижнего бьефа.

III. Данные проф. Замарина.

Проф. Замарин рекомендует для длин колодцев следующие три соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ L = \text{от } 0{,}5\,p \text{ до } 1{,}0\,p, \\ 2)\ L = \text{от } 2{,}5\,(b_н - b_б) \text{ до } 4{,}0\ (b_н - b_б), \\ 3)\ L = \text{от } 4\,(t_2 - d) \text{ до } 6\,(t_2 - d). \end{array}\right\} \quad (236)$$

В формуле проф. Замарина приняты обозначения: p — общее падение; $b_н$ — ширина канала в нижнем бьефе, $b_б$ — ширина быстротока; t_2 — глубина воды в нижнем бьефе, d — глубина колодца.

Проф. Замарин рекомендует пользоваться наибольшей длиной, которая получается по этим трем соотношениям.

При расчете длины водобойных колодцев необходимо пользоваться для расчетов теми формулами, которые дают наибольшие размеры колодцев. К таким формулам будут относиться формулы проф. Журина, акад. Павловского, проф. Михайлова и американские (232).

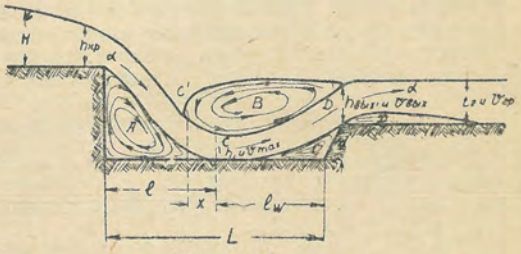
в) Расчет водобойных колодцев с использованием теории вихрей (по данным инж. Мацмана).

При падении струи воды с водослива на дно нижнего бьефа общая картина движения струи представлена на чертеже 101, где ясно определяется наличие четырех вихрей.

Наиболее крупный из них вихрь B, следующий вихрь A и совершенно незначительные и не влияющие по существу на расчет размеров колодцев вихри C и D, причем наличие вихря D определяет, как это увидим

ниже в специальном разделе гидротехнических сооружений, рациональность и целесообразность применения специального метода предохранения нижнего бьефа от размыва — гребенки Ребока.

При расчете водобойных колодцев-перепадов вихрь A также не имеет никакого значения, и по существу расчетным вихрем является вихрь B, который должен размещаться в колодце и определять собой затопление прыжка. Для консольных перепадов, которым посвящается специальная глава, вихрь A является более опасным, чем вихрь B, потому что вихрь A представляет собой размыв в сторону опоры консольного перепада, поэтому он является определяющим размер и расчет консольного перепада. В основном расчет вихрей или вальцов в перепадах производится на основании следующих данных:



Черт. 101.

а) Движение воды в вихрях считается происходящим по закону площадей:

$$V\cdot r = \text{const}, \quad (237)$$

где V — окружная скорость и r — радиус-вектор.

б) В каждом колодце имеем два режима движения воды, во-первых, вихрь с вращательным движением по закону площадей и во-вторых струю падения (черт. 101, струя $\alpha - \alpha$) с поступательно-замедленным струйным движением от скорости V_{max}, соответствующей наибольшей скорости в сжатом сечении, до скорости V.

Потеря энергии струи падения объясняется тем, что поверхность двух указанных выше режимов — вихревого и струйного — является вихревой поверхностью $C' - C - D$, представляющей собой совокупность прямолинейных, цилиндрических вихревых шнуров.

При дальнейшем продвижении струи падения и поверхности вихря B к точке D, вихревые шнуры продвигаются вместе с ней и выбрасываются на поверхность воды, постепенно затухая, а вихревая поверхность $C' - C - D$ беспрерывно возобновляется. Выбрасывание вихревых шнуров на поверхность сопровождается на последней волнением.

Возможно допустить, что скорость вращения в вихре вблизи места падения струи в точке C почти равна скорости движения струи V_1, а в точке D — скорости выхода из колодца $V_{вых}$ (черт. 101). На основании изложенных допущений имеем при h_k — глубине в конце консоли или перепада

$$V_1'\cdot x = V_{вых}\cdot l_w V_1 \xi\,(h_k' + p - h_1) = \text{const}. \quad (238)$$

Сделав необходимые преобразования, получаем общую длину колодца

$$L = l + L_w, \quad (239)$$

где l — расстояние, определенное по параболе падения струи согласно изложенному выше, уравнение (222), а

$$L_w = x + l_w = \frac{(V_{вых} + V_1)\,(h_k + p - h_1)}{2V_{вых}}, \quad (240)$$

причем знак минус (—) определяет собой размер, необходимый для расчетов при определении элементов вихря A, знак плюс (+) принимается в том случае, когда расчет ведется по вихрю B. Размер колодца в этом случае определяется по размеру вихря, что в достаточной степени еще не оправдано данными опыта.

Приведенная схема расчета размеров колодцев на основании данных теории вихрей, относится к случаю, когда ширина струи, падающей на дно нижнего бьефа, оказывается равной ширине нижнего бьефа, т. е. нет бокового растекания струи. В случае наличия бокового растекания струи расчеты должны быть исправлены за счет последнего.

9. Примеры расчета.

Пример 1-й. Приводим пример расчета Бурджарского многоколодезного перепада, построенного в Ташкенте, на расход 37,5 $м^3/сек.$ при падении 19,1 $м$. Основные расчетные данные для Бурджарского перепада следующие (черт. 102).

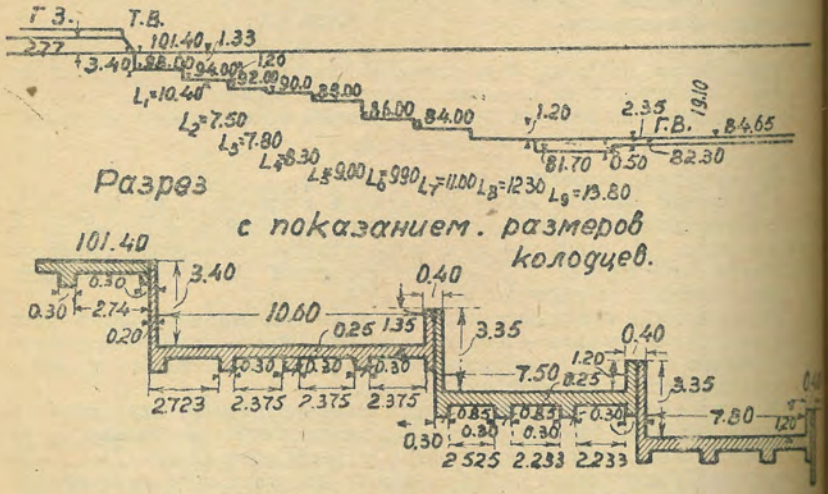


Схема Бурджарского многоколодезного перепада.

Черт. 101.

Верхний бьеф: расход — $Q=37{,}5$ $м^3/сек$, напор — $H=2{,}77$ $м$, отметка порога — 101,4 $м$.

Нижний бьеф: ширина — 8,6 $м$, глубина воды — 2,35 $м$, отметка дна — 82,3 $м$.

Ширина входного отверстия принята в 8,6 $м$ и перекрывается одним сегментным щитом с устройством выше сегментного щита специальной забральной стенки.

Необходимое открытие щита для пропуска требуемого расхода (см. уравнение 25) определяется по формуле:

$$Q=\varepsilon\varphi\omega\sqrt{2g\left(H_0-\frac{h_щ}{2}\right)}.$$

Решая полученное уравнение для прямоугольного отверстия шириной в 8,6 $м$, получаем открытие щита $h_щ=0{,}93$ при $\mu=\varepsilon\varphi=0{,}71$.

Разбивка Бурджарского перепада на ступени приведена на чертеже 102, где высота падения первой ступени — 3,4 $м$. Падение от дна первой ступени на вторую — 2 $м$, от дна второй до дна третьей ступени — 2 $м$ и все дальнейшие ступени с падением в 2 $м$.

В отношении расчета колодцев представляют интерес первая и вторая ступени; все последующие ступени по существу оказываются равными по размерам величине второй ступени, поэтому расчет производим для двух ступеней — первой и второй. Расчет последней ступени всегда является в практических случаях необходимым ввиду наличия своеобразных условий нижнего бьефа. Однако здесь расчет этого колодца не приводим.

Истечение воды на первую ступень происходит из-под щита, следовательно необходимо определить идеальный напор по формуле (219):

$$H_u=0{,}90^2\cdot 2{,}77+0{,}75\cdot 0{,}93\cdot(1-0{,}90^2)=2{,}41\ м.$$

Пользуясь уравнением для определения сжатого сечения (см. уравнение 218), имеем для прямоугольного сечения:

$$Q=\varphi(b+nh_1)h_1\sqrt{2g(H_u+p)-h_1},$$

где:

$\varphi=0{,}90$, $H_u=2{,}41$ $м$,
$b=8{,}60$ $м$, $p=3{,}40$ $м$,
$Q=37{,}5$ $м^3/сек$, $n=0$.

Подставляя приведенные данные и отделяя известные члены от неизвестных, получаем:

$$h_1\sqrt{5\cdot 81-h_1}=1{,}095.$$

Решая подбором полученное уравнение для h_1, получаем $h_1=0{,}48$. По полученной сжатой глубине h_1 определяем сопряженную глубину по формуле (см. уравнение 215) для прямоугольного сечения:

$$h_2=\frac{0{,}48}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8\cdot 1\cdot 37{,}5^2}{8{,}6^2\cdot 0{,}48^3\cdot 9{,}81}}-1\right]=2{,}7\ м.$$

Необходимая глубина в колодце соответственно с этим должна быть не меньше 2,7 $м$, но учитывая возможное понижение горизонта за счет подходных скоростей, необходимо расчетную глубину в колодце принять ориентировочно порядка 3 $м$, что даст запас около 10% от расчетной глубины 2,7 $м$.

Получив общую глубину в колодце в 3 $м$, необходимо ее разбить на переливающийся слой и высоту стенки колодца p. Решение этого вопроса производится также подбором.

Для этого можно ориентировочно задаться коэфициентом расхода через водослив с тонкой стенкой $M=2{,}1-2{,}2$. При коэфициенте расхода $M=2{,}1$ определяем переливающийся слой h и после этого, принимая во внимание его округление, окончательно устанавливаем высоту стенки колодца p_1.

Такие ориентировочные подсчеты дают размер стенки p_1 около 1,35 $м$. Принимаем размер стенки $p_1=1{,}35$, и соответственно получаем переливающийся слой:

$$h=3\ м-1{,}35\ м=1{,}65\ м.$$

Коэфициент расхода для истечения через тонкую стенку по формуле Базена (см. табл. 22) равен для принятых нами данных как раз 2,1. Расход через ребро водослива в 8,6 *м* получится:

$$Q = 2{,}1 \cdot 8{,}6 \cdot 1{,}65^{\frac{3}{2}} = 37{,}5 \ м^3/сек,$$

т. е. выбранные размеры удовлетворяют требованиям истечения через водослив. Таким образом глубина колодца и стенка затопления (p_1) оказываются подобранными с достаточной точностью.

Несмотря на это необходимо произвести еще дополнительные расчеты на возможное понижение горизонта в колодце за счет подходных скоростей. Правда в принимаемом коэфициенте расхода по формуле Базена влияние подходной скорости уже учтено, но принимая во внимание наличие вихрей в колодце и водоворотов, а также сужение струи течения, что обусловливает образование больших подходных скоростей, условно производим расчет этого понижения в следующих предположениях:

а) За подходную скорость принимаем среднюю скорость воды в колодце при полной его глубине.

б) За скорость подхода принимаем скорость на водосливе.

Расчетное понижение горизонта за счет подходных скоростей принимаем средним между первым и вторым случаями. Для первого колодца получаем следующие данные:

Скорость на гребне водослива:

$$V_{ср.г} = \frac{37{,}5}{8{,}6 \cdot 1{,}65} = 2{,}64 \ м/сек.$$

Соответственно подходный напор:

$$z_г = \frac{2{,}64^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}36 \ м.$$

Средняя скорость в колодце при глубине 2,7 *м*.

$$V_{ср.к} = \frac{37{,}5}{8{,}6 \cdot 2{,}7} = 1{,}61 \ м/сек.$$

Соответственно подходный напор:

$$z_к = \frac{1{,}61^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}13 \ м.$$

Возможное расчетное условное понижение горизонта воды в колодце считаем:

$$z = 0{,}5 \cdot (0{,}36 + 0{,}13) \backsimeq 0{,}25 \ м.$$

Имея в виду, что нами дан запас в напоре колодца 0,3 *м*, можно считать, что полученное понижение горизонта 0,25 *м* не вызовет отгона прыжка.

Определение длины водобойного колодца производим по формуле падения струйки по параболе и по средней максимальной скорости. Время падения струйки определяем как среднее между падением струйки с верхней поверхности вытекающей из отверстия струи и с дна верхнего бьефа и имеем:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p + h_ш)}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (3{,}40 + 0{,}93)}{9{,}81}} = 0{,}94 \ сек;$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2p}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}40}{9{,}81}} = 0{,}83 \ сек.$$

Максимальная скорость в отверстии получается:

$$V_{max} = \frac{37{,}5}{8{,}60 \cdot 0{,}93} \cdot \frac{4}{3} = 6{,}25 \ м/сек.$$

Длина колодца при $\beta = 2$ получается:

$$L = \frac{t_1 + t_2}{2} \cdot 2V_{max} + h = \frac{0{,}92 + 0{,}83}{2} \cdot 2 \cdot 6{,}25 + 1{,}65 = 12{,}65 \ м.$$

По американской формуле (232)

$$L = 2 \cdot 7x \ (4—5) = \text{от } 10{,}8 \text{ до } 13{,}50 \ м.$$

В построенном Бурджарском перепаде длина колодца принята в 11 *м*, потому что не учтен переливающийся слой h для длины колодца, так как в период постройки таких требований не предъявлялось.

Расчет второго колодца.

Поступление воды во второй колодец происходит через острое ребро слоем $h = 1{,}65$ *см* при стенке падения в 3,35 *м*. Сжатое сечение на дне второго колодца определяется по формуле (см. уравнение 217), где $\varphi = 0{,}90$ и $n = 0$. Подставляя размеры для второго колодца, получаем:

$$37{,}5 = 0{,}9 \cdot 8{,}6 \cdot h \cdot \sqrt{2g(1{,}65 + 3{,}35 - h_1)}.$$

Решая подбором это уравнение, получаем

$$h_1 = 0{,}52 \ м.$$

После этого определяется сопряженная глубина по формуле 215 (см. 394 и 400 стр.):

$$h_2 = \frac{0{,}52}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{8{,}1 \cdot 37{,}5^2}{0{,}6^2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}52^3}} - 1\right] = 2{,}5 \ м.$$

Принимаем глубину во втором колодце с некоторым запасом в 2,8 *м*. Высота стенки затопления колодца $p_1 = 1{,}2$. Переливающийся слой должен равняться $h = 1{,}6$ *м*.

По формуле Базена для водослива с острым ребром (см. табл. 22) находим коэфициент расхода для истечения через тонкую стенку $M = 2{,}13$.

Расход через ребро второго колодца получается:

$$Q = 2{,}13 \cdot 8{,}6 \cdot 1{,}6^{\frac{3}{2}} = 37{\cdot}5 \ м^3/сек.$$

Следовательно размеры приняты правильно.

Проверяем возможное понижение горизонта за счет подходных скоростей.

Скорость на водосливе второго колодца:

$$V_{ср.г} = \frac{37 \cdot 5}{8{,}6 \cdot 1{,}6} = 2{,}72 \ м/сек.$$

Подходный напор получается:

$$z_г = \frac{2{,}72^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}38 \ м.$$

Средняя скорость в колодце при полной его глубине в 2,5 *м* получается:

$$V_{ср.к} = \frac{37,5}{8,6 \cdot 2,5} = 1,75 \text{ м/сек.}$$

Соответственный подходный напор:

$$z_к = \frac{1 \cdot 75}{2 \cdot 9,81} = 0,15 \text{ м.}$$

Возможное понижение получается около

$$z = \frac{0,38 + 0,15}{2} \approx 0,27 \text{ м,}$$

т. е. несколько меньше принятого при расчете; следовательно расчет удовлетворяет полностью поставленным требованиям.

Расчет длины колодца производим тем же самым методом, что и в первом случае, и получаем:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(3,35 + 1,60)}{9,81}} = 1 \text{ сек;} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,35}{9,81}} = 0,83 \text{ сек.}$$

Максимальная скорость на водосливе по уравнению (224) равняется:

$$V_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{37 \cdot 5}{8,6 \cdot 1,6} = 4,1 \text{ м/сек.}$$

Длина колодца получается по формуле (229) при $\beta = 2$:

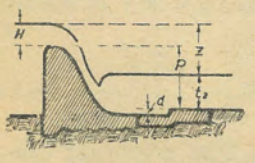
$$L = \frac{0,83 + 1}{2} \cdot 2 \cdot 4,10 + 1,60 = 9,1 \text{ м.}$$

По американской формуле (232):

$$L = 2 \cdot 5 (4 - 5) = \text{от 10 до 12,5 м.}$$

Принятая в проекте длина 7,9 *м* отличается от расчетной ввиду того, что при постройке Бурджарского перепада к длине колодца не добавлялась необходимая длина, равная переливающемуся слою $h = 1,6$ *м*.

Дальнейшие колодцы Бурджарского перепада имеют стенку падения в 3,2 *м* вместо 3,35 *м*, и следовательно основные их размеры не могут оказаться больше принятых расчетом для второго колодца. Поэтому все остальные колодцы могут конструироваться тех же самых размеров, что и второй, но по следующим колодцам Бурджарского перепада длина придана несколько бо́льшая, учитывая засасывание струей воздуха при падении воды через водослив и необходимость в связи с этим увеличения объемов воды в колодцах для более правильного погашения энергии. Увеличение длины колодцев произведено по закону параболы с таким расчетом, что третий колодец увеличен в длине на 0,3 *м*, а последующий — на 0,5; 0,7; 0,9 и т. д. до длины 13,8 *м*.



Черт. 103.

Пример 2. Рассчитать глубину водобойного колодца d для погашения прыжка воды при переливе через водосливную плотину при следующих данных (черт. 103). Напор в верхнем бьефе $H = 3$ *м*. Глубина воды в нижнем бьефе $t_2 = 5$ *м*. Стенка падения водослива p или высота плотины 9,5 *м*. Коэфициент расхода $M = 2,13$. Расчет производим по графическому методу, предложенному проф. Бахметевым; при заданных размерах плотины и толщине переливающегося слоя воды имеем величину перепада горизонта следующую:

$$z = H + p - t_2 = 3 + 9,5 - 5 = 7,5 \text{ м.}$$

Относительный перепад:

$$\frac{z}{p} = \frac{7,5}{9,5} = 0,79.$$

Пользуясь кривыми, составленными проф. Бахметевым для расчета водосливов и перепадов (черт. 78), находим величину $\left(\frac{z}{p}\right)$ — минимальное критическое значение относительного перепада, при котором прыжок образуется в месте падения струи или у самой подошвы плотины.

Принимая $M = 2,13$, $x = \frac{H}{p} = 0,316$,

получаем по кривой $\left(\frac{z}{p}\right)_0 = 0,76$,

т. е. имеющееся в нашем примере $\left(\frac{z}{p}\right) = 0,79 > 0,76 = \left(\frac{z}{p}\right)_0$,

следовательно прыжок отогнан.

Для его затопления необходимо создать в нижнем бьефе такие условия, при которых относительный перепад $\left(\frac{z}{p}\right) < \left(\frac{z}{p}\right)_0$. Этого достигнем устройством водобойного колодца путем заглубления дна нижнего бьефа или путем устройства специальной стенки затопления.

Случай 1-й (черт. 103). При заглублении дна нижнего бьефа глубину колодца d определяем из следующего неравенства:

$$\frac{z}{p + d} \leqslant \left(\frac{z}{p}\right)_0 = 0,76.$$

Решая полученное уравнение, имеем:

$$d \geqslant \frac{z}{0,76} - p$$

или:

$$d \geqslant \frac{7,5}{0,76} - 9,5 > 0,37.$$

Следовательно можно принять минимальный размер колодца $d = 0,5$ *м*.

Проверяем полученное сопряжение струи с нижним бьефом.

Новая полная высота плотины:

$$p_1 = p + d = 10 \text{ м.}$$

Новая глубина нижнего бьефа:

$$t_2' = 5,0 + 0,5 = 5,5 \text{ м.}$$

Относительный перепад:

$$\left(\frac{z}{p}\right) = \frac{7,5}{10} = 0,75.$$

Относительный напор верхнего бьефа:

$$x=\frac{H}{p}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

По тому же графику проф. Бахметева для

$$M=2{,}13 \text{ и } x=0{,}3,$$

находим:

$$\left(\frac{z}{p}\right)_0=0{,}765.$$

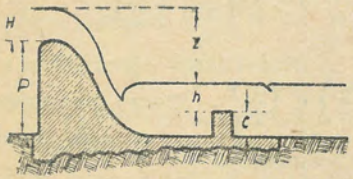
Следовательно $\left(\frac{z}{p_1}\right)<\left(\frac{z}{p}\right)_0$, а потому прыжок затоплен.

Длину колодца определяем по формуле Дейша:

$$L=3\sqrt{H\cdot p}=3\sqrt{3\cdot 9{,}5}=16 \text{ м}.$$

Случай 2-й (черт. 104). Затопляем прыжок устройством стенки затопления высотой c. Высота стенки затопления определяется из условий:

$$\frac{z}{p}=\frac{[h+p-(h-c)]}{p}\leqslant\left(\frac{z}{p}\right)_0=0{,}76.$$



Черт. 104.

Величина переливающегося слоя через стенки затопления может быть ориентировочно принята равной слою переливающейся воды на водосливе, т. е. $h=H=3$ м. Точнее же и правильнее определять в этом случае глубину переливающегося слоя через стенку затопления как через водослив с острым ребром, что дает несколько пониженную глубину переливающегося слоя.

Решая уравнение на основании сделанного допущения о равенстве $h=H$, имеем:

$$\frac{p-c}{p}\leqslant\left(\frac{z}{p}\right)_0=0{,}76,$$

т. е.

$$c=p-0{,}76\,p=2{,}28 \text{ м}.$$

Ставим стенку высотой $c=2{,}5$ м, тогда имеем:

$$z_1=H+p-(C+h),$$

или при $h=H$ имеем $z_1=p-c=7$ м.

Относительный перепад получается:

$$\left(\frac{z_1}{p}\right)=\frac{7}{9{,}5}=0{,}736<0{,}76,$$

т. е. струя затоплена.

Далее, необходимо бывает проверить, не появится ли отгон прыжка ниже стенки затопления. В этом случае относительный перепад получается:

$$\frac{z_c}{c}=\frac{h+c-t_2}{c}=\frac{0{,}5}{2{,}5}=0{,}2;$$

$$x=\frac{h}{c}=\frac{3}{2{,}5}=1{,}2.$$

Полученному значению относительного напора соответствует по кривой

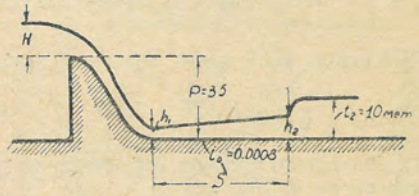
$$\left(\frac{z}{p}\right)_0=0{,}68.$$

Таким образом имеем $\left(\frac{z_c}{c}\right)<\left(\frac{z}{p}\right)_0$, и следовательно прыжок затоплен.

Длина колодца, образованная стенкой затопления, обычно определяется теми же методами, что и длина нормального колодца, т. е. в данном случае может быть принята по Дейша, как и в первом случае, $L=16$ м.

Пример 3. Определить расстояние, на которое отгоняется прыжок от подошвы водослива при высоте $p=35$ м, глубине нижнего бьефа $t_2=10$ м и при расходе на погонный метр плотины $q_{\max}=25$ м³/сек (черт. 105).

Уклон дна нижнего бьефа принимаем равным уклону реки $i_0=0{,}0008$. Такого рода задача должна решаться в том случае, когда приходится определять длину, на которой можно ожидать размыва дна в нижнем бьефе при незатопленном прыжке. Прежде всего определим переливающийся слой через водослив H_0 по уравнению $q=MH_0^{\frac{3}{2}}$.



Черт. 105.

Для водослива практических форм принимаем $M=2{,}13$ и отсюда получаем

$$H_0=\frac{q}{M^{\frac{2}{3}}}=\frac{25}{2{,}13^{\frac{2}{3}}}\approx 5{,}16 \text{ м}.$$

Глубину сжатого сечения h_1 у подошвы плотины определяем подбором по известному уравнению (217):

$$q=0{,}95\cdot h_1\sqrt{2\cdot 9{,}81\,(5{,}16+35-h_1)}.$$

Решая подбором полученное уравнение, находим $h_1=0{,}95$ м. Сопряженную глубину с глубиной h_1 не определяем, так как заведомо знаем, что прыжок будет отогнан. Для того чтобы определить длину отгона прыжка, необходимо знать глубину, сопряженную с глубиной нижнего бьефа t_2. Сопряженную глубину с глубиной нижнего бьефа обозначаем через h_2' и определяем по уравнению уравнение (215):

$$h_2'=\frac{t_2}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8\alpha q^2}{gt_2^3}}-1\right]=1{,}25 \text{ м}.$$

Следовательно искомое расстояние отгона прыжка получится путем построения кривой подпора от глубины $h_1=0{,}95$ м до глубины $h_2'=1{,}25$ м. Решение производим по методу проф. Бахметева для бесконечно широкого русла, т. е. при гидравлическом показателе русла $x=3$, что соответствует формуле Бресса:

$$\frac{i_0 S}{h_0}=\eta_2-\eta_1-(1-j)\,[\mathrm{B}(\eta_2)-\mathrm{B}(\eta_1)].$$

Принимаем для данного случая

$$j = \frac{\alpha C_0^2 i_0'}{g},$$

где $C_0 = 48{,}9$ и $i_0 = 0{,}0008$, получаем:

$$j = 0{,}214.$$

Для определения η_2 и η_1 и соответственно функции Бахметева имеем:

$$\eta_1 = \frac{h_1}{t_2} = \frac{0{,}95}{10{,}00} = 0{,}10; \quad Б\,(0{,}10) = 0{,}100,$$

$$\eta_2 = \frac{h_2'}{H_0} = \frac{1{,}25}{10} = 0{,}125; \quad Б\,(0{,}125) = 0{,}125.$$

Подставляя полученные значения, имеем:

$$L = \frac{10{,}0}{0{,}0008}\,[0{,}125 - 0{,}100 - (1 - 0{,}214)\,(0{,}125 - 0{,}100)] = 37{,}5\ м$$

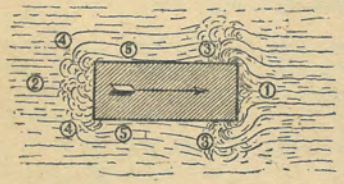
Следовательно прыжок отгоняется от подошвы плотины или от места падения струи на 37,5 *м*.

РАЗДЕЛ VII.

СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА.

А. Сопротивление движению тел в жидкости.

а) При движении тела в неподвижной жидкости или при обтекании неподвижного тела потоком жидкости тело испытывает со стороны жидкости усилие, причинами которого является: появление впереди тела области повышенного (*1*), а позади тела области пониженного давления (*2*) по сравнению с гидростатическим давлением внутри жидкости. Образование и отделение вихрей у краев и позади тела (*3* и *4*). Трение между жидкостью и твердым телом на поверхности последнего (*5*) (см. черт. 106).



Черт. 106.

Последний вид сопротивления практически играет роль только при обтекании весьма длинных поверхностей по сравнению с поперечными размерами тела.

Действующее на тело усилие определяется формулой:

$$W_t = f\rho S v^n, \qquad (1)$$

где S — боковая поверхность тела, v — скорость, ρ — масса единицы объема, n — показатель степени меньший 2, f — коэфициент; причем для шероховатых поверхностей $n = 2{,}0$ и $f = 0{,}02 - 0{,}05$, для гладких поверхностей $n = 1{,}85$. Значение f дано для системы мер M и K.

1. Основной закон лобового сопротивления тела при движении в жидкости по Ньютону:

$$W = \zeta\rho F v^2,$$

где ζ — безразмерный коэфициент, зависящий от формы тела, F — наибольшее сечение тела и. $\rho \cong 102$ для воды и для воздуха $\rho = \frac{1}{8}\,\frac{кг/сек}{м^4}$ при 0° С и давлении 760 *мм*.

Значения коэфициента ζ для отдельных случаев:

Таблица 112а.

	Форма тела		ζ — Воды	ζ — Воздуха
Нормальное обтекание	Круг или квадрат	$d < 2{,}5$ *см* $7{,}5$ „ $F < 0{,}1$ $м^2$ $1{,}0$ „	0 55 0,65	0.55 0,65
	Прямоугольник	отношение сторон 1:5 1:10	0,70 0,78	
	Шар	$\frac{vd}{\nu}$ 2,5·10⁵ $\frac{vd}{\nu}$ 2,5·10⁵	0,22 0,47	ν кинематический коэфициент вязкости
	Цилиндр вдоль оси	$\frac{l}{d} = 0$ 0,5 1,0 2,0 4,0 7.0	0,55 0.54 0.44 0,40 0,41 0, 47	
	Цилиндр перпендикулярно оси	$D = 1$ *мм* 1 *см* 3 „ 15 „	0,52 0,49 0,48 0,32	

2. Плоские пластинки при косом обтекании.

Обозначим α угол (наименьший) между плоскостью пластинки и направлением движения.

Простейшая теоретическая формула сопротивления $P_\alpha = P \sin^2\alpha$, где P — сопротивление той же пластинки при нормальном обтекании. Вследствие влияния трения и вихреобразования сопротивления в действительности больше.

В следующей таблице приводятся по опытам Эйфеля величины отношения $\frac{P\alpha}{p}$ для различных α и для различных отношений $\frac{l}{h}$, где l — длина пластинки (перпендикулярная к направлению движения) и h глубина пластинки (в направлении движения).

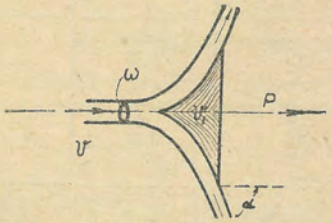
Таблица 112б.

$\frac{l}{h}$ \ α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1/6	0,13	0,40	0,67	0,93	1,06	1,06	1,04	1,02	1,00
1/3	0,21	0,51	0,89	1,20	1,14	1,07	1,03	1,01	1,00
1	0,37	0,80	1,24	1,17	1,06	1,03	1,02	1,01	1,00
3	0,50	0,78	0,78	0,84	0,90	0,94	0,97	0,99	1,00
7	0,58	0,73	0,80	0,85	0,90	0,93	0,98	0,99	1,00
sin α	0,030	0,117	0,250	0,413	0,587	0,75	0,88	0,97	1,00

При $l = h$ отношение имеем $\max \frac{P_\alpha}{P} = 1{,}45$, когда $\alpha = 38°$. При небольших значениях α (примерно до 30°) $\frac{P_\alpha}{P}$ изменяется почти пропорционально α.

Б. Давление струи на препятствие.

Обозначения: ω — площадь поперечного сечения струи; Q — расход струи, v — скорость струи; u — скорость движущегося препятствия по направлению струи; P — давление струи на препятствие; ρ — масса единицы объема, равная $\frac{\gamma}{g}$.



Черт. 107.



Черт. 108.

При встрече струи с препятствием она растекается по последнему, почти не теряя своей скорости; угол между начальным и конечным направлениями струи зависит от формы и размеров препятствия. Зная угол α (или углы α) схода струи с препятствием и пренебрегая сопротивлениями трения, можно определить величину и направление давления струи, применяя уравнение количества движения.

Приводим формулы для движущегося препятствия. Для случая удара струи о неподвижную преграду достаточно в них положить $u = 0$.

а. Прямой удар струи (черт. 107 и 108).

$$P = \rho\omega(v-u)^2(1-\cos\alpha).$$

При $\alpha = 90°$; $P = \rho\omega(v-u)^2$.

„ $\alpha = 180°$; $P = 2\rho\omega(v-u)^2$.

Мощность, передаваемая струей препятствию:

$$A = P \cdot u = \rho\omega u(v-u)^2(1-\cos\alpha).$$

Из условия $\frac{dA}{du} = 0$, находим, что при $u = \frac{1}{3}v$ будет:

$$A\max = \frac{8}{27}\rho\omega v^3(1-\cos\alpha).$$

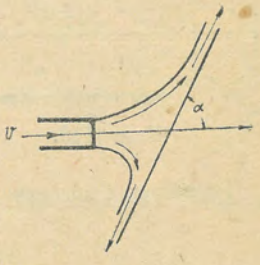
Мощность начальной струи $A = \frac{1}{2}\rho\omega v^3$.

Следовательно наибольшой к. п. д. струи будет:

$$\eta = \frac{A\max}{A_0} = \frac{8}{27}(1-\cos\alpha).$$

При $\alpha = 180°$, имеем

$$A_{\max} = \frac{8}{27}\rho\omega v^3(1-\cos\alpha) \text{ и } \eta = \frac{16}{27},$$



Черт. 109.

б) Косой удар струи (черт. 109).

Подобно (2), имеем составляющую давления вдоль струи

$$x = \rho\omega(v-u)^2\sin^2\alpha$$

и мощность, передаваемая струей препятствию:

$$A = \rho\omega(v-u)^2 u \sin^2\alpha.$$

Аналогичные выражения получаем для $A\max$ и η.

РАЗДЕЛ VIII.

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ.

Скорость движения волны наполнения.

При проектировании гидротехнических сооружений во многих случаях практики приходится оперировать со скоростями и уровнями воды при движении волны наполнения. Во всех тех случаях, когда повышение горизонта нижнего бьефа происходит в течение сравнительно незначительного периода времени за счет воды, накопленной в водохранилище, имеем случай движения волны наполнения. Это явление имеет место например при внезапном прорыве плотины и т. д.

В этих случаях скорость W головной волны можно определять по формуле Saint-Venant'a:

$$W = V \pm \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{Z}{H}\right), \qquad (252)$$

где V — средняя скорость воды в канале до волны в метрах в секунду;

H — нормальная глубина волны в метрах;

Z — превышение волны над нормальным уровнем в метрах (черт. 110).

Знак минус (—) ставится при движении волны против течения.

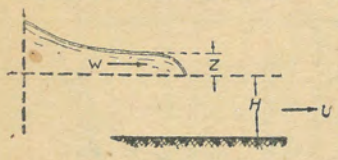
При значительных глубинах H по сравнению с Z иногда пользуются формулой Scott-Russel'я, полученной им экспериментальным путем:

$$W = V \pm \sqrt{g(H+Z)}, \qquad (253)$$

или по еще более простой формуле Lagrange'a:

$$W = V \pm \sqrt{gH}. \tag{254}$$

Однако лучшие результаты получаются по формуле (253), что подтверждено опытами, произведенными в лаборатории при Московском институте инженеров водного хозяйства и мелиорации.



Черт. 110.

Гидравлический удар в трубах проявляется при быстром преграждении пути движущейся в трубах жидкости (например при быстром закрывании водопроводного крана).

При этом явлении часть энергии движения превращается в энергию давления. Теория гидравлического удара в трубах разработана проф. Жуковским.

Приращения давления в атмосферах $P_{атм}$ выражается равенством:

$$P_{атм} = \frac{\gamma \lambda V_p}{g \cdot 10333} \cong 13{,}1\, V_p. \tag{255}$$

На 1 *м* скорости V_p движения воды до удара давление увеличивается на 13,1 атм.

λ — скорость распространения ударной волны в трубе

$$\lambda = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \ (м/сек); \tag{256}$$

λ_1 — 1 435 *м/сек* — скорость распространения звука в воде

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{eE}{d\rho}} = \sqrt{\frac{eEg}{d\,1000}} \cong 0{,}1 \sqrt{\frac{eE}{d}} \ (м/сек) \tag{257}$$

E — коэфициент упругости материала трубы.

Для чугуна $E = 10^6$ *кг/см²* $= 10^{10}$ *кг/м²*.
Для литого железа " " $= 2{,}15 \cdot 10^{10}$ *кг/м²*
Для сварочного " " $= 2{,}0 \cdot 10^{10}$ *кг/м²*

e — толщина стенок трубы
d — внутренний диаметр трубы
ρ — плотность жидкости

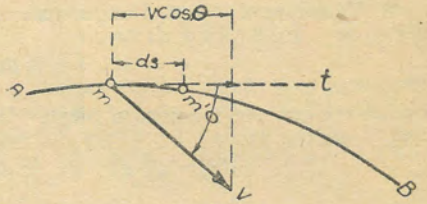
Для чугунных трубопроводов:

При диаметре $d = 50$ *мм*. $\lambda = 1\,348$ *м/сек*.
" $d = 100$ " $\lambda = 1\,289$ "
" $d = 150$ " $\lambda = 1\,255$ "
" $d = 600$ " $\lambda = 913$ "

А. Вихревое движение жидкости.

1. Общий вид движения жидкости представляет движение вихревое, при котором компоненты вихря по осям координат не равны нулю

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{258}$$



Черт. 111.

2. Исследование подобных вихревых движений базируется на введенном Томсоном понятии о циркуляции скорости по контуру. Циркуляцией скорости по контуру AB (черт. 111) называют по Томсону выражение:

$$I = \int_A^B v \cos\theta\, ds, \tag{259}$$

где θ — угол между направлением в точке m касательной к контуру mt и скоростью в той же точке v. Отнеся все к прямоугольной системе координат и обозначив углы между направлением касательной к контуру и осям координат через α_1, β_1, γ_1, а углы между направлением скорости и теми же осями через α_2, β_2, γ_2, имеем:

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2. \tag{260}$$

Заменяя в этом уравнении выражение углов через скорость и элементы дуг и их проекции на оси координат, получаем,

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{u}{v}\frac{dx}{ds} + \frac{v}{v}\frac{dy}{ds} + \frac{w}{v}\frac{dz}{ds} \\ V\cos\theta\, ds &= u\,dx + v\,dy + w\,dz \end{aligned}\right\} \tag{261}$$

Используя уравнение (261) для основной формулы циркуляции, получаем

$$I = \int_A^B (u\,dx + v\,dy + w\,dz). \tag{262}$$

3. При невихревом движении жидкости и однозначной функции потенциала скоростей циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру равна нулю, т. е. в случае безвихревого движения и наличия потенциальной функции скорости φ имеем:

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy + w\,dz.$$

Поэтому:

$$I = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A.$$

Если функция φ однозначна, а контур AB замкнут, то точка B совпадает с точкой A, а потому $\varphi_B = \varphi_A$. Отсюда следовательно:

$$I = \varphi_B - \varphi_A. \tag{263}$$

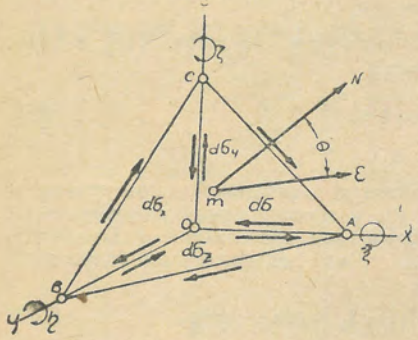
4. **Теорема Стокса.** Циркуляция по всякому бесконечно малому контуру $d\sigma$ равна:

$$i = 2\varepsilon\, d\sigma \cos\theta, \tag{264}$$

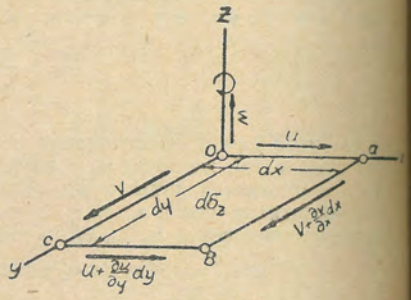
где $d\sigma$ представляет площадь (черт. 112), по которой происходит циркуляция, в частности:

$$d\sigma_z = dx\,dy; \quad d\sigma_y = dx\,dz; \quad d\sigma_x = dy\,dz,$$

что ясно по чертежу 113;

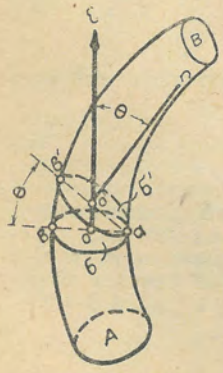


Черт. 112.



Черт. 113.

ε — полная угловая скорость вращения частиц;
θ — угол направления угловой скорости с нормалью к площадке $d\sigma$.



Черт. 114.

5. Циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру равняется произведению из площади, охватываемой контуром, на удвоенную проекцию угловой скорости вращения частицы на нормаль к площади:

$$I_{ABC} = 2d\sigma \cdot \varepsilon \cdot \cos\theta.$$

6. Если взять вихревую нить AB (черт. 114) с площадью поперечного сечения σ и нормальным направлением к этому сечению угловой скорости вращения ε, то циркуляция по произвольному контуру ab^n образующему с нормальным контуром ab угол θ и охватывающему площадь σ', с нормалью к ней 0^p_n, то по Стоксу имеем:

$$i_{ab'} = i_{ab} = 2\sigma\varepsilon, \tag{265}$$

т. е. циркуляция вокруг вихревой нити независима от вида замкнутого контура.

Произведение из угловой скорости ε на площадь поперечного сечения вихря называют по Гельмгольцу напряжением вихря; следовательно циркуляция вокруг вихревой нити равна двойному напряжению.

Напряжение вихря аналогично расходу жидкости через поперечное сечение вихревой нити.

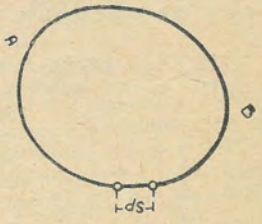
7. **Теорема Стокса для контура произвольных конечных размеров.** Циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру, приводимому в точку, не выходя из жидкости, равна удвоенной сумме напряжений всех вихревых нитей проходящих внутри контура:

$$I_{AB} = 2\sum \varepsilon\, d\sigma = 2\iint_s \varepsilon\, d\sigma. \tag{266}$$

8. **Теорема Томсона.** Если силы, действующие на жидкость, имеют потенциал и плотность ее есть функция давления, то циркуляция скорости по замкнутому контуру есть величина постоянная во все время ее движения, т. е. циркуляция по замкнутому контуру независима от времени, что ясно из уравнения (черт. 115):

$$\frac{dI_{AB}}{dt} = \int_{AB}\left(dU - \frac{dp}{\rho} + d\frac{V^2}{2}\right) =$$

$$\int_{AB}\left[U - \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right]. \tag{267}$$



Черт. 115.

Из теоремы Томсона следует: если в начальный момент движение жидкости было не вихревое, то оно должно остаться таким же и все время, и, наоборот, вихревое движение всегда остается вихревым.

9. **Принцип сохранения вихрей.** Принцип сохранения вихрей впервые был сформулирован Гельмгольцем в следующем ряде теорем:

Первая теорема Гельмгольца. Движение частицы жидкости слагается:

а) из поступательного движения со скоростью ее центра тяжести;

б) из движения с потенциалом скоростей или из движения деформации изменяющее вид частицы;

в) из движения простого вращения вокруг оси, проходящей через центр тяжести частиц с угловой скоростью ε, и проекциями ее на прямоугольные оси координат ξ, η и ζ (вихревое движение).

Вторая теорема Гельмгольца. Напряжение вихря вдоль всей вихревой нити остается постоянным:

$$\varepsilon\, d\sigma = \text{const.} \tag{268}$$

Следствием второй теоремы Гельмгольца является то, что вихревая нить не может оборваться внутри жидкости: она или замыкается сама на себе или лежит своими концами на границах жидкости.

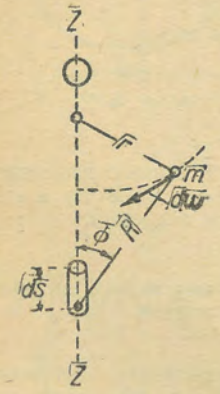
Третья теорема Гельмгольца. Вихревая нить всегда остается вихревой нитью.

Четвертая теорема Гельмгольца. Напряжение вихревой нити во все время движения остается постоянным.

Пользуясь приведенными четырьмя теоремами Гельмгольца, можно сформулировать принцип сохранения вихрей в следующей форме.

В идеальной жидкости жидкая масса, образующая вихревую нить, движется, оставаясь все время вихревой нитью, напряжение которой остается неизменным как во времени, так и по ее длине.

10. **Поле скоростей, вызываемое вихрями.** Если в жидкости, двигающейся с потенциалом скорости, имеются вихревые шнуры, то между вихрями движущейся жидкости существует взаимодействие, выражающееся в изменении под влиянием вихрей начальных скоростей течения. Это взаимодействие между вихрем и окружающей его жидкостью обусловливается тем, что каждый вихревой шнур создает вокруг себя в жидкости совершенно определенное поле скоростей.



Черт. 116.

11. Основной элементарный закон действия бесконечно малых элементов вихря выражается равенством:

$$dV = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{\sin\varphi\, ds}{R^2}, \tag{269}$$

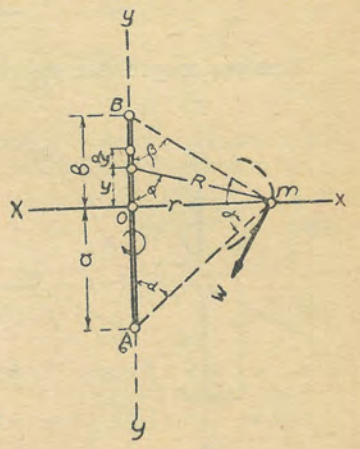
где ds — элемент вихря, вызывающий в точке m элементарную вращательную скорость dv;

$\frac{I}{4\pi}$ — напряжение вихря;

R — расстояние данной точки от элемента вихря; φ — угол между направлением элемента вихря, осью вращения z—z и прямой om, сдвигающей его с точки m (черт. 116).

Формула (269) аналогична формуле, выражающей в электродинамике закон Био-Савара, действия электрического тока, пробегающего по линейному проводнику z—z на магнитный полюс с количеством магнетизма равным — 1, помещенным в точке m.

12. **Действие конечного прямолинейного вихря.** Положим, имеем конечный прямолинейный вихрь AB (черт. 117), расположенный по оси y—y. Проводим ось $X-X$ по перпендикуляру om, опущенному из произвольно рассматриваемой точки m на ось $Y-Y$. Величина вращательной скорости, сообщаемая точке жидкости m конечным прямолинейным вихрем AB, выражается:



Черт. 117.

$$V = \frac{I}{4\pi r}(\cos\alpha + \cos\beta), \tag{270}$$

где обозначения ясны из чертежа.

Для бесконечно длинного прямолинейного вихря принимают: $\alpha = \beta = 0$, тогда получаем:

$$V = \frac{I}{2\pi r}. \tag{271}$$

Анализируя изменение скорости V при постоянном r и переменных углах α и β, т. е. при перемещении точки m параллельно направлению вихря, оказывается, что наибольшие окружные скорости при данном r получают точки, расположенные в плоскости экватора, по мере же удаления от этой плоскости скорости уменьшаются. Поэтому наиболее интенсивное отбрасывание частиц жидкости в конечном прямолинейном вихре происходит в его экваториальной плоскости, наименьшее — в плоскостях его концов. В соответствии с этим в середине конечного прямолинейного вихря имеем давление, пониженное по сравнению с его концами.

Б. Линия токов и вихрей в случае конечного прямолинейного вихря по данным проф. Миловича и Дмитровского.

Рассматривая конечный прямолинейный вихрь AB длиной $2a$ (черт. 118), примем его середину 0 за начало координат, а направление вихря — за ось $Z-Z$, тогда по уравнению (269) скорость V, сообщаемая им точке m, отстоящей от вихря на расстоянии z, будет равна:

$$V = \frac{I}{4\pi z}(\cos\alpha + \cos\beta). \tag{272}$$

Обозначая через u, v, w компоненты скорости V по осям координат и через θ угол между z и осью x, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{I_y}{4\pi(x^2+y^2)}\left[\frac{a+z}{\sqrt{x^2+y^2+(a+z)^2}} + \frac{a-z}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}}\right] \\ v &= \frac{I_x}{4\pi(x^2+y^2)}\left[\frac{a+z}{\sqrt{x^2+y^2+(a+z)^2}} + \frac{a-z}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{272a}$$

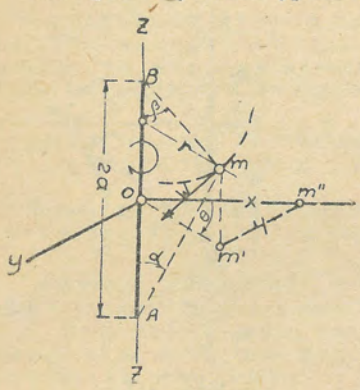
$$w = 0.$$

Пользуясь уравнениями (272), можно написать диференцильное уравнение линии токов:

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}. \tag{273}$$

Интеграл полученных уравнений дает:

$$z=C_1;\ x^2+y^2=r^2=C.$$



Черт. 118.

По полученному интегралу видно, что токи жидкости представляют собой окружности с центрами на оси $Z-Z$, лежащие в плоскости, к ней перпендикулярной.

Компоненты вихря на те же оси координат согласно выражениям их будут равны:

$$\left.\begin{aligned}2\xi&=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{J_x}{4\pi}[A-B]\\ 2\eta&=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{I_y}{4\pi}[A-B]\\ 2\zeta&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{I}{4\pi}[(a+z)A+(a-z)B],\end{aligned}\right\} \tag{274}$$

где

$$A=\frac{1}{\sqrt{[x^2+y^2+(a+z)^2]^3}}$$

и

$$B=\frac{1}{\sqrt{[x^2+y^2+(a-z)^2]^3}}.$$

Компоненты вихря, представленные уравнениями (274) показывают, что движение, вызываемое в жидкости прямолинейным вихрем, есть движение вихревое.

Диференциальное уравнение линии вихрей

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dz}{\zeta}$$

приводятся к уравнениям:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

и

$$\zeta\,dx-\zeta\,dz=0. \tag{275}$$

Первое уравнение дает:

$$y=Cx, \tag{276}$$

т. е. линии вихрей представляют плоские кривые, лежащие в плоскостях, проведенных через вихрь или ось $z-z$,

Интегрирование второго уравнения по Clebsch'у дает:

$$\frac{a+z}{\sqrt{x^2+y^2+(a+z)^2}}+\frac{a-z}{\sqrt{x^2+y^2+(a-z)^2}}=C_1, \tag{277}$$

или, принимая во внимание уравнение (272), получаем:

$$\cos\alpha+\cos\beta=C_1. \tag{278}$$

Учитывая уравнение (270) для окружной скорости частиц жидкости для точек вихревой нити, согласно выражению (278) будем иметь окружные скорости равными:

$$V=\frac{C_1 I}{4\pi r}, \tag{279}$$

или

$$Vr=\frac{C_1 I}{4\pi}=\text{const}, \tag{280}$$

т. е. для всех точек каждой вихревой линии имеет место закон площадей, но постоянное этого закона переменно для вихревых линий различных систем, различных значений C_1.

РАЗДЕЛ IX.

ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД.

1. Скважность и гранулометрические показатели грунта.

Грунтовые воды размещаются и движутся в порах грунта, обволакивая или обтекая его частицы. Поэтому при расчете движения грунтовых вод надо знать скважность грунта, т. е. суммарный объем пор, заключенных в 1 $см^3$ внешнего объема грунта, и характеристику размеров и форм отдельных пор. Скважность грунта равна:

$$p=1-\frac{\alpha}{\beta}, \tag{1}$$

где α — объемный вес грунта, т. е. отношение веса 1 $см^3$ внешнего объема грунта, взятого в абсолютно сухом состоянии, к весу 1 $см^3$ воды;
β — действительный удельный вес грунта, т. е. удельный вес зерен грунта.

Скважность грунта зависит от внешнего давления (p_∂). Согласно опытам Терцаги эта зависимость представляется логарифмическими кривыми. Для практических целей при $p_\partial < 50$ $кг/см^2$ можно пользоваться прямолинейной зависимостью вместо установленной криволинейной.

В соответствии с этим скважность определяется по формуле:

$$p=A-a\,p_\partial,$$

где

$$a=-\frac{p'-p''}{p_\partial'-p_\partial''}\ см^2/кг,$$

$$A=p''+a\,p_\partial''=p'+a\,p_\partial'=p+a\,p_\partial=\text{const}\,t$$

при этом значки (′) и (″) относятся к двум необходимым для практических расчетов предельным состояниям, т. е. скважность p' соответствует давлению p'_{∂} и т. д.

Отдельные поры даже одного и того же грунта чрезвычайно разнообразны по своим размерам и форме, точное определение которых весьма трудно. Поэтому для характеристики водных свойств грунта предпочитают оперировать с размерами и формой не пор, а частиц грунта.

Так как каждый природный грунт есть сложная смесь частиц весьма различных размеров и форм, то для характеристики его частиц или зерен грунт прежде всего разбивают методами механического (или гранулометрического) анализа на ряд фракций, т. е. ряд смесей меньшего и строго определенного диапазона. Непосредственные результаты гранулометрического анализа характеризуют грунт лишь качественно, и поэтому для вычислительных операций определяется по его данным тот или иной гранулометрический показатель (коих предложено несколько), выражающийся одним числом.

Если некоторый воображаемый грунт, состоящий из одинаковых шариков диаметра d, обладает такой же водопроводимостью, как и конкретно данный грунт, то d называется эквивалентным диаметром зерна для данного грунта.

а). По Хазену эквивалентный или эффективный диаметр грунта d_{ϑ} определяется из условия, что общий вес всех зерен грунта, объем коих меньше $\frac{\pi d_{10}^3}{6}$ для каждого зерна, составляет 10% веса всего грунта. Хазен вычисляет также другой характерный диаметр d_{60} из условия, что общий вес всех зерен грунта, объем коих меньше $\frac{\pi d_{60}}{6}$ для каждого зерна, составляет 60% веса всего грунта. Частное от деления d_{60} на d_{10}, т. е.:

$$e = \frac{d_{60}}{d_{10}},$$

Хазен называет коэфициентом однородности грунта.

б) Козени определяет эквивалентный или активный диаметр d_w грунта из равенства:

$$d_w = \frac{\sum_1^n g_k}{\sum_2^n \left[\frac{g_k}{2}\left(\frac{1}{d_{k+1}} + \frac{1}{d_k}\right)\right] + \frac{3}{2}\frac{g_1}{d_1}}, \qquad (2)$$

где n — число фракций, полученных при анализе;

g_k — вес фракции порядка k;

d_{k+1} и d_k — диаметры наибольшего и наименьшего зерен во фракции порядка k;

d_1 — диаметр наибольшего коллоидального зерна, $d_1 = 0{,}0025$ *мм*;

g_1 — вес фракции от d_1 до 0.

в) Замарин определяет эквивалентный или действующий диаметр d_z из равенства:

$$d_z = \frac{\sum_1^n g_k}{\sum_2^n \left[\frac{g_k}{d_{k+1} - d_k} ln \frac{d_{k+1}}{d_k}\right] + \frac{3}{2}\frac{g_1}{d_1}}, \qquad (3)$$

где значения букв те же, что и в формуле (2) Козени.

г) Крюгер оперирует с величиной суммарной поверхности θ всех зерен, заключенных в 1 $см^3$ внешнего объема грунта, имеющего скважность p. Значение θ по Крюгеру равно:

$$\theta = 6(1-p)\sum_1^n \frac{2g_k}{d_{k+1} + d_k} см^2. \qquad (4)$$

Значения букв здесь те же, что и в выражениях (2) и (3), d_{k+1} и d_k берутся в сантиметрах.

д) Цункер ввел понятие удельной поверхности грунта U, определяя ее как отношение суммарной поверхности зерен данного грунта к суммарной поверхности грунта, состоящего из одинаковых шариков диаметром в 1 *мм*. Числовое значение U определяется из равенства:

$$U = \sum_1^n 1{,}4426\,\frac{2^y - 2^x}{y - x}\,g_k, \qquad (5а)$$

где g_k — вес фракции порядка k,

$$2^y = \frac{1}{d_{k+1}},\quad 2^x = \frac{1}{d_k},$$

где d_{k+1} и d_k суть диаметры наибольшего и наименьшего зерен во фракции порядка k, выраженные в миллиметрах. Второе числовое выражение удельной поверхности, непосредственно следующее из ее определения:

$$U = 0{,}2\sum_1^n \frac{g_k}{d_{k+1} + d_k} = \frac{\theta}{60(1-p)}, \qquad (5б)$$

где d_{k+1} и d_k берутся в сантиметрах.

е) Митчерлих определяет суммарную поверхность грунта, включая сюда и поры внутри зерен, из формулы:

$$\theta_0 = \frac{W_H}{100}\cdot\frac{1}{0{,}000\,000\,25}\,см^2 = 4W_H\,м^2, \qquad (6)$$

где W_H — максимальное количество гигроскопически-связанной воды, выраженное в процентах к абсолютно-сухому весу грунта.

θ_0 — суммарная поверхность пор наружных и внутренних по отношению зерен, заключенных во внешнем объеме грунта, весящем 1 г в абсолютно-сухом состоянии. Вообще говоря $\theta_0 > \theta$.

ж) По Лебедеву суммарная поверхность грунта пропорциональна разности между количеством воды W_m, соответствующим наибольшей молекулярной влагоемкости, и количеством воды W_H, соответствующим наибольшей гигроскопической влагоемкости. Поэтому отношение сумм поверхностей θ_1 и θ_2 двух грунтов равно:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{W'_m - W'_H}{W''_m - W''_H}. \qquad (7)$$

Пример. Песок имеет объемный вес 1,76, удельный вес зерен = 2,67 и следующий гранулометрический состав:

Таблица 113.

Фракции в процентах от абсолютно-сухого веса пробы						
1—0,25	0,25—0,10	0,10—0,05	0,05—0,01	0,01—0,005	0,005—0,0025	0,0025
в миллиметрах						
40,70	51,32	3,08	2,27	1,315	0,6575	0,6575

Определим скважность и гранулометрические показатели.
Скважность

$$p = 1 - \frac{1{,}76}{2{,}67} = 0{,}34.$$

1. По Хазену:

$$d_{10} = 0{,}10 + (0{,}25 - 0{,}10) \cdot \frac{20 - 0{,}6575 - 0{,}6575 - 1{,}315 - 2{,}27 - 3{,}08}{51{,}32}; \quad d_{10} = 0{,}1052\ мм$$

$$d_{60} = 0{,}25 + (1 - 0{,}25) \cdot \frac{60 - 0{,}6575 - 0{,}6575 - 2{,}27 - 3{,}08 - 51{,}32}{40{,}70}; \quad d_{60} = 0{,}2629\ мм$$

Коэфициент однородности

$$e = \frac{d_{60}}{d_{10}} = \frac{0{,}2629}{0{,}1059} = 2{,}48.$$

При вычислении d_{10} и d_{60} применена линейная интерполяция внутри фракции.

Значения d_{10} и d_{60} можно определить также и по кривой распределения гранулометрического состава грунта, у которой абсциссами служат диаметры частиц d_k, а ординатами для каждой данной абсциссы d_k весовое содержание частиц с диаметром меньше d_k. Получившиеся при отложении точки соединяются плавной кривой.

2. По Козени:

$$d_w = 100 : \left[\frac{40{,}70}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{0{,}25}\right) + \frac{51{,}32}{2}\left(\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{0{,}1}\right) + \frac{3{,}08}{2}\left(\frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}05}\right) + \frac{2{,}27}{2}\left(\frac{1}{0{,}05} + \frac{1}{0{,}01}\right) + \frac{1{,}315}{2}\left(\frac{1}{0{,}01} + \frac{1}{0{,}005}\right) + \frac{0{,}6575}{2}\left(\frac{1}{0{,}005} + \frac{1}{0{,}0025}\right) + \frac{3 \cdot 0{,}6575}{2 \cdot 0{,}0025}\right] = 0{,}0698\ мм.$$

3. По Замарину:

$$d_z = 100 : \left[\frac{40{,}70}{1 - 0{,}25} \ln\frac{1}{0{,}25} + \frac{51{,}32}{0{,}25 - 0{,}1} \ln\frac{0{,}25}{0{,}1} + \frac{3{,}08}{0{,}1 - 0{,}05} \ln\frac{1}{0{,}05} + \frac{2{,}27}{0{,}05 - 0{,}01} \ln\frac{0{,}05}{0{,}01} + \frac{1{,}315}{0{,}01 - 0{,}005} \ln\frac{0{,}01}{0{,}005} + \frac{0{,}6575}{0{,}005 - 0{,}0025} \ln\frac{0{,}005}{0{,}0025} + \frac{3 \cdot 0{,}6575}{2 \cdot 0{,}0025}\right] = 0{,}078\ мм$$

4. Суммарная поверхность грунта по Крюгеру:

$$\theta = \frac{6(1 - 0{,}34) \cdot 2}{100}\left[\frac{40{,}70}{0{,}1 + 0{,}025} + \frac{51{,}32}{0{,}025 + 0{,}01} + \frac{3{,}08}{0{,}01 + 0{,}005} + \frac{2{,}27}{0{,}005 + 0{,}001} + \frac{1{,}315}{0{,}001 + 0{,}0005} + \frac{0{,}6575}{0{,}0005 + 0{,}00025} + \frac{0{,}6575}{0{,}00025}\right] = 535{,}39\ см^2$$

5. Удельная поверхность по Цункеру (уравнение 5б):

$$U = 0{,}2\left[\frac{0{,}4070}{0{,}1 + 0{,}025} + \frac{0{,}5132}{0{,}025 + 0{,}01} + \frac{0{,}0308}{0{,}01 + 0{,}005} + \frac{0{,}0227}{0{,}005 + 0{,}001} + \frac{0{,}01315}{0{,}001 + 0{,}0005} + \frac{0{,}006575}{0{,}0005 + 0{,}00025} + \frac{0{,}006575}{0{,}00025}\right] = 13{,}52.$$

Грунты и почвы подвергаются воздействию факторов выветривания биологических процессов и т. д., и поэтому их гранулометрический состав во времени непостоянен. При проектировании сооружений длительного срока службы следует учесть это обстоятельство.

Формы поперечного сечения пор весьма разнообразны, но при суждении о движении грунтовых вод их в первом приближении приводят к одной из четырех простейших форм и влияние этой формы на водопроводимость грунта учитывают „коэфициентом формы" C. Он равен:

для круга $C = 0{,}50$
„ квадрата $C = 0{,}5619$
„ равностороннего треугольника $C = 0{,}5974$
„ полосы $C = \frac{2}{3} = 0{,}6667$.

2. Различные степени влажности грунта и виды движения грунтовых вод (движение воды в трещинах здесь не рассматривается).

Поперечный размер поры в грунте колеблется от нескольких (2 — 3) сантиметров до малых долей микрона и как правило выражается малыми долями миллиметра; отсюда поперечный размер элементарной струйки грунтового потока весьма мал по сравнению с размером надземных потоков. Поэтому если в движении надземного потока доминирующую роль играет сила тяжести, а роль молекулярного сцепления и поверхностного натяжения по сравнению с ней незначительна, то в грунтовом потоке эффект последних двух сил не только сравним с эффектом силы тяжести, но в отдельных случаях совершенно его заслоняет; относительное значение трения воды о русло и внутри самой воды в грунтовом потоке также несравненно больше, чем в открытом потоке. Соотношение эффективности силы тяжести и эффективности прочих сил при различных размерах пор и различной степени заполнения пор водой неодинаково, колеблясь в огромных пределах, почему и движение грунтовых вод принимает формы принципиально различные. Существует пять состояний увлажнения грунта, при превышении коих следует изменение формы движения воды.

а) В абсолютно-сухом грунте на частицах грунта и между ними капельно-жидкой воды совершенно нет; вода здесь может находиться и двигаться только парообразная.

б) При полном гигроскопическом увлажнении вся поверхность грунтовых частиц равномерно покрыта слоем 10 молекул H_2O (по Митчерлиху и Эренбергу), т. е. водной пленкой толщиной около 2,5 миллимикрона. Между указанными первым и вторым состояниями имеется бесконечное

множество переходных, когда конденсирующаяся на поверхности грунтовых частиц вода оседает в виде мозаики, постепенно уплотняющейся, и затем сплошной пленкой, постепенно утолщающейся до 2,5 миллимикрона. Количество воды, соответствующее полному гигроскопическому увлажнению грунтов, пропорционально суммарной поверхности их пор, и поэтому численное его значение для разных грунтов неодинаково. Грубой придержкой при определении этого количества может служить следующая таблица, где гигроскопическая вода выражена в процентах от веса абсолютно-сухого грунта (почвы):

Тонкий третичный песок 0,03
Чистый кварцевый „ 0,12
Песчаные почвы 0,9 — 1,23
Суглинистые пески 1,3 — 1,71
Песчанистые суглинки 1,62—,64
Мягкий суглинок 3,0
Жирный суглинок 4,12—6,54
Глина 5,87
Жирная глина 14
Весьма жирная глина 23,81
Каолин 5—25

Гуммозный песок 1,8
Песок, богатый гумусом 4,2
Лёсс украинский 7,61
Садовая земля 7,69—9,91
Торф 17
Торф глубокого болота 18,42
„ верхового „ 21,7
Гумус 25—50

Пока полное гигроскопическое увлажнение не достигнуто, относительная влажность воздуха в порах не может быть более 100%, когда же оно достигнуто или перейдено, относительная влажность воздуха в порах не бывает меньше 100%.

в) При дальнейшем увеличении влажности грунт достигает полного молекулярного увлажнения (или максимальной смачиваемости), когда грунтовые частицы покрыты водной пленкой, равной радиусу сферы действия молекулярных сил частиц грунта, т. е. толщиной от 6 до 56 миллимикронов. Вода этой пленки удерживается молекулярными силами грунтовых частиц чрезвычайно крепко и не отрывается от частиц центробежной силой с ускорением даже 70 000g, где g — ускорение силы тяжести.

Для очень приблизительного суждения о количестве воды (в процентах от веса абсолютно-сухого грунта) в грунте при полном молекулярном его увлажнении могут служить следующие отдельные определения:

Таблица 114.

Естественные почвогрунты	Пленочная вода к абсолютно сухому весу почвы	Искусственные грунтовые фракции	Пленочная вода к абсолютно сухому весу почвы
Крупный песок	1,68—210	Крупный песок от 1 до 0,5 *мм*	1,57
Мелкий „	2,6—300	Средний песок „ 0,5 „ 0,25 „	1,60
Черноземный песок	7,69	Мелкий песок „ 0,25 до 0,1 „	2,73
Подзол	7,7	Очень мелкий песок от 0,1 до 0,05 *мм*	4,75
Суглинок	11,7—18,5	Пыль от 0,05 до 0,005 *мм*	10,18
Глина	30,4—38,7	Глина от 0,05 до 0 *мм*	44,85
Суглинистый чернозем	15	—	—
Чернозем	29	—	—

Черт. 119 схематически поясняет понятия вышеупомянутых степеней влажности.

г) Капиллярная вода находится в порах вне сферы действия молекулярных сил частиц грунта, удерживаясь силой поверхностного натяжения мениска. Различают три стадии накопления капиллярной воды:

пендулярная вода держится только у точек соприкосновения частиц грунта, и ее отдельные участки разобщены между собой;

фуникулярная вода везде по поверхности пор сомкнута, но в середине больших пор есть еще пузырьки воздуха;

собственно-капиллярная вода заполняет полностью все поры капиллярного порядка (черт. 120).

Так как сила капиллярного поднятия обратно пропорциональна радиусу трубки, то вода может капиллярно подниматься и удерживаться не во всех порах грунта, а лишь в соответственно узких. Поэтому наибольшее количество воды капиллярно удерживаемое грунтом, зависит от скважности и крупнозернистости последнего и высоты капиллярного поднятия, колеблясь вообще в больших пределах. В капиллярной воде гидростатическое давление уже передается.

д) Гравитационная вода, являющаяся избыточной по сравнению с капиллярной насыщенностью, наполняет поры и более широкие, чем капиллярные, и в предельном случае (абсолютная влагоемкость или абсолютное насыщение грунта водой) заполняет их все целиком. Однако обычно между абсолютной влагоемкостью и скважностью грунта наблюдается разница, обусловливаемая наличием в порах запертых водой пузырьков воздуха.

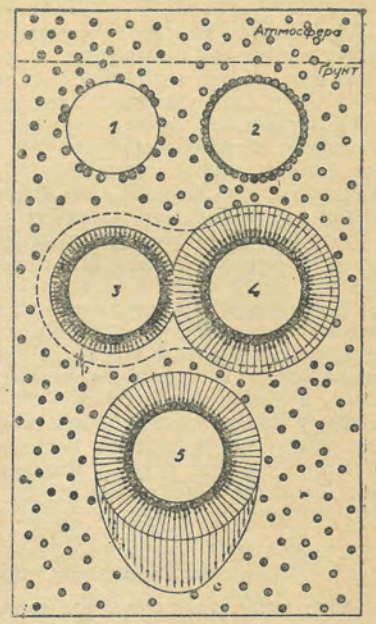
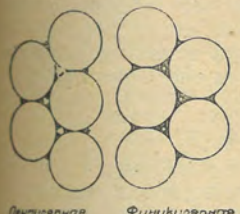


Схема различных состояний воды в почве по Лебедеву.

Черт. 119.

3. Движение парообразной воды в грунте.

Движение парообразной воды возможно в грунте при всякой влажности (за исключением случаев совершенного заполнения пор водой); при влажности же меньшей, чем гигроскопическая насыщенность, это — единственно возможная форма движения воды в грунте. Парообразная вода передвигается от мест с большей упругостью пара к местам с меньшей его упругостью; упругость же вообще зависит от влажности грунта, температуры, концентрации раствора в грунтовой воде, поверхностного натяжения и т. д Приведем примеры:



Состояние капиллярной воды по Митчерлиху

Черт. 120.

а) Влажность грунта везде больше гигроскопической насыщенности, но температура разных слоев неодинакова (например в верхнем слое после летнего дождя), и пары воды идут из более теплого слоя в более холодный.

б) Температура слоев грунта одинакова, но влажность одного слоя больше гигроскопической насыщенности, а другого — меньше; пары воды переходят из первого слоя во второй.

в) Температура слоев грунта одинакова, влажность их не достигла гигроскопической насыщенности, но все же один слой влажнее другого; пары воды переходят из первого слоя во второй.

г) Один слой увлажнен больше гигроскопической насыщенности, другой — меньше ее; температура их неодинакова. Направление движения определяется градиентом упругости, обусловливаемым и степенью влажности и температурой слоев. При $t_1 > t_2$ пары идут от первого слоя во второй; при $t_1 < t_2$ возможно движение и из первого слоя во второй, и из второго в первый, или же движение отсутствует.

Количество парообразно движущейся воды пропорционально градиенту давления паров в разных слоях и величине конденсирующей поверхности и в отдельных случаях может быть очень значительным.

Когда упругость паров воды в грунте меньше таковой же в атмосфере (что возможно до гигроскопической насыщенности грунта), пары воды входят из атмосферы в грунт и конденсируются в нем. Подобное увлажнение найдено в Одессе эквивалентным 60—100 *мм* атмосферных осадков в год, в Астраханской степи — 70—90 *мм*, у Владивостока — более 126 *мм* в год, у Волховстроя — 27 *мм* за август, сентябрь и октябрь; наличие его констатировано в Херсоне, Гоше на Амуре, в Каракумской степи, у Чарджуя и т. д. Когда грунт гигроскопически насыщен, относительная влажность воздуха в нем равна 100 %, и переход паров воды из атмосферы в грунт становится невозможным.

4. Пленочное движение грунтовой воды.

Оно возможно только при влажности грунта большей, чем гигроскопическая насыщенность, и меньшей, чем молекулярная насыщенность, совершается силами молекулярного притяжения частиц грунта и идет от мест с более толстой молекулярной пленкой к местам с менее толстой пленкой. Влияние силы тяжести здесь совершенно ничтожно. Скорость пленочного движения тем больше, чем разнороднее по гранулометрическому составу слои, где движение совершается; вообще она меньше скорости движения гравитационной воды. Так как молекулярная насыщенность, при достижении которой пленочное движение прекращается, наступает в отдельных случаях (тяжелые глины) при влажности 45 % от веса абсолютно-сухого грунта, то в этих грунтах пленочным движением могут переместиться огромные массы воды. Измерений расхода воды при пленочном движении известно мало. Однако, в мелиоративных операциях оно очень важно.

5. Капиллярное поднятие воды в грунте.

Оно может происходить только при увлажнении, превосходящем полную молекулярную влагоемкость грунта, которая однако может выполняться и в самом процессе капиллярного поднятия, предваряя капиллярный ток на весьма короткий промежуток времени. Капиллярное поднятие совершается силой поверхностного натяжения, которой противодействуют вес поднимаемой воды, трение ее о поверхность пор и вязкость воды. Предельная высота капиллярного поднятия воды в цилиндрическом капилляре равна:

$$H = \frac{4\sigma}{\gamma g} \cdot \frac{1}{d} \text{ см}, \qquad (8)$$

где γ — вес 1 $см^3$ воды;
g — ускорение силы тяжести, $g = 981$ $см/сек^2$;
d — диаметр капилляра в сантиметрах;

σ — поверхностное натяжение воды в *дин/см*, зависящее от температуры, концентрации раствора солей, примеси масел.

Учитывая, что дина $= \frac{\text{грамм}}{981} = 0{,}00102$ *г*, имеем:

При T° C =	0	5	10	15	20	25	30	35	40	
σ =	76,9	76,3	75,0	74,8	74,0	73,3	72,5	71,6	70,9	*мг/см.*

Значение σ растет приблизительно пропорционально числу эквивалентов соли (например NaCl, Na_2SO_4, Na_2NO_3 и др.), растворенных в 100 эквивалентах воды. Иначе эта зависимость выражается уравнением: $\sigma = \sigma_a (1 + Am + Bm^2 + Ci)$, где σ_o относится к чистой воде, σ — к раствору концентрации m, i — степень электролитической диссоциации, A, B и C постоянные для данной соли.

Присутствие даже малых количеств воска, жирных масел и других, не смешивающихся с водой веществ сильно понижает значение σ.

В очень узких капиллярах, диаметр которых меньше 0,1 микрона, значение σ значительно больше нормального. При 10° C в цилиндрическом стеклянном капилляре для чистой воды приблизительно $H = \frac{0{,}3}{d}$ *см*. В грунте вместо простых цилиндрических капилляров имеется сложная сеть соединенных между собой пустот, весьма разнообразных по размерам и форме. Поэтому грунтовые капилляры схематически представляются в виде пучка идущих снизу вверх пустотных цепочек, каждая из коих изогнута в разные стороны и имеет разные поперечные сечения. Высота поднятия, будучи обратно пропорциональна диаметру капилляра, в широких трубках меньше, в узких больше. Поэтому чем выше слой над свободным зеркалом воды, тем в меньшем количестве пор имеется вода; чем выше слой грунтового столба, касающегося нижней своей поверхностью зеркала воды, тем меньше влажность этого слоя, постепенно переходящая от полного насыщения грунта водой внизу до максимального пленочного увлажнения вверху.

Наибольшая высота капиллярного поднятия в зернистых грунтах по Козени равна:

$$H = 6 \frac{p}{1-p} \frac{\sigma}{\rho g d_w} \text{ см}, \qquad (9)$$

где σ — поверхностное натяжение в *дин/см*;
$g = 981$ $см/сек^2$;
ρ — плотность воды;
p — скважность грунта;
d_w — активный диаметр грунта в сантиметрах.

При 10° C чистой воды и обычных размерах и форме пор $\sigma = 75{,}5$ *мг/см*; $\rho = 1$ и $H = 0{,}453 \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \frac{1}{d_w}$ *см*. Скорость поднятия $v = \frac{h}{t}$ и зависимость между высотой поднятия h (в сантиметрах) и потребным промежутком времени t (в сек.) по Козени выражаются уравнением:

$$t + \frac{1}{a}\left(e^{-at} - 1\right) = 2\frac{a}{b} H \left(h - H \ln \frac{H}{H-h}\right), \qquad (10)$$

или:

$$t + \frac{k}{g}\left(e^{-\frac{g}{k}t} - 1\right) = \frac{1}{k}\left(H \ln \frac{H}{H-h} - h\right), \qquad (10a)$$

где H — высота поднятия воды в сантиметрах по истечении времени $t = \infty$

$$a = \frac{120\,\mu\,g\,(1-p)^2}{d_w^2\,p^3} = \frac{g}{k};$$

$$b = -12\,\frac{1-p}{p}\,\frac{\sigma}{\rho d_w} = -2gH;$$

$e = 2{,}718282\ldots$ = основание натуральных логарифмов, μ — коэфициент вязкости воды по Пуазейлю при $T°$ С

$$\mu = \frac{0{,}0178\ \rho}{1+0{,}0337\ T+0{,}000221\ T^2},$$

или при обычных в строительстве температурах

$$\mu = \frac{0{,}00001814}{1+0{,}0337\ T+0{,}000221\ T^2}\ \frac{гр.\ сек.}{см^2},$$

κ — коэфициент фильтрации грунта в сантиметрах в секунду;
ρ — плотность воды при данной температуре.
Значение

$$\frac{1}{a} = \frac{\kappa}{g} \text{ и } e^{-at} = e^{-\frac{g}{k}t}$$

малы и при $t > 0{,}5$ сек. в приближенных расчетах ими можно пренебречь Тогда получим:

$$t = \frac{1}{\kappa}\left(H \ln \frac{H}{H-h} - h\right), \qquad (10б)$$

или:

$$t = \frac{1}{k}\left(2{,}3\ H \lg \frac{H}{H-h} - h\right). \qquad (10с)$$

Формула (9) хорошо согласуется с результатами опытов Аттерберга, Вольни и Людеке, где брался очень однородный песок, точнее — его отдельные фракции:

Таблица 115.

Диаметр частиц грунта в сантиметрах	d_w см	Скважность p	Наибольшая высота поднятия воды H в сантиметрах	
			По формуле (9)	По опыту
0,5—0,2	0,3050	0,404	2,18	2,5
0,2—0,1	0,1390	0,404	4,74	5,9—6,5
0,1—0,05	0,0690	0,418	8,97	10,0—13,0
0,05—0,025	0,0350	0,405	18,7	18,1—26
0,05—0,02	0,0310	0,405	21,1	24,6
0,02—0,01	0,0140	0,404	44,07	42,8
0,01—0,005	0,0069	0,410	92,3	80—105,5
0,005—0,002	0,0031	0,410	205,5	200

Приложимость формул (9) и (10) к природным грунтам проверена мало. По опытам Черкасова при капиллярном поднятии воды в природном песке с зернами от 1 *мм* до 0 и активным диаметром $d_w = 0{,}01528$ *см* получена табл. 116.

Длительность поднятия по формуле (10) сильно расходится с опытом; поднятие воды до высоты близкой к предельной H в опыте произошло в срок, гораздо больший вычисленного по формуле (10).

Таблица 116

Скважность ρ	В сантиметрах	
	По формуле (9)	По опыту
0,347	55,05	53,0
0,366	50,67	50,5
0,384	46,92	45,0
0,440	37,24	32,9

6. Общие положения о движении гравитационной воды.

Гравитационная вода в грунте, находящаяся вне сферы молекулярных сил частиц грунта и не удерживаемая силой поверхностного натяжения, движется под доминирующим влиянием силы тяжести, испытывая сопротивления трения о молекулярную пленку, внутреннее трение в силу вязкости и особые сопротивления при обтекании частиц.

Размещение, форма и размеры пор столь разнообразны, что вывести уравнения движения элементарной струйки нельзя. Уравнения движения гравитационного потока выводятся при наличии ряда упрощающих допущений предложенных акад. Павловским.

а. Вследствие случайности и беспорядочности в размещении, величине и форме отдельных частиц и пор грунта вода в любой точке грунта может двигаться в любом направлении.

б. В области грунтового потока, достаточно большой по сравнению с величиной отдельных частиц и пор, различаются главное направление течения и местные течения при обтекании отдельных частиц грунта.

в. Главное течение идет в сети пор и фильтрационных трубках между частицами грунта и участками почти неподвижной („мертвой") воды, каковая передает гидростатическое давление от одной фильтрационной трубки к другой, создавая из отдельных струек единый поток.

г. В силу беспорядочности и многообразия местных течений влиянием сил инерции и сил сопротивления при фильтрации на расход потока и распределение давления в общей массе воды можно пренебречь.

д. Поверхности равного напора при учете местных течений представляют бесчисленное множество местных неправильностей, но в общем остаются непрерывными.

В зависимости от крупнозернистости грунта, величины гидравлического градиента и других условий движение гравитационной воды в грунте может быть равномерным — ламинарным и турбулентным—и неравномерным.

7. Равномерное ламинарное движение.

Для равномерно-ламинарного движения воды в однородном грунте при постоянстве пор и игнорировании сжимаемости воды имеют место уравнения

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{g}{k}u \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{g}{k}v \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{g}{k}w
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где ρ — плотность воды, g — ускорение силы тяжести, p — давление в точке (x, y, z); u, v и w — составляющие скорости по осям ox, oy и oz, причем ось oy направлена вертикально вниз; $k = f(t, x, y, z)$ — коэфициент фильтрации грунта.

Пренебрегая в уравнениях (11) членами, выражающими влияние сил инерции, можно их написать в виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= -k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho g}\right) \\ v &= k - k\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho g}\right) \\ w &= -k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho g}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (11а)$$

Если вес единицы объема воды постоянен, $\rho g = \gamma = \text{const}$, и если обозначим пьезометрическую высоту через $h_p = \frac{p}{\gamma}$ и пьезометрический напор, отсчитываемый от плоскости $y = 0$, через $h = h_p - y = \frac{p}{\gamma} - y$, то из уравнений (11а), имеем:

$$\left.\begin{aligned} u &= -k\frac{\partial h}{\partial x} \\ v &= -k\frac{\partial h}{\partial y} \\ w &= -k\frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (11б)$$

Условие неразрывности потока:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

после постановки в него значений u, v и w из (11б) обращается в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0. \qquad (12)$$

Для определенности решения должны быть известны пограничные условия, которые могут быть разными.

Пограничных условий у неподвижной стенки — два.

Первое — кинематическое — выражается уравнением:

$$\frac{dh}{dn} = 0, \qquad (13)$$

т. е. производная от h по нормали к стене равна нулю; иначе, скорость по направлению нормали к стенке у самой стенки равна нулю.

Второе — динамическое: давление нормально к стенке.

Пограничных условий у свободной поверхности также два:

$$\frac{dh}{dn} = 0 \text{ и } p = p_{\text{внеш.}} \qquad (14)$$

причем в обычной практике p внешнее равно атмосферному.

Наконец для тех частей граничной поверхности, где происходит притекание или истечение воды (например для колодцев, гидротехнических сооружений и т. д.), будет пограничное условие:

$$h = h_s, \qquad (15)$$

где h_s — пьезометрический напор для каждой из таких частей.

Решение основных уравнений (11), (12) и (13) приводит к интегрированию уравнения Лапласа при заданных пограничных условиях.

Если $k = \text{const}$ и напор h в направлениях OX и OZ не меняется, то уравнение (11б) превращается в уравнение Дарси:

$$v = -k\frac{\partial h}{\partial y} = -ki, \qquad (16)$$

по которому скорость фильтрации прямо пропорциональна пьезометрическому градиенту или уклону, причем под v разумеется объем воды, протекающей в 1 секунду через единицу площади поперечного сечения слоя грунта, которое проведено нормально к линиям тока, и его площадь включает в себя площадь сечения не только пор, но и зерен грунта, охватываемых потоком.

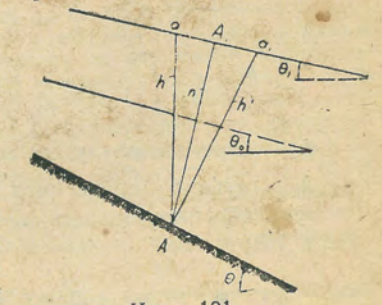
Далее, в уравнении (16): $\frac{dh}{dy} = i = \frac{h}{l}$,

где h — разность напора в двух точках потока, взятых по его направлению;

l — расстояние между этими точками или длина фильтрационного пути.

8. Неравномерное ламинарное движение грунтовой воды.

Если площадь живого сечения грунтового потока по его длине увеличивается или уменьшается и скорость в различных точках неодинакова, движение становится неравномерным и уравнением (16) непосредственно не определяется.



Черт. 121.

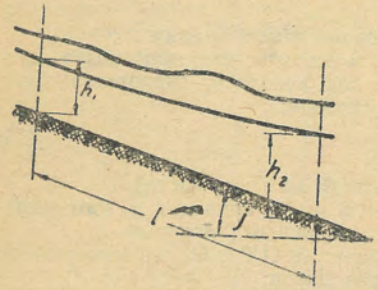
Деформация потока может быть слабая, когда линии тока идут под очень малыми углами одна к другой и на коротком расстоянии приблизительно параллельны, и резкая, когда линии тока расходятся весьма сильно.

При слабой деформации потока возможны упрощенные решения Павловского с приемлемой для практики точностью. Поперечным сечением потока служит поверхность, нормальная к линиям тока: при равномерном движении — плоскость, при неравномерном — криволинейная поверхность. Если линии тока изогнуты мало, то глубиной потока служит слабо искривленная линия AA длиной n (черт. 121), нормальная к средней линии потока. Для упрощения вместо n

можно взять или длину h вертикали Aa или длину h_1 линии Aa_1 нормальной к дну.

Ошибка при этих допущениях характеризуется отношениями

$$\frac{h}{n} \text{ и } \frac{h_1}{n},$$



Черт. 122.

которые равны:

$$\left.\begin{aligned}\frac{h}{n} &= \frac{\cos(\theta_0-\theta_1)}{\cos\theta_1}\\ \frac{h_1}{n} &= \frac{\cos(\theta_1-\theta_0)}{\cos(\theta-\theta_1)}\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

При значениях:

$$0 < \theta - \theta_1 < 25°,$$
$$0 < \theta_1 < 20°,$$

ошибка от замены n через h и h_1 не выше 5%.

Оперируя с величинами h и h_1, получаем диференциальные уравнения для слабо деформированного ламинарного движения:

$$\left.\begin{aligned}q &= kh_1\frac{dH}{ds}\\ q &= kh\frac{dH}{ds}\end{aligned}\right\}, \quad (18)$$

где H — напор в рассматриваемой точке.

При прямом уклоне подстилающего водонепроницаемого слоя $j > 0$, из формул (18) имеем (черт. 122):

при $\eta > 0$

$$\frac{lj}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 + 1n\frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}, \quad (19)$$

при $\eta < 1$

$$\frac{lj}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 + 1n\frac{1-\eta_2}{1-\eta_1}, \quad (20)$$

где $\eta = \frac{h}{h_0}$; $\eta_1 = \frac{h_1}{h_0}$; $\eta_2 = \frac{h_2}{h_0}$ — „приведенные“ глубины.

h_0 — „нормальная“ глубина, или $h_0 = \frac{q}{kj}$,

т. е. h_0 — глубина, которую имел бы равномерный поток при данных q и j.

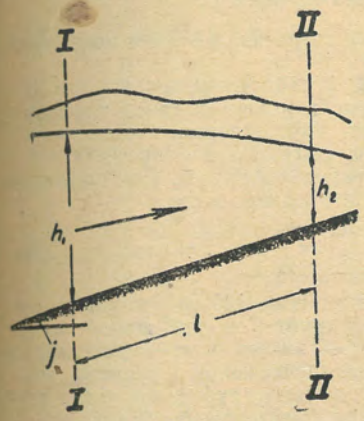
При обратном уклоне подстилающего непроницаемого слоя $j < 0$ (черт. 123) имеем:

$$\frac{lj}{h_0'} = \eta_1 - \eta_2 - 1n\frac{\eta_2 + 1}{\eta_1 + 1}, \quad (21)$$

где h_0' — „нормальная“ глубина, т. е. глубина, которую имел бы равномерный поток при данном расходе q, движущийся вниз по уклону j.

Для неравномерного движения при горизонтальном подстилающем слое, $j = 0$, имеем (черт. 124):

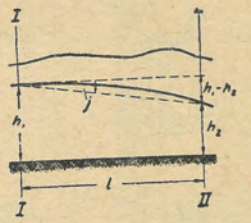
$$q = \frac{k}{2l}(h_1^2 - h_2^2),$$



Черт. 123.

или

$$q = k\frac{h_1 + h_2}{2}\cdot\frac{h_1 - h_2}{l}, \quad (22)$$



Черт. 124.

где $\frac{h_1 + h_2}{2}$ — средняя глубина потока в рассматриваемом отрезке и $\frac{h_1 - h_2}{l}$ — средний его уклон.

Уравнения (19), (20), (21) и (22) дают приблизительные решения многих вопросов, например:

1. определить h_1, если даны h_2, l, q и j
2. „ h_2 „ „ h_1, l, q и j
3. „ l „ „ h_1, h_2, q и j
4. „ q „ „ h_1, h_2, l и j

В случаях резкой деформации потока исходят из системы уравнений (11б) и (12) и пограничных условий. Решение получившейся системы обыкновенно сложно и требует либо громоздких операций с функциями Фурье, Лежандра и Бесселя, либо применения метода конформных изображений и часто трудного интегрирования. Для легкого и наглядного получения сети линий тока и линий равного напора может служить механический интегратор Е. А. Замарина. Ввиду своей сложности и своеобразия случаи резко деформированного грунтового потока (например движение грунтовых вод под флютбетами, фильтрация воды сквозь тело земляной плотины и в ее основании, фильтрация воды по смоченному периметру канала, реки и водохранилища, притекание воды в дрены, притекание воды в колодцы различного типа и т. д.) требуют отдельного для каждого из них рассмотрения, каковое и будет дано в соответствующих отделах „Справочника“.

Об этих движениях см. монографии:

1. Н. Н. Павловский. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Петроград 1922 г.
2. Н. Н. Павловский. О фильтрации воды через земляные плотины. Ленинград. 1931 г.
3. Е. А. Замарин. Движение грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Ташкент. 1931 г.
Н. Е. Жуковский. Просачивание воды через плотины.

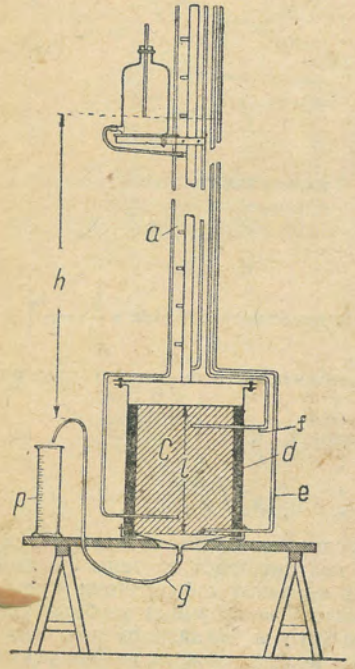
5. I. Kozeny. Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1927, Heft. 8 und 10.
6. J. Kozeny. Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel — Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 1931. Heft. 3.

9. Коэфициент фильтрации k.

Существенно важный коэфициент фильтрации k грунта определяется многими методами.

А. Непосредственное определение k лабораторным опытом производится в приборе Дарси-Тима, имеющем при многих своих конструктивных разновидностях общую схему (черт. 125). Боковые пьезометры e и f и т. д. ставятся для определения k отдельных слоев грунта. При однородной загрузке должно быть

$$\frac{h_1}{l_1}=\frac{h_2}{l_2}=\ldots=\text{const}=\frac{h}{l}.$$



Черт. 125.

На чертеже 125 d — цилиндр, содержащий грунт C и слой воды b над грунтом: a — сливная и m — приводная трубы, обеспечивающие уровень воды b; g — отводящая трубка, p — сосуд для собирания фильтрационного расхода.

Если q — расход фильтрации в $см^3/сек.$ отнесенный к 1 $см^2$ поперечного сечения столба грунта, h — напор и l — длина фильтрационного пути, то

$$k_t=q\frac{l}{h}.$$

В подобном приборе с сооветствующими видоизменениями в монтировке определяется коэфициент фильтрации k для искусственных грунтов и для всяких зернистых и торфяных природных грунтов с сохранением их естественного строения.

Б. Эмпирические формулы.

Для определения k по гранулометрическим показателям существует несколько формул.

а. Формула Козени:

$$k_t=\frac{\gamma c}{72\mu_t}\cdot\frac{p^3}{(1-p)^2}\cdot d_w{}^2, \tag{23}$$

где γ — удельный вес воды;
c — коэфициент формы пор, $0{,}5<C<0{,}67$ (см. § 1);
μ_t — коэфициент вязкости при температуре $t°$ С;
p — скважность грунта;
d_w — активный диаметр грунта по Козени в сантиметрах (см. § 1, формула 2).

При 10°С $\rho=0{,}99973$, $\mu_t=0{,}00001335$ и среднем значении $c=0{,}6$

$$K_{10}=624\frac{p^3}{(1-p)^2}d_w^2\ см/сек. \tag{23а}$$

Для получения k_t из (23а) служит равенство:

$$k_t=k_{10}\frac{\mu_{10}}{\mu_t}. \tag{24}$$

б. Формула Замарина.

$$K_{10}=4\,100\frac{p^3}{(1-p)^2}\alpha^2 d_z{}^2\ м/сутки,$$

или:

$$K_{10}=645\cdot\frac{p^3}{(1-p)^2}\alpha^2 d_z{}^2\ см/сек. \tag{25}$$

где d_z — действующий диаметр грунта по Замарину в сантиметрах (см. § 1, формула 3);
$\alpha=1{,}275-1{,}5p$ и p — скважность грунта.

в. Формула Крюгера:

$$k_{10}=1\,350\frac{p}{\theta^2}\ см/сек, \tag{26}$$

где θ — суммарная поверхность грунта по формуле (4) в кв. сантиметрах.

г. Формула Терцаги:

$$k_{10}=A\left(\frac{p-0{,}13}{\sqrt[3]{1-p}}\right)^2 d_{10}{}^2\ см/сек., \tag{27}$$

где d_{10} – эффективный диаметр грунта по Хазену в сантиметрах;
A имеет значения (по опытам Терцаги):

для чистых песков с гладкими зернами	800
„ „ „ „ шероховатыми „	460
„ песков, содержащих примесь глины	200

Как видно, значения A диференцированы недостаточно.

д. Формула Хазена:

$$k_t=B(0{,}7+0{,}03t)\,d_{10}{}^2, \tag{28}$$

где d_{10} – эффективный диаметр в сантиметрах;
B имеет значения:

при однородном составе песка	150
„ неоднородном и плотно сложенном	60
„ песке средней однородности и плотности	116

Значения B диференцированы недостаточно и k_t не связан со скважностью. Формула (28) применима для песков при условиях:

$$0{,}01<d_{10}<0{,}3\ см,$$

$$e=\frac{d_{60}}{d_{10}}\leqslant 5 \qquad \text{(см. § 1)}$$

е. Формула Шонвэльдера:

$$k_{10}=1{,}048\frac{p^2}{(1-p)^2U^2}\ см/сек., \tag{29}$$

где U — удельная поверхность песка по формуле (5б) Цункера.

Формулы (23) — (29) относятся к тому случаю фильтрации, когда все поры наполнены водой. Для случая, когда в порах остается еще воздух, Шонвэльдер дает формулу:

$$k_{10} = 0{,}524\,\frac{p^2}{(1-p)^2 U^2}\ см/сек., \qquad (30)$$

Для коэфициента фильтрации мятых или насыро-утрамбованных глин Терцаги предложена формула:

$$k_t = 5{,}56\cdot 10^{-9}\,\frac{\mu_0}{\mu_t}\,\frac{(\varepsilon-0{,}15)^{11}(1+\varepsilon)}{(\varepsilon-0{,}15)^8+\dfrac{0{,}0166}{m^8}}\,m^2,\ см/сек, \qquad (31)$$

где $\varepsilon = \frac{p}{1-p}$ и p — скважность;

$m = \frac{d_{10}}{0{,}00006}$ и d_{10} — эффективный диаметр в сантиметрах.

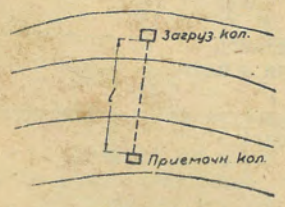
Все вышеприведенные формулы k по гранулометрическим показателям относятся к искусственным грунтам — порошкам — с нарушенной естественной структурой. Одноименные естественные грунты с ненарушенной структурой тем сильнее отличаются от порошкообразных, чем яснее выражена их структурность. Естественные пески имеют k, близкое к k однотипных порошкообразных, но k глин естественной структуры по опытам Черкасова больше k тех же глин в насыро-утрамбованном состоянии (при всех прочих равных условиях) во много раз, в отдельных случаях — в сотни и тысячи раз.

Для одного и того же грунта k меняется во времени соответственно изменениям, вносимым процессами фильтрации, перемещения мельчайших частиц, химических реакций, дисперсации, биологических явлений и т. д. При опытах легко установить и в проектировании следует различать наибольшее значение k данного грунта, получающееся в начальный период фильтрации, и стабильное значение k, устанавливающееся позже.

В. Полевые способы.

Полевых способов определения k два: индикаторами и откачкой.

а. При определении k индикаторами предварительно определяют изогипсы, т. е. горизонтали зеркала грунтовых вод (черт. 126). Затем роют загрузочный шурф (или бурят скважину) и в расстоянии 0,5—1 *м* от него в направлении нормали к изогипсам роют приемный шурф (или скважину). В загрузочный шурф погружают 3—5 *кг* соли (NaCl или NH_4Cl), растворенной в 60—100 литрах воды. Поступление соли в приемный шурф обнаруживается взятием проб воды и титрованием их с помощью $AgNO_3$. Отрезок времени t с момента загружения соли в загрузочный шурф и до момента, когда кривая роста содержания соли в пробах из приемного шурфа переходит в горизонтальный отрезок прямой, считается длительностью прохождения грунтовой водой расстояния l между шурфами. Отсюда скорость течения:



Черт. 126.

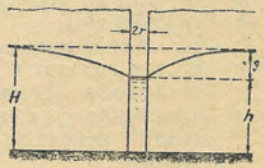
$$u = \frac{l}{t},$$

скорость фильтрации:

$$v = iu p,$$

где p — скважность и коэфициент фильтрации $k = \frac{v}{i}$, где i — уклон, определяемый по изогипсам.

Поступление соли в приемный колодец определяют и электрическим способом Слихтера. Для этого в оба шурфа погружают латунные стержни и соединяют их проводником, проходящим также через батарею (в несколько вольт) и миллиамперметр. По показаниям миллиамперметра чертят кривую роста электропроводности и замечают время t, по прошествии коего с момента загружения соли кривая переходит в прямую. Затем по предыдущему: $k = \frac{lp}{ti}$.



Черт. 127.

б. При определении k методом откачки воды из шурфа или скважины различаются несколько случаев в зависимости от типа колодца.

1. При одиночном полном колодце, когда дно его доведено до подстилающего непроницаемого слоя (черт. 127) по Дюпюи:

$$k = \frac{q \ln \frac{R}{r}}{\pi (H^2 - h^2)}; \qquad (32)$$

по Шульце более точно:

$$k = \frac{q\left(\ln\frac{R}{r} - \frac{1}{3}\right)}{\pi (H^2 - h^2)}; \qquad (33)$$

по Нуртье для ненапорной воды:

$$q = \frac{\pi p\sqrt{2}}{k\sqrt{3}}\sqrt{2rs\,(3H^2 - 3Hs - s^2)}, \qquad (34)$$

и для напорной:

$$q = \frac{\pi p\sqrt{2}}{\sqrt{k}}\,H\sqrt{2rs}; \qquad (35)$$

по Зихардту-Победоносцеву с преувеличением для k:

$$k_\rho = 3\,\frac{q^2}{r^2 s^2}; \qquad (36)$$

с преуменьшением для k:

$$k_\mu = 7\,\frac{q^2}{r^2 Hs}. \qquad (37)$$

Отношение $\frac{k_\rho}{k_\mu} = 0{,}42\,\frac{H}{s}$ дает представление о степени точности определения k_ρ и k_μ; если эта степень точности задана (например $A\%$), то из

равенств:

$$\frac{0{,}42H}{s} = 1 + \frac{A}{100}$$

или

$$s = \frac{42H}{A + 100},$$

получаем то понижение s, которого надо достигнуть для определения k с заданной точностью. В формулах (32—37) q — дебит колодца в кубических метрах в секунду;

k — коэфициент фильтрации грунта в метрах в секунду;

h — глубина воды в колодце в метрах после откачки;

H — толщина водоносного слоя в метрах;

r — радиус колодца в метрах;

p — скважность грунта;

s — понижение уровня воды в колодце вследствие откачки в метрах;

R — радиус действия колодца в метрах, который определяется по формул:

по Шульце:

$$R = 60\sqrt{\frac{6Hkt}{p}};$$

по Кусакину:

$$R = 47\sqrt{\frac{6Hkt}{p}};$$

по Победоносцеву:

$$R = \sqrt{\frac{3qt}{\pi H(p-a)}},$$

где t — длительность откачки для формул (38) и (39) в часах и для формулы (40) — в секундах;

$p - a$ — коэфициент водоотдачи (активная порозность грунта).

Наконец по Козени-Эренбергеру для $h \leqslant \frac{1}{2}H$, имеем:

$$q = 2\pi k\left(5{,}08 - 4{,}08\frac{h_1}{H}\right)CH\zeta f(\zeta),$$

где q, r, h, H сохраняют прежние значения;

h_1 — высота стояния воды после откачки у стен колодца над непроницаемым слоем;

$$C = \frac{\partial}{\partial x}\ln H_0(ix);$$

$$x = \frac{\pi r}{2H}$$

$H_0(ix)$ — бесселева функция нулевого порядка;

$$\zeta = 1 - \frac{h}{H}$$

$$f(\zeta) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\zeta - 2\sum_1^{\infty}\frac{\sin\pi n\zeta}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Некоторые значения C и $\zeta f(\zeta)$ даются в таблицах:

Значения C: Таблица 117 Значения $\zeta f(\zeta)$

$x = \frac{\pi r}{2H}$	$\frac{\Delta\, l\lg H_0(ix)}{\Delta x}$	$\zeta = 1 - \frac{h}{H}$	$\zeta f(\zeta)$
12,0	0,4548	0	0
9,0	0,4650	1/12	0,104
5,0	0,4802	1/6	0,164
4,0	0,4931	1/4	0,203
3,0	0,5160	1/3	0,224
2,0	0,5680	1/2	0,237
1,0	0,6894	2/3	0,168
0,8	0,6921	1	0
0,6	0,7802	—	—
0,4	0,9845	—	—
0,2	1,4165	—	—
0,1	—	—	—

По Замарину имеем зависимость для галечника (в метрах):

$s = 0{,}3;\quad 0{,}5;\quad 1{,}0;\quad 2{,}0;$
$R = 50;\quad 60;\quad 85;\quad 100.$

Для одиночного колодца — неполного, дно которого не достигает непроницаемого слоя (черт. 128), имеем по Форгеймеру:

$$k = \frac{q\lg\frac{R}{r}}{1{,}36(H^2 - h^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2h-r}{h}}\sqrt{\frac{t+0{,}5r}{h}}}. \qquad (42)$$

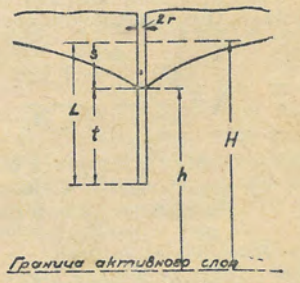
Здесь H — толщина не всего водоносного слоя, а активного слоя, вода которого приводится откачкой в движение;

по Паркеру:

$$H = 1{,}5(s+t) = 1{,}5L,$$

по Замарину:

при $s = 0{,}2L$, $H = 1{,}3L$,
$s = 0{,}3L$, $H = 1{,}5L$,
$s = 0.5L$, $H = 1{,}7L$,
$s = 0{,}8L$, $H = 1{,}85L$.



Черт. 128.

Значения h, t, s и L видны из чертежа 128.

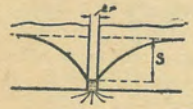
Если k определяется по понижениям уровня s_1 и s_2 в двух наблюдательных шурфах или скважинах, расположенных в расстояниях a_1 и a_2 от колодца, откуда производится откачка, то:

$$k \cong \frac{q\lg\frac{a_2}{a_1}}{2{,}72H(s_1 - s_2)}. \qquad (43)$$

Если колодец, пройдя верхний непроницаемый слой, доходит до проницаемого слоя только своим дном (черт. 129), то по Форхгеймеру:

$$\left.\begin{array}{l}\text{для плоского дна } q = 4ksr \\ \text{для круглого дна } q = 2\pi ksr.\end{array}\right\} \quad (44)$$

Если из n полных колодцев с их радиусами $r_1, r_2, r_3 \ldots$ и радиусами действия $R_1, R_2, R_3 \ldots$ откачивается $q_1 + q_2 + q_3 + \ldots = Q$, причем $q_1 : q_2 : q_3 : \ldots = m_1 : m_2 : m_3 : \ldots$, то для 1-го колодца имеем по Форхгеймеру:



Черт. 129.

$$h_1^2 - h^2 = \frac{Q \ln \dfrac{R_2^{m_2} R_3^{m_3} R_4^{m_4} \ldots}{r_2^{m_2} r_3^{m_3} r_4^{m_4} \ldots}}{\pi k (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)}, \quad (45)$$

и для других колодцев подобные выражения где,

h_1 — глубина воды в 1-ом колодце,

h — глубина воды в колодце с радиусом $r = \sqrt[n]{r_1 r_2 r_3 \ldots}$

дебитом

$$q = \frac{1}{n} Q$$

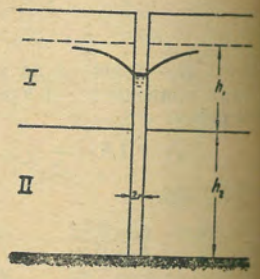
и радиусом действия

$$R = \sqrt[n]{R_1 R_2 R_3 \ldots}.$$

Если имеем два соседних водоносных слоя толщиной h_1 и h_2, подстилаемых непроницаемым слоем (черт. 130), то для определения k_1 для первого слоя откачивают из колодца, помещенного в первом слое, так, чтобы его дно было выше границы между слоями и активный слой был меньше h_1; для определения k_2 откачивают из второго слоя.

Если при этом колодец можно довести до третьего, непроницаемого слоя, то по Шульцу:

$$k_2 = \frac{Q \lg \dfrac{R}{r} - 1{,}36 k_1 (h^2 - t^2)}{2{,}73 h_2 (h_1 - t)}, \quad (46)$$



Черт. 130.

где q — дебит в литрах в секунду;

k_1 — коэфициент фильтрации первого слоя, в миллиметрах в секунду, определенный первой откачкой;

R — радиус влияния и r — радиус колодца в метрах;

t — глубина воды в колодце после первой откачки, отсчитываемая от грани между первым и вторым слоями.

Если третий слой лежит глубоко, то вместо k_2 дают общую характеристику водопроницаемости совокупности первого и второго слоев, производя откачку из второго слоя из неполного колодца.

Ориентировочные значения k даются в следующей таблице:

Гравий	7 *мм* $> d >$ 4 *мм*	$k = 3{,}5$ *см/сек*
„	4 „ $> d >$ 2 „	$k = 3$ „

Песок чистый	1	$> k >$ 0,01 *см/сек*
Песчаный грунт с примесью глины . .	0,01	$> k >$ 0,005 „
Песчано-глинистые грунты	0,005	$> k >$ 0,001 „
Глины	0,001	$> k >$ 0,000003 „
Глины насыро-утрамбованные	0,0000001	$> k >$ 0,000000001 „

10. Турбулентное движение гравитационной грунтовой воды

Это движение изучено мало. Оно не подчиняется закону Дарси и в общем виде следует уравнению Прони:

$$i = av + \beta v^2, \quad (47)$$

и даже

$$i = av + \beta v^2 + \gamma v^3, \quad (47а)$$

где i — пьезометрический уклон;

v — фильтрационная скорость;

α, β, γ — коэфициенты, зависящие от свойств грунта (крупность, форма и шероховатость зерна, скважность, форма пор) и температуры.

Границу между струйчатым движением по Дарси и турбулентным по Прони кладет критическая скорость фильтрации $v_{кр}$, равная по вычислению Павловского из опытов Кребера ориентировочно:

$$v_{кр} = 0{,}154 (0{,}75p + 0{,}23) \frac{\mu}{\rho} \frac{R_c}{d} \text{ см/сек.}, \quad (48)$$

где p — скважность грунта;

μ — коэфициент вязкости воды;

ρ — плотность воды;

d — диаметр частиц грунта в сантиметрах;

R_c — число Рейнольдса; по Павловскому $50 < R_c < 60$ (ориентировочно); по опытам других исследователей числовое значение R_c иное.

Для 10° С: по (48)

$$v_{кр} = 0{,}002 (0{,}75p + 0{,}23) \frac{R_c}{d} \text{ см/сек}.$$

Фильтрационная скорость вообще повышается с увеличением пор, диаметра зерен и пьезометрического уклона. Поэтому критическая скорость в крупнозернистых грунтах (камни, щебень, галька, гравий) появляется благодаря большому размеру зерна и во всяких грунтах, даже в песках средней крупности — благодаря большому уклону. Влияние скважности p, меняющейся в относительно узких пределах, может вызвать критическое значение скорости лишь в исключительных случаях.

Пределы приложимости закона Дарси пока твердо не установлены. Нет пока и общепринятого вида уравнения турбулентного движения грунтовой воды. В настоящее время для него предложено исследователями несколько эмпирических формул.

1. Форхгеймер при фильтрации в гравии нашел:

$i = 1{,}53\, v + 237 v^2$ (49а) при $0{,}00031 < v < 0{,}011$ *см/сек*

$i = 0{,}71\, v + 8 v^2$ (49б) при $0{,}12 < v < 1{,}2$ „

$$i = 0{,}033 v + 0{,}79 v^2 \quad (49в)$$

2. Аналогично Замарин нашел:
для грунта с диаметром зерен от 2,2 до 1 *мм* и $p = 0{,}408$

$$2\,500i = v + 0{,}775v^2 \qquad \text{при } v \text{ в } мм/сек.$$

для грунта с 99,1 % зерен от 3 до 1 *мм* и $p = 0{,}41$

$$11i = v + 0{,}08v^2 \qquad \text{при } v \text{ в } мм/сек.$$

3. Кресник при работе с песками, где $0{,}013 < d < 0{,}7$ *см*, нашел для 10° С

$$1\,000i = \frac{v}{0{,}7 + v}\left(\frac{1}{d} + \frac{v}{0{,}8d + 10{,}5d^2} + \frac{v^2}{30\,000d^2}\right), \tag{50}$$

где v — скорость фильтрации в метрах в сутки;
d — активный диаметр зерна в сантиметрах.
При крупном d формула (50) отличается от формулы Дарси.
4) Мазони, работая с вулканическими песками, где $0{,}037 < d_{10} < 0{,}055$ *см* и доводя уклон i до 107,3, нашел отклонения от закона Дарси.
При $d_{10} = 0{,}055$ *см* оказалось:

$i =$	0,46	3,94	7,62	19,66	35,54	107,3
$v =$	0,19	1,29	2,43	4,80	7,64	14,6 *см/сек*
$k =$	0,42	0,33	0,32	0,24	0,22	0,14 *см/сек.*

5. По Смрекеру:

$$v = \left(\frac{2g}{a}\right)^{\frac{2}{3}} i^{\frac{2}{3}}, \tag{51}$$

где g — ускорение силы тяжести;
i — пьезометрический уклон;
a — коэфициент, зависящий от гранулометрической крупности и скважности грунта и определяемый опытом.
При крупнозернистых грунтах уравнение (51) ближе к результатам опыта, чем формула Дарси.
6. По Креберу:

$$v = 173\left(\frac{di}{90}\right)^{\frac{0{,}8+d}{0{,}8+2d}} см/сек, \tag{52}$$

где d — средний диаметр грунта в сантиметрах.
При $d < 0{,}015$ *см* показатель степени в выражении (52) близок к единице и формула (52) близка к формуле Дарси, давая отклонения от величины скорости фильтрации не более 12 %. При больших d она отходит от формулы Дарси, но лучше ее отвечает результатам опыта.
7. При градиентах $0{,}1 < i < 1{,}0$ в однородных фракциях округленной формы зерен верхний предел приложимости закона Дарси Избаш нашел при $d = 5$ *мм*; в интервале $5 < d < 10$ *мм* показатель степени m в формуле $v^m = ki$ меняется от 1 до 1,8; при дальнейшем возрастании фракции показатель степени (m) растет медленно; также медленно растет в этом интервале и k в формуле $v = ki^{\frac{1}{m}}$.
Избаш констатировал и нижний предел приложимости закона Дарси, наступающий при очень малых скоростях фильтрации.

РАЗДЕЛ X

ГИДРОТЕХНИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

1. Общие данные.

В большинстве случаев практики гидротехнические сооружения располагаются на водопроницаемых грунтах; вода, просачиваясь в грунт и двигаясь по его порам, оказывает давление на части сооружения (флютбет, подпорные стены и др.). Гидротехнический расчет имеет целью установление необходимых и достаточных размеров частей сооружений, на которые грунтовые воды оказывают давление, а также установление форм и размеров грунтовых масс, прилегающих к сооружению, устойчиво воспринимающих движение грунтовых вод.

Различают два основных вида движения грунтовых вод:

первое — когда грунтовая вода у сооружения заполняет все поры грунта и соединяется с существовавшим до постройки сооружения потоком грунтовых вод;

второе — когда грунтовая вода у сооружения не заполняет всех пор грунта и движется отдельными струйками до соединения с естественными грунтовыми водами местности.

Первый вид движения рассматривают в двух формах:

как напорное, когда русло подземного потока заключено в жесткие стенки и движение грунтовой воды подобно движению ее в трубах (водопровода и т. п.), и

как свободное, когда грунтовая вода движется, не будучи заключенной со всех сторон в жесткие стенки; свободная поверхность ее, располагающаяся по так называемой кривой депрессии, обычно испытывает атмосферное давление.

При стоянии грунтовых вод в районе сооружения не ниже верха флютбета движение их тем ближе к напорному, чем шире сооружение.

Для нешироких шлюзов движение грунтовой воды за стенами сооружений, совершающееся как свободное, скажется на движении ее под флютбетом, отклоняя его от условий напорного движения. Для узких шлюзов влияние свободного движения за стенами настолько возрастет, что движение под флютбетом можно рассматривать как близкое к свободному.

Для сооружений, сопрягающих бьефы (перепады и др.) движение грунтовых вод под сооружениями по преимуществу будет совершаться как свободное.

Одной из ответственных частей сооружения является флютбет; он в наибольшей степени испытывает давление от подземных вод; поэтому преимущественное внимание в гидротехническом расчете уделяется ему.

В составе флютбета различают три части: понур — водонепроницаемое крепление русла перед сооружением; водобой — водонепроницаемая часть, предохраняющая размывы грунта грунтовыми потоками и необходимая для пропуска через сооружение поверхностного потока, и — сливная часть (рисберма) — водопроницаемое крепление русла за сооружением.

2. Расчет в условиях напорного потока

А. Длины отдельных частей флютбетов.

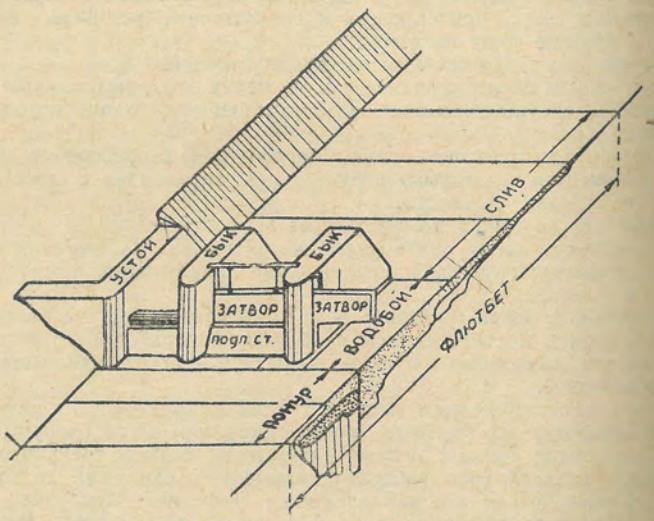
Основные части флютбетов (черт. 131) назначаются в зависимости от напора в верхнем бьефе H_1:

a — понур l_n:

в шлюзах регуляторах . . . . . $l_n = (1—2)\,H_1$
„ „ промывных . . . . . $l_n = (2—4)\,H_1$
„ карманах плотин в зависимости от ширины кармана B . . . . . $l_n = (1{,}5—2{,}0)\,B$
„ сооружениях по сопряжению бьефов . . . . . $l_n = (2—3)\,H_1$ (1)

б — водобой l_b:

в шлюзах регуляторах . . . . . $l_b = (3—5)\,H_1$
„ „ промывных . . . . . $l_b = (4—6)\,H_1$
„ водосливных плотинах . . . . $l_b = (3—5)$ высоты плотины.



Черт. 131.

По данным инж. Bli$_2$h'я длина водобоя принимается в зависимости от напора H_1 и коэфициента фильтрации C (см. табл. 119 на стр. 453) в следующем виде:

Для шлюзов регуляторов . . . . . $l_b = 0{,}6\,C\sqrt{H_1}$
„ „ промывных . . . . . $l_b = C\sqrt{H_1}$ (2)

в — рисберма l_p:

Ориентировочные размеры рисбермы назначаются по следующим правилам:

в шлюзах регуляторах . . . . . $l_p = (5—6)\,H_1$
„ „ промывных . . . . . $l_p = (5—8)\,H_1$ (3)

Размеры рисбермы для другого вида сооружений в настоящее время за отсутствием достаточных данных дать нельзя.

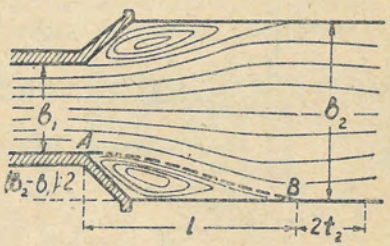
При расчете длины крепления рисбермы могут быть рекомендованы следующие два способа:

а) Предложение проф. Замарина.

Проф. Замарин, учитывая в большинстве случаев гидротехнического строительства наличие значительного сужения в отверстии сооружения по сравнению с шириной рисбермы, что ясно из чертежа 132, рекомендует назначать длину рисбермы в зависимости от растекания струй, которое определяется углом наклона огибающей водовороты линии AB. По данным проф. Замарина длина рисбермы определяется по формуле:

$$l_p = n\beta + 2t_2, \qquad (4)$$

где t_2 — глубина в нижнем бьефе за сооружением; $2\beta = \beta_2 - \beta_1$; n — заложение воронки растекания, которое выбирается в зависимости от скоростей в сооружении V_1 и в канале V_2 согласно таблице 118:



Черт. 132.

Таблица 118

$V_1 : V_2$	2	3	4	5	6	7	8
n	2,5	3,0	3,7	4,5	5,5	6,6	8,0

б) Предложение инж. Мацмана.

Инж. Мацман рекомендует назначать размеры рисбермы на основании специального расчета в зависимости от открытия отверстий сооружения и пропускаемых расходов и возможного отгона прыжка. Возможный наибольший отгон прыжка по данным инж. Мацмана получается при следующих расходах воды:

1. Если глубина воды в нижнем бьефе (t) меньше критической глубины ($h_{кр}$) при данном расходе, то наибольший отгон получается при расходе Q_p, равном половине максимального расчетного расхода отверстия.
2. Если t_2 больше критической глубины $h_{кр}$, то наибольший отгон прыжка получается при половинном расходе от того расхода, при котором прыжок получается в сжатом сечении, т. е. когда сопряженная глубина с глубиной нижнего бьефа (h_2') равна глубине сжатого сечения за щитами (h_1).

Таким образом для расчета длины рисбермы необходимо прежде всего установить, при каком расходе получается наибольший отгон прыжка. После этого достаточно определить расстояние, на которое отгоняется прыжок обычным методом, как это указано в разделе расчета перепадов.

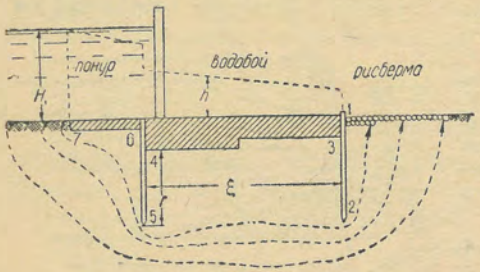
А. Давление подземного потока на флютбет.

а) Предложение Bligh'я:

Для отыскания давлений подземного потока в водопроницаемых грунтах на флютбет Bligh принимает следующие предположения:

1. Изменение давлений вдоль флютбета со стороны подземного потока следует закону прямой линии.

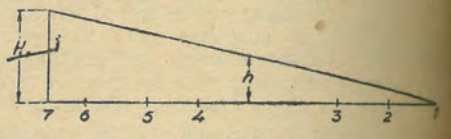
2. При постоянстве длины распрямленного контура флютбета и действующего напора воды давление в любой точке развертки флютбета постоянно и не зависит от формы флютбета.



Черт. 133.

Сделанные предположения дают возможность весьма просто определить давления на флютбет и скорости подземного потока вдоль флютбета при известных физических постоянных данного грунта.

Так для плоского флютбета при расположении дна верхнего и нижнего бьефов на одном уровне и при глубинах воды H_1 в верхнем бьефе и t_2 — в нижнем бьефе отыскание давлений на флютбет со стороны подземного потока сводится к следующему построению эпюры давлений: находится действующий напор подземного потока, равный $H = H_1 - t_2$; далее, так как этот напор равномерно погашается вдоль контура флютбета, то, измерив протяжение отдельных участков флютбета и найдя общую длину L его контура, откладывают ее по горизонтали; восстановив в начале ее перпендикуляр длиной, равной H_1, и в конце длиной t_2 и соединяя верхние концы перпендикуляров прямой линией, получают искомую эпюру распределений давлений по флютбету. На чертеже 133-а для плоского флютбета с двумя шпунтами выполнены описанные выше построения: действующий напор здесь при $t_2 = 0$ (что будет при опущенных щитах сооружения) равен $H = H_1$; длина распрямленного контура L равна прямой 0—1 ... 6—7, в которой длина каждого шпунта отложена дважды: первый раз при обтекании его водой сверху, второй раз — при обтекании его кверху. Ординаты эпюры над точками 3 и 4, взятые в том же масштабе, что и H_1, показывают давление подземного потока в метрах водяного столба в этих точках. Откладывая эти ординаты над соответствующими точками флютбета и соединяя их прямыми, получим распределение давлений на флютбет; получающиеся уступы эпюры будут показывать части напора, погашаемые шпунтами.



Черт. 133а.

В тех случаях когда флютбеты сооружений снабжаются шпунтами, влиянием формы флютбета на движение грунтовых вод пренебрегать уже не представляется возможным; при близкой расстановке шпунтов активная струйка грунтовой воды уже не будет итти по контуру флютбета между шпунтами, а перебросится непосредственно между концами соседних шпунтов, т. е. будет итти не по пути 5—4—3—2 (черт. 133), а непосредственно между 5—2 (на черт. 133 пунктиром схематично показано направление движения струек).

Учитывая это обстоятельство, принято располагать шпунты на таком расстоянии друг от друга, чтобы:

$$l = (2 - 2{,}5)\, S, \qquad (5)$$

где l — расстояние между шпунтами и S — глубина шпунта.

В. Бляем предложено назначать длину непроницаемой части флютбета

таких размеров, чтобы под сооружением скорости подземного потока не достигали вымывающих значений, т. е. чтобы:

$$v = ki < V_b = ki_b,$$

где V_b и i_b — вымывающие скорости и уклон для данного грунта (т. е. для заданного k — коэфициента фильтрации).

Однако вероятно вследствие недостаточной выясненности величин вымывающих скоростей В. Бляй предложил принять за критерий не вымывающую скорость, а „вымывающий уклон", т. е, $i_b > i$. Так как уклон подземного потока под сооружением измеряется отношением действующего напора H к длине развернутого контура флютбета L, то условия невымываемости грунта напишутся так:

$$i = \frac{H}{L} \leqslant i_b \leqslant \frac{1}{C}, \quad \text{или} \quad L \geqslant HC. \qquad (6)$$

Значения коэфициентов C берутся из следующей таблицы:

Таблица 119

№ по пор.	Классы сооружений по номенклатуре (см. раздел XV часть 1-я)	I и II	III	IV	V	Примечание
	Грунты	Коэфициенты C				
1	Илистые	12	9	6	Конструктивно	*) Содержание части d = =0 — 0,01 *мм* не более 60% **) до 80% частиц d=0 — 0,01 *мм*
2	Мелкопесчаные	10	7,5	5		
3	Средне и крупно песчаные	9	7	4,5		
4	Лес легкий *)	8	6	4		
5	„ тяжелый **)	7	5	3,5		
6	Глинистые	6	4,5	3		
7	Гравелистые	7	5	4		
8	Галечниковые	6	5	3,5		
9	Торф	7—8	4,5—6	3—4		

Толщина флютбета для массивной кладки (бетон, бут, кирпич) находится на основании предложений Bligh'я по следующим формулам (черт. 134):

$$t_x = \frac{\eta_1 \cdot \gamma \left(H_x - H \cdot \frac{L_x}{L_f} \right)}{\delta - \gamma}, \quad \text{или:} \quad t_x = \frac{\eta_2 \gamma \left(H_x - H \frac{L_x}{L_f} \right)}{\delta - \eta_2 \cdot \gamma}, \qquad (7)$$

где приняты следующие обозначения:

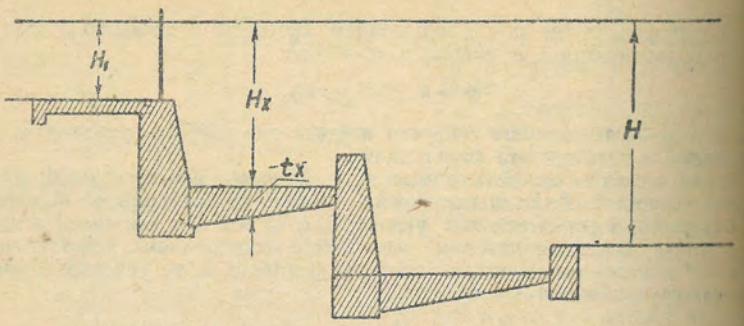
H_x — общий напор от горизонта верхнего бьефа до уровня расположения рассматриваемой точки на поверхности флютбета;

H — полный расчетный напор для всего сооружения в целом;

γ — вес единицы объема воды;

δ — объемный вес кладки;

L_x — длина фильтрационного пути от начала до рассматриваемого сечения x;



Черт. 134.

L_f — полная фильтрационная длина по Bligh'ю;

η_1 — коэфициент запаса по Bligh'ю, взятый как некоторое увеличение расчетной толщины флютбета;

η_2 — то же коэфициент запаса, но взятый как определенный запас для сил выпирания.

Коэфициенты запаса η берутся в зависимости от классов сооружений следующим образом:

Таблица 120

Класс сооружений	1-й класс	2-й класс	3-й класс	4-й класс	5-й класс
η_1	1,30	1,0	0,90—0,85	0,75—0,50	Конструктивно
η_2	1,15	1,0	0,90	0,85 - 0,60	»
δ для бетона	2,20	2,4	2,60	2,6	»

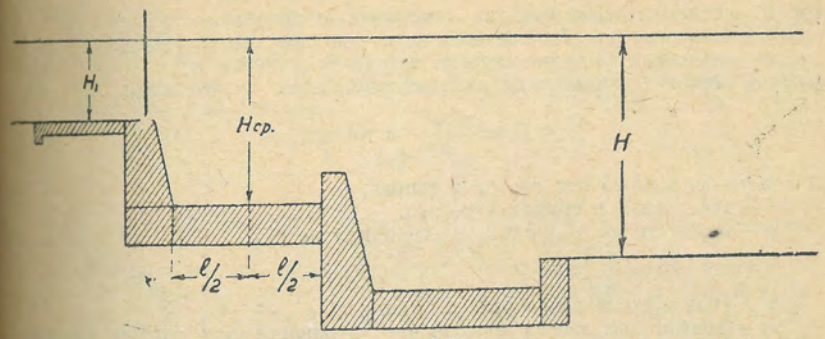
Увеличение в зависимости от классов сооружений значений δ обусловлено учетом намокания бетона. В том случае, когда флютбет проектируется отдельными секциями с прямоугольными очертаниями, подсчет толщин ведется по формулам (черт. 135):

$$\left.\begin{aligned} t_x &= \eta_1 \cdot \gamma \cdot \frac{\left(H_{cp} - H\frac{L_1 + L_2}{2L_f}\right)}{\delta - \gamma} \\ t_x &= \eta_2 \cdot \gamma \cdot \frac{\left(H_{cp} - H\cdot\frac{L_1 + L_2}{2L_f}\right)}{\delta - \eta_2 \cdot \gamma} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

В приведенных формулах значки 1 и 2 относятся к величине L для сечения 1-го и сечения 2-го, ограничивающих пределы флютбета, где принимается постоянная толщина.

H_{cp} представляет напор от горизонта верхнего бьефа до средней точки рассматриваемой части флютбета.

В рассматриваемом выше расчете флютбета в условиях напорного движения грунтовых вод принималось, что уровень их совпадает с дном нижнего бьефа; в случае выклинивания грунтовых вод на уровне H_3 над дном нижнего канала погашаемым напором будет разность между уровнем воды перед сооружением и уровнем выклинивания грунтовых вод, т. е. расчетной для толщины флютбета эпюрой давлений будет не треугольник (черт. 133 а), а трапеция со стороны H_1 и H_3.



Черт. 135.

Железобетонные флютбеты, жестко соединенные со стенками, или сплошные бетонные флютбеты, не отделенные швами от подпорных стенок, рассчитываются с учетом на выпирание не только веса флютбета, но и веса подпорных стенок, распределенных на общую площадь флютбета. Таким образом расчетная формула принимает вид

$$2l_1t_1 + lt = \eta \cdot \frac{H_x - H\frac{L_x}{L_f}}{\delta - \gamma} = \eta\frac{w}{\delta - \gamma}, \quad (9)$$

где приняты следующие обозначения (черт. 136):

w — площадь $ABCD$;

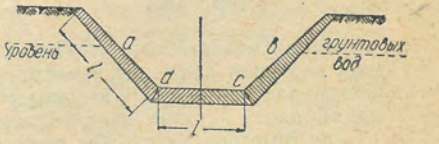
t_1 и t — средние толщины стен и флютбета;

l_1 и l — длина стен и ширина флютбета;

η — коэфициент запаса по таблице 3.

Железобетонные флютбеты и сплошные бетонные флютбеты после проверки на общее выпирание рассчитываются как сооружения на упругом основании.

В деревянных флютбетах длину для погашения фильтрационного напора развивают преимущественно на вертикальных путях фильтрации, т. е. на шпунтах, так как потери напора на горизонтальных участках оказываются незначительными.



Черт. 136.

В деревянных флютбетах, устраиваемых на глинобетоне, рассчитывают глинобетонное заполнение так же, как массивный флютбет, если оно не получается чрезмерной толщины. При очень толстом слое глинобетона, получающемся по расчету, следует для его уменьшения принять во внимание работу на выпирание свай основания:

$$Q + \omega t(\delta - \gamma) = \eta w, \quad (10)$$

где Q — сопротивление свай на выпирание от трения;
ω — площадь флютбета, приходящаяся на одну сваю;
w — давление фильтрационного потока на площади ω.
Силу Q можно принимать по данным проф. В. К. Дмоховского:

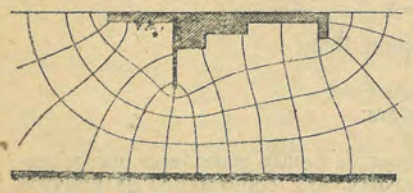
$$Q = \frac{\gamma l^2 \rho P f}{2m} \text{ в тоннах.}$$

Здесь γ — объемный вес грунта в тоннах;
l — длина сваи в грунте в метрах;
ρ — периметр ее поперечного сечения в метрах;
$P = \operatorname{tg}^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$;
φ — угол естественного откоса грунта;
m — коэфициент запаса, равный 4—8 (больший для слабых грунтов);
f — коэфициент трения, равный 0,3—0,5.

Б. Теория струйного движения грунтовой воды.

1. Работы акад. Павловского, Форхгеймера и проф. Замарина

Теория струйного движения грунтовой воды не ограничивается рассмотрением движения только одной струйки по стыку флютбета с грунтом основания (как это было рассмотрено выше), а рассматривает движение по всей области проницаемого грунта. Так рассматриваемое движение ограничивается следующими условиями, соблюденными также и в теории Бляя: движение рассматривается установившееся и плоское т. е. изменяющееся вдоль флютбета (по длине) и вглубь грунта (по глубине); в направлении же, перпендикулярном к продольной оси сооружения (т. е. по третьей координате), движения не происходит.



Черт 137.

Аналитическое определение элементов потока, т. е. давлений, скоростей и их направлений, сводится к решению уравнения Лапласа; решение этого уравнения довольно сложно и затруднительно даже для простейших условий.

Графическое решение будет заключаться в полученной на основании его такой наглядной (буквально) картины движения, пользуясь которой можно будет указать для любой точки потока элементы его. Такой картиной движения является так называемая сетка движения, т. е. изображение направления элементарных струек воды (траекторий движения) и линий, вдоль которых пьезометрические давления везде одинаковы.

Такая ортогональная сетка движения будет изображать поле электрического потенциала, магнитное поле, тепловое поле и др. для стационарных условий. Пример такого графического построения сетки движения приведен на чертеже 137, где показаны линии течения (траектории струек) и линии равных давлений. Будем называть пространство, ограниченное двумя соседними линиями равных давлений (или потенциальными линиями), поясом давлений; на чертеже 137 имеем число таких поясов давлений $M = 12{,}5$ и так построенных, что при переходе от одной потенциальной линии к другой давление изменяется на $^1/_{12{,}5}\,H$, где H — действующий напор, равный

$H = H_1 - t_2$. Так например вдоль первой эквипотенциали давление везде равно H_1 (принимая за плоскость сравнения дно канала); вдоль последней потенциали давление везде равно t_2; во внутреннем углу за первым шпунтом, до которого от дна верхнего бьефа имеется примерно 6,8 поясов давлений, давление будет равно:

$$H_1 - 6{,}8\,\frac{H}{12{,}5}.$$

Таким образом семейство эквипотенциалей позволяет найти давление в любой точке потока, а следовательно и вдоль флютбета.

К сожалению нельзя дать конкретных указаний к построению такой сетки; общее правило для ее построения можно так формулировать (применительно к черт. 137); слой водопроницаемого грунта между флютбетом сооружения и подстилающим водонепроницаемым слоем (скала) разделяют на одинаковое произвольное число лент ($N = 4$), причем ширина лент в пределах отдельных частей флютбета должна быть примерно одинаковой, изменяясь вместе с изменением ширины водопроницаемого слоя; так под утолщениями флютбета ширина будет меньше, при подъемах флютбета — больше и т. д.

Построив так плавные линии раздела лент, принимают их в первом приближении за линии течения, считая первой линией течения очертания подошвы флютбета; пространство между этой линией и следующей разделяют, начиная от точки дна верхнего бьефа, на непрерывный ряд криволинейных квадратов, продолжая их до дна нижнего бьефа; так поступают со второй и следующими лентами. Соединяя соответственные точки раздела кривыми, должны получить последние плавными и ортогональными к ранее проведенным линиям течений. Последняя линия течения (нижняя) должна бы совпадать с поверхностью скалы, но так как этого не удается достигнуть первым приближением, то изменяют очертание второй линии течения на плавную, объемлющую флютбет кривую и проделывают снова разбивку области грунта на криволинейные квадраты, вследствие чего изменяются направления и расположения остальных линий течения и перпендикулярных к ним линий разных давлений. Проделав несколько приближений, добиваются плавного очертания всех линий, образующих прямоугольную сетку, и совпадения нижней линии течения с поверхностью скалы.

Поверкой правильности построения сетки может служить: подобие составляющих ее фигур (квадратов, прямоугольников); ортогональность пересечения линий и прием проведения диагоналей; семейство их должно состоять из плавных кривых, ортогонально пересекающихся между собой и образующих также квадратную сетку; диагонали в каждом квадрате должны быть примерно одинаковой длины.

В тех случаях когда слой проницаемого грунта T очень глубок, примерно около одной длины для плоского флютбета и 1,25—1,5 для флютбета одношпунтового (т. е. $T \geqq 1{,}5L$), построение сетки несколько изменяется. Теоретические выкладки и результаты опытов показывают, что интенсивность движения потока грунтовых вод по мере удаления от флютбета вглубь грунта быстро затухает и примерно на указанных глубинах движение настолько слабо, что для слоев грунта, еще ниже расположенных, можно им пренебречь. Далее из теории струйного движения известно, что если примем любую из траекторий движения (т. е. линий течений, линий тока) за новую границу области движения, то оно нисколько от этого не изменится. Последнее обстоятельство в связи с затуханием движения по мере понижения в грунт в применении к построению сеток движения

для случаев очень мощных слоев проницаемого грунта используется следующим образом: ограничиваем рассмотрение движения глубиной $T=L$ (или $1{,}25L$), задаемся формой пограничной линии течения — для плоских флютбетов эллипсом с полуосями $b \cong L$, $a \cong 1{,}2L$, центр эллипса располагаем по середине флютбета.

В случае шпунтовых флютбетов за очертание активной зоны принимается плавная кривая, проходящая через точки дна канала, отстоящие от концов непроницаемых частей флютбета (понура и водобоя) на $(0{,}8-1)L$ и через точки, расположенные на $(1-1{,}5)S$ по вертикали от нижнего конца шпунта (S — его длина).

Согласно струйной теории давления воды на флютбет распределяются по кривым, не зависящим от фильтрационных свойств грунта (т. е. от коэфициента фильтрации k) и далеко отклоняющимся от прямой по Бляю; в большинстве случаев криволинейное распределение дает меньшие давления в верхней части флютбета и большие в нижней по сравнению с прямолинейным распределением.

Такое соотношение позволяет делать флютбеты меньшей толщины в начале, не увеличивая ее в конце, где толщина определяется не расчетом, а чаще ее конструктивным минимумом.

2. Номограммы и таблицы проф. Замарина.

Для практических расчетов им даны графические решения для струйного движения грунтового потока применительно к отдельным типам флютбетов. Во всех ниже приводимых расчетах по данным проф. Замарина приняты следующие обозначения: действительные размеры сооружений обозначаются большими буквами: части длин флютбета — B_1 и B_2, длина шпунта — S, высота стенки падения перепада — P и т. д.; размеры сооружения, выраженные в измерениях одного из размеров сооружения, например длины шпунта — S, называются приведенными размерами и выражаются следующим образом:

$$b=\frac{B}{S};\quad p=\frac{P}{S}\quad \text{и т. д.}$$

Давление дается также как приведенное; т. е. дается не абсолютная величина давления, а его доля в процентах.

Первая группа сооружений. В этой группе рассматривается распределение давлений по флютбету для следующих сооружений: а) с плоским флютбетом, б) с флютбетом, имеющим один шпунт, и в) плоский флютбет конечной толщины.

На величину давления h_r толщина флютбета влияет незначительно; именно, при $t \leqslant 0{,}1L$, где L — длина флютбета, ошибка в определении давлений при пренебрежении толщиной флютбета не превосходит 10%; при большей толщине флютбета, т. е. при $t \geqslant 0{,}1L$, влияние ее на величину h_r уже необходимо учитывать. Так как в большинстве гидротехнических сооружений $t \leqslant 0{,}1L$, то таблицы и номограммы давлений h_r даются при пренебрежении влиянием толщины флютбета на распределение давлений; влияние это рассматривается отдельно для случая плоского флютбета.

а) **Плоский флютбет на проницаемом слое грунта безграничных размеров.** Выбираем за основной размер полудлину флютбета $b=1$; расположение системы координат смотри на чертеже 138. Тогда кривая распределения давлений по флютбету выражается следующей формулой:

$$h_r=\frac{\arccos x}{\pi}. \tag{11}$$

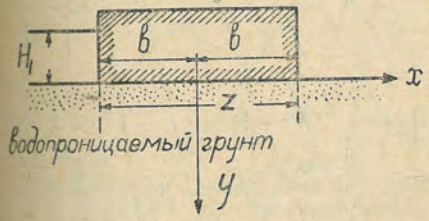
Значения h_r в функции от x приведены в следующей таблице:

Таблица 121

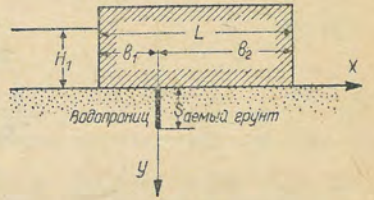
x	−1,00	−0,98	−0,95	−0,90	−0,80	−0,60	−0,40	−0,20	−0,00
h_r	1,00	0,94	0,90	0,86	0,80	0,71	0,63	0,56	0,50
x	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	0,90	0,95	0,98	1,00
h_r	0,50	0,44	0,37	0,29	0,21	0,14	0,10	0,03	0,00

б) **Флютбет с одним шпунтом на проницаемом слое грунта безграничных размеров.** Схема сооружения, обозначения, расположение, координатной системы приведены на чертеже 139. За основной размер принимаем длину шпунта, т. е. полагаем $S=1$, тогда кривые распределения давлений по флютбету имеют следующее выражение:

$$\left.\begin{aligned} h_r&=\frac{1}{\pi}\arccos\left[\frac{-2\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+b_1^2}-\sqrt{1+b_2^2}}{\sqrt{1+b_1^2}+\sqrt{1+b_2^2}}\right] \quad \text{для } x<0\\ h_r&=\frac{1}{\pi}\arccos\left[\frac{2\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+b_1^2}-\sqrt{1+b_2^2}}{\sqrt{1+b_1^2}+\sqrt{1+b_2^2}}\right] \quad \text{для } x>0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$



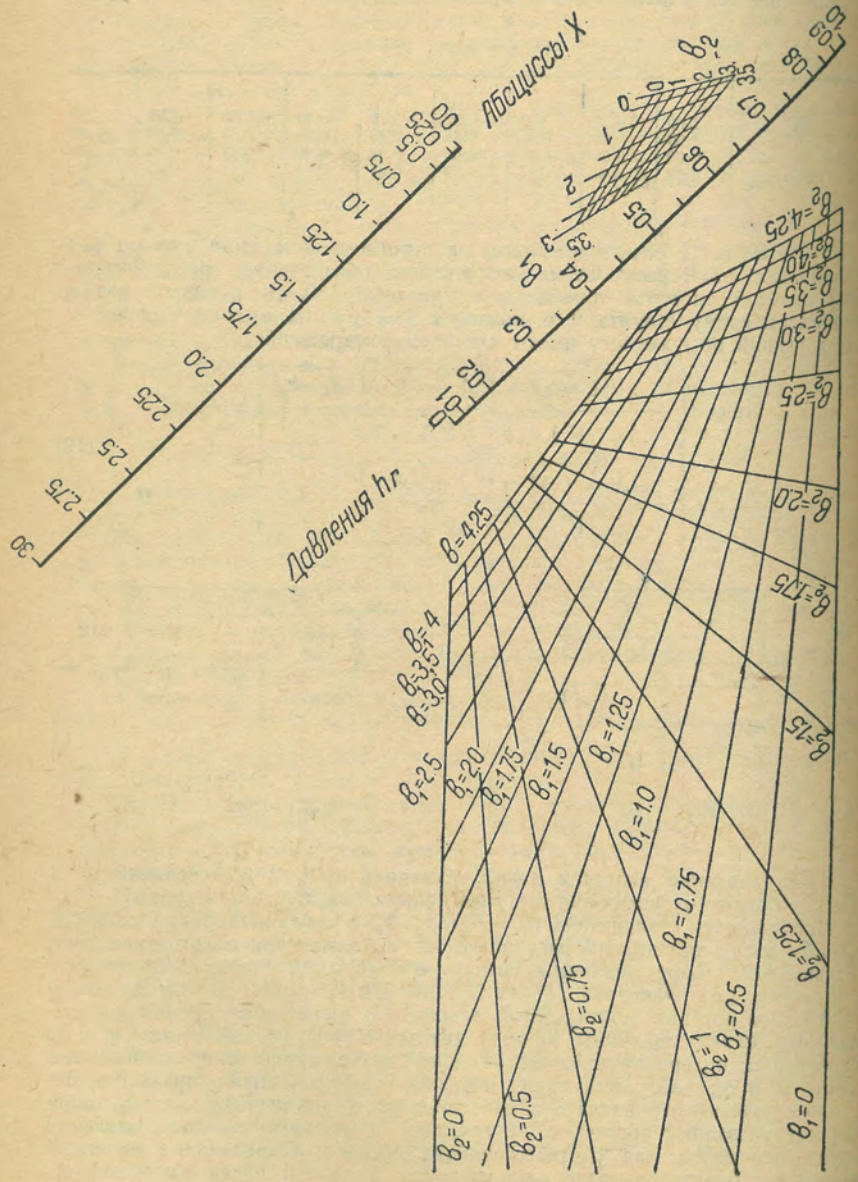
Черт. 138.



Черт. 139.

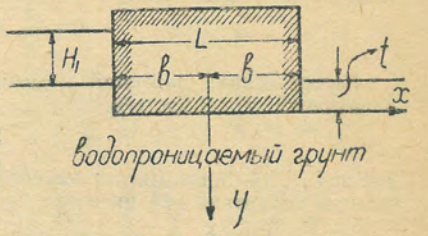
Здесь давление является явной функцией x, b_1 и b_2 и неявной от S так как последние величины все выражены в долях длины шпунта.

Представлять зависимость $h_r=f(x, b_1, b_2)$ в табличной форме потребовало бы много таблиц, что рассеивало бы внимание при пользовании ими; удобнее эти четыре величины связать номограммой (черт. 140), которая составлена для значений: L — от 2,0 до 7,0; b_1 — от 0 до 3,5; b_2 — от 0 до 3,5. Пользование номограммой таково: по имеющейся схеме сооружения определяют величины b_1 и b_2 (считая $S=1$); по найденным b_1 и b_2 определяют интерполированием на левой сетке пересечение помеченных линий b_1 и b_2; найденную таким образом точку соединяют прямой постепенно с точками вертикали с надписью x от 0 до значения $x=b_2$; пересечения указанных прямых с вертикалью h_r и дает значения давлений грунтового потока для соответствующих абсцисс. Определение давлений в точках с отрицательными x-ми (т. е. для верховой части флютбета) находят аналогично предыдущему по правой сетке помеченных линий b_1 и b_2. При таком определении для точки $x=\pm 0$ получаются два значения h_r.



Черт. 140. Номограмма проф. Замарина для определения давления на флютбет с одним шпунтом на безграничном слое водопроницаемого грунта.

разность между которыми показывает величину напора, погашаемого шпунтом. Отношение этой разности к длине шпунта (действительной, выраженной в метрах) является так называемым удельным эффектом шпунта.



Черт. 141.

в) **Плоский флютбет конечной толщины (см. черт. 141).** Ранее было отмечено, что в случае, если толщина флютбета превосходит 0,1 L, то следует учитывать влияние t на распределение давления воды по подошве флютбета. Ниже рассматриваются плоские флютбеты, имеющие толщину равную 0; 0,1L; 0,2L и 0,3L; расположение координатной сетки ясно из чертежа 141. Эпюра давлений воды по подошве флютбета имеет следующее параметрическое выражение:

$$h_r = \frac{\arccos \xi}{\pi}, \quad \xi = \frac{E(\varphi,k) - k_1^2 F(\varphi,k)}{E - k_1^2 K}, \tag{13}$$

где

$$-k < \xi < +k.$$

Здесь E, F и K обычные символы эллиптических интегралов. Модуль эллиптических интегралов k, входящий в написанные зависимости, определяется из соотношения:

$$t = \frac{E_1 - k^2 K_1}{E - k_1^2 K}, \tag{14}$$

где символы E_1 и K_1 обозначают полные эллиптические интегралы для дополнительного модуля $k_1^2 = 1 - k^2$. Значение эллиптических интегралов можно брать по таблице 131 на стр. 478.

Принимаем за основной размер полудлину флютбета $b = 1$; тогда для указанных выше трех случаев получается следующее распределение давлений по флютбету:

Таблица 122

h_2	0,500	0,400	0,300	0,214	0,200	0,187	0,141
t/b	x в долях					b	
0,0	0	0,309	0,588	0,782	0,809	0,833	0,903
0,2	0	0,372	0,696	—	0,931	—	1,000
0,4	0	0,415	0,769	0,968	0,987	1,000	—
0,6	0	0,453	0,832	1,000	—	—	—

Вторая группа сооружений. В этой группе рассматриваем плоский флютбет на проницаемом слое, конечной глубины и плоский флютбет со шпунтом на том же основании.

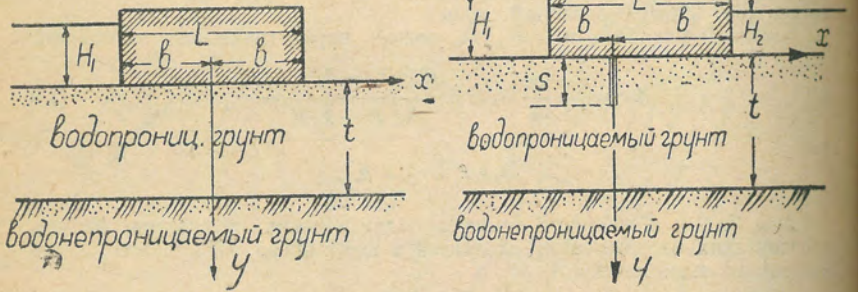
а) Плоский флютбет на проницаемом слое грунта конечной глубины (черт. 142). За основной размер принимаем глубину проницаемого слоя грунта, т. е. полагаем

$$T = \frac{\pi}{2} = 1 \text{ масштаба.}$$

Распределение давлений подземного потока по флютбету выражается следующей зависимостью.

$$K \cdot \mathrm{sn}\,[(1 - 2h_r)\,K, k] = thx, \qquad (15)$$

где sn [. . .] — Sinus Якоби; $k = thb$ модуль эллиптического интеграла, K — полный эллиптический интеграл 1-го рода.



Черт. 142.

Черт. 143.

По последней формуле составлена таблица 6 давлений для случаев $b = 2$, 1, $^2/_3$ и $^1/_2$ (считая $T = 1$) и для $b = 1$ при $T = \infty$.

Из таблицы видно, что уже при $b = ^2/_3$ влияние конечной глубины проницаемого слоя незначительно, что позволяет при меньшем соотношении b к T этим влиянием пренебрегать.

Таблица 123

$b : T$	2	1	$^1/_3$	$^1/_2$	$1/\infty$
h_T		x в долях b			
1,0	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000	—1,000
0,9	—0,914	—0,941	—0,913	—0,946	—0,951
0,8	—0,720	—0,771	—0,787	—0,796	—0,809
0,7	—0,485	—0,538	—0,559	—0,571	—0,588
0,6	—0,243	—0,274	—0,287	—0,296	—0,309
0,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,4	0,243	0,274	0,287	0,296	0,309
0,3	0,485	0,538	0,559	0,571	0,588
0,2	0,720	0,771	0,787	0,796	0,809
0,1	0,914	0,941	0,943	0,946	0,951
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	2,000

б) **Сооружение, имеющее флютбет с одним шпунтом, расположенное на водопроницаемом слое грунта конечной глубины.** Обозначая

Таблица 124

$S = 0{,}4\,T$

b_1	x в долях T											b_2
	−0,75	−0,50	−0,25	−0	+0,25	+0,50	+0,75	+1,00	+1,25	+1,50	+1,75	
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	0,60	0,55	0,48	0,41	0,34	0,26	0,17	2,0
0,5	1,00	1,00	0,88	0,84	0,56	0,51	0,45	0,39	0,32	0,25	0,16	2,0
1,0	0,90	0,83	0,76	0,73	0,50	0,45	0,40	0,34	0,28	0,22	0,14	2,0
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	0,53	0,47	0,39	0,30	0,20	0	0	1,5
0,5	1,00	1,00	0,85	0,82	0,49	0,43	0,36	0,27	0,19	0	0	1,5
1,0	0,85	0,77	0,71	0,69	0,43	0,38	0,32	0,24	0,16	0	0	1,5
1,5	0,72	0,67	0,62	0,60	0,38	0,33	0,28	0,22	0,15	0	0	1,5
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	0,43	0,35	0,24	0	0	0	0	1,0
0,5	1,00	1,00	0,81	0,77	0,39	0,32	0,12	0	0	0	0	1,0
1,0	0,82	0,73	0,67	0,64	0,33	0,27	0,18	0	0	0	0	1,0

$S = 0{,}3\,T$

0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	0,59	0,51	0,42	0,33	0,22	0	0	1,5
0,5	1,00	1,00	0,83	0,78	0,53	0,46	0,38	0,29	0,20	0	0	1,5
1,0	1,38	1,75	0,69	0,66	0,45	0,40	0,33	0,25	0,17	0	0	1,5
0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	0,40	0,39	0,26	9	0	0	0	1,0
0,5	1,00	1,00	0,80	0,74	0,43	0,34	0,23	0	0	0	0	1,0
1,0	0,81	0,71	0,64	0,61	0,36	0,29	0,19	0	0	0	0	1,0

глубину слоя грунта через T, длину верховой части флютбета — через B_1, низовой части — через B_2 и длину шпунта — через S, выразим их в приведенных величинах, принимая T за основной размер, т. е. найдем величины

$$b_1=\frac{B_1}{T},\quad b_2=\frac{B_2}{T},\quad \text{и}\quad s=\frac{S}{T}.$$

Принимая за единицу масштаба $T=1$ ед. масш. $=\pi:2$, получим для системы координат и обозначений, указанных на чертеже 143, распределение давлений по флютбету от потока грунтовых вод, выражаемое следующей формулой, где Th — обозначены гиперболические функции:

$$\mathrm{Sn}^2[h_r, K, k]=\frac{[1+\cos s\sqrt{Th^2b_1+\mathrm{tg}^2s}]\cdot[\cos s\sqrt{Th^2b_2+\mathrm{tg}^2s}-\zeta]}{\cos s[\sqrt{Th^2b_2+\mathrm{tg}^2s}+\sqrt{Th^2b_1+\mathrm{tg}^2s}][1-\zeta]} \qquad (16)$$

Входящая в эту формулу переменная ζ определяется из уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\zeta&=\pm\cos s\sqrt{Th^2x+\mathrm{tg}^2s}\quad\text{для}\quad|\sin s|\leqslant|x|\leqslant|1|\\ \zeta&=\pm\cos s\sqrt{\mathrm{tg}^2s-\mathrm{tg}^2y}\quad\text{для}\quad(-\sin s)\leqslant y\leqslant(+\sin s)\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

причем знак плюс (+) берется для низовой части флютбета, а знак минус (—) для верховой части.

Модуль sn $[h_r, K, k]$ находится из следующей зависимости:

$$k^2=\frac{2\cos s[\sqrt{\mathrm{tg}^2s+Th^2b_2}+\sqrt{\mathrm{tg}^2s+Th^2b_1}]}{[1+\cos s\sqrt{\mathrm{tg}^2s+Th^2b_2}]\cdot[1+\cos s\sqrt{\mathrm{tg}^2s+Th^2b_1}]}. \qquad (18)$$

По уравнениям (16 и 18) подсчитаны ниже в таблице 7 приведенные давления h_r на флютбет для значений:

$$b_1=(0-1{,}5)\,T;\ b_2=(1-2)\,T\quad\text{и}\quad s=(0{,}3-0{,}4)\,T.$$

Принятые обозначения в таблице 7: $+0$ и -0 соответствуют точкам у основания шпунта, находящимся с низовой $(+0)$ и верховой (-0) сторон флютбета.

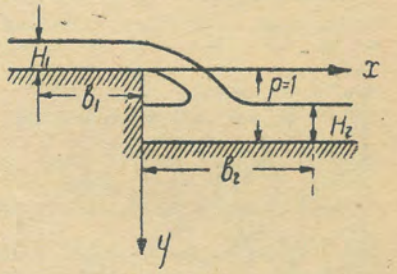
Данные таблицы 7 дают возможность определить ту часть напора Δh_r потока грунтовых вод, которая поглощается на длине шпунта; рассматриваемая часть напора, очевидно, равна разности давлений в точках $+0$ и -0; отношение разности Δh_r к действительной длине шпунта дает так называемый удельный эффект шпунта. Значения Δh_r приведены в таблице 125 для приведенных длин $s=0{,}4$ и $0{,}3$:

Таблица 125

b_1 \ b_2	$S=0{,}4$			$S=0{,}3$	
	1,00	1,50	2,00	1,00	1,50
0,0	0,53	0,44	0,37	0,46	0,38
0,5	0,35	0,30	0,26	0,29	0,22
1,0	0,28	0,24	0,21	0,21	0,18

Третья группа сооружений

а) Одноступенчатый перепад без шпунта. Слой водопроницаемого грунта, на котором расположен перепад, считаем безграничным; принятая координатная система приведена на чертеже 144.



Черт. 144.

За основной размер принимаем высоту перепада: единица длины, равная $p=\frac{\pi}{2}$.

Распределение давлений по флютбету выражается формулой:

$$\cos(\pi h_r)\cdot[\beta_2+\beta_1]=2\zeta-[\beta_2-\beta_1], \qquad (19),$$

где вспомогательная переменная ζ связана с координатами (x, y) таким образом:

$-x=\mathrm{Ar\,Sh}\sqrt{-\zeta}+\sqrt{-\zeta(1-\zeta)}$ для верховой части перепада, где $x<0$;

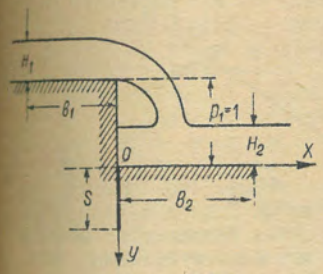
$y=\arcsin\sqrt{\zeta}+\sqrt{\zeta(1-\zeta)}$ — для стенки падения;

$x=\sqrt{\zeta(\zeta-1)}-\mathrm{Ar\,Ch}\sqrt{\zeta}$ — для низовой части перепада, где $x>0$.

Величины β_1 и β_2 определяются из предыдущих формул при значениях $x=-b_1$ и $x=+b_2$.

По приведенным уравнениям построена номограмма (черт. 146) для определения давления при изменениях b_1 от 0,5 p до 2 p и b_2 от 1,5 p до 4 p.

Пользование номограммой таково: по заданным высоте стенки падения p, длинам верховой и низовой частей флютбета B_1 и B_2 определяют b_1 и b_2 (в долях p) и находят соответствующую им точку (N) на сетке помеченных линий b_1 и b_2, соединяют эту точку прямой с точками шкалы координат (x, y); продолжение этой прямой до шкалы давлений укажет величину приведенных давлений. Координатная шкала выражена также в долях p.



Черт. 145.

б) Одноступенчатый перепад со шпунтом. Условия для водопроницаемого слоя грунта те же, что и ранее; координатная система и обозначения приведены на чертеже 145. За основной размер принимается также высота стенки падения, т. е. считаем, что единица длины равна $p=\frac{\pi}{2}$.

Распределение давлений потока грунтовых вод по флютбету имеет следующее положение:

$$h_r=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{2\zeta-\beta_2+\beta_1}{\beta_2+\beta_1}. \qquad (20)$$

Вспомогательная переменная ζ связана с координатами (x, y) следующими зависимостями:

1) для верховой части перепада ($x < 0$):

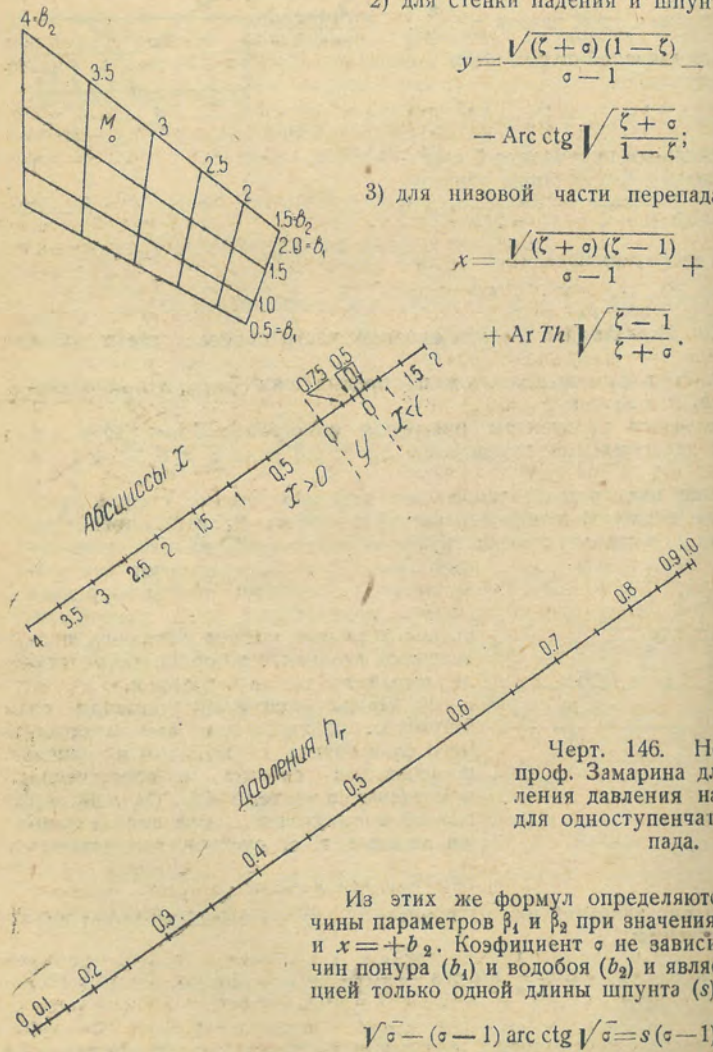
$$-x = \frac{\sqrt{(\zeta+\sigma)(\zeta-1)}}{\sigma-1} - \operatorname{Ar}Th\sqrt{\frac{\zeta+\sigma}{\zeta-1}}; \qquad (21)$$

2) для стенки падения и шпунта ($y = 0$)

$$y = \frac{\sqrt{(\zeta+\sigma)(1-\zeta)}}{\sigma-1} - \operatorname{Arc\,ctg}\sqrt{\frac{\zeta+\sigma}{1-\zeta}}; \qquad (22)$$

3) для низовой части перепада ($x > 0$):

$$x = \frac{\sqrt{(\zeta+\sigma)(\zeta-1)}}{\sigma-1} + \operatorname{Ar}Th\sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta+\sigma}}. \qquad (23)$$



Черт. 146. Номограмма проф. Замарина для определения давления на флютбет для одноступенчатого перепада.

Из этих же формул определяются и величины параметров β_1 и β_2 при значениях $x = -b_1$ и $x = +b_2$. Коэфициент σ не зависит от величин понура (b_1) и водобоя (b_2) и является функцией только одной длины шпунта (s).

$$\sqrt{\sigma} - (\sigma-1)\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\sigma} = s(\sigma-1). \qquad (24)$$

Поф. Зрамариным построена по этим уравнениям номограмма

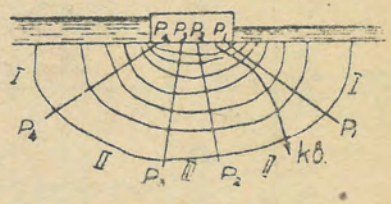
(черт. 148) для пределов B, до $2p$, B_2 до $4{,}5p$ и s до $1{,}5p$. На номограмме $b_1 b_2$ и s выражен через стенку падения p. Расчет ведется так: на сетке находят точку пересечения вертикали с отметкой s и наклонной линии (b) с отметкой x, равной получившейся b_2 (на черт. 148 обозначено ○ кружком). Через найденную точку и точку шкалы $h_r = 0$ проводят прямую. То же проделывают с вертикалью s и наклонной линией b_1 через точку пересечения этих линий (кружок) и точку шкалы давлений $h_r - 1$ проводят прямую до пересечения с ранее проведенной.

Через точку их пересечения M и точки шкалы абсцисс и ординат проводят прямые до пересечения со шкалою давлений, где и читают расчетные давления.

Наличие фокусов размыва натолкнуло инж. Терцаги на необходимость рассмотрения общего равновесия грунта в условиях напорного грунтового потока. При расчетах равновесия учитывается и влияние гидродинамического давления грунтового потока.

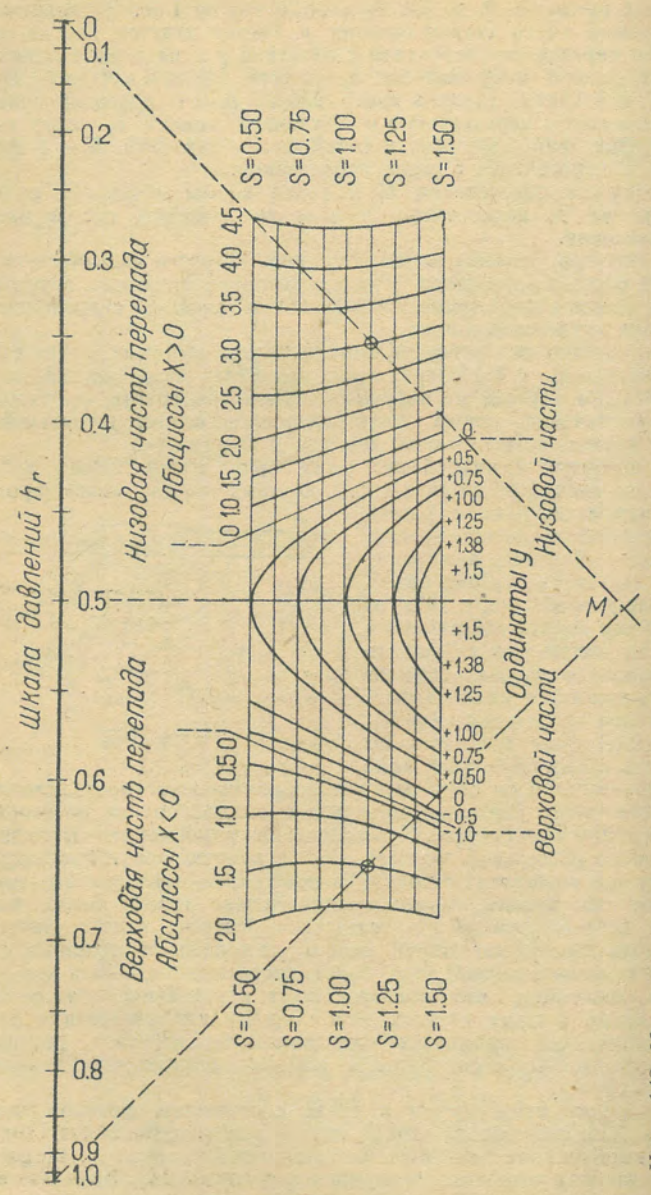
При определенных скоростях грунтового потока частицы грунта становятся взвешенными, и благодаря этому меняется механический состав грунта, происходят внутренние нарушения структуры грунта, что вызывает сейчас же увеличение уклона фильтрационного потока и дальнейшее разрушение грунта, которое может повести к катастрофе.

Свои предположения инж. Терцаги подтвердил специальными лабораторными исследованиями, на основании которых можно констатировать, что фактическое нарушение равновесия происходит несколько позднее теоретического. Явлению выпирания по Терцаги дается следующее объяснение: в зоне второй (черт. 147) на каждую частицу грунта действует вес вышележащих частиц γ_1 и гидродинамическое давление потока, создавая в результате некоторое силовое поле, характеризуемое кривой давления K_b. Частицы второй зоны двигались бы вдоль силовой линии поля, если бы не встретили препятствия со стороны ниже расположенных слоев, вследствие невозможности такого движения происходят сжатие грунта по направлению силовой линии и растяжение по направлению, к ней перпендикулярному, передаваемое по раздельной линии P_1—P_1 на первую зону. Рассматривая первую зону как выпираемую призму и полагая, что давлению со стороны второй зоны эта призма сопротивляется только своим весом, можно представить себе случай, когда вследствие больших пьезометрических уклонов потока давление от второй зоны будет настолько большим, а вес выпираемой призмы в первой зоне будет настолько уменьшен гидродинамическим давлением, что призма станет неустойчивой, т. е. будет выпираться вверх, в таких случаях инж. Терцаги для увеличения устойчивости рекомендует применение дополнительных нагрузок, увеличивающих вес выпираемой массы грунта в размерах, определенных условиями устойчивости грунта.



Черт. 147.

Аналогичные же предложения в связи с наличием фокусов размыва у низовых зубьев сооружений делает целый ряд гидротехников, которые рекомендуют применение так называемых обратных фильтров в начале рисбермы, обеспечивающих устойчивость грунта под сооружением. При этом глуби на низового зуба должна делаться таких размеров, чтобы скорости фильтрации могли бы выравняться на участке от основания зуба до дна нижнего бьефа.



Черт. 148. Номограмма для определения давления на флютбет одноступенчатого перепада со шпунтом.

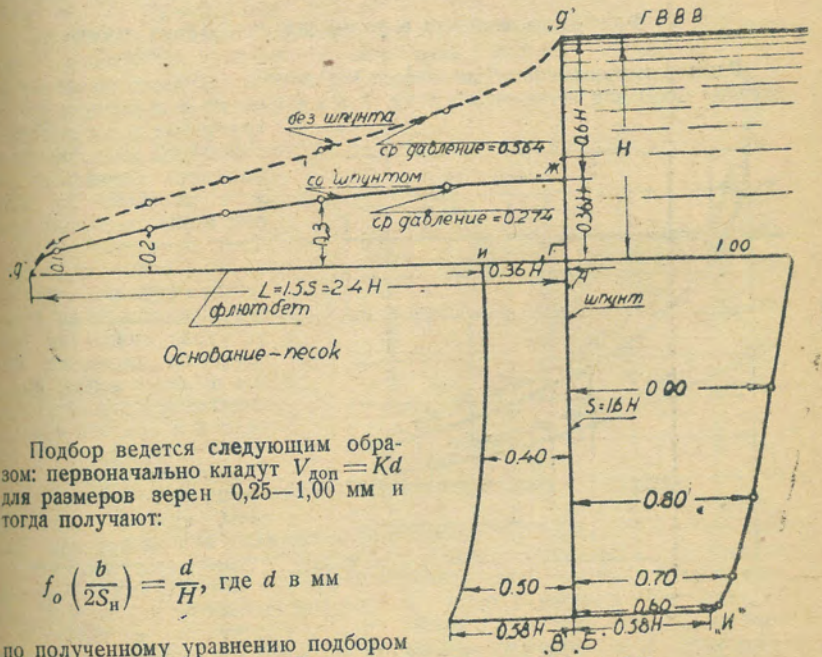
Определение глубин низового зуба можно производить по данным акад. Павловского по формуле:

$$\frac{f_0\left(\frac{b}{2S_н}\right)}{S_н} = \frac{V_{доп}}{kH},$$

где $S_н$ — глубина низового зуба,
b — суммарная длина понура и водобоя,
H — разность бьефов,
k — коэфициент фильтрации грунта,
$V_{доп}$ — допускаемая скорость для грунта на размыв,
$f_0\left(\frac{b}{2S_н}\right)$ — функция, значения которой берутся по таблице.

Таблица 125 а

$\frac{b}{2S_н}$	0,10	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	1,0
$f_0\left(\frac{b}{2S_н}\right)$	0,255	0,205	0,165	0,140	0,125	0,111	0,100	0,100



Черт. 149.

Подбор ведется следующим образом: первоначально кладут $V_{доп} = Kd$ для размеров зерен 0,25—1,00 мм и тогда получают:

$$f_o\left(\frac{b}{2S_н}\right) = \frac{d}{H}, \text{ где } d \text{ в мм}$$

по полученному уравнению подбором находят $S_н$. Фильтрационный напор у

основания зуба тогда равен h

$$h = 2H\frac{S_н}{L} + t_2,$$

где все обозначения известны, кроме t_2 глубины воды в нижнем бьефе и L — общей фильтрационной длины.

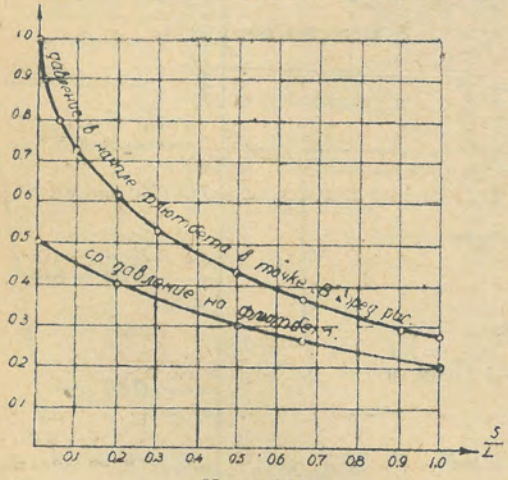
4. Предложение проф. Вольфа.

Подробное теоретическое рассмотрение вопроса о движении напорной грунтовой воды под флютбетами в гидротехнических сооружениях было произведено в 1916 г. проф. Вольфом, который подошел к разрешению вопроса, как к задаче математической физики по аналогии с тепловыми явлениями. Результаты исследований проф. Вольф применил для частного случая — к глубине шпунта $S = 1{,}6\,H$ и длине флютбета $L = 1{,}5\,S$. Результаты его работы приведены на чертеже 149, где показано постепенное изменение давления фильтрационных вод (это изменение давлений может быть построено по номограмме черт. 140 для $b_2 = 1{,}5$, $b_1 = 0$, $s = 1$ или по таблице 4 для плоского флютбета при $S = 0$).

Свои подсчеты проф. Вольф производил в применении к песчанистым грунтам. Сводный результирующий график его работ представлен на чертеже 150, на котором дана зависимость фильтрационного давления от отношения глубины забивки шпунта к общей длине флютбета.

3. Флютбеты шлюзов в условиях свободного потока.

Размеры флютбета. Длины частей флютбета находятся по тем же формулам, что и для напорного потока. Так же находится и толщина его, если грунтовые воды залегают не ниже 1—2 *м* от поверхности флютбета, применяя при этом меньшие из указанных выше значений коэфициентов η.

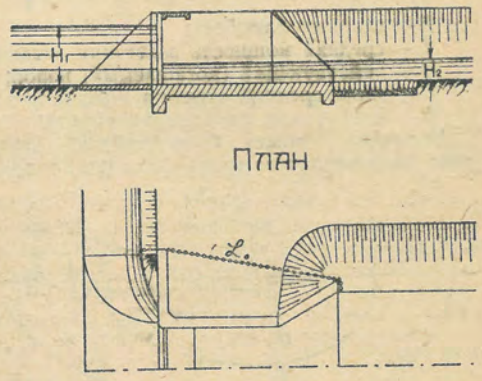


Черт. 150.

При более глубоком залегании грунтовых вод просачивающаяся из каналов вода, уходя вниз, или совершенно не оказывает давления на сооружения, как это имеет место для сооружений мелкой и средней ирригационной сети, или давит только на низовые концы сопрягающих сооружений (перепады, крутые быстротоки), если они входят или близки к зоне грунтовых вод.

Для первых сооружений толщина назначается конструктивно с поверкой обхода воды за стенами сооружения; расчет флютбетов сопрягающих сооружений будет рассмотрен ниже.

Боковое обтекание. Грунтовая вода протекает не только под флютбетом, но и за стенами сооружений в условиях свободного потока. Поверка устойчивости грунта производится по двум направлениям: первое — по отношению горизонтальной проекции L_o кратчайшего пути от верхнего бьефа к нижнему к действующему напору; второе — по длине горизонтального пути вдоль стен сооружения (черт. 151).



Черт. 151.

Хотя второй путь всегда оказывается длиннее первого, но вследствие возможности образования за стенами сооружения продольной трещины в грунте (от осадки грунта, от деформации стен и т. д.) последняя поверка обязательна. В этом случае по практическим данным необходимо иметь длину такого бокового обтекания равной 0,67—0,75 от длины развертки флютбета $L = CH$.

Первое условие — отношение L_o к H — должно удовлетворять принятым для земляных плотин уклонам так называемых линий насыщений, взятых с некоторым запасом вследствие того, что материковый грунт по своим свойствам менее известен, чем грунт плотин, и зачастую менее надежен, чем плотинный (т. е. искусственно уложенный).

Отношения L_o к H приведены в следующей таблице 126.

Таблица 126

№ по пор.	Грунты	Классы сооружений I	II	III	IV	V
1	Песчаные	8,0	6,0	5,0	3,5	Конструктивно
2	Лёсс легкий	6,5	5,0	4,0	3,0	
3	„ тяжелый	6,0	4,5	3,5	2,7	
4	Глинистые	5,0	4,0	3,2	2,4	

4. Расчет сквозных флютбетов по проф. Замарину.

Сквозными флютбетами называются такие, в кладке которых делаются отверстия для выхода грунтовых вод. Наличие отверстий создает разгрузку давления воды на флютбет и тем самым позволяет его делать более тонким.

При сквозном флютбете выход воды через отверстия будет для нее более затруднителен, чем через грунт, поэтому активная зона по дну каналов увеличивается до (1—1,2) L, считая от концов непроницаемой части (L — длина горизонтальной проекции непроницаемой части флютбета). В преде-

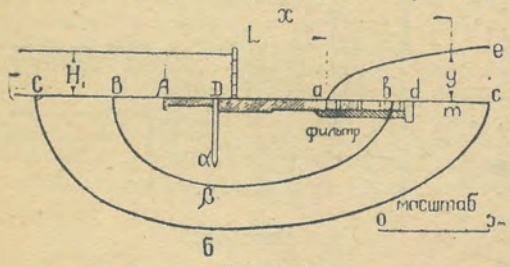
лах активной зоны, ограниченной вглубь от флютбета на двойную глубину шпунтов, выклинивается около 0,7 всего фильтрационного расхода.

Очерчивая в этих пределах границу активной зоны и срединную струйку в ней, можно найти расход через нее:

$$Q = \omega v = BT\frac{H}{l}k, \qquad (25)$$

где B — ширина флютбета;
T — средняя мощность залегания активной зоны;
H — действующий (погашаемый) напор;
l — длина средней струйки $B\beta b$;
k — коэфициент фильтрации грунта.

Величина T может быть найдена как отношение площади активной зоны (по сечению ее вдоль флютбета) к длине l (черт. 152).



Черт. 152.

Расчет сквозных флютбетов в главном состоит в отыскании (или поверке) числа отверстий и размеров фильтра под ними, подбираемых так, чтобы скорости входа в фильтр были безопасны как против вмыва мельчайших частиц грунта в него, так и против вымыва частиц фильтра в отверстие. Для такого расчета необходимо знание протекающего через каждое отверстие расхода воды, что может быть найдено следующим способом.

Построим кривую суммарных расходов на фильтрацию через дно нижнего бьефа, у которой ордината над границей активной зоны $cl = Q = 0{,}7\,Q_0$, где Q_0 — полный расход фильтрации. Любая промежуточная ордината y такой кривой будет указывать фильтрационный расход от конца непроницаемой части флютбета a до абсциссы этой ординаты, т. е. на участке am.

Для построения кривой суммарных расходов на фильтрацию ниже приводится таблица ординат y и горизонтальных расстояний от начала непроницаемой части, считая ее длину за единицу, т. е. полагая $L = 1$; ординаты суммарных расходов даются пока в неизвестном масштабе. Так как абсцисса Ac — границы активной зоны, т. е. точка c известна, то по таблице 127, зная x, находим для нее y; приравнивая эту ординату расходу, получаем отсюда масштаб ординат.

Таблица 127

X	1	1,05	1,1	1,2	1,3	1,4
Y	0	0,32	0,45	0,62	0,76	0,87
X	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
Y	0,96	1,02	1,12	1,19	1,26	1,32
X	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
Y	1,37	1,43	1,48	1,52	1,57	1,61

Чтобы найти расходы воды через отверстия, необходимо найти ординаты над серединами промежутков между рядами отверстий: y_1, y_2... Тогда через одно отверстие первого ряда будет протекать расход:

$$Q_1 = M\frac{y_1}{n_1},$$

где M — масштаб ординат расходов;
n_1 — число отверстий в первом ряду.

Для расхода Q_2 через одно отверстие второго ряда будем иметь:

$$Q_2 = M\frac{y_2 - y_1}{n_2}. \qquad (26)$$

Назначение безопасной скорости входа в фильтр довольно неопределенно; можно на первых порах считать ее не меньшей отношения коэфициента фильтрации грунта основания к коэфициенту Бляя, рассматривая фильтр под отверстием, устроенным в форме полусферы:

$$v = \frac{k}{C} = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{2\pi R^2},$$

откуда:

$$R^2 = \frac{CQ}{2\pi k}. \qquad (27)$$

Здесь R — радиус сферы; v — скорость входа воды в фильтр; Q — расход, фильтрующийся через отверстие.

В формуле (27) коэфициент C указывает степень запаса в допускаемой скорости.

В действительности нет необходимости делать отдельные, под каждым отверстием фильтры; проще и надежнее сделать общий фильтр в виде песчано-гравелистого тюфяка толщиной, равной наибольшему радиусу сферы. Отверстия близ конца флютбета работают слабо по сравнению с поставленными выше по течению и казалось бы, что их можно и не делать; на самом деле, их надо делать, так как они отчасти облегчают работу верхних отверстий; кроме того в случае закупорок верхних отверстий они усиливают свою работу, разгружая тем самым флютбет от давления воды.

Давления воды на сквозную часть флютбета невелики; конструктивная толщина флютбета здесь будет достаточна для восприятия этого давления.

5. Гидротехнический расчет в условиях свободного движения грунтовых вод.

К таким сооружениям относятся земляные плотины, сопрягающие сооружения (перепады, быстротоки, консоли) и водопроводящие сооружения (акведуки, дюкеры и др.).

Расчет земляных плотин рассматривается в отделе плотин.

Гидротехнический расчет быстротоков, перепадов и консолей ведется преимущественно для условий свободного движения грунтовых вод.

а) Быстротоки. При глубоком залегании грунтовых вод никакого давления на флютбет верхней части сооружения не имеется: уровень естественных грунтовых вод, подпитываемый потерянной водой из каналов, несколько приподнимается, не достигая однако флютбета сооружения в верх-

ней и средней его частях; лишь внизу сооружения может иметься давление от грунтовых вод на флютбет.

Все это указывает на бесцельность придания сопрягающим сооружениям массивных размеров, — необходимо делать их флютбеты минимально конструктивной толщины. Равным образом раз грунт у сооружения не насыщен водой а, только влажен, то угол естественного откоса его будет не меньше, а, вернее, больше, чем для сухого состояния; отсюда ясно, что и толщины продольных стенок сооружения должны быть значительно уменьшены против делаемых до сего времени.

Для гидротехнического расчета необходимо знать высоту h_2 выклинивания грунтовых вод на откосе $h = \Delta P$, считаемую от дна нижнего канала. Опыты, произведенные в 1932 г. в Среднеазиатском научно-исследовательском институте ирригации с супесками, дали следующие результаты:

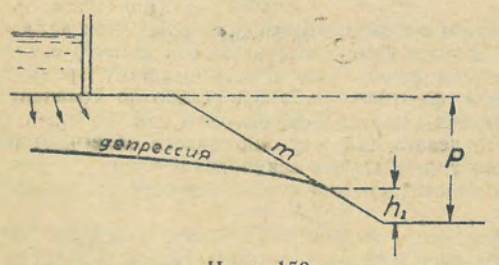
В таблице 128 № по пор. 1 соответствует уровню грунтовых вод, совпадающему с дном нижнего канала; № 2—когда грунтовые воды стоят на 1,5—2 м ниже дна нижнего канала, и № 3—для более низкого залегания грунтовых вод.

Таблица 128

№ по пор.	$m=2$	3	4	m_0
1	0,3	0,2	0,1	5–6
2	0,25	0,18	0,07	4,5–5
3	0,2	0,1	—	4–4,5

В таблице m указывает величину заложения откоса, а цифры — значения отношений высоты выклинивания h_2 к разности отметок дна верхнего и нижнего каналов (черт. 153), m_0 — то заложение откоса, при котором депрессия проходит через нижнюю бровку откоса.

Из таблицы следует, что при скатах местности с заложением m_0 грунтовая вода не оказывает давления, т. е. для быстротоков с уклоном около 0,2 не требуется расчета флютбета: размеры его назначаются конструктивно.



Черт. 153.

Для более крутых быстротоков расчет флютбетов ведется по одному из следующих способов.

Первый способ. Из точки *a* начала понура проводят прямые с различными заложениями *m* до горизонтали уровня грунтовых вод, если они залегают несколько выше дна или на дне нижнего канала.

По таблице 128 на проведенных прямых находят точки, отстоящие по вертикали от дна нижнего канала (черт. 154) на расстоянии ΔP.

Плавная кривая, проведенная через такие точки, может быть принята за депрессию у конца быстротока.

Второй способ. Для прямой *ab*, соединяющей начало понура и конец водоската, находится заложение *m*; по нему выбирают из таблицы 11 Δ и из полученной точки *e* проводят прямую с уклоном *i*, берущимся из следующей таблицы 129 (составлена по опытным данным).

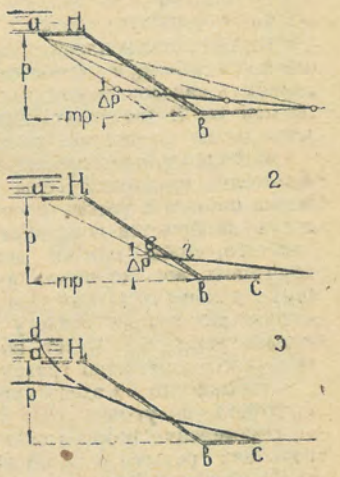
Таблица 129

№ по пор.	1	2	3
Проценты	13—18	17—22	20—25

Нумерация соответствует, как и выше, глубинам стояния грунтовых вод. Прямая *ei* принимается за депрессию в нижней части быстротока.

Третий способ. Проводится парабола; нижняя часть кривой принимается за депрессию.

б) Перепады. Выступы флютбета, образованные ступенями перепада при вытянутости всего сооружения, не внесут заметных изменений в условия свободного движения грунтовых вод, поэтому рассмотренные выше способы построения кривой депрессии возможно применить и к расчету флютбетов перепадов.



Черт. 154.

При уровне грунтовых вод, совпадающем с дном нижнего канала, можно считать растекание грунтовых вод по кривой депрессии, имеющей внизу форму параболы (черт. 155)

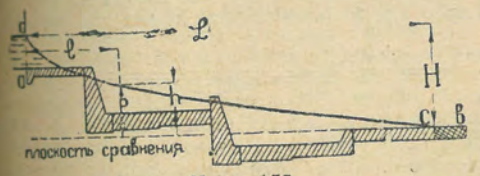
$$L(H-p)^3 = H^3 l, \qquad (28)$$

где H—общий теряемый напор, равный разности отметок воды в верхнем канале и дна нижнего канала;

p — пьезометрическое давление (в метрах водяного столба) на флютбет, считаемое от дна нижнего канала;

l — расстояние, измеряемое по горизонтали от начала непроницаемой части флютбета (понура) до рассматриваемой точки флютбета, для которой пьезометрическое давление равно p. Определение толщины массивного флютбета t ведется по обычной формуле (без учета напряжений кладки и трения в швах):

$$t = \eta_1 \frac{h}{\delta - 1},$$



Черт. 155.

где h — давление на флютбет, считаемое от верха флютбета до кривой депрессии;

δ — удельный вес кладки;

η_1 — коэфициент запаса, равный:

Таблица 130

Классы сооружений	I	II	III	IV	V
Коэфициент η_1	1,3	1	0,90—0,85	0,75—0,50	Конструктивно

Наиболее неясной стороной описанного расчета является выбор длины кривой депрессии L или, что то же самое, среднего ее уклона:

$$i = H:L.$$

Впредь до накопления опытного и исследовательского материала будем считать $L:H=m_0$ и располагать вершину параболы в точке d (черт. 155) для широких каналов, в которых отношение средней ширины в глубине воды не меньше 7; для узких каналов (с отношением средней ширины к глубине воды около 3) вершина параболы помещается в точке a.

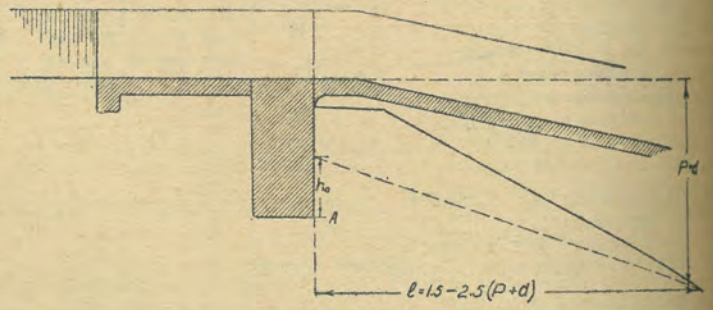
в) Консольные перепады. Расчет по данным проф. Замарина. Движение грунтовой воды под флютбетами консольных перепадов имеет много общего с рассмотренными случаями. Очевидно, толщина флютбетов здесь назначается конструктивно: длина же их должна быть достаточной для того, чтобы кривая депрессии, т. е. кривая свободной поверхности грунтовых вод, не выклинивалась бы на земляной откос (под перепадом выше уровня воды нижнего бьефа. Таким образом здесь расчет земляного откоса аналогичен расчету откоса быстротоков, и в тех случаях, когда кривая депрессии будет выходить выше уровня воды за перепадом, потребуется устройство гравелисто-галечникового фильтра.

Первый способ здесь применяют, проводя прямые из точки a — начала флютбета — до уровня воды в воронке за консолью.

Применение второго способа ничем не отличается от описанного выше: параболу третьего способа начинают из точки a.

Необходимо стремиться не только иметь депрессию, не выклинивающуюся наружу, но и заглубленную от поверхности грунта на величину капиллярного поднятия, т. е. около 1 — 1,5 $м$ для лёсса.

Приближенный способ расчета по данным проф. Михайлова. При расчетах консольных перепадов можно применять второй способ: общая длина фильтрационной линии L_f выдерживается по Бляю для контура понура и основного зуба, где фильтрационная линия заканчивается.



Черт. 156.

Затем определяется напор в точке A (черт. 156) у основания зуба. После этого размерам от точки A до выхода на откос под консолью дают такие размеры, чтобы не происходило размывающего выклинивания грунтовой воды. В этом случае можно вычерчивать от отметки напорного горизонта в точке A кривые депрессии обычным порядком. Довольно часто в практических случаях достаточным коэфициентом для устойчивости являлось придание длине заложения откоса коэфициента $n = 1{,}0—2{,}0$.

6. Конструкции флютбетов.

Формы флютбета. Подошве флютбета придается или уступчатое очертание или постепенное снижающееся. Последняя форма требует (черт. 157) меньшего количества кладки, но несколько сложнее в производстве — при трамбовке клиновых слоев бетона — и затруднительна при кладке флютбета из штучного камня.



Черт. 157.

Постепенное очертание подошвы флютбета выполняется при работе насухо, без водоотлива; при водоотливе, особенно в работе на слабых грунтах, приходится фронт работ разделять на отдельные участки, ограждаемые строительными шпунтами, неглубокими и менее плотными, чем расчетные шпунты (устраиваемые против фильтрации). В таких случаях в отдельных секциях флютбета кладка делается одинаковой толщины с уступами от секции к секции.

Рабочие шпунты следует ставить в начале водобоя как разгружающие флютбет от давления; постановка шпунта вместо начала в конце водобоя увеличивает выпирающее давление воды на флютбет.

В тех случаях когда по расчету не требуется шпунта, все же зачастую его ставят длиной, равной глубине воды перед шлюзом H_1 или несколько больше (до 1,5 H_1); объясняется это тем, что стык флютбета с грунтом действительно является наиболее слабой частью конструкции, особенно при закрытых щитах или при подпертой воде перед ними; там легче могут образоваться трещины и каверны, обнаружить которые своевременно трудно.

Сказанное выше о фокусах размыва заставляет делать шпунт (или зуб) в конце водобоя длиной около t_2.

Швы. В крупных и средних сооружениях массивные флютбеты отделяются от стен и бычков сквозным швом для обеспечения независимости осадок тяжелых частей (стены) от сравнительно легких (флютбетов).

Однако устройство таких швов не всегда является обязательным; так в шлюзах типа безнапорных труб выгодно флютбет делать в форме обратных арок, опирающихся на продольные стены труб; толщина флютбета в таких случаях редко превосходит конструктивную. В открытых шлюзах, имеющих сравнительно узкие пролеты, бычки не отделяются от флютбета швами, если прямые, проведенные под 45° от концов бычков, пересекаются, не доходя подошвы флютбета. В таких случаях можно толщину флютбета уменьшить до этой точки пересечения, проверив флютбет на скалывание по грани y бычка; полезно в таких конструкциях давать флютбету легкую армировку. Температурные и строительные швы желательно объединять, так как всякий шов, внося усложнение в конструкцию, является ее слабым местом. Расстояния между ними делают около 5—12 $м$ в зависимости от расчетной амплитуды температур, мощности флютбета и оборудования работ: чем тоньше флютбет, тем ближе швы друг к другу. Швы должны быть по возможности водонепроницаемы.

Толщина флютбета. Понур в шлюзах на сети, т. е. в сооружениях, работающих в выравненных, точно известных условиях, часто делается из глинобетона, защищенного мостовой; при работе шлюза донными отверстиями развивающиеся большие скорости на понуре заставляют вводить вместо мостовой бетонную облицовку, по крайней мере близ щитов. В речных сооружениях и в сооружениях первого класса понур делается из кладки (бетонной, бутовой и гибкие железобетонные). Толщина глинобетона делается

Таблица 131

Эллиптические интегралы.

Эллиптические интегралы 1 рода $F(\varphi, k)$, $k = \sin\alpha$.

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3562	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7117	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8983	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2125	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4057	1,4344	1,2853	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2353	2,4337
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5045	3,1534	∞

Эллиптические интегралы 2-го рода $E(\varphi, k)$, $k = \sin\alpha$.

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1737
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6443	0,6428
50	1,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,81 4	0,7954	0,7801	0,7697	0,7661
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0 9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1.0750	1 0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1.1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1 5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

α	K	E	α	K	E	α	K	E	α	K	E
0°	1,5708	1,5703	23°	1,6361	1,5090	46°	1,8692	1,3418	69°	2,4610	1,1273
1	1,5709	1,5707	24	1,6426	1,5037	47	1,8848	1,3329	70	2,5016	1,1184
2	1,5713	1,5703	25	1,6490	1,4981	48	1,9011	1,3238	71	2,5507	1,1096
3	1,5719	1,5697	26	1,6557	1,4924	49	1,9180	1,3147	72	2,5998	1,1011
4	1,5727	1 5689	27	1,6627	1,4864	50	1,9356	1,3055	73	2,6521	1,0927
5	1,5738	1,5678	28	1,6701	1,4803	51	1,9539	1,2963	74	2,7081	1,0844
6	1,5751	1,5665	29	1,6777	1,4740	52	1,9729	1,2870	75	2,7681	1,0764
7	1,5767	1,5650	30	1,6858	1,4675	53	1,9927	1 2776	76	2,8327	1,0686
8	1,5785	1,5630	31	1,6941	1,4608	54	2,0133	1,2682	77	2,9026	1,0611
9	1,5805	1,5611	32	1,7028	1,4539	55	2,0347	1,2587	78	2,9786	1,0538
10	1,5828	1,5589	33	1,7119	1,4439	56	2,0571	1,2492	79	3,0617	1,0468
11	1,5854	1,5564	34	1,7214	1,4397	57	2,0804	1 2397	80	3,1534	1,0401
12	1,5882	1,5537	35	1,7313	1,4323	58	2,1047	1,2301	81	3,2553	1,0338
13	1,5913	1,5507	36	1,7415	1,4248	59	2,1300	1,2206	82	3,3699	1,0278
14	1,5946	1,5476	37	1,7522	1,4171	60	2,1565	1,2111	83	3,5004	1,0223
15	1,5981	1 5442	38	1,7633	1,4092	61	2,1842	1,2015	84	3,6519	1,0172
16	1,6020	1,5405	39	1,7748	1,4013	62	2,2132	1,1921	85	3,8317	1,0127
17	1,6061	1,5367	40	1,7868	1,3931	63	2,2435	1.1823	86	4,0528	1,0087
18	1,6105	1,5326	41	1,7992	13,849	64	2,2754	1,1732	87	4,3337	1,0053
19	1,6151	1,5283	42	1,8122	1,3765	65	2,3088	1,1638	88	4,7427	1,0026
20	1,6200	1,5238	43	1,8256	1,3680	66	2 3439	1,1546	89	5,4349	1,0008
21	1,6252	1,5191	44	1,8396	1,3594	67	2,3809	1,1454	90	∞	1,0000
22	1,6307	1,5142	45	1,8541	1,3506	68	2,4198	1,2362			

$$F=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi}},\quad E=\int_0^{\varphi}d\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi}:\quad E=\int_0^{\pi/2}d\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi}$$

в 0,5–0,6 *м*, облицовка его плитами толщиной в 0,10 – 0,20 *м* и массивной кладкой в 0,25—0,40 *м*. Конструктивная толщина водобоя из массивной кладки по Бляю назначается:

для шлюзов-регуляторов $t = 0{,}55\sqrt{H}$,

„ промывных $t = 0{,}68\sqrt{H}$,

„ перепадов $t = 0{,}55\sqrt{p+H}$,

где H — глубина воды над водосливом перепада. Для ирригационных сооружений пределы эти могут быть понижены до $t = 0{,}4 - 0{,}6$ *м* для шлюзов-регуляторов; $t = 0{,}5 - 0{,}7$ *м* для промывных шлюзов и $t = 0{,}5 - 1{,}0$ *м* для перепадов в зависимости от размеров сооружения (по расходу и падению воды p) и материала (из бута — толще, чем из бетона). Глинобетон в деревянных сооружениях кладется слоем в 0,5 — 1 *м*.

Сливная часть должна быть водопроницаема; поэтому она устраивается из мостовой, габионов, бетонных плит с отверстиями, железобетонных гибко соединенных плит, фашин, камышитовых плит и др. Желательно шероховатость сливной части иметь близкую к шероховатости канала, чтобы получить более спокойный перевод больших скоростей на водобое к малым в канале.

Вследствие ненадежности расчета сливной части — иногда рекомендуется делать за сооружением заранее яму, заполняя ее камнем; лучше эту яму отодвигать от водобоя примерно на длину флютбета.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ, ОПЫТНЫЕ ДАННЫЕ, ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ.

1. ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ И НОРМАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ.

а) Растяжение. Цилиндрический брусок длиной l, диаметром d, находящийся под действием двух разных, направленных в прямо противоположные стороны растягивающих сил, приложенных к обоим его концам и равномерно распределенных по сечению, дает:

а) увеличение длины l бруска на Δl, т. е. до величины $l + \Delta l$;

б) сжатие или уменьшение диаметра d на Δd, т. е. до величины $d - \Delta d$.

Отношение приращенной длины Δl к первоначальной длине называется относительным удлинением, т. е.:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{1}$$

Отношение уменьшения диаметра Δd к первоначальному диаметру d называется поперечным сжатием, т. е.

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = \frac{\varepsilon}{m}.$$

Количество, равное отношению удлинения к поперечному сжатию, называется числом Пуасона, т. е.

$$m = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q}. \tag{2}$$

Число Пуасона в зависимости от материала бруска и для изотропных тел заключается в пределах от 3 до 4. Для металлов чаще всего принимают:

$$m = \frac{10}{3}.$$

Относительному удлинению $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ соответствует нормальное напряжение растяжения, т. е.

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{\varepsilon}{\alpha}, \tag{3}$$

где F — площадь поперечного сечения бруска,

σ — напряжение,

P — нагрузка,

Отношение удлинения бруска (ε) к его напряжению называется коэфициентом удлинения, имеющим размерность в $см^2/кг$, т. е.

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \alpha = \frac{1}{E}. \tag{4}$$

Обратная величина коэфициента удлинения называется модулем упругости, имеющем размерность в $кг/см^2$, т. е.:

$$E = \frac{P}{F}\frac{l}{\Delta l}. \tag{5}$$

Физический смысл модуля упругости может быть представлен следующим образом: модулем упругости называют такое напряжение, при котором брусок, подверженный этому напряжению, удваивает свою длину.

б. Закон Гука. Согласно закону Гука для некоторых материалов (например железо сварочное, литое, сталь, красная медь, алюминий, дерево и др). коэфициент удлинения в известных пределах можно считать постоянным. В этом случае удлинение ε пропорционально напряжению, т. е. согласно закону Гука:

$$\varepsilon = \alpha_0 \sigma. \tag{6}$$

Имеющийся предел σ_p, до которого сохраняется пропорциональность между удлинением и напряжением, называется пределом пропорциональности.

Большинство стройматериалов не имеют предела пропорциональности. По Баху можно для этих материалов до предела текучести считать с достаточной точностью приемлемым следующий закон:

$$\varepsilon = \alpha_0 \sigma_n, \tag{7}$$

где α_0 и n имеют для каждого материала постоянные значения.

Для чугуна, красной меди, цинка, гранита, песчаника, цемента цементного раствора и бетона $n > 1$, т. е. удлинения возрастают быстрее, чем напряжения; для кожи и пеньковых канатов $n < 1$, т. е. напряжения возрастают быстрее, чем удлинения.

Пределом текучести σ_s называют напряжение, лежащее выше σ_p, при котором некоторые материалы дают особенно быстрое и остающееся удлинение. Предел текучести σ_s измеряется в $кг/см^2$.

Напряжение, возрастающее по мере увеличения нагрузки и увеличения удлинения, доходит (см. черт. 1) до максимального напряжения σ_b, которое называется временным сопротивлением растяжению или прочностью на растяжение.

Соответственно разрыв бруска происходит позже при дальнейшем его удлинении и продолжающемся действии нагрузки. В этот период напряжение, отнесенное к первоначальному сечению бруска, несколько падает, понижаясь с σ_b до σ_z (см. черт. 1). Таким образом временным сопротивлением следовало бы строго говоря считать σ_z.

За удлинение, соответствующее напряжению σ_b принимается всегда ε_z вместо трудно поддающегося измерению ε_b.

Для выяснения временного сопротивления необходимо после разрыва бруска определить его длину l_b и сечение F_b в месте разрыва.

Принято называть: а) удлинением:

$$\delta = 100 \cdot \frac{l_b - l}{l} \tag{8}$$

и б) поперечным сжатием:

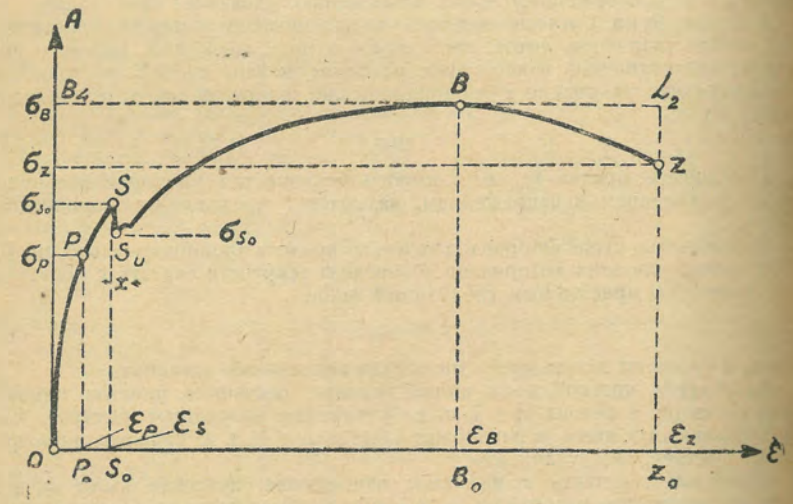
$$\psi = 100 \cdot \frac{F - F_b}{F}.$$

Поперечное сжатие ψ часто называют мерой текучести материала.

Удлинившийся под влиянием нагрузки брусок на величину Δl после снятия нагрузки не теряет окончательно полученную раньше деформацию, т. е. его длина остается после разгрузки несколько больше первоначальной длины.

Если через Δl_1 обозначим исчезающее изменение длины, так называемое упругое удлинение, то получим остаточное удлинение

$$\Delta l_2 = \Delta l - \Delta l_1.$$



Черт. 1.

Для незначительных нагрузок остаточные удлинения Δl_2 равны нулю или ничтожны по величине. То напряжение σ_E, до которого остаточное удлинение Δl_2 почти равно нулю, до которого следовательно брусок обладает почти полной упругостью, называется пределом упругости. Согласно постановлению Международного конгресса по испытанию материалов, состоявшегося в 1906 г. в Брюсселе, пределом упругости считается напряжение, при котором Δl_2 достигает величины 0,001%.

В большинстве случаев деформация и сопротивление материалов зависят в значительной мере от влияния температуры.

в. Сжатие. Напряжение сжатия σ вызывает укорочение ε длины бруска l на Δl, т. е. $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, а также увеличение его диаметра, поперечное утолщение (выпучивание) $\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m}$. Вместо предела текучести σ_s имеем предел сминания

σ_c, при котором имеет место течение материала в поперечном направлении не дающее однако разрушения тела.

г. Временное сопротивление сжатию (крепость на сжатие) σ_b, т. е. то напряжение, при котором тело под действием сжимающей нагрузки разрушается, с увеличением длины бруска уменьшается.

д. Твердость по Бринелю H в $кг/мм^2$ определяется посредством испытания с помощью шарика Бринеля и характеризуется частным от деления силы (в $кг$), с которой шарик из закаленной стали диаметром в 1 $см$ вдавливается в испытуемый материал, на поверхность (в $мм^2$) образуемого в течение одной минуты углубления.

е. Механическая работа при растяжении и сжатии. Та работа A, которая требуется для изменения формы 1 $см^3$ призматического бруска до его разрыва, а также раздавливания, называется работоспособностью материала и изображается площадью $OPSBZZ_0O$ на черт. 1; величина ее ($кг \cdot см/см^3$):

$$A = \xi \sigma_b \varepsilon_z, \tag{9}$$

где σ_b, ε_z представляют собой прямоугольник $OB_1Z_2Z_0O$ со сторонами σ_b и ε_z, а ξ — коэфициент < 1.

Когда брусок подвергается действию растягивающей или сжимающей силы, приложенной на одном конце его и постепенно увеличивающейся от нуля до P, причем в сечении F, отстоящем от края на расстоянии x $см$, появляется нормальное напряжение σ, то механическая работа, которая до предела пропорциональности затрачивается на деформацию бруска, составляет (в $кг/см$):

$$A = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{P^2 dx}{EF} = \frac{1}{2}\int_0^l \alpha_0 \sigma^2 F dx. \tag{10}$$

Запас этой работы A сохраняется бруском, причем при нагрузке он целиком может быть взят у бруска обратно. В частности для призматического бруска, объем которого $Fl = V$ (в $см^3$), работа деформации до предела пропорциональности равна:

$$A = \frac{\sigma_2}{2E} Fl = \frac{\sigma_2}{2E} V = \frac{P}{2} \cdot \frac{\sigma}{E} l = \frac{l}{2} P \Delta l.$$

Здесь Δl означает удлинение или укорочение бруска.

ж. Ударная нагрузка. При внезапном приложении нагрузки (без начальной скорости) брусок (или балка, подверженная изгибу) испытывает напряжение вдвое большее, чем в случае действия на него той же нагрузки в состоянии его равновесия. Брусок воспринимает при этом энергию $A = P\Delta l_0$; однако деформация Δl_0 у него не остается, так как Δl_0 фактически больше той деформации, которая соответствует нагрузке P в состоянии равновесия. Деформированный брусок стремится вернуться в начальное состояние и претерпевает при этом известные колебания около состояния равновесия Δl.

2. УГЛОВЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ СРЕЗА (СДВИГ).

Когда под действием внешних сил две взаимно перпендикулярные плоские поверхности какого-нибудь элемента бруска, имеющего форму куба со сторонами 1, перемещаются друг относительно друга так, что составляемый ими прямой угол изменяется на величину γ (в дуговых

единицах), то одновременно с этим у того же маленького куба происходит взаимное перемещение на такую же величину γ каждых двух плоскостей его, взаимно параллельных, отстоящих друг от друга на расстояние 1. (Грань куба, до того имевшая очертание квадрата, принимает вид ромба.) Сдвиг или изменение угла γ получается всегда в результате одновременно возникающего в обоих взаимно перпендикулярных элементах поверхности бруска напряжения сдвига (среза) τ.

Отношение

$$\frac{\text{сдвиг}}{\text{напряжение сдвига}} = \frac{\gamma}{\tau} = \beta = \frac{1}{G}$$

называется коэфициентом сдвига (в $см^2/кг$); обратная величина этого коэфициента $G = \frac{1}{\beta}$ называется модулем скольжения (в $кг/см^2$).

Таким образом коэфициент сдвига β представляет собой то расстояние в $см$, на которое два элемента поверхности, отстоящие друг от друга на 1 $см$, взаимно перемещаются под влиянием напряжения сдвига, равного 1 $кг/см^2$; иначе говоря, коэфициент сдвига β есть тот угол в дуговых единицах, на который изменяется прямой угол, образуемый двумя до того взаимно перпендикулярными элементами поверхности при напряжении сдвига, равном 1 $кг/см^2$.

Между коэфициентом удлинения α и коэфициентом сдвига β, а также между модулем упругости E и модулем скольжения G существуют следующие соотношения:

$$\beta = \frac{2(m+1)}{m}\alpha; \quad G = \frac{m}{2(m+1)} \cdot E. \tag{11}$$

Отсюда, при $m = \frac{10}{3}$ получаем:

$$\beta = 2{,}6\,\alpha \text{ и } G = \frac{5}{13}E = 0{,}385\,E. \tag{12}$$

Временное сопротивление (или крепость на срез или сдвиг (τ_b) (в $кг/см^2$) есть то напряжение среза, при котором два соседние взаимно сдвинутые поперечные сечения бруска отделяются друг от друга

$$\tau_b = \mu_1 \sigma_b. \tag{13}$$

τ_p (в $кг/см^2$) есть напряжение среза, соответствующее пределу пропорциональности σ_p (стр. 481).

Чисто практическое значение имеют: крепость на изгиб $\sigma'_b = \mu_0 \sigma_b$ (в $кг/см^2$) как расчетное максимальное напряжение, при котором наступает излом изгибаемого бруска, и крепость на кручение τ'_b (в $кг/см^2$), как расчетное максимальное напряжение среза, дающее излом скручиваемого бруска.

3. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ЗАПАС ПРОЧНОСТИ НА РАЗРЫВ.

1. Коэфициенты прочности.

Запасы прочности для гидротехнических сооружений, т. е. отношение временного сопротивления σ_p к допускаемому напряжению для различных материалов при вполне достоверном определении могут приниматься следующие:

Таблица 1

Название материалов	Коэфициент прочности K					
	Основные			При изгибе		
	K_1	K_2	K_3	K'_1	K'_2	K'_3
Камни	10	10	10	5	10	10
Бетон	10	8	8	5	8	8
Железо	3	3	3	3	3	3
Чугун	10	6	6	5	6	6
Дерево вдоль волокон	6	4	4	6	3	3
Дерево поперек волокон	10	4	4	10	4	4
Ремни и канаты	5	—	—	—	—	—

Где:

K_1 коэфициент прочности при непосредственном растяжении,
K'_1 „ „ на растяжении при изгибе,
K_2 „ „ при непосредственном сжатии,
K'_2 „ „ на сжатие при изгибе,
K_3 „ „ „ скалывание при непосредственном сжатии,
K'_3 „ „ „ сдвиг при изгибе

Для временных и подсобных при строительстве сооружений коэфициенты запаса могут быть уменьшены на 20%. В тех случаях, когда временное сопротивление строительного материала наперед неизвестно, можно при расчете прочности гидротехнических сооружений руководствоваться нормами и формулами, приведенными в последующих параграфах.

4. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ.

А. Камни и каменная кладка.

1. Допускаемые напряжения для камней.

а) Естественные камни (подферменники и штучные камни).

Таблица 2

№ по порядку	Наименование	Допускаемое напряжение в $кг/см^2$	
		на сжатие	на скольжение и растяжение
	а) Общие данные		
1	Граниты, гнейсы, порфиры, сиениты	35—60	3,5—6,0
2	Базальты, диориты, диабазы	70	7,0
3	Песчаники: а) кварциты	55	5,5
	б) кварцевые плотные	30—40	1,5—2,0
	в) обыкновенные	15—20	0
4	Известняк:		
	а) мраморовидные доломиты, мраморы	20—40	2,0—4,0
	б) мягкие	8	0
	б) Для Средней Азии		
1	Граниты, порфиры, сиениты	20—80	3—8
2	Песчаники: а) кварцевые	35—90	3,5—9,0
	б) известковые	10—70	0
3	Известняки: а) плотные, мраморы	20—90	2,0—9,0
	б) мягкие	10—25	0

б) Искусственные камни (кирпич)

Таблица 3

№ по порядку	Кирпич	Допускаемые напряжения в кг/см²			
		На сжатие	на растяжение		На скалывание
			непосредственное	при изгибе	
1	Обыкновенный	10	0,7	1,5	1
2	Песчано-известковый	10	0,7	1,5	1

2. Допускаемые напряжения для кладки.

а) Кладка на цементном растворе

Таблица 4

№ по порядку	Наименование	Допускаемое напряжение на сжатие в кг/см²		
		в опорах	в сводах	в колоннах
1	Кладка из базальта	65	45	30
2	„ „ гранита	60	40	25
3	„ „ порфира	40	30	20
4	„ „ мрамора	30	20	15
5	„ „ базальтовой лавы . . .	20	15	10
6	„ „ песчаника	20	15	10
7	„ „ туфа	—	10	7

б) Кладка бутовая

Таблица 5

№ по порядку	Наименование	Допускаемое напряжение в кг/см²			
		Непосредственное сжатие	При изгибе		Скалывание
			Сжатие	Растяжение	
1	Кладка из бутового камня (при временном сопротивлении камня не менее 1 000 кг/см²) на цементном растворе не ниже 1 : 4	30	35	3	3
2	Кладка из бутового камня (при временном сопротивлении камня не менее 400 кг/см²) на цементном растворе не менее 1 : 4	20	25	2	2
3	Кладка из бутового камня (при временном сопротивлении камня не менее 300 кг/см²) на цементном растворе 1 : 4	12	15	1,5	1,5

Примечания: 1. Допускаемое напряжение для бутовой кладки может быть принято ориентировочно равным 40—50% допускаемого напряжения для цельных камней и не свыше 30 кг/см².

2. Модуль упругости каменной кладки может приниматься 60 000 кг/см².

в) Кладка из кирпича

Таблица 6

№ по порядку	Наименование	Допускаемое напряжение в кг/см²			
		Непосредственное сжатие	При изгибе		Скалывание
			Сжатие	Растяжение	
1	Кладка из обыкновенного кирпича на известковом растворе .	7	7	0	0,7
2	Кладка из обыкновенного кирпича на цементном растворе . .	10	10	1,5	1
3	Кладка из железняка	18	18	2	1,5
4	„ „ облицовочного кирпича	14	14	1,8	1,3
5	Кладка из песчано-известкового кирпича	10	10	1,5	1
6	Кладка из шлакового кирпича . .	6	6	1,2	0,9
7	„ „ пустотелого кирпича .	5	5	1,8	0,6
8	„ „ инфузорного кирпича .	3	3	0	7
9	„ „ сырцового кирпича . .	2	2	0	0

Примечания: 1. Допускаемые напряжения насыщенной водой кирпичной кладки, кроме кладок на известковом растворе и сырцовой, каковые для подводной кладки не допускаются, могут быть приняты в 75 % от напряжения для сухой кладки за исключением облицованного кирпича, для которого потеря сопротивления в воде допускается в 10%, облицованного кирпича, для которого потеря сопротивления в воде допускается в 10%.

2. Модуль упругости кирпичной кладки может приниматься 30 000 кг/см².

г) Допускаемые напряжения в бетонных сооружениях

Таблица 7

№ по порядку	Род напряжения	Величина в долях от σ_{28}	Допускаемые напряжения в кг/см² при σ_{28}					
			170	130	110	90	65	45
1	Сжатие осевое и при изгибе:							
	а) основное	0,35	60	45	38	31	23	16
	б) с учетом ветра или температуры . .	0,42	70	55	46	38	27	19
	в) с учетом ветра и температуры . . .	0,49	84	64	54	44	32	22
	г) с учетом ветра, температуры, усадки и других воздействий	0,56	95	73	62	50	37	25
2	Растяжение и скалывание при изгибе и неравномерном сжатии, а также кручении:							
	а) основное	0 04	7	5	4,5	3,5	2,5	2
	б) с учетом ветра или температуры . .	0,05	8,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5
	в) с учетом ветра и температуры . . .	0,06	10	8	6,5	5,5	4	2,5
	г) с учетом ветра, температуры, усадки и других воздействий	0,07	12	9	7,5	6,5	4,5	3
3	Срез непосредственный	0,07	12	9	7,5	6,5	4,5	3

σ_{28} — временное сопротивление 28-дневного образца.

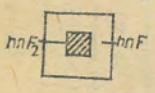
д) Допускаемые напряжения в железобетонных конструкциях

а) Допускаемые напряжения в бетоне

Таблица 8

№ по порядку	Род напряжения	Величина в долях от σ_{28}	Допускаемые напряжения в $кг/см^2$ при σ_{28}				
			210	110	130	110	90
1	Сжатие осевое при $\frac{e}{h} < 14$.	0,40	85	68	52	45	35
2	Сжатие при изгибе [1]:						
	а) основное	0,45	95	75	60	50	40
	б) с учетом ветра или температуры	0,55	115	95	70	60	50
	в) с учетом ветра и температуры	0,65	135	110	86	70	60
	г) с учетом ветра, температуры, усадки и других воздействий	0,70	145	120	90	75	65
3	Скалывание (главные растягивающие напряжения), при которых не требуется хомутов и косых стержней . . .	0,04	8,4	6,8	5,2	4,4	3,6
4	Предельные скалывающие (главные растягивающие) напряжения	0,10	21	17	13	11	9
5	Скалывающие напряжения, передаваемые на бетон по всей длине эпюры	0,025	5	4	3	2,5	2
6	Срез между полкой таврового сечения и ребром	0,06	12,5	10	7,5	6,5	5,5
7	Сцепление между бетоном и арматурой при круглых стержнях (при диаметре арматуры меньше 25 *мм* проверки на сцепление не требуется)	0,045	9,5	7,5	6	5	4
8	Растяжение осевое (в стенках резервуара)	0,12	25	20	15	13	11
9	Смятие местное при $h \geq d$ (F — полная площадь сечения и F_1 — площадь давления см. черт. 2)	$0{,}40\sqrt[3]{\frac{F}{F_1}}$	$85\sqrt[3]{\frac{F}{F_1}}$	$68\sqrt[3]{\frac{F}{F_1}}$	$52\sqrt[3]{\frac{F}{F_1}}$	$45\sqrt[3]{\frac{F}{F_1}}$	$35\sqrt[3]{\frac{F}{F_1}}$

б) Растяжение и сжатие главной арматуры, косых стержней и хомутов [2].



Черт. 2.

а) Основное — 1250 $кг/см^2$
б) При учете температуры или ветра — 1 400 $кг/см^2$
в) При учете температуры и ветра — 1 500 $кг/см^2$
г) При учете температуры, ветра, усадки и других воздействий — 1 600 $кг/см^2$

в) Срезывающие напряжения [2] 1 000 $кг/см^2$.

[1] При проверке на сжатие сечений, имеющих в зоне растянутых волокон плиту, все допускаемые напряжения повышаются на 0,10 σ_{28}, т. е. соответственно на 21, 17, 13, 11 и 9 $кг/см^2$.

[2] Приведенные напряжения могут быть допущены и для не маркированного (торгового) железа, но при этом верхние предельные напряжения при учете всех факторов не должны быть выше 0,5 от временного сопротивления.

Б. Допускаемые напряжения металлов.

Приводимые напряжения для металлов даются для 2-го класса сооружений. Для сооружений 1-го класса, т. е. имеющих общесоюзное значение, приведенные нормы понижаются на 10%, для сооружений 3-го и 4-го классов приведенные нормы повышаются на 10 %. Сооружения V класса не подвергаются расчету, так как строятся по конструктивным размерам.

При применении различного рода нагрузок вводятся следующие поправочные коэфициенты к основным напряжениям, приводимым в таблицах:

1) Спокойная нагрузка — поправочный коэфициент $K = 1$.

2) Нагрузка меняется в любой частоте от 0 до максимальной величины и обратно до 0 — поправочный коэфициент $K = 0{,}6$.

3) Нагрузка меняется в любых частотах от минимальной (отрицательной) до максимально положительной величины по абсолютному значению, одинаковому с первой, и обратно — поправочный коэфициент $K = 0{,}5$.

Основные допускаемые напряжения для гидротехнических и гражданских сооружений принимаются по таблице 9.

Таблица 9

№ по порядку	Материалы / Напряжения	Прокатный			Литой				
		Сталь 3	Сталь повышенная	Сталь специальная	Сталь Л1	Сталь 2 пониженная	Сталь Л2	Сталь Л5	Чугун Ч5
1	Основные напряжения при действии основных нагрузок	1 400	1 750	2 100	1 200	1 500	1 800	2 000	1 000
2	Основные напряжения при совместном действии основных и случайных нагрузок	1 700	2 100	2 500	1 500	1 800	2 100	2 500	1 200

При допущении указанных в таблице 9 напряжений материалы должны обладать следующими качествами, сведенными в таблицу 10.

Таблица 10

Объект	Материал	Временное сопротивление $кг/см^2$	Наимен. предел текуч. $кг/см^2$	Удлинение в %	Модуль упругости $кг/см^2$	Примечание
Конструкции	1. Сталь 3	38—45	23	22	2 100 000	Определение факультативно
	2. Сталь 5 повышенная .	50—60	30	18	2 100 000	
	3. Сталь специальная . .	48—62	36	24	2 100 000	
Опорные части	1. Сталь литая Л1	36	—	16	2 100 000	—
	2. Сталь литая Л2	50	—	10	2 100 000	
	3. Сталь литая Л2 пониженная	48	—	8	2 100 000	
	4. Сталь	50—60	—	16	2 100 000	
	5. Чугун сжатие	60	—	—	1 000 000	
	растяжение	50	—	—	100 000	

Таблица 10 (продолжение)

Объект	Материал	Временное сопротивление $кг/см^2$	Наимен. предел, текуч. $кг/см^2$	Удлинение в %	Модуль упругости $кг/см^2$	Примечание
Заклепки	1. Сталь 2	34—42	20	25	2 100 000	—
	2. Сталь 3	38—45	23	22	2 100 000	
	3. Сталь повышенная . .	45—55	27	22	2 100 000	
	4. Сталь специальная . .	45—55	36	22	2 100 000	

Для практических целей необходимо иметь кроме основных напряжений еще производные напряжения для различного вида напряжений.

Таблица 11 и 12 производных напряжений приводятся в следующем виде.

Таблица 11

Объект	Напряжение на	Материалы и основные допускаемые напряжения						Переходные коэффициенты
		Сталь 3		Сталь специальная		Сталь повышенная		
		1 400	1 700	1 750	2 100	2 100	2 500	
Основные конструкции	Срезывание	1 050	1 270	1 300	1 570	1 570	1 880	0,75
Заклепки в сооружениях с прочными швами	Срезывание:							
	В	1 100	1 360	1 400	1 680	1 680	2 000	0,80
	С	950	1 180	—	—	—	—	0,67
	Смятие:							
	В	2 800	3 400	3 500	4 200	4 200	5 000	2,00
	С	2 400	2 900	—	—	—	—	1,70
	Отрыв:							
	В и С	840	1 020	1 050	1 260	1 26	1 500	0,60
Точеные болты	Срезывание	1 100	1 360	1 400	1 680	1 680	2 000	0,80
	Смятие	2 800	3 400	3 500	4 200	4 200	5 000	2,00
Неточеные болты	Срезывание	840	1 020	—	—	—	—	0,60
	Смятие	1 700	2 050	—	—	—	—	1,20
Анкерные болты	Растяжение	1 050	1 270	1 300	1 570	1 570	1 880	0,75

Таблица 12

Допускаемые напряжения для литой стали и литья

Напряжение на	Переходные коэффициенты	Материалы и допускаемое напряжение: Сталь Л1		Сталь Л2 пониженная		Сталь Л2		Сталь Л5		Переходные коэффициенты	Чугун Ч1	
		1 200	1 500	1 500	1 700	1 800	2 100	2 100	2 500		1 000	1 200
Срезывание	0,75	900	1 150	1 150	1 350	1 350	1 600	1 500	1 850	0,25	250	300
Сжатие	1,00	1 200	1 500	1 500	1 800	1 800	2 100	2 000	2 500	1,00	1 000	1 200
Растяжения	1,00	1 200	1 500	1 500	1 800	1 800	2 100	2 000	2 500	0,25	250	300
Изгиб	1,00	1 200	1 500	1 500	1 850	1 800	2 100	2 000	2 500	1,0 - 1 000 + 400	—	1 200 + 480
Кручение	0,80	960	1 200	1 200	1 440	1 440	1 680	1 600	2 000	—	—	—
Местное сжатие												
Плотное касание .	—	850	1 100	1 100	1 300	1 300	1 500	1 400	1 800	—	650	780
Свободное касание *A*	—	5 000	6 000	6 000	7 000	7 000	8 000	8 000	10 000	—	3 500	4 200
Свободное касание *B*	—	3 500	4 300	4 000	5 000	5 000	6 000	5 500	7 000	—	2 500	3 000
Раздробление катков	—	45	55	55	65	65	75	70	90	—	—	—

Обозначение *B* относится к заклепкам, установленным в сверленые отверстия; обозначение *C* относится к заклепкам, установленным в продавленных дырах. При нагрузке III рода напряжения на срез и смятие понижаются на 25%.

Смятие свободного касания *A* относится к многокатковым опорам, катки которых имеют боковую подвижность.

Смятие свободного касания *B* относится к каткам опор, на которых конструкция может перемещаться (подвижные мосты и др.).

В строительных конструкциях, в которых должна быть обеспечена непроницаемость швов, допускаемые напряжения следует брать по таблице 13.

Таблица 13

Напряжение на	Материалы и основные допускаемые напряжения		
	Сталь 3 или сталь 4		Переходные коэфициенты
	1 400	1 700	
Срезывание			
В	1 000	1 200	0,7
С	840	1 000	0,6
Смятие			
В	2 400	2 900	1,7
С	2 100	2 550	1,5
Отрыв			
В и С	560	680	0,4

При расчете сварочных металлических конструкций в сооружениях принимают:

а) При расчете сварочных швов допускаемые напряжения по таблице 14:

Таблица 14

Род напряжения	При совместном действии всех нагрузок $кг/см^2$	При действии основных нагрузок $кг/см^2$
Сжатие	1 000	1 200
Растяжение	900	1 100
Срезывание	720	870

б) При действии на сооружение регулярной вибрационной нагрузки, вызывающей перемену знака, допускаемые напряжения для материала в сварочных швах независимо от учета динамического коэфициента принимаются по таблице 15.

Таблица 15

Род напряжения	При совместном действии всех нагрузок $кг/см^2$	При действии основных нагрузок $кг/см^2$
Сжатие	670	800
Растяжение	600	730
Срезывание	480	680

Допускаемые напряжения на фосфористую бронзу и красную медь

Допускаемые напряжения в $кг/см^2$:
на растяжение 600
„ сжатие 600
„ скалывание 400

Таблица 16

Допускаемые напряжения на катки в шарнирах, считая на диаметральное сечение $кг/см^2$

Материал	Временное сопротивление $кг/см^2$	Катки		Шарниры, угол охвата 90 и 180°	
		цилиндрические	шаровые	цилиндрические	шаровые
Чугуни					
Растяжение	1 500	30	—	165	—
Сжатие	600	—	—	—	—
Стальное литье	5 000	40	40	300	300
Кованая сталь	6 000	50	50	360	360

Допускаемые напряжения для нарезки винтов.

а) Непосредственное сжатие:
сталь по бронзе . . . . . 75 $кг/см^2$
„ „ стали . . . . . 150 „
чугун „ чугуну . . . . . 100 „
б) При изгибе:
чугун по чугуну . . . . . 45 $кг/см^2$

В. Допускаемые напряжения для дерева.

Расчетные допускаемые напряжения в деревянных конструкциях устанавливаются в зависимости от следующих условий:

а) от класса сооружений — 2, 3, 4, 5;

б) от условий службы сооружения или его отдельных частей в отношении возможности неблагоприятных воздействий на дерево в виде атмосферных осадков, пара и т. д.;

в) от породы и марки леса (1, 2, 3), характеризуемых внешними признаками, а для 1 и 2 марок кроме того и временными сопротивлениями дерева на сжатие, изгиб и скалывание, каковые должны быть не менее указанных в таблице 17:

Таблица 17

Временное сопротивление при влажности 15%	Марка 1		Марка 2	
	Сосна	Дуб	Сосна	Дуб
На сжатие не менее	350	400	300	350
На изгиб не менее	600	700	500	600
На продольное скалывание не менее	60	90	50	70

г) от степени влажности дерева устанавливаются следующие наименования:

1) воздушно-сухой лес с влажностью 18%;
2) полусухой лес с влажностью свыше 18% до 23%;
3) сырой — с влажностью свыше 23%.

При испытании образцов с влажностью, отличающейся от 15%, но не свыше 23%, полученные из опытов временные сопротивления на изгиб и скалывание приводятся к нормальной влажности по формуле:

$$\sigma_{15} = \sigma_{вл}\,[1 + K_{вл}\ (вл - 15\%)], \qquad (14)$$

где $\sigma_{вл}$ — полученное из опыта временное сопротивление;
σ_{15} — сопротивление, приведенное к нормальной влажности в 15%, и
$K_{вл}$ — коэфициенты влажности, указанные в таблице 18.

Таблица 18

Порода	При сжатии	При изгибе	При скалывании
Сосна	0,05	0,04	0,03
Дуб	0,04	0,03	0,03

Таблица 19

Основные допускаемые напряжения

Род напряжений	Направление напряжения относительно волокон	Допускаемые напряжения из в-с леса: Для сосны кг/см²	Для дуба кг/см²	Примечание
1. Растяжение равномерное	0°	110	130	0° — вдоль волокон, 90° — поперек волокон
	90°	2	6	
2. Сжатие равномерное	0°	100	120	Высота подушки при сжатии под 90° предполагается не более ширины
	90°	15	25	
3. Изгиб	0°	110	130	—
4. Скалывание при изгибе и в других случаях учета неравномерного распределения скалывающих напряжений	0°	22	32	Только для максимального напряжения
	90°	12	18	
5. Скалывание равномерное (без отдирания волокна)	90°	6	9	Допускаются при условии учета длины скалывания вдоль волокон не свыше семикратной глубины врубки, а поперек волокон не свыше четырех с половиной глубин врубки

Таблица 19 (продолжение)

Род напряжений	Направление напряжения относительно волокон	Допускаемые напряжения из в-с леса: Для сосны кг/см²	Для дуба кг/см²	Примечание
6. Перерезывание волокон	90°	45	60	—
Смятие торца	0°	80	110	—
8. Смятие первого ряда по всей ширине на части длины	90°	25	50	Сминаемая часть длины $\leqslant 1/3$
9. Смятие второго ряда частичное на части ширины и длины	90°	35	65	Сминаемая часть ширины $\leqslant 1/2$, сминаемая часть длины $\leqslant 1/2$
10. Смятие под шайбами болтов	90°	45	85	—

Основные допускаемые напряжения приводятся в таблицах для сооружений, защищенных от неблагоприятных воздействий, из нормального строительного леса, воздушно-сухого, с влажностью не более 18% и с небольшим количеством сучков, при тщательном расчете, учитывающем все возможные и неблагоприятные случаи воздействия разных нагрузок и при тщательном конструировании и выполнении всех сооружений. Основные напряжения принимаются по таблице 19 стр. 494. Для перехода к различным маркам леса необходимо пользоваться следующей таблицей:

Таблица 20

Класс содержания	Марка леса: 1	2	3
2	1	0,8	—
3	1,2	1,00	0,8
4	—	1,2	1,00

Поправки основных напряжений на степень обеспечения сооружения от вредных воздействий берутся в следующей зависимости: для защищенных сооружений — 1; для сооружений, стоящих на открытом воздухе или не защищенных от вредных воздействий — 0,85; для находящихся под водой — 0,70; для частей сооружения, находящихся в пределах переменного горизонта воды или в земле — 0,6.

Переводные коэфициенты при определении допускаемых напряжений

Порода, марка и влажность древесины	Сооружения 2-го класса				Сооружения 3-го класса				Сооружения 4-го класса			
	Защищенные	Незащищенные	Подводные	Подземные	Защищенные	Незащищенные	Подводные	Подземные	Защищенные	Незащищенные	Подводные	Подземные
Сосна, дуб и акация												
Марка I												
Воздушно-сухая	1,00	—	—	—	1,20	—	—	—	—	—	—	—
Полусухая	0,90	0,85	—	—	1,08	1,02	—	—	—	—	—	—
Сырая	0,75	0,72	0,70	0,60	0,90	0,86	0,84	0,72	—	—	—	—
Марка II												
Воздушно-сухая	0,80	—	—	—	1,00	—	—	—	1,20	—	—	—
Полусухая	0,72	0,68	—	—	0,90	0,85	—	—	1,08	1,02	—	—
Сырая	0,60	0,58	0,56	0,48	0,75	0,72	0,70	0,60	0,90	0,86	0,84	0,72
Марка III												
Воздушно-сухая	—	—	—	—	0,80	—	—	—	1,00	—	—	—
Полусухая	—	—	—	—	0,72	0,68	—	—	0,90	0,85	—	—
Сырая	—	—	—	—	0,60	0,58	0,56	0,48	0,75	0,72	0,70	0,60
Лиственница по отношению к сосне												
Марка I												
Воздушно-сухая	1,10	—	—	—	1,32	—	—	—	—	—	—	—
Полусухая	0,99	0,94	—	—	1,19	1,12	—	—	—	—	—	—
Сырая	0,82	0,79	0,77	0,66	0,99	0,95	0,92	0,79	—	—	—	—
Марка II												
Воздушно-сухая	0,88	—	—	—	1,10	—	—	—	1,32	—	—	—
Полусухая	0,79	0,75	—	—	0,99	0,94	—	—	1,19	1,12	—	—
Сырая	0,66	0,64	0,62	0,53	0,82	0,79	0,77	0,66	0,99	0,95	0,92	0,79
Марка III												
Воздушно-сухая	—	—	—	—	0,83	—	—	—	1,10	—	—	—
Полусухая	—	—	—	—	0,79	0,75	—	—	0,99	0,94	—	—
Сырая	—	—	—	—	0,66	0,64	0,62	0,53	0,82	0,79	0,77	0,66
Ель и кедр по отношению к сосне. Ясень и вязь по отношению к дубу												
Марка I												
Воздушно-сухая	0,90	—	—	—	1,08	—	—	—	—	—	—	—
Полусухая	0,81	0,77	—	—	0,97	0,92	—	—	—	—	—	—
Сырая	0,68	0,65	0,63	0,54	0,81	0,77	0,76	0,65	—	—	—	—
Марка II												
Воздушно-сухая	0,72	—	—	—	0,90	—	—	—	1,08	—	—	—
Полусухая	0,65	0,61	—	—	0,81	0,77	—	—	0,97	0,92	—	—
Сырая	0,54	0,52	0,50	0,43	0,68	0,65	0,63	0,54	0,81	0,77	0,77	0,65
Марка III												
Воздушно-сухая	—	—	—	—	0,72	—	—	—	0,90	—	—	—
Полусухая	—	—	—	—	0,65	0,61	—	—	0,81	0,77	—	—
Сырая	—	—	—	—	0,54	0,52	0,50	0,43	0,68	0,65	0,63	0,54

Таблица 21

по классу и виду сооружений, по марке, породе и влажности древесины

Таблица 2 (Продолжение)

Порода, марка и влажность древесины	Класс и вид сооружения	Сооружения 2-го класса				Сооружения 3-го класса				Сооружения 4-го класса			
		Защищенные	Незащищенные	Подводные	Подземные	Защищенные	Незащищенные	Подводные	Подземные	Защищенные	Незащищенные	Подводные	Подземные
Пихта по отношению к сосне	Марка I												
	Воздушно-сухая	0,85	—	—	—	1,02	—	—	—	—	—	—	—
	Полусухая	0,76	0,72	—	—	0,92	0,87	—	—	—	—	—	—
	Сырая	0,64	0,61	0,59	0,51	0,76	0,73	0,71	0,61	—	—	—	—
	Марка II												
	Воздушно-сухая	0,68	—	—	—	0,85	—	—	—	1,02	—	—	—
	Полусухая	0,61	0,58	—	—	0,76	0,72	—	—	0,92	0,87	—	—
	Сырая	0,51	0,49	0,48	0,41	0,64	0,61	0,59	0,51	0,76	0,73	0,71	0,61
	Марка III												
	Воздушно-сухая	—	—	—	—	0,68	—	—	—	0,85	—	—	—
	Полусухая	—	—	—	—	0,61	0,58	—	—	0,76	0,72	—	—
	Сырая	—	—	—	—	0,51	0,49	0,48	0,41	0,64	0,61	0,59	0,51
Береза по отношению к дубу	Марка I												
	Воздушно-сухая	0,70	—	—	—	0,84	—	—	—	—	—	—	—
	Полусухая	0,63	0,60	—	—	0,76	0,71	—	—	—	—	—	—
	Сырая	0,53	0,50	0,49	0,42	0,63	0,60	0,59	0,50	—	—	—	—
	Марка II												
	Воздушно-сухая	0,56	—	—	—	0,70	—	—	—	0,84	—	—	—
	Полусухая	0,50	0,48	—	—	0,63	0,60	—	—	0,76	0,71	—	—
	Сырая	0,42	0,41	0,39	0,34	0,53	0,50	0,49	0,42	0,63	0,60	0,59	0,50
	Марка III												
	Воздушно-сухая	—	—	—	—	0,56	—	—	—	0,70	—	—	—
	Полусухая	—	—	—	—	0,50	0,48	—	—	0,63	0,60	—	—
	Сырая	—	—	—	—	0,42	0,41	0,39	0,34	0,53	0,50	0,49	0,42
Ольха, сосна, тополь, ива и липа по отношению к дубу	Марка I												
	Воздушно-сухая	0,60	—	—	—	0,72	—	—	—	—	—	—	—
	Полусухая	0,54	0,51	—	—	0,65	0,61	—	—	—	—	—	—
	Сырая	0,45	0,43	0,42	0,35	0,54	0,52	0,50	0,43	—	—	—	—
	Марка II												
	Воздушно-сухая	0,48	—	—	—	0,60	—	—	—	0,72	—	—	—
	Полусухая	0,43	0,41	—	—	0,54	0,51	—	—	0,65	0,61	—	—
	Сырая	0,36	0,35	0,34	0,29	0,45	0,43	0,42	0,36	0,54	0,52	0,50	0,43
	Марка III												
	Воздушно-сухая	—	—	—	—	0,48	—	—	—	0,60	—	—	—
	Полусухая	—	—	—	—	0,43	0,41	—	—	0,54	0,51	—	—
	Сырая	—	—	—	—	0,36	0,35	0,34	0,29	0,45	0,43	0,42	0,36

* Коэфициенты рассчитаны при основном поправочном коэфициенте 0,6, т. е. при высоком качестве древесины; при более низком качестве древесины все коэфициенты снижаются на $^1/_6$.

Табл

Допускаемые давления на грунт оснований при заложении подошвы

Род грунта	Мощность слоя подошвы фундамента не менее (в м
I. Разные грунты	
1. Ил	—
2. Торф	—
3. Растительная земля, чернозем	—
4. Растительная земля, плотно слежавшаяся	—
5. Замороженный грунт в пределах вечной мерзлоты	—
II. Глинистые грунты	
1. Слабый глинистый грунт, слабый суглинок со включением ила и мелких органических примесей	—
2. Глинистый грунт, суглинок средней плотности	2
3. Плотно слежавшаяся глина и суглинок	2
4. Плотно слежавшаяся глина и суглинок	4
5. Лес	2
6. Мергель средней плотности	3
7. Особо плотная глина, морена	4
8. Очень твердый грунт с каменной подпочвой, морская глина, защищенные от размыва	4
III. Песчаные грунты	
1. Песок мелкий, с примесью ила	1
2. Песок мелкий, чистый	1
3. Песок мелкий плотно слежавшийся	1
4. Песок средней крупности, плотно слежавшийся	1
5. Песок средней крупности, плотно слежавшийся	2
6. Песок мелкий, разрыхленный	1
7. Песок средней крупности, разрыхленный	1
8. То же	2
9. Песок крупный, плотно слежавшийся	4
10. Гравелистый грунт	3
11. Галька средней крупности, плотно слежавшаяся	4
12. Галька крупная, плотно слежавшаяся	5
13. Галька крупная, плотно сцементированная	5
IV. Скальные грунты	
1. Очень мягкая скала, плотный мел, мягкий выветрившийся песчаник и известняк	
2. Мягкая скала, сплошные породы слабого камня, туфы	
3. Песчаники и известняки средней твердости	
4. Скальные породы особо твердые, сплошные	

[1]) При условии, что сооружение предохранено от неравномерной осадки.
[2]) В зависимости от рода грунта.
[3]) В предположении, что насыщение водой ограничивается поверхностным слоем грунта.

Таблица 21

фундамента на глубине 2 *м* ниже поверхности земли в *кг/см²*

Грунты сухие и в состоянии естественной влажности			Грунты очень влажные и мокрые			Грунты очень мокрые до насыщения		
Угол естественного откоса	Объемный вес (в *т/м³*)	Допускаемое давление на грунт (в *кг/см²*)	Угол естественного откоса	Объемный вес (в *т/м³*)	Допускаемое давление на грунт (в *кг/см²*)	Угол естественного откоса	Объемный вес (в *т/м³*)	Допускаемое давление на грунт (в *кг/см²*)
40°	1,6	1,00	25°	1,7	0,50	15°	1,8	0
35°	0,4	1,00	30°	0,6	0,50	25°	0,8	0
40°	1,5	1,00[1])	33°	1,7	0,50	25°	1,8	0
45°	1,7	2,00	35°	1,8	1,00[1])	—	—	—
45°	1,6—1,9	3,00[2]) 5,00	—	—	—	—	—	—
40°	1,5	1,00	27°	1,7	0,50	20°	1,8	0
40°	1,6	2,50	30°	1,7	2,00	25°	1,9	1,50
45°	1,8	3,00	30°	1,8	1,25[3])	25°	1,9	2,00[3])
45°	1,8	3,50[4])	30°	1,8	2,75	25°	1,9	2,25[3])
45°	1,6	2,50	—	—	0	—	—	0
45°	1,8	4,50	40°	1,8	3,50	35°	1,9	3,00[3])
45°	1,9	5,00	37°	1,9	4,00	35°	2,0	3,50[3])
45°	1,9	6,00	37°	1,9	5,00	35°	2,0	4,00
40°	1,6	1,00	25°	1,7	0,75	20°	1,9	0,50
40°	1,7	1,50	27°	1,8	1,00	22°	2,0	0,50
45°	1,8	2,00	30°	1,9	1,50	25°	2,0	1,00
45°	1,9	2,50	33°	1,9	2,00	27°	2,0	1,50
45°	1,9	3,00	33°	1,9	2,50	27°	2,0	2,00
30°	1,6	1,75	30°	1,7	1,25	22°	1,9	0,50
37°	1,7	2,00	33°	1,8	1,50	25°	2,0	1,00
37°	1,7	2,25	33°	1,8	1,75	25°	2,0	1,25
45°	1,8	4,50	33°	1,9	4,24	27°	2,0	3,50
37°	1,8	3,50	33°	1,8	3,00	27°	1,9	2,50
40°	1,8	5,00	35°	1,8	4,00	27°	1,9	3,50
40°	1,9	6,00	35°	1,9	5,00	—	—	—
45°	2,0	8,00	37°	2,0	6,00	—	—	—

Допускаемые давления в *кг/см²* вне зависимости от степени влажности

6—4
12—8
18—12
40—20

[4]) В состоянии, исключающем воздействие на него воды (устройство водоотводов, мостков и т. п.).
[5]) Низший предел имеет в виду присутствие воды.

Поправки на влажное дерево берут в следующем виде: в защищенных сооружениях при применении полусухого леса —0,9, сухого леса – 0,75; в незащищенных сооружениях и для частей, находящихся в пределах переменного горизонта воды или в земле, при применении полусухого леса — 1, сырого леса — 0,85.

В подводных частях рекомендуется применять сырой лес, поэтому поправки на влажность дерева не делаются.

Основные поправочные коэфициенты к допускаемым напряжениям в зависимости от классов и видов сооружений принимают по таблице 20.

Г. Допускаемые напряжения на грунты.

Допускаемые напряжения на грунты берутся по таблице 21 стр. 496.

Для сооружений 1-го и 2-го классов обязательна постановка специальных исследований по определению допускаемых напряжений на грунт согласно существующим правилам.

При заложении оснований на глубину более 2 *м* от поверхности грунта, приведенные в таблице 21 нормы допускаемых напряжений в *кг/см²* должны повышаться на величину $\gamma : 10$ на каждый метр углубления, где γ — вес кубического метра грунта в тоннах.

Наоборот, при заложении оснований на глубину менее 2 *м* от поверхности земли приведенные нормы в таблице 22 должны снижаться на 0,5 *кг/см²* на метр уменьшения заложения против 2 *м*, но не более 50% от табличных величин.

II. СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ.

А. Сопротивление растяжению и сжатию.

Нагрузка P в *кг*, которую растягиваемый или сжимаемый брус призматической формы, сечения F *см²*, может с полной надежностью выдержать, составляет $P = F\sigma_{доп}$, где $\sigma_{доп}$ означает допускаемое напряжение растяжения. В случае переменного сечения бруса расчет действующей силы ведется для наименьшего сечения.

Когда у сжимаемого бруса длина в сравнении с размерами поперечного сечения, значительна, расчет ведется на продольный изгиб.

Упругое удлинение или укорочение Δl, вызываемое напряжением σ или нагрузкой P, действующей на призматический брус первоначальной длины l, равно при $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$,

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E} \text{ или } \Delta l = \frac{Pl}{FE}, \tag{15}$$

где E — модуль упругости (принимаемый постоянным) для растяжения или сжатия.

Б. Сопротивление продольному изгибу.

Когда сжатию подвергаются брусья, длина которых велика в сравнении с размерами их поперечного сечения, то расчет таких брусьев ведется на продольный изгиб.

Пусть означают:

l – свободную длину в *см* призматического бруса, подверженного продольному изгибу
J — наименьший экваториальный момент инерции в *см* опасного сечения бруса *a*
F — поперечное сечение бруса в *см²*,
r — наименьший радиус инерции его в *см*, так что $J = Fr^2$,
E — модуль упругости материала в *кг/см²*.

1. По Энгессеру и Карману, **нагрузка, вызывающая продольный изгиб,** вообще равна:

$$K = \pi^2 T \cdot \frac{J}{l^2}, \tag{16}$$

где T, так называемый модуль продольного изгиба, представляет собою величину, не зависящую от формы сечения бруса, лежащую между (постоянным) модулем упругости E, действительным до предела пропорциональности σ_p, и тем именно модулем упругости:

$$E_0 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \tag{17}$$

который соответствует напряжению, равному напряжению продольного изгиба $\sigma_k = \frac{K}{F}$, и определяется по кривой деформаций $\sigma = f(z)$, как tg угла наклона касательной к означенной кривой точке σ_k.

Вставляя в формулу для K значение J из уравнения $J = Fr^2$, получим

$$K = \pi^2 TF \frac{r^2}{l^2}, \tag{18}$$

откуда среднее напряжение продольного изгиба при разрыве (изломе) бруса равно:

$$\sigma_k = \frac{K}{F} = \pi^2 T \left(\frac{r}{l}\right)^2 = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2}. \tag{19}$$

Здесь величина $\lambda = \frac{l}{r}$ характеризует жесткость бруска на продольный изгиб.

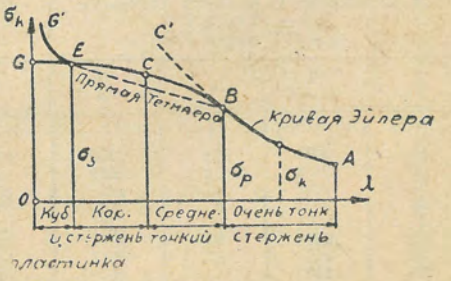
1. Для больших значений λ формула σ_k имеет вид при $T = E$:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \text{ (формула Эйлера).} \tag{20}$$

Линия AB, выражающая формулу Эйлера представляет собою гиперболу третьей степени (см. черт. 3)

2. Для брусьев средней жесткости получается в соответствии с линией BC, $\sigma_k > \sigma_p$; T постепенно возрастает, линия BC проходит ниже линии Эйлера BC' (показанной пунктиром).

3. У коротких брусьев T сильно понижается, так что кривая CE напряжений σ_k имеет весьма незначительный наклон и σ_k близко подходит к пределу сминания σ_s.



Черт. 3.

4. У еще более коротких брусьев, у кубов и плит, продольный изгиб вообще места не имеет, — брусья разрушаются вследствие раздавливания. Здесь следовательно имеем дело не с кривой EG', а с прямой EG, параллельной оси абсцисс λ.

Участок AB характеризует упругий, участок BE — неупругий продольный изгиб. Так как закон для модуля продольного изгиба T, поскольку последний отклоняется от E, неизвестен, то для участка BC значения σ_k приходится брать на основании результатов, полученных из опыта.

Допускаемая нагрузка для бруса, подверженного продольному изгибу, равна (в *кг*) только $P = K:S$, если через S обозначим запас прочности в отношении продольного изгиба. Коэфициент запаса обычно принимается $S = 3$.

2. Из опытов, произведенных Тетмайером можно заключить, что формула Эйлера может применяться с достаточным приближением в тех случаях, когда $\lambda \geqq 80$ (чугун), 112 (сварочное железо), 105 (литая сталь, мягкая), 90 (литая сталь), 86 (никелевая сталь с содержанием до 5% никеля), 100 (дерево). Этими данными, таким образом, определяется положение предельной точки B на черт. 3. Для меньших значений λ можно определять σ_k по следующей таблице:

Таблица для различных материалов по Тетмайеру

Чугун	$= 7760\,(1 - 0{,}01546\lambda) + 0{,}00007\,\lambda^2)$
Сварочное железо	$= 3030\,(1 - 0{,}00426\lambda)$
Литое железо (литая сталь, мягкая)	$= 3100\,(1 - 0{,}00368\lambda)$
Литая сталь	$= 3350\,(1 = 0{,}00185\lambda)$
Никелевая сталь (содержащая 5% N)	$= 4700\,(1 - 0{,}00490\lambda)$
Дерево	$= 293\,(1 - 0{,}00662\lambda)$

С уменьшением λ эти значения для железа действительны лишь до предела текучести, характеризуемого числом, стоящим перед скобками, а для дерева примерно до $\lambda = 18$.

По Тетмайеру следовательно кривая BCE должна быть заменена наклонной прямой BE (черт. 3б показанной пунктиром) для чугуна — параболической линией.

Литая сталь. Для литого железа (литой стали) с $E = 2\,100\,000$ получаем согласно вышесказанному следующую таблицу для σ_k:

Таблица 23

Напряжения продольного изгиба

Сфера применения формулы Тетмайера: λ = 15 до 105, $\sigma_k = 3100\,(1 - 0{,}00368\lambda)$				Сфера применения формуры Эйлера: $\lambda > 105$, $\sigma_k = \frac{20726000}{\lambda^2}$			
λ	σ_k кг/см²	λ	σ_k кг/см²	λ	σ_k кг/см²	λ	σ_k кг/см²
15	2929	65	2359	105	1879	155	863
20	2872	70	2302	110	1713	160	810
25	2815	75	2245	105	1567	165	761
30	2758	80	2183	120	1440	170	717
35	2701	85	2131	125	1326	175	677
40	2644	90	2074	130	1227	180	640
45	2587	95	2017	135	1137	185	606
50	2530	100	1960	140	1058	190	574
55	2473	105	1903	145	986	195	544
60	2416			150	921	200	518

3. Коэфициенты уменьшения допускаемых напряжений при продольном изгибе по нормам СССР

а) Для металлических конструкций.

При расчетах металлических сооружений на продольный изгиб применяются следующие коэфициенты уменьшения предельных напряжений в зависимости от отношения $\frac{l}{r} = \lambda$. Значения коэфициентов φ берут по таблице 24.

б) Для железобетонных конструкций.

Для железобетонных конструкций при осевом сжатии в случае:

$$3 \leqslant \frac{l}{h} \leqslant 14,$$

расчетная нагрузка повышается в зависимости от отношения длины к меньшей стороне прямоугольника $\frac{l}{h}$, или длины к диаметру круглого сечения.

Коэфициенты продольного изгиба φ и $k_z = \frac{1}{\varphi}$

Таблица 24

$\frac{l}{r}$	Сталь 3		Сталь 5		Спецсталь		Чугун	
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	—
10	0,99	1,01	0,99	1,01	0,99	1,01	0,97	1,03
20	0,97	1,03	0,97	1,03	0,97	1,03	0,91	1,10
30	0,935	1,07	0,935	1,07	0,935	1,07	0,81	1,23
40	0,893	1,12	0,893	1,12	0,893	1,12	0,69	1,45
50	0,843	1,18	0,846	1,18	0,846	1,18	0,57	1,75
60	0,798	1,25	0,798	1,25	0,798	1,25	0,44	2,27
70	0,740	1,35	0,730	1,37	0,728	1,37	0,34	2,94
80	0,683	1,33	0,652	1,53	0,635	1,57	0,26	3,95
90	0,625	1,60	0,572	1,75	0,536	1,86	0,20	5
100	0,568	1,73	0,495	2,02	0,439	2,23	0,16	6
110	0,511	1,96	0,424	2,36	0,363	2,75	—	—
120	0,454	2,20	0,359	2,76	0,305	3,28	—	—
130	0,402	2,49	0,317	3,15	0,270	3,70	—	—
140	0,353	2,83	0,285	3,51	0,240	4,17	—	—
150	0,316	3,16	0,258	3,88	0,215	4,65	—	—
160	0,287	3,48	0,237	4,22	0,193	5,18	—	—
170	0,261	3,83	0,216	4,63	0,170	5,56	—	—
180	0,236	4,24	0,200	5,00	0,159	6,29	—	—
190	0,214	5,67	0,187	5,35	0,145	6,90	—	—
200	0,191	5,24	0,173	5,78	0,135	7,35	—	—

$\frac{l}{d}$ умножением на коэфициент kz. Величина этого коэфициента определяется формулой:

$$\text{для прямоугольных сечений } k_z = \frac{1}{0{,}4 + 2\frac{h}{l}}; \qquad (21)$$

$$\text{для круглых сечений } k_z = \frac{1}{0{,}4 + 1{,}73\frac{d}{l}}.$$

При сечениях какой-либо иной формы в эту формулу вместо h вводится значение 3,46 r min., где r min. наименьший радиус инерции сечения. Значения k_2 для прямоугольных и круглых сечений даются в таблице 25.

Таблица 25

$\frac{l}{h}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{l}{d}$	2,6	6,5	4,3	5,2	6,1	6,9	7,8	8,7	9,5	10,4	11 3	12.1
k_2	1	1,11	1,25	1,33	1,46	1,54	1,61	1,67	1,72	1,77	1,80	1,84

4. Формулы Эйлера для различных способов укрепления концов бруса.

(a — опасное сечение)

Нагрузка K (в $кг$), вызывающая продольный изгиб, равна, когда:

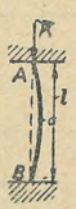
1. Один конец защемлен, другой свободен



Черт. 4.

$$K=\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{EJ}{l^2}$$

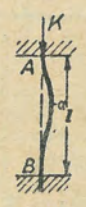
2. Оба конца свободны и сохраняют свое положение на первоначальной оси AB



Черт. 5.

$$K=\pi^2\frac{EJ}{l^2}.$$

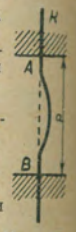
3. Один конец защемлен, другой свободен и сохраняет свое положение на первоначальной оси AB



Черт. 6.

$$K=2\pi^2\frac{EJ}{l^2}.$$

4. Оба конца защемлены и сохраняют свое положение на первоначальной оси AB:



Черт. 7.

$$K=4\pi^2\frac{EJ}{l^2}.$$

Если показанный на черт. 7 брус у A и B не защемлен жестко, а закреплен при помощи какого-нибудь упругого (пружинного) приспособления, то коэфициент 4 в выражении для K уменьшается, доходя в зависимости от характера закрепления до 1 (случай 2); равным образом упругое закрепление конца B по черт. 6 приводит к уменьшению коэфициента 2 до 1.

Случай 2 (черт. 5) является нормальным для продольного изгиба. Следовательно для случаев 1), 3) и 4) требуемый момент инерции J получается из расчета в 4 раза или соответственно в $^1/_2$ или $^1/_4$ раза больше.

5. Полые цилиндры. Нагрузка, вызывающая продольный изгиб полого цилиндра по Узингеру немного больше той, которая получается по формуле Эйлера, а именно:

при шарнирном закреплении концов: $$K=\frac{\pi^2 EJ}{l^2}\left(1+\frac{9}{\pi^4}\,\frac{l^4}{r^4}\right), \quad (22)$$

при защемленных концах:

$$K=\frac{4\pi^2 EJ}{l^2}\left(1+\frac{27}{16\pi^4}\,\frac{l^4}{r^4}\right);$$

в этих формулах l — длина полого цилиндра и r — средний радиус сечения его.

6. Сочлененные стойки (подпоры). Когда брус не является сплошным телом, а составлен из целого ряда частей, не везде связанных между собою, то помимо общего условия надежности сопротивления продольному изгибу всего сечения бруса в целом под действием общей нагрузки P требуется еще обеспечить такую же надежность для каждой составной части в отдельности по отношению к той доле нагрузки, которая на эту часть падает. При введении в расчет моментов инерции J необходимо иметь в виду, что для всего сечения в целом и для сечений отдельных его элементов оси инерции будут различны: для каждого взятого порознь элемента ось инерции обычно проходит через его центр тяжести, тогда как с точки зрения участия этого элемента в общем сечении решающее значение имеет центр тяжести этого общего сечения. Как показали опыты, нагрузка P не распределяется по всем элементам строго равномерно: может случиться, что например при двух элементах на один из них падает до 70% общей нагрузки, при четырех элементах каждый из них может получить до 35% всей нагрузки. По Крону в случае двух частей каждая должна быть рассчитана на нагрузку $=(P/2)\cdot\sigma_S/\sigma_k$, где σ_k означает то напряжение, при котором имел бы место изгиб всего бруса, если бы он был сплошным, а σ_S — предел текучести данного материала. Для каждого взятого в отдельности стержня расчетной длиной продольного изгиба служит та длина, на которой он сам по себе является свободным; при этом концы рассматриваются как могущие поворачиваться около точек опоры. Клепаные стержни по Тетмайеру можно рассматривать как простые профильные балки при условии, что расстояния между заклепками не более 70-кратной толщины сложенных вместе полос или угольников, а ослабление сечений стержней заклепками дыр не превышает 12%.



Черт. 8.

Более точный расчет сочлененных стоек. а) Напряжение продольного изгиба σ_k опорной стойки (черт. 8), составленной из двух параллельных стержней длиною l, связанных друг с другом в ряде точек на равных расстояниях между собою по Мюллер-Бреслау равно приблизительно:

$$\sigma_k=\frac{\pi^2 E}{\frac{n-1}{n-0{,}8}\lambda^2+0{,}8\,\lambda_1^2}. \quad (23)$$

В этой формуле означают:

$n=l:c$ — число панелей,

$\lambda=l:i=l:\sqrt{J/2F_1}$,

$\lambda_1=c:i_1=c:\sqrt{J_1/F_1}$,

где: F_1 — площадь поперечного сечения } одного продольного
J_1 — момент инерции } стержня,

$J = 2F_1 \frac{h^2}{4}$ — момент инерции сечения стойки; h — расстояние между обоими стержнями.

Как указывает Энгессер, в вышеуказанной формуле можно с достаточным приближением упростить знаменатель, придав ему вид $\lambda^2 + \lambda_1^2$; вместо E можно всюду ставить T.

β) В более общей форме напряжение продольного изгиба для сочлененной конструкции с параллельными поясами постоянного сечения при одинаковой всюду ширине панели c определяется по следующей формуле:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EF}{\lambda^2} \gamma}.$$

Здесь F — площадь сечения и λ — степень тонкости всего стержня (например $F = 2F_1$), γ — коэфициент, учитывающий удельный сдвиг. Для сплошного стержня $\gamma = \frac{\zeta}{IG}$, где $G = 0{,}385\ E$, а ζ — коэфициент сдвига сечений (в данном случае ≈ 1). Для решетчатого стержня

$$\gamma = \left(\frac{d^3}{ch^2 F_2'} + \frac{h}{cF_2''} \right) \frac{1}{E}, \text{ для рамы } \gamma = \left(\frac{c^2}{24 J_1} + \frac{ch}{12 J_2} \right) \frac{1}{E}.$$

В. Сжатие тел с криволинейным очертанием поверхности.

В подшипниках и шарнирах передача давления в зависимости от конструкции происходит теоретически или по линиям или в отдельных точках. Точного решения этого вопроса до сего времени найти не удалось. Многочисленные имеющиеся формулы основаны на предположениях, которые не могут быть доказаны в общем виде. Первое удовлетворительное решение дано Герцем (Hertz) в 1881 г., который допускает, что:

1) поверхности соприкасания весьма малы по сравнению с общей поверхностью тел;

2) в поверхностях соприкасания возникают только нормальные напряжения;

3) материал соприкасающихся тел обладает пределами пропорциональности и деформации тел исключительно упругие;

4) материалы обоих тел однородны и изотропны;

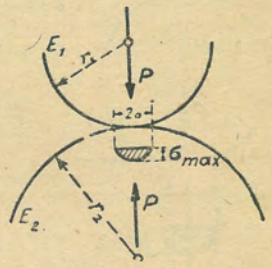
5) давление действует в направлении, определяемом положением центров тяжестей обоих соприкасающихся тел.

Его допущения, хотя и не всегда полностью осуществляемые, однако могут быть признаны правильными во всяком случае для стальных тел при неособенно больших давлениях.

На основании общих условий упругости и допущения эллипсоидального распределения напряжений в поверхностях соприкасания и при пуассоновом отношении $m = \frac{10}{3}$ имеем следующие формулы.

А. Давление двух шаров. Если два шара прижаты с силой P один к другому, то по Герцу соприкасание их происходит по некоторой поверхности, ограниченной круговым контуром радиуса (черт. 9).

$$a = 0{,}88 \sqrt[3]{P \cdot \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}, \qquad (24)$$



Черт. 9.

где r_1 и r_2 — радиусы шаров, E_1 и E_2 — их модули упругости.

Наибольшее давление по поверхности соприкасания будет:

$$\sigma_{max} = 1{,}5 \frac{P}{\pi a^2}. \qquad (25)$$

Центры шаров сближаются при этом на:

$$\xi = 0{,}77 \cdot \sqrt[3]{P^2 \cdot \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}. \qquad (26)$$

Если оба шара состоят из одного и того же материала, т. е. если $E_1 = E_2$, и если радиусы обоих шаров одинаковы и равны r, то:

$$a = 0{,}83 \sqrt[3]{\frac{P \cdot r}{E}}, \quad \sigma_{max} = 0{,}62 \sqrt[3]{\frac{P \cdot E^2}{r^2}},$$

$$\xi = 1{,}54 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 \cdot r}}. \qquad (27)$$

Если выпуклая шаровая поверхность нажимается на вогнутую, то радиус последней r_2 должен быть подставлен в приведенные формулы с отрицательным знаком.

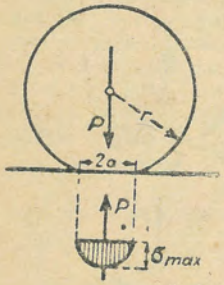
Б. Давление шара на плоскую плиту (черт. 10). В уравнения (24), (25) и (26) в этом случае надо подставить $r_1 = r$ и $r_2 = \infty$.

Отсюда:

$$a = 1{,}11 \sqrt[3]{\frac{P \cdot r}{E}}, \qquad \sigma_{max} = 0{,}39 \sqrt[3]{\frac{P \cdot E^2}{r^2}},$$

$$\lambda = 1{,}23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 \cdot r}}.$$

В. Давление цилиндра на цилиндр (черт. 9). Если два круглых цилиндра, касающиеся вдоль образующей длиною l, нажимаются один на другой с силою P при радиусах этих цилиндров r_1 и r_2 и модулях упругости E_1 и E_2, то половина ширины полоски соприкосновения определяется по формуле,



Черт. 10.

$$a = 1{,}08 \cdot \sqrt{\frac{P}{l} \cdot \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}, \qquad (28)$$

и наибольшее напряжение:

$$\sigma_{max} = 0{,}59 \cdot \sqrt{\frac{P}{l} \cdot \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}}. \qquad (29)$$

Г. Давление цилиндра на плоскую плиту (черт. 10). В уравнения (28) и (29) надо подставить $r_1 = r$ и $r_2 = \infty$.

Отсюда:

$$a = 1{,}08 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot r}{l}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)},$$

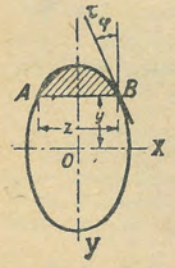
$$\sigma_{max} = 0{,}59 \cdot \sqrt{\frac{P}{l \cdot r \cdot \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)}}. \qquad (30)$$

Если плита и цилиндр состоят из одного и того же материала, то:

$$a = 1{,}52 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot r}{l \cdot E}} \text{ и } \sigma_{max} = 0{,}418 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot E}{l \cdot r}}. \qquad (31)$$

Г. Сопротивление срезу (сдвигу)

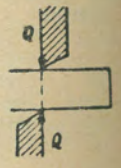
Когда действующие на брус внешние силы вызывают появление в плоскости рассматриваемого сечения F (см. черт. 11) поперечной силы Q, совпадающей с направлением оси симметрии OY сечения и пересекающей ось бруса под прямым углом, то в сечении F возникает напряжение среза или сдвига.



Черт. 11.

Это напряжение никогда не бывает одно, а сопровождается всегда изгибающим моментом. Если оставить этот изгибающий момент без внимания т. е. если считать, что срезывающая сила Q и равное ей опорное давление точно совпадают в одной и той же плоскости (черт. 12), то срезывающую силу, как это обычно делается, можно принять равномерно распределенной по всему сечению и все напряжения среза считать параллельными между собою. Получаем в этом случае:

$$\tau = \frac{Q}{F}. \qquad (32)$$



Черт. 12.

Эта формула дает для наибольшего напряжения среза в сечении слишком малые величины. При наличии хотя бы самого незначительного изгибающего момента (т. е. при неполном совпадении направлений обеих сил Q) срезывающая сила распределяется по сечению неравномерно: напряжение среза τ в точке B, вызываемое срезывающей силой Q и возникающее не только в плоскости сечения, но и перпендикулярно к последнему, получается для обоих указанных направлений при сохранении обозначений черт. 11 в следующем виде:

$$\tau = \frac{QS_y}{Jz\cos\varphi}; \qquad (33)$$

при этом должно быть: $\tau_{max} \leqslant \tau_{доп}$.

Здесь J — момент инерции всего сечения относительно оси инерции OX, перпендикулярной к Q, а

$$S_y = \int_y^e yzdy \qquad (34)$$

есть статический момент заштрихованной части сечения (черт. 11) относительно той же оси OX.

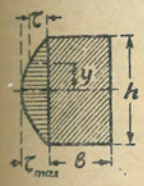
Боковое напряжение, параллельное оси симметрии OY и направлению силы Q и равномерно распределенное по ширине z, равно:

$$\tau_y = \tau\cos\varphi = \frac{QS_y}{Jz}. \qquad (34а)$$

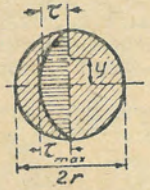
Для $y = e$ получаем $\tau = 0$.

Для прямоугольного сечения bh (черт. 13) будем иметь:

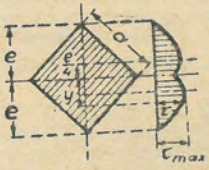
$$\tau = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]; \text{ для } y = 0, \ \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{hb} = \frac{3}{2}\frac{Q}{F}. \qquad (35)$$



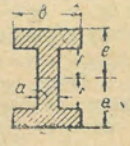
Черт. 13.



Черт. 14.



Черт. 15.



Черт. 16.

Для круглого сечения радиуса r (черт. 14)

$$\tau = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi r^2}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}; \text{ для } y = 0, \ \tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3}\frac{Q}{F}. \qquad (36)$$

Для круглого кольцеобразного сечения, если толщина стенки незначительна в сравнении с диаметром в свету, будем иметь для средины ($y = 0$):

$$\tau_{max} = 2\frac{Q}{F}. \qquad (37$$

Для квадрата, поставленного на ребро (черт. 15):

$$\tau = \frac{Q\sqrt{2}}{a^2}\cdot\left[1 + y\cdot\frac{\sqrt{2}}{a} - 4\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]. \qquad (38)$$

Для $y = \frac{e}{4}$ получается:

$$\tau_{max} = \frac{9}{4\sqrt{2}}\frac{Q}{a^2} = 1{,}591\,\frac{Q}{F}.$$

Для $y = 0$, получаем, $\tau = \sqrt{2}\frac{Q}{F}$.

Здесь так же, если говорить точно, τ_{max}, как и τ (для $y = 0$), возрастает от ребер к середине. Вышеуказанные τ_{max} и τ суть средние значения напряжений среза, относящихся к y.

При двутавровом сечении (черт. 16) для $y = 0$;

$$\tau_{max} = \frac{3}{4}\frac{Q}{a}\frac{be^2 - (b-a)f^2}{be^3 - (b-a)f^3}. \qquad (39)$$

Д. Сопротивление изгибу.

Общие данные.

Поперечная (перерезывающая) сила Q какого-нибудь сечения — это сила, равная и параллельная равнодействующей всех внешних сил, действующих слева от данного сечения; условно считают силу Q положительной, когда она направлена кверху.

Изгибающим моментом M сечения называется момент равнодействующей всех внешних сил, действующих слева от данного сечения, или алгебраическая сумма моментов всех этих сил относительно центра тяжести данного сечения; обычно момент M считают положительным, когда он имеет стремление повернуть левую часть балки вправо, т. е. по движению часовой стрелки.

1. Пусть имеем для балки **непрерывную нагрузку** q *кг/см* (черт. 17). Принимая горизонтальную ось балки за ось x-ов, получим для любого сечения ее (x):

$$Q = A - \int q\,dx \qquad (40)$$

$$M = Ax - \int qx\,dx \qquad (41)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \qquad (42)$$

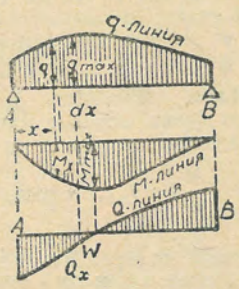
$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q \qquad (43)$$

Если теперь на какой-нибудь горизонтальной прямой под каждым сечением восстановим в качестве ординат соответствующие величины Q и M, то для полученных таким образом кривых Q и M будем иметь следующие соотношения.

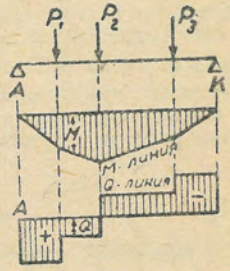
1. Наклон кривой Q в точке x характеризуется $\operatorname{tg} a = -q$.
2. Наклон кривой M в точке x характеризуется $\operatorname{tg} \beta = Q$.
3. $M_x = \int_0^x Q\,dx =$ [площадь Q]$_0^x$, согласно уравнению (41).

Из уравнения (43) следует: наибольшее значение (относительное) сила Q будет иметь в каждом сечении, для которого q переходит из плюса в минус; кривая Q имеет точку перегиба там, где $q = \max$ (W на черт. 17).

Из уравнения (42) следует: M_{max} (относительный) имеет место в каждом сечении, для которого сила Q переходит из (+) в (—).



Черт. 17.



Черт. 18.

2. Если на балку действуют одни только **сосредоточенные силы** P_1, P_2 и т. д. (черт. 18), то на части длины между двумя соседними сосредоточенными силами сила Q постоянна и изгибающий момент M относительно x — первой степени. Кривая Q такой балки представляет собою ступенчатую линию, кривая M — многоугольник.

3. Срезывающая сила Q вызывает напряжения среза τ в плоскости сечения и такие же напряжения среза в плоскостях, параллельных оси балки момент M вызывает нормальные напряжения σ, перпендикулярные к плоскости сечения.

а) Напряжения.

1. Нормальные напряжения.

Пусть означают:
σ — нормальное напряжение волокна в *кг/см*^{2},
y — расстояние волокна от нейтральной оси в *см*,
σ_1 — нормальное напряжение для $y = 1$ *см*, следовательно:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{y}.$$

e_1 и e_2 — расстояния наиболее удаленного растягиваемого или сжимаемого волокна в *см*,
e — общее обозначение большего из этих обоих расстояний e_1 и e_2,
σ_p — допускаемое напряжение растяжения в *кг/см*^{2},
σ_c — допускаемое напряжение сжатия в *кг/см*^{2},
$\sigma_и$ — допускаемое напряжение изгиба в *кг/см*^{2},
J — момент инерции сечения относительно нейтральной оси, в *см*^{4}.

Основными являются следующие уравнения:

$$\sigma_1 = \frac{M}{J} = \frac{\text{изгибающий момент}}{\text{момент инерции}};\ \text{следовательно:}\ \sigma = \frac{M}{J}y. \qquad (44)$$

Для того чтобы допускаемые предельные напряжения не оказались превзойденными, должно быть:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J}e_1 < \sigma_p \quad \text{и} \quad \sigma_{min} = \frac{M}{J}e_2 < \sigma_c.$$

Значения $J:e_1 = W_1$ и $J:e_2 = W_2$ называются **моментами сопротивления** данного сечения для растягиваемой или, соответственно, сжимаемой стороны. Отсюда получаем общие **условия прочности** балки:

$$\frac{M}{W_1} \leqslant \sigma_p \quad \text{и} \quad \frac{M}{W_2} \leqslant \sigma_c. \tag{45}$$

Если допускаемые напряжения растяжения, сжатия и изгиба по величине равны между собою, т. е. когда $\sigma_p = \sigma_c = \sigma_и$, например для сварочного железа, литой стали, то меньшую из 2 величин W_1 и W_2 принимают равной $W = J:e$ и условия прочности балки выражают так:

для расчета напряжения: $\sigma_{max} = M:W$
для расчета сечения: $W = M:\sigma_и$ } (46)

Опасное сечение балки, которое должно быть положено в основание расчета, получается согласно уравнению (46) из следующего условия:

$$\frac{M}{W}(= \sigma_{max}) = \max. \tag{47}$$

В таблице 29, приведенной на стр. 536 и дальше, даны формулы для расчета балок в наиболее часто встречаемых случаях действия нагрузок.

Балки равного сопротивления изгибу в каждом сечении имеют одну и ту же величину σ_{max}. Для таких случаев следовательно существует следующее обязательное условие, получаемое из уравнения (46):

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \text{const}. \tag{48}$$

Это значит, что изменение M и W должно происходить для всей длины балки по одному и тому же закону.

2. Напряжения среза. Согласно сказанному на стр. 510 (черт. 11) срезывающая сила, приходящаяся на единицу длины балки, на расстоянии y от нейтрального слоя, равна (в *кг/см*).

$$T_y = \tau_y z = \frac{QS_y}{J}, \tag{49}$$

3. Главные напряжения. Нормальное напряжение σ и напряжение среза τ, одновременно возникающие в каком-нибудь элементе площади сечения балки, дают в плоскости изгиба в каждом направлении определенное нормальное напряжение. Если от этой маленькой площадки-отложить все указанные напряжения по соответствующим им направлениям, то крайние точки их будут лежать на эллипсе напряжений, два сопряженные диаметра которого имеют направления σ и τ. Полуоси этого эллипса напряжений, σ_{max} и σ_{min}, представляют собою главные напряжения. В соответствии с этим по удлинению ε и сдвигу γ получается эллипс удлинений и его полуоси — главные удлинения ε_{max} и ε_{min}.

Главные напряжения элемента сечения могут быть выражены через действующие в этом элементе нормальное напряжение σ и напряжение сдвига τ следующим образом:

$$N\frac{\max}{\min} = \frac{1}{2}\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \tag{50}$$

Двойной знак указывает на то, что N_{max} является всегда напряжением растяжения, а N_{min} — напряжением сжатия.

1) Если в сечении, кроме напряжения среза τ, возникают еще два нормальных напряжения σ_x и σ_y в двух взаимно перпендикулярных направлениях (такое явление вообще имеет место у вертикальных стенок клепаных балок, у плотин), то главные напряжения:

$$N\frac{\max}{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau^2}. \tag{51}$$

В большинстве случаев, однако, σ_y можно пренебречь.

Угол ϕ, под которым $N\frac{\max}{\min}$ наклонено к оси балки, получается из уравнения:

$$\operatorname{tg} 2\phi = \pm\frac{2\tau}{\sigma}.$$

Следовательно направления главных напряжений, действующих в элементе сечения балки, взаимно перпендикулярны.

При $\tau = 0$ (например для наиболее удаленного от нейтральной оси элемента сечения балки) $\phi = 0$ и $N_{max} = \sigma$, $N_{min} = 0$, т. е. наибольшее удлинение имеет место в направлении оси балки.

При $\sigma = 0$ (например для нейтральной оси сечения) $\phi = \pm 45°$ и $N_{max} = +\tau$, $N_{min} = -\tau$, т. е. напряжения среза сами по себе вызывают главные напряжения, наклоненные к оси балки под углом в 45°.

Главные напряжения с учетом поперечной деформации получаются:

$$N'\frac{\max}{\min} = \frac{m-1}{2m}\sigma \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2} \quad \text{(формула Баха)}. \tag{52}$$

Здесь означают: $m = \frac{10}{3}$ отношения $\varepsilon:\varepsilon_q$ (см. стр 430);

$$\alpha_0 = \sigma_p : \frac{m+1}{m}\tau \text{ (для растяжения) или}$$

$$\alpha_0 = \sigma_c : \frac{m+1}{m}\tau \text{ (для сжатия).}$$

Для совершенно однородных тел $\alpha_0 = 1$.

Для коэфициента Пуссона $m = \frac{10}{3}$, получаем:

$$N'\frac{\max}{\min} = 0{,}35\,\sigma \pm 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}, \tag{53}$$

где $\alpha_0 = \frac{\sigma_p}{1{,}3\tau}$ для растяжения или $\alpha_0 = \frac{\sigma_c}{1{,}3\tau}$ для сжатия.

4. Траектории напряжений. Так как вообще при изгибе бруса в каждом сечении его кроме нормальных напряжений возникают также напряжения сдвига, то главные направления складывающегося общего напряженного состояния бруса наклонены к продольной оси его под различными углами. Желательно поэтому получить представление о том, каковы направления главных напряжений в различных точках бруса. Для этой цели вычерчиваются кривые линии, касательные к которым всюду совпадают с направлениями главных напряжений в соответствующих точках касания. Эти кривые, или так называемые траектории напряжений, можно получить, если взять на выбор целый ряд сечений, определить для различных точек каждого сечения σ и τ и затем найти из уравнения для $\operatorname{tg} 2\phi$ угол ϕ, образуемый главными напряжениями с осью бруса. Проводя достаточное количество таких касательных к траекториям напряжений, можно затем самые траектории вычертить от руки.

в) Упругие деформации прямых балок

За начало прямоугольных координат обычно принимается одна из опор балки; при свободно лежащих балках — свободный конец балки. Осью x-ов служит первоначальная прямая ось балки.

1. Упругая деформация от изгибающих моментов

а) Угол наклона, образуемый под действием изгибающего момента M двумя первоначально параллельными сечениями балки x_1 и x_2 при постоянном моменте инерции J сечения балки между x_1 и x_2, равен в дуговых единицах:

$$\beta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\rho} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_{x_1}^{x_2} M dx = \frac{1}{EJ} \cdot [\text{площадь моментов}]_{x_1}^{x_2}, \qquad (54)$$

где E модуль упругости и EJ — жесткость балки при изгибе, т. е. то сопротивление, которое балка оказывает изгибу. Если J переменно, то в вышеозначенную формулу вместо J вставляется некоторая определенная величина J_c (целесообразно взять для этого наибольшее из значений J), а данная плоскость моментов заменяется другой, несколько искаженной плоскостью моментов, ординаты которой суть $M' = M \frac{J_c}{J}$.

б) Упругой линией (кривая ACC_1B, черт. 19) называется ось балки (бывшая раньше прямой), изогнутая в результате действия на балку изгибающих сил. Радиус кривизны упругой линии определяется по формуле:

$$\rho = \frac{EJ}{M}. \qquad (55)$$

Ось балки (AB) в большинстве случаев изгиба о клоняется лишь на небольшие углы β, так что в общей формуле для ρ можно считать $ds \approx dx$

(или $\cos\beta \approx 1$, $\sin\beta \approx \beta$). **Диференциальное уравнение упругой линии** ACC_1B получается:

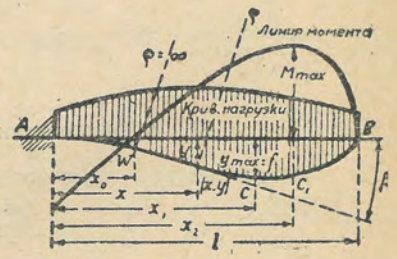
$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{\rho}. \qquad (56)$$

Знак (+) относится к тому случаю, когда с возрастанием x тангенс угла, под которым касательная к упругой линии в точке (xy) наклонена к оси x-ов, увеличивается, другими словами, когда упругая линия обращена к оси x-ов своей выпуклой стороной; знак(—) относится к обратному случаю.

Интегрируя указанное выражение один раз, получаем $dy:dx$, т. е. тангенс угла изгиба β в точке (xy) ($tg\,\beta$ на черт. 19); интегрируя два раза, получаем уравнение упругой линии, причем постоянные определяются соответствующими условиями расположения опор у балки Для неподвижной опоры или опоры, скользящей в горизонтальном направлении (B на черт. 19), $y = 0$; для защемленного конца балки (A на черт. 19) $\frac{dy}{dx} = tg\,\beta = 0$. Точки перегиба упругой линии получаются для таких сечений, в которых $M = 0$ (т. е. $\rho = \infty$). Наибольшая **стрела прогиба** f балки (в точке C, соответствует x_1, черт. 19) определяется из условия $y = max$ или $\frac{dy}{dx} = 0$. [Следует выделить сечение, соответствующее наибольшему изгибающему моменту (точка C_1 соответствует x_2, черт. 19), определяемому из условия $M = EJ \frac{d^2y}{dx^2} = \max$]. Условие, при котором упругая линия превращается в круг:

$$\frac{\rho}{E} = \frac{J}{M} = \text{const}. \qquad (57)$$

в) Способ Мора применим для более общих случаев действия нагрузок. Прогиб y в каком-нибудь сечении C равен увеличенному в $(1:EJ)$ раз моменту, действующему в C и получаемому из площади моментов, рассматривая ее в виде новой площади нагрузки балки. Тангенсы углов наклона касательных к упругой линии у опор равны сопротивлениям опор балки, нагруженной площадью моментов, увеличенной в $(1:EJ)$ раз. Если J переменно, то аналогично тому, что мы имели выше, заменяется J_c, а площадь M — искаженной площадью M'. Тогда упругая линия в качестве кривой моментов может быть найдена также графическим построением в виде веревочного многоугольника для упомянутой выше новой площади нагрузки и полюсного расстояния EJ_c или EJ.

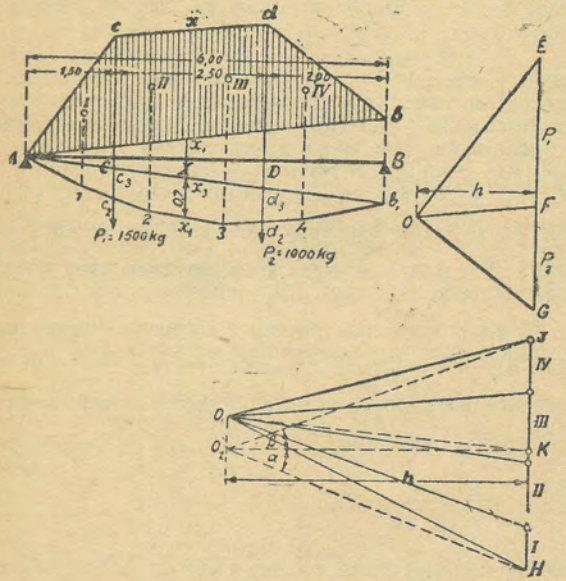


Черт. 19.

Примеры. Балка с одинаковым по всей длине сечением. Пусть имеем балку AB (черт. 20, своими концами свободно лежащую на опорах A и B и нагруженную в точках C и D сосредоточенными силами P_1 и P_2.

На черт. 20 вычерчен силовой многоугольник, в котором $EF = P_1$, $FG = P_2$, а полюсное расстояние (O – полюс) $= h$. На чертеже проведены $Ac \parallel OE$, $cd \parallel OF$, $db \parallel OG$ и замыкающая сторона Ab веревочного многоугольника. Заштрихованная фигура $AcdbA$ есть площадь моментов нагруженной балки, из которой мы для любого сечения балки X получаем отрезок xx_1, представляющий собою изгибающий момент для данного сечения.

Для упругой линии как линии, ограничивающей веревочный многоугольник, площадь моментов $AcdbA$ служит площадью нагрузки с горизонтальным усилием EJ. Делим (черт. 20) площадь $AcdbA$ на несколько частей, например на четыре части: I, II, III и IV. Пусть требуется для линии xx_1 в сечении X, разделяющем две такие части, определить точную величину прогиба. На черт. 20 отдельные части площади $AcdbA$ отложены на линии HJ снизу вверх в виде вертикальных отрезков. Принимая за полюс такую точку O_1, чтобы полюсное расстояние было $h = EJ$, строим силовой многоугольник O_1JHO_1, а на чертеже – соответствующий веревочный многоугольник $A\,1\,2\,3\,4\,b_1A$. Отрезки c_2c_3, x_2x_3, d_2d_3, заключенные в означенном многоугольнике, дают прогиб балки в соответствующих сечениях. Если теперь проведем $O_1K \parallel Ab_1$, а из точки K горизонтальную линию KO_2, затем соединим O_2 с H и J прямыми O_2H и O_2J, то углы HO_2K и KO_2J будут пропорциональны углам наклона упругой линии у обеих опор, A и B.



Черт. 20.

Для того чтобы построить упругую линию в надлежащем правильном положении, строим второй силовой многоугольник, на этот раз с полюсом O_2, и вычерчиваем соответствующий этому силовому многоугольнику веревочный многоугольник. Последний пройдет через точки A и B и будет описанным около упругой линии многоугольником. Точки касания его сторон с упругой линией суть точки пересечения упругой линии с вертикалями, проходящими через точки C, X и D.

2. Механическая работа при изгибе.

Благодаря изгибающему моменту элемент dx балки претерпевает некоторое вращение на угол $d\beta = \frac{dx}{\rho} = \frac{M dx}{EJ}$ — в дуговой мере. Работа, производимая при этом вращении, $dA = \frac{1}{2} M d\beta$, откуда:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^l M d\beta = \frac{1}{2}\int_0^l M \cdot \frac{dx}{\rho} = \frac{1}{2}\int \frac{M^2 dx}{EJ}. \qquad (58)$$

В случае сосредоточенных нагрузок интегрирование производится отдельно для каждого из участков l.

Затем определяется работа A в соответствии с тем родом нагрузки, к которому данная балка должна быть отнесена (стр. 538 и дальше). Вот некоторые примерные результаты:

для случая 1: $A = \frac{1}{2} Pf$, | для случаев 8 и 12: $A = \frac{8}{25} Pf$

для случая 7: $A = \frac{1}{5} Pf$, | для случая 14: $A = \frac{17}{24} Pf$ и т. д.

3. Упругая деформация от действия срезывающих сил.

У прокатных и железных клепаных балок угол сдвига двух поперечных сечений, расстояние между коими $= dx$, от действия срезывающей силы Q_2 в предположении, что напряжения среза распределяются равномерно по сечению вертикальной стенки балки, равен приблизительно:

$$\gamma = \frac{Q}{FG} = \frac{1}{FG}\frac{dM}{dx}, \qquad (59)$$

где F — сечение вертикальной стенки в $см^2$, а G — модуль скольжения в $кг/см^2$.

Прогиб балки от действия срезывающих сил на расстоянии x от опоры равен:

$$y = \int_0^x \gamma dx = \int_0^x \frac{dM}{FG} = \frac{Mx - M_{0п}}{FG}, \qquad (60)$$

где $M_{0п}$ — изгибающий момент над опорой.

Для $M_{0п} = 0$, т. е. для простого случая балки на двух опорах имеем:

$$y = \frac{Mx}{FG}; \qquad (61)$$

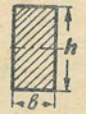
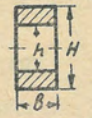
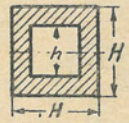
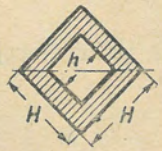
это значит, что получающаяся благодаря действию срезывающих усилий упругая линия есть линия веревочного многоугольника, соответствующая данной площади нагрузки балки, с полюсным расстоянием FG,

Работа деформации балки от действия срезывающих сил равна:

$$A_c = \frac{1}{2}\int_0^l Q\gamma dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Q^2 dx}{FG}. \qquad (62)$$

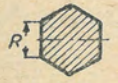
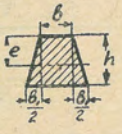
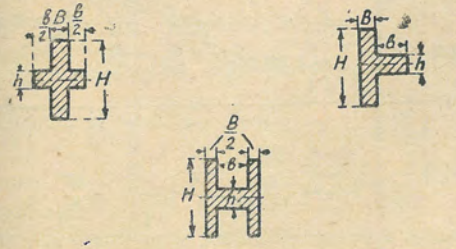
Таблица 26

Моменты инерции и моменты сопротивления сечений различных форм

№	Форма сечения	Момент инерции	Момент сопротивления
1		$J=\frac{bh^3}{12}$	$W=\frac{bh^2}{6}$
2		$J=\frac{h^4}{12}$	$W=\frac{h^3}{6}$
3		$J=\frac{h^4}{12}$	$W=\frac{\sqrt{2}}{12}h^3=$ $=0{,}117\,851h^3$ [1]
4		$J=\frac{b}{12}(H^3-h^3)$	$W=\frac{h}{6}\frac{H^3-h^3}{H}$
5		$J=\frac{H^4-h^4}{12}$	$W=\frac{1}{6}\frac{H^4-h^4}{H}$
6		$J=\frac{H^4-h^3}{12}$	$W=\frac{\sqrt{2}}{12}\frac{H^4-h^4}{H}=$ $=0{,}1179\frac{H^4-h^4}{H}$
7		$J=\frac{bh^3}{36}$ $e=\frac{2}{3}h$	$W=\frac{bh^2}{24}$

[1] Если срезать по горизонтали верхнюю и нижнюю вершины сечения, то W увеличивается; сужение сечения с обеих сторон на величину, равную $\frac{1}{18}$ диагонали, дает $W_{max}=0{,}1242h^3$.

Таблица 26 (продолжение)

№	Форма сечения	Момент инерции	Момент сопротивления
8		$J=\frac{5\sqrt{3}}{16}R^4=$ $=0{,}5413R^4$	$W=\frac{5}{8}R^3$
9			$W=0{,}5413R^3$
10		$J=\frac{1+2\sqrt{2}}{6}R^4=$ $=0{,}6381R^4=$ $=0{,}8758r^4$	$W=0{,}6906R^3=$ $=0{,}8758r^3$ [1]
11	Правильный многоугольник, F — площадь многоугольника, a — сторона его, R — радиус окружности, описанной около сечения, r — радиус вписанной окружности. Ось взята произвольно и проходит через центр	$J=\frac{F}{24}(6R^2-a^2)=$ $=\frac{F}{48}(12r^2+a^2)\approx$ $\approx\frac{FR^2}{4}$	$W\approx\frac{FR}{4}$
12		$J=\frac{6b^2+6b_1b+b_1^2}{36(2b+b_1)}h^3$ $e=\frac{1}{3}\frac{3b+2b_1}{2b+b_1}h$	$W=\frac{6b^2+6bb_1+b_1^2}{12(3b+2b_1)}h^2$
13			$J=\frac{BH^3+bh^3}{12}$ $W=\frac{BH^3+bh^3}{6H}$

[1] Относительно диагонали момент сопротивления $W=0{,}6381\ R^3=0{,}8757\ r^3$.

Таблица 26 (продолжение).

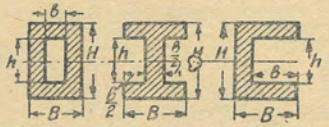
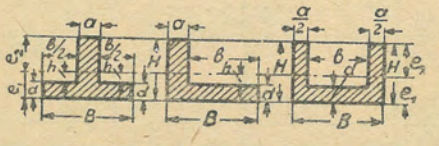
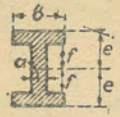
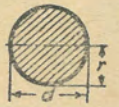
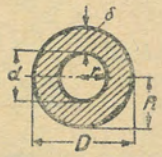
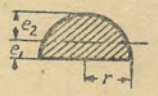
№	Форма сечения	Момент инерции	Момент сопротивления
14		$J=\frac{BH^3-bh^3}{12}$	$W=\frac{BH^3-bh^3}{6H}$
15		$J=\frac{1}{3}(Be_1^3-bh^3+ae_2^3)$ $e_1=\frac{1}{2}\frac{aH^2+bd^2}{aH+bd}$ $e_2=H-e_1$	
16		$J=\frac{1}{3}(Be_1^3-B_1h^3+be_2^3-b_1h_1^3)$ $e_1=\frac{1}{2}\frac{aH^2+B_1d^2+b_1d_1(2H-d_1)}{aH+B_1d+b_1d_1}$ $e_2=H-e_1$	
17		$J=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi r^4}{4}=$ $=0{,}0491d^4=$ $=0{,}7854r^4=$ $=F\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{F}{4}r^2$ $J\approx 0{,}05d^4$	$W=\frac{\pi d^3}{32}=\frac{\pi r^3}{4}=$ $=0{,}0982d^3=$ $=0{,}7854r^3=$ $=\frac{F}{4}r$ $W\approx 0{,}1d^3$
18	 $d_m=\frac{1}{2}(D+d)\quad \delta=\frac{1}{2}(D-d)$	$J=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)=$ $=\frac{\pi}{4}(R^4-r^4)=$ $=\frac{1}{4}F(R^2+r^2)$ $J\approx 0{,}05(D^4-d^4)$	$W=\frac{\pi}{32}\frac{(D^4-d^4)}{D}=$ $=\frac{\pi}{4}\frac{R^4-r^4}{R}$ $W\approx 0{,}8d_m^2\delta$, если отношение $\delta:d_m$ очень мало
19		$J=r^4\cdot\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)=$ $=0{,}1098r^4$	$W_2=0{,}1908r^3$ $W_1=0{,}2587r^3$ $e_1=0{,}4234r$

Таблица 26

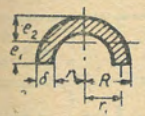
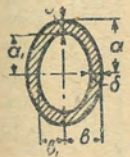
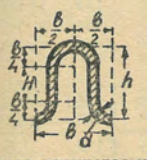
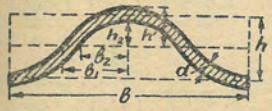
№	Форма сечения	Момент инерции	Момент сопротивления
20		$J=0{,}1098(R^4-r^4)$ $\frac{0{,}283R^2r^2(R-r)}{R+r}$ $J\approx 0{,}3\delta r_1^3$, если отношение $\delta:r_1$ очень мало	$e_1=\frac{4}{3\pi}\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}$ $e_2=R-e_1$
21		$J=\frac{\pi a^3b}{4}=0{,}7854a^3b$	$W=\frac{\pi a^2b}{4}=0{,}7854a^2b$
22		$J=\frac{\pi}{4}(a^3b-a_1^3b_1)\approx$ $\approx\frac{\pi}{4}a^2(a+3b)\delta$	$W\approx\frac{\pi}{4}a(a+3b)\delta$
		Значения J и W относительно оси $2b$	
23	 Балочное железо (волна имеет форму дуги круга)	F, J и W на 1 m ширины: $F=100\,d\cdot\frac{1}{b}\left(\pi\frac{b}{2}+2H\right)$ $J=25d\cdot\frac{1}{b}\left(\frac{\pi b^3}{16}+b^2h+\frac{\pi bH^2}{2}+\frac{2}{3}H^3\right)$, где $H=h-\frac{1}{2}b;\quad W=\frac{2J}{h+d}$	
24	 Плоское волнистое железо (волны составлены из параболических дуг)	F, J и W на 1 m ширины: $F=12{,}5d\cdot\frac{b}{h}\left\{\frac{4h}{b}\sqrt{1+\left(\frac{4h}{b}\right)^2}+\right.$ $\left.+\ln\left[\frac{4h}{b}+\sqrt{1+\left(\frac{4h}{b}\right)^2}\right]\right\}$ $J=\frac{1280}{21}\cdot\frac{1}{b}(b_1h_1^3-b_2h_2^3)$, где $h_1=\frac{1}{2}(h+d)$ | $b_1=\frac{1}{4}(b+2{,}6d)$ $h_2=\frac{1}{2}(h-d)$ | $b_2=\frac{1}{2}(b-2{,}6d)$ $W=\frac{2J}{h+d}$	

Таблица 27

Круглое сечение



J = экваториальный момент инерции. W = момент сопротивления

d	$J=\frac{\pi d^4}{64}$	$W=\frac{\pi d^3}{32}$	d	$J=\frac{\pi d^4}{64}$	$W=\frac{\pi d^3}{32}$	d	$J=\frac{\pi d^4}{64}$	$W=\frac{\pi d^3}{32}$
1	0,0491	0,0982	51	332 086	13 023	101	5 108 055	101 139
2	0,7854	0,7854	52	358 908	13 804	102	5 313 378	104 184
3	3,976	2,651	53	987 323	14 616	103	5 524 830	107 270
4	12,57	6,283	54	417 393	15 459	104	5 742 532	110 432
5	30,68	12,27	55	449 180	16 334	105	5 966 604	113 676
6	63,62	21,21	56	482 750	17 241	106	6 197 171	116 926
7	117,9	33,67	57	518 166	18 181	107	6 434 357	120 296
8	201,1	50,27	58	555 497	19 155	108	6 678 287	123 672
9	322,1	71,57	59	594 810	20 163	109	6 929 087	127 186
10	490,9	98,17	60	636 172	21 206	110	7 186 886	130 571
11	718,7	130,7	61	679 651	22 284	111	7 451 813	134 267
12	1 018	169,6	62	725 332	23 398	112	7 723 997	137 925
13	1 402	215,7	63	773 272	24 548	113	8 003 5 1	141 668
14	1 886	269,4	64	823 50	25 736	114	8 290 666	145 456
15	2 485	331,3	65	876 240	26 961	115	8 585 417	149 312
16	3 217	402,1	66	931 420	28 225	116	8 887 958	153 240
17	4 100	482,3	67	989 166	29 527	117	9 198 425	157 238
18	5 153	572,6	68	1 049 556	30 869	118	9 516 956	161 304
19	6 397	673,4	69	1 112 660	32 251	119	9 843 689	165 440
20	7 854	785,4	70	1 178 588	33 674	120	10 178 763	169 646
21	9 547	909,2	71	1 247 393	35 138	121	10 522 320	173 923
22	11 499	1 045	72	1 319 167	36 644	122	10 874 501	178 271
23	13 737	1 194	73	1 393 995	38 192	123	11 235 450	182 690
24	16 286	1 357	74	1 471 963	39 783	124	11 605 311	187 181
25	19 175	1 534	75	1 553 156	41 417	125	11 984 229	191 744
26	22 432	1 726	76	1 637 662	43 096	126	12 372 350	196 380
27	26 087	1 932	77	1 725 571	44 820	127	12 769 824	201 089
28	30 172	2 155	78	1 816 972	46 589	128	13 176 799	205 872
29	34 719	2 394	79	1 911 967	48 404	129	13 593 424	210 730
30	39 761	2 651	80	2 010 619	50 265	130	14 019 852	215 664
31	45 333	2 925	81	2 113 051	52 174	131	14 456 235	220 676
32	51 472	3 217	82	2 219 347	54 130	132	14 902 727	225 766
33	58 214	3 528	83	2 329 605	56 135	133	15 359 483	230 936
34	65 597	3 859	84	2 443 920	58 189	134	15 826 658	236 189
35	73 662	4 209	85	2 562 392	60 292	135	16 304 411	241 547
36	82 448	4 580	86	2 685 120	62 445	136	16 792 899	246 954
37	91 998	4 973	87	2 812 205	64 648	137	17 292 282	252 442
38	102 354	5 387	88	2 943 748	66 903	138	17 802 721	258 010
39	113 561	5 824	89	3 079 853	69 210	139	18 323 378	263 660
40	125 664	6 283	90	3 220 623	71 569	140	18 857 416	269 392
41	138 709	6 766	91	3 366 165	73 982	141	19 401 999	275 206
42	152 745	7 274	92	3 516 586	76 448	142	19 958 294	281 103
43	167 820	7 806	93	3 671 992	78 968	143	20 526 466	287 083
44	183 984	8 363	94	3 832 492	81 542	144	21 106 684	293 148
45	201 289	8 946	95	3 998 198	84 173	145	21 699 116	299 298
46	219 787	9 556	96	4 169 220	86 859	146	22 303 933	305 533
47	239 531	10 193	97	4 345 671	89 601	147	22 921 307	311 853
48	260 576	10 857	98	4 527 664	92 401	148	23 551 409	318 262
49	282 979	11 550	99	4 715 315	95 259	149	24 194 414	324 757
50	306 796	12 272	100	4 908 738	98 175	150	24 850 496	331 340

Таблица 27

Круглое кольцевое сечение



ω — площадь поперечного сечения, J — момент инерции, W — момент сопротивления.

Веса g (в *кг/м*) относятся к гладким чугунным трубам (колоннам); 1 *м*³ чугуна весит 7250 *кг*. Для сварочного железа значения g необходимо умножить на 1,076, для литой стали — на 1,083.

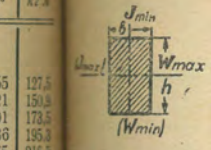
D *мм*	δ *мм*	ω *см*²	J *см*⁴	W *см*³	g *кг/м*	D *мм*	δ *мм*	ω *см*²	J *см*⁴	W *см*³	g *кг/м*
80	10	22,0	137	34,2	16,0	160	20	88,0	2 200	275	63,8
	12	25,6	153	38,2	18,6		22	95,4	2 329	291	69,2
	14	29,0	165	41,2	21,0		24	103	2 445	306	74,3
90	10	25,1	204	45,3	18,2	170	14	68,6	2 104	244	49,7
	12	29,4	229	50,9	21,3		16	77,4	2 320	273	56,1
	14	33,4	250	56,6	24,2		18	85,9	2 517	296	62,4
	16	37,2	267	59,3	27,0		20	94,3	2 699	318	68,3
100	10	28,3	291	58,2	20,5		22	102	2 863	337	74,2
	12	33,2	327	65,4	24,1		24	110	3 013	354	79,8
	14	37,8	359	71,8	27,4	180	14	73,0	2 534	282	52,9
	16	42,2	385	77,0	30,6		16	82,4	2 798	311	59,7
	18	46,4	409	81,8	33,6		18	91,6	3 042	338	66,4
110	10	31,4	397	72,2	22,8		20	101	3 288	365	72,9
	12	36,9	450	81,8	26,8		22	109	3 475	386	79,2
	14	42,2	497	90,4	30,6		24	118	3 663	407	85,3
	16	47,3	537	97,6	34,2	190	14	77,4	3 017	318	56,1
	18	52,0	572	104	37,7		16	87,5	3 338	351	63,4
120	10	34,6	527	87,8	25,1		18	97,3	3 636	383	70,5
	12	40,7	601	100	29,5		20	107	3 914	413	77,4
	14	46,6	666	111	33,8		22	116	4 168	439	84,2
	16	52,3	724	121	37,9		24	125	4 401	463	90,8
	18	57,7	773	129	41,8						
	20	62,8	817	136	45,5	200	16	92,5	3 944	394	67,1
130	10	37,7	683	105	27,3		18	103	4 303	430	74,6
	12	44,5	782	120	32,3		20	113	4 633	464	82,0
	14	51,0	871	134	37,0		22	123	4 948	495	89,2
	16	57,3	949	146	41,5		24	133	5 231	523	96,2
	18	62,3	1 019	157	45,9		26	142	5 499	550	103,0
	20	69,1	1 080	166	50,1		28	151	5 743	574	109,7
140	12	48,3	997	142	35,0		30	160	5 968	597	116,1
	14	55,4	1 114	159	40,2	210	18	97,5	4 619	440	70,7
	16	62,3	1 218	174	45,2		18	109	5 047	481	78,7
	18	68,9	1 311	187	50,0		20	119	5 443	519	86,6
	20	75,4	1 395	199	54,7		22	130	5 819	554	94,2
150	12	52,0	1 248	166	37,7		24	140	6 166	587	101,6
	14	59,8	1 397	186	43,4		26	150	6 488	618	109,0
	16	67,4	1 534	205	48,9		28	160	6 786	646	116,1
	18	74,7	1 655	221	54,1		30	170	7 062	673	123,0
	20	81,7	1 766	235	59,2	220	16	103	5 342	486	74,3
	22	88,6	1 866	249	64,2		18	114	5 873	534	82,8
	24	95,0	1 955	261	68,9		20	126	6 346	577	91,1
160	14	64,2	1 727	216	46,5		22	137	6 839	622	99,2
	16	72,4	1 899	237	52,5		24	148	7 203	655	107,2
	18	80,3	2 056	257	58,2		26	153	7 589	690	114,9
							28	169	7 949	723	122,5
							30	179	8 282	753	129,8

Таблица 27 (продолжение)

D мм	δ мм	ω см²	J см⁴	W см³	g кг/м	D мм	δ мм	ω см²	J см⁴	W см³	g кг/м
230	16	109	6 207	548	78,0	300	20	176	17 330	1 155	127,5
	18	120	6 630	577	86,9		24	208	19 956	1 321	150,8
	20	132	7 341	638	95,6		28	239	22 3 3	1 391	173,5
	22	144	7 862	684	104,3		32	269	24 535	1 636	195,8
	24	155	8 351	726	112,6		36	299	26 479	1 765	216,5
	26	167	8 809	766	120,8		40	327	28 262	1 884	237,9
	28	178	9 238	803	128,8						
	30	189	9 637	838	136,7						
							20	188	21 302	1 331	136,7
	18	126	7 785	649	91,0		24	223	24 558	1 535	161,8
	20	138	8 434	703	100,9	320	28	257	27 580	1 724	186,3
	22	151	9 042	753	109,3		32	290	30 390	1 900	209,9
240	24	163	9 546	796	118,1		36	321	32 905	2 057	232,9
	26	175	10 154	846	126,7		40	352	35 186	2 199	255,1
	28	186	10 659	883	135,2						
	30	198	11 133	928	143,5						
							20	201	25 838	1 520	145,8
							24	239	29 912	1 759	172,8
	18	131	8 880	710	95,1		28	274	33 665	1 98)	198,8
	22	158	10 334	827	114,3	340	32	310	37 115	2 183	224,5
250	26	183	11 633	931	132,7		36	344	40 277	2 359	249,3
	30	207	12 778	1 022	150,3		40	377	43 165	2 539	273,3
	34	231	13 790	1 103	167,3						
	18	137	10 073	775	99,2		20	214	30 977	1 721	154,9
	22	164	11 746	904	119,3		24	253	35 935	1 996	183,6
260	26	191	13 243	1 019	138,5		28	292	40 526	2 251	211,7
	30	217	14 577	1 121	157,2	360	32	330	44 773	2 487	239,6
	34	241	15 691	1 207	175,0		36	366	48 680	2 704	265,6
							40	402	52 27o	2 904	291,5
							44	437	55 582	3 088	316,7
	18	143	11 339	842	103,3						
	22	171	13 286	984	124,3						
270	26	199	15 000	1 111	144,5						
	30	226	16 539	1 225	164,0		20	226	36 765	1 935	194,0
	34	252	17 914	1 327	182,8		24	270	42 718	2 248	194,6
							28	308	48 262	2 540	224,5
						380	32	346	53 400	2 811	253,6
							36	383	58 379	3 073	282,1
							40	418	62 593	3 294	309,8
	18	148	12 774	912	107,4		44	453	66 671	3 509	336,8
	22	178	14 947	1 068	129,3						
280	26	207	16 903	1 208	150,4						
	30	236	18 574	1 334	170,8						
	34	263	20 257	1 447	190,5						
							20	239	43 210	2 160	173,1
							24	284	50 304	2 515	205,5
							28	336	56 927	2 846	237,2
						400	32	370	63 103	3 156	268,3
	18	154	14 289	986	111,5		36	412	68 852	3 443	298,5
	22	185	16 743	1 155	134,3		40	452	74 194	3 710	327,7
290	26	216	18 970	1 308	156,3		41	492	79 154	3 958	356,8
	30	245	20 983	1 447	177,6		48	531	83 744	4 187	384,5
	34	273	22 798	1 573	198,2						

Таблица 28

Прямоугольное и квадратное сечения



$$J\min = \frac{b^3 h}{12}.$$

$$W\max = \frac{bh^2}{6}.$$

Примечание. $J\max = \frac{bh^3}{12}$ получается путем умножения соответствующего значения W max из таблицы на $\frac{h}{2}$.

$W\min = \frac{b^2 h}{6}$ получается путем деления соответствующего значения J min из таблицы на $\frac{b}{2}$.

Сечение h	Сечение b	J min	W max	Сечение h	Сечение b	J min	W max	Сечение h	Сечение b	J min	W max
1	1	0,0833	0,1667	9	6	162,00	81,000	13	9	789,75	253,50
					7	257,25	94,500		10	1083,3	281,67
2	1	0,1667	0,6667		8	384,00	108,00		11	1441,9	309,83
	2	1,3333	1,3333		9	546,75	121,50		12	1872,0	338,00
									13	2380,1	366,17
3	1	0,2500	1,5000	10	1	0,8333	16,667				
	2	2,0000	3,0000		2	6,6667	33,333	14	1	1,1667	32,667
	3	6,7500	4,5000		3	22,500	50,000		2	9,3333	65,333
					4	53,333	66,667		3	31,500	98,000
4	1	0,3333	2,6667		5	104,17	83,333		4	74,667	130,67
	2	2,6667	5,3333		6	180,00	100,00		5	145,83	163,33
	3	9,0000	8,0000		7	285,83	116,67		6	252,00	196,00
	4	21,333	10,667		8	426,67	133,33		7	400,17	228,67
					9	607,50	150,00		8	597,33	261,33
5	1	0,4167	4,1667		10	833,33	166,67		9	850,50	294,00
	2	3,3333	8,3333						10	1166,7	326,67
	3	11,250	12,500						11	1552,8	359,33
	4	26,667	16,667	11	1	0,9167	20,167		12	2016,0	392,00
	5	52,083	20,833		2	7,3333	40,333		13	2563,2	424,67
					3	24,750	60,500		14	3201,3	457,33
					4	58,667	80,666				
6	1	0,5000	6,0000		5	114,58	100,83		1	1,2500	37,500
	2	4,0000	12,000		6	198,00	121,00		2	10,000	75,000
	3	13,500	18,000		7	314,42	141,17		3	33,750	112,50
	4	32,000	24,000		8	469,33	161,33		4	80,000	150,00
	5	62,500	30,000		9	668,25	181,50		5	156,25	187,50
	6	108,00	36,000		10	916,67	201,67		6	270,00	225,00
					11	1220,1	221,83		7	428,75	262,50
								15	8	640,00	300,00
7	1	0,5833	8,1667						9	911,25	337,50
	2	4,6667	16,333		1	1,0000	24,000		10	1250,0	375,00
	3	15,750	24,500		2	8,0000	48,000		11	1663,8	412,50
	4	37,333	32,667		3	27,000	72,000		12	2160,0	450,00
	5	72,917	40,833		4	64,000	96,000		13	2746,3	487,50
	6	126,00	49,000		5	125,00	120,00		14	3430,0	525,00
	7	200,08	57,167	12	6	216,00	144,00		15	4218,8	562,50
					7	343,00	168,00				
8	1	0,6667	10,667		8	512,00	192,00				
	2	5,3333	21,333		9	729,00	216,00		1	1,3333	42,667
	3	18,000	32,000		10	1000,0	240,00		2	10,667	85,333
	4	42,667	42,677		11	1331,0	264,00		3	36,000	128,00
	5	83,333	53,333		12	1728,0	288,00		4	85,333	170,67
	6	144,00	64,000						5	166,67	213,33
	7	228,67	74,667		1	1,0833	28,167		6	288,00	256,00
	8	341,33	85,333		2	8,6667	56,333	16	7	457,33	298,67
					3	29,250	84,500		8	682,67	341,33
9	1	0,7500	13,500	13	4	69,333	112,67		9	972,00	384,00
	2	6,0000	27,000		5	135,42	140,83		10	1333,3	426,67
	3	20,250	40,500		6	234,00	169,00		11	1774,7	469,33
	4	48,000	54,000		7	371,58	197,17		12	2304,0	512,00
	5	93,750	67,500		8	554,67	225,33		13	2929,3	554,67

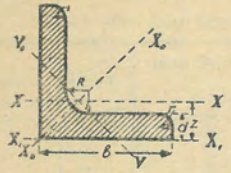
Таблица 28 (продолжение)

Сечение h	Сечение b	J min	W max	Сечение h	Сечение b	J min	W max	Сечение h	Сечение b	J min	W max
16	14	3658,7	597,33	18	9234,0	1083,0	22	13	4027,8	1048,7
	15	4500,0	640,00	19	10860	1143,2		14	5030,7	1129,3
	16	5461,3	682,67					15	6187,5	1210,0
								16	7509,3	1290,7
				1	1,6367	66,667		17	9007,2	1371,3
	1	1,4167	48,167	2	13,333	133,33		18	10692	1452,0
	2	11,333	96,333	3	45,000	200,00		19	12575	1532,7
	3	38,250	144,50	4	106,67	266,67		20	14667	1613,3
	4	90,667	192,67	5	208,33	333,33		21	16979	1694,0
	5	177,08	240,83	6	330,00	400,00		22	19521	1774,7
	6	306,00	289,00	7	571,67	466,67				
	7	485,92	337,17	8	853,33	533,33				
	8	725,33	385,33	9	1215,0	600,00				
17	9	1032,8	433,50	10	1666,7	666,67		1	1,9167	83,167
	10	1416,7	481,67	11	2218,3	733 33		2	15,333	176,33
	11	1835,6	529,83	12	2880,0	800,00		3	51,750	264,50
	12	2448,0	578,00	13	3661,7	866,67		4	122,67	352,67
	13	3112,4	626,17	14	4573,3	933,33		5	239,58	440,83
	14	3887,3	674,33	15	5625,0	1000,0		6	414,00	529,00
	15	4781,3	772,50	16	6826,7	1066,7		7	657,42	617,17
	16	5802,7	770,67	17	8188,3	1133,3		8	981,33	705,33
	17	6960,1	818,83	18	9720,0	1200,0		9	1397,3	793,50
				19	11432	1266,7		10	1916,7	881,67
				20	13333	1333,3		11	2551,1	969,83
	1	1,5000	54 000				23	12	3312,0	1058,0
	2	12,000	108,00					13	4210,9	1146,2
	3	40,500	162,00	1	1,7500	73,500		14	5259,3	1234,3
	4	96,000	216,00	2	14,000	147,00		15	6458,8	1322,5
	5	187,50	270,00	3	47,250	220,50		16	7850,7	1410,7
	6	324,00	324,00	4	112,00	294,00		17	9416,6	1498,8
	7	514,50	378,00	5	218,75	367,50		18	11178	1587,0
	8	768,00	432,00	6	378,00	441,00		19	13146	1675,2
18	9	1093,5	486,00	7	600,25	514,50		20	15333	1763,3
	10	1500,0	540,00	8	896,00	588,00		21	17750	1851,5
	11	1996,5	594,00	9	1275,8	661,50		22	20409	1939,7
	12	2592,0	648,00	10	1750,0	735,00		23	23320	2027,8
	13	3295,5	702,00	11	2329,3	808,50				
	14	4116,0	756,00	12	3024,0	882,00				
	15	5062,5	810,00	13	3844,8	955,50				
	16	6144,0	864,00	14	4802,0	1029,0		1	2,0000	96,000
	17	7359,5	918,00	15	5906,3	1102,5		2	16,000	192,00
	18	8748,0	972,00	16	7168,0	1176,0		3	54,000	288,00
				17	8597,8	1249,5		4	128,00	384,00
				18	10206	1323,0		5	250,00	480,00
				19	12003	1396,5		6	432,00	576,00
	1	1,5833	60,167	20	14000	1470,0		7	683,00	672,00
	2	12,667	120,33	21	16207	1543,5		8	1024,0	768,00
	3	42,750	180,50					9	1458,0	864,00
	4	101,33	240,67					10	2000,0	960,00
	5	197,92	300,83				24	11	2662,0	1056,0
	6	342,00	361,00	1	1,8333	80,667		12	3456,0	1152,0
	7	543,08	421,17	2	14,667	161,33		13	4394,0	1248,0
	8	810,67	481,33	3	49,500	242,00		14	5488,0	1344,0
19	9	1154,3	541,50	4	117,33	322,67		15	6750,0	1440,0
	10	1583,3	601,67	5	229,17	403,33		16	8192,0	1536,0
	11	2107,4	661,83	6	396,00	484,00		17	9826,0	1632,0
	12	2736,0	722,00	7	628,83	564,67		18	11664	1728,0
	13	3478,6	782,17	8	938,67	645 33		19	13718	1824,0
	14	4344,7	842,33	9	1336,5	726,00		20	16000	1920,0
	15	5343,8	902,50	10	1833,3	806,67		21	18522	2016,0
	16	6485,3	962,67	11	2440,2	887,33		22	21296	2112,0
	17	7778,9	1022,8	12	3168,0	968,00				

Таблица 28

Прямоугольное и квадратное сечения (окончание)

Сечение h	Сечение b	J min	W max	Сечение h	Сечение b	J min	W max	Сечение h	Сечение b	J min	W max
24	23	24334	2208,0		3	60,750	364,50		4	154,67	560,67
	24	27648	2304,0		4	144,00	486,00		5	302,08	700,83
					5	281,25	607,50		6	522,00	841,00
	1	2,0833	104,17		6	486,00	729,00		7	828,92	981,17
	2	16,667	208,33		7	771,75	850,50		8	1237,3	1121,3
	3	56,250	312,50		8	1152,0	972,00		9	1761,8	1261,5
	4	133,33	416,67		9	1640,3	1093,5		10	2416,7	1401,7
	5	260,42	520,83		10	2250,0	1215,0		11	3216,6	1541,8
	6	450,00	625,00		11	2994,8	1336,5		12	4176,0	1682,0
	7	714,58	729,17		12	3888,0	1458,0		13	5309,4	1822,2
	8	1066,7	833,33		13	4943,3	1579,5		14	6631,3	1962,3
	9	1581,8	937,50		14	6174,0	1701,0		15	8156,3	2102,5
	10	2083,3	1041,7	27	15	7593,8	1822,5	29	16	9898,7	2242,7
	11	2772,9	1145,8		16	9216,0	1944,0		17	11873	2382,8
	12	3500,0	1250,0		17	11054	2065,5		18	14094	2523,0
25	13	4577,1	1354,2		18	13122	2187,0		19	16576	2663,2
	14	5616,7	1458,3		19	15433	2308,5		20	19333	2603,3
	15	7031,3	1562,5		20	18000	2430,0		21	22381	2943,5
	16	8533,3	1666,7		21	20837	2551,5		22	25733	3083,7
	17	10135	1770,8		22	23958	2673,0		23	29404	3223,8
	18	12150	1875,0		23	27376	2794,5		24	33408	3364,0
	19	14290	1979,2		24	31104	2916,0		25	37760	3504,2
	20	16667	2083,3		25	35156	3037,5		26	42475	3644,8
	21	19294	2187,5		26	39546	3159,0		27	47567	3784,5
	22	22183	2291,7		27	44287	3280,5		28	53051	3924,7
	23	25348	2395,8						29	58940	4064,8
	24	28800	2500,0		1	2,3333	130,67				
	25	32552	2604,2		2	18,667	261,33		1	2,5000	150,00
					3	63,000	392,00		2	20,000	300,00
	1	2,1667	112,67		4	149,33	522,67		3	67,500	450,00
	2	17,333	225,33		5	291,67	653,33		4	160,00	600,00
	3	58,500	338,00		6	504,00	784,00		5	312,50	750,00
	4	138,67	450,67		7	800,33	914,67		6	540,00	900,00
	5	270,83	563,33		8	1194,7	1045,3		7	857,50	1050,0
	6	468,00	676,00		9	1701,0	1176,0		8	1280,0	1200,0
	7	743,17	788,67		10	2333,3	1306,7		9	1822,5	1350,0
	8	1109,3	901,33		11	3105,7	1437,3		10	2500,0	1500,0
	9	1579,5	1014,0		12	4032,0	1568,0		11	3327,5	1650,0
	10	2166,7	1126,7		13	5126,3	1698,7		12	4320,0	1800,0
	11	2883,8	1239,3	28	14	6402,7	1829,3		13	5492,5	1950,0
	12	3744,0	1352,0		15	7875,0	1960,0		14	6860,0	2100,0
26	13	4760,2	1464,7		16	9557,3	2090,7	30	15	8437,5	2250,0
	14	5945,3	1577,3		17	11464	2221,3		16	10240	2400,0
	15	7312,5	1690,0		18	13608	2352,0		17	12283	2550,0
	16	8874,7	1802,7		19	16004	2482,7		18	14580	2700,0
	17	10645	1915,3		20	18667	2613,3		19	17148	2850,0
	18	12636	2028,0		21	21609	2744,0		20	20000	3000,0
	19	14861	2140,7		22	24845	2874,7		21	23153	3150,0
	20	17333	2253,3		23	28390	3005,3		22	26620	3300,0
	21	20066	2366,0		24	32256	3136,0		23	30418	3450,0
	22	23071	2478,7		25	36458	3266,7		24	34560	3600,0
	23	26362	2591,3		26	41011	3397,3		25	39063	3750,0
	24	29952	2704,0		27	45927	3528,0		26	43940	3900,0
	25	33854	2816,7		28	51221	3658,7		27	49208	4050,0
	26	38081	2929,3						28	54880	4200,0
				29	1	2,4167	140,17		29	60973	4350,0
27	1	2,2500	121,50		2	19,333	280,33		30	67500	4500,0
	2	18,000	243,00		3	65,250	420,50				



Н. ФАСОННОЕ ЖЕЛЕЗО

(общесоюзный стандарт)

Угловое равнобокое железо

Допуски для углового железа:

1) В ширине полок ± 3%

2) „ толщине „

а) при ширине полок до 50 *мм* включ. ± 0,5 *мм*;
б) „ „ свыше 50 до 100 *мм* ± 1,0 „
в) „ „ „ 100 „ 150 „ ± 1,5 „

3) В длине углового железа:

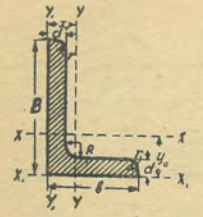
с нефрезерованными концами длиною до 4 *м* + 50 *мм*;
„ „ „ свыше 4 „ + 100 „
„ фрезерованными концами + 10 „

Примечание. Измерение толщины и ширины полок должно производиться на расстоянии 700 *мм* от конца угольника.

№ профилей	Размеры в *мм*				Площадь сечения *F см²*	Вес пог. метра *g кг*	Расстояние центра тяжести z_0 *см*	Моменты инерции			
	b	*d*	*R*	*r*				J_{x_1} *см⁴*	J_x *см⁴*	J_{x_0} *см⁴*	J_{y_0} *см⁴*
2	20	3	3,5	1,75	1,12	0,88	0,60	0,793	0,392	0,6185	0,1651
		4			1,45	1,14	0,64	1,080	0,492	0,771	0,2124
2,5	25	3	4	2	1,43	1,12	0,72	1 535	0,798	1,262	0,3333
		4			1,86	1,46	0,73	2,084	1,012	1,597	0,4273
3	30	4	4	2	2,26	1,77	0,88	3,59	1,824	2,884	0,764
		5			2,77	2,17	0,92	4,54	2,183	3,440	0,925
3,5	35	4	5	2,5	2,67	2,10	1,100	5,64	2,954	4,68	1,227
		5			3,28	2,57	1,04	7,13	3,564	4,64	1 493
4	40	4	6	3	3,08	2,42	1,12	8,33	4,47	7,09	1,859
		5			3,79	2,97	1,16	10,54	5,43	8,59	2,263
		6			4,48	3,52	1,20	12,28	6,31	9,98	2,654
4,5	45	5	6,5	3,25	4,30	3,37	1,28	14,95	7,87	12,48	3,27
		6			5,09	4,00	1,32	18,11	9,19	14,55	3 84
		7			5,86	4,60	1,36	21,31	10,43	16,4	4,39
5	50	5	7	3,5	4,80	3,77	1,40	20,43	10,93	17,38	4,55
		6			5,69	4,47	1,44	24,74	12,85	20,34	5,35
		7			6,56	5,15	1,48	29,10	14,62	23,10	6,13

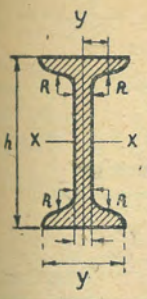
Угловое равнобокое железо
(продолжение)

№ профилей	Размеры в *мм*				Площадь сечения *F см²*	Вес пог. метра *g кг*	Расстояние центра тяжести z_0 *см*	Моменты инерции			
	b	*d*	*R*	*r*				J_{x_1} *см⁴*	J_x *см⁴*	J_{x_0} *см⁴*	J_{y_0} *см⁴*
6	60	6	8	4	6,91	5,42	1,69	42,5	22,84	36,15	9,53
		7			7,98	6,26	1,73	49,9	26,05	41,30	10,82
		8			9,03	7,09	1,77	57,4	29,16	46,15	12,16
6,5	65	6	8	4	7,51	5,89	1,81	54,0	29,36	46,60	12,14
		8			9,83	7,72	1,89	72,9	37,66	59,70	15,63
		10			12,07	9,47	1,97	92,1	45,20	71,50	19,03
7,5	75	8	10	5	11,47	9,00	2,13	110,9	58,9	93,3	24,40
		10			14,11	11,08	2,21	140,2	71,2	112,7	29,70
		12			16,67	13,09	2,29	170,0	82,6	130,3	34,86
8	80	8	10	5	12,27	9,63	2,25	134,6	72,5	114,6	30,4
		10			15,11	11,8o	2,34	170,0	87,2	138,6	35,8
		12			17,87	14,03	2,41	205,8	102,0	160,7	43,26
9	90	10	11	5,5	17,13	13,45	2,58	241,0	127,0	201,3	52,5
		12			20,29	15,93	2,66	291,5	148,0	234,4	61,4
		14			23,37	18,35	2,74	342,6	167,8	265,4	70,3
10	100	10	12,5	6,25	19,17	15,05	2,82	328,7	175,3	280,0	72,7
		12			22,73	17,84	2,90	397,6	206,4	327,0	85,7
		14			26,21	20,57	2,98	467,0	234,5	371,0	97,6
		16			29,61	23,24	3,05	538,0	262,0	412,5	112,0
12	120	10	13	6,5	23,18	18,20	3,31	567	313,5	497,0	130,0
		12			27,54	21,62	3,40	685	367,0	584,0	150,4
		14			31,82	24,98	3,48	801	419,0	663,0	172,0
		16			36,02	28,28	3,55	924	470,0	743,0	197,3
13	130	10	13,5	6,75	25,20	19,78	3,56	721	402	640,0	163,5
		12			29,95	23,52	3,64	870	473	751,0	195,7
		14			34,64	27,19	3,72	1 021	541	858,0	224,6
		16			39,24	30,80	3,80	1 172	605	960,0	251,6
14	140	12	14	7	32,37	25,41	3,89	1 086	596	947,0	245,0
		14			37,45	29,40	3,97	1 2'3	683	1 084,0	281,3
		16			42,45	33,32	4,05	1 432	765	1 215,0	315,8
15	150	12	14	7	34,77	27,29	4,14	1 336	740	1 177,0	302,9
		14			40,25	31,60	4,22	1 565	819	1 349,0	349,4
		16			45,65	35,84	4,30	1 796	952	1 513,0	391,7
		18			50,97	40,01	4,38	2 029	1 054	1 674,0	433,6



Угловое неравнобокое железо

№ профилей	Размеры в мм B	b	d	R	r	Площ. сечен. F см²	Вес погон. метра g кг	Расст. центра тяжести x_0 см	y_0 см	Моменты инерции J_{x_1} см⁴	J_{y_1} см⁴	J_x см⁴	J_y см⁴
3/2	30	20	3	3,5	1,75	1,42	1,11	0,50	0,99	2,66	0,802	1,267	0,447
			4			1,85	1,45	0,54	1,03	3,58	1,101	1,597	0,561
4,/3	45	30	4	5	2,5	2,87	2,25	0,74	1,47	11,95	3,584	5, 4	2 03
			6			4,17	3,27	0,81	1,55	18,16	5,590	8,08	2,83
6/4	60	40	6	7	3,5	5,69	4,47	1,01	1,99	42,6	12,84	20,06	7,07
			8			7,41	5,82	1,08	2,07	57,3	17,63	25,50	8,91
7,5/5	75	50	6	8	4	7 21	5,66	1,20	2,43	84,6	24,75	42,2	14,33
			8			9,43	7,49	1,28	2,51	111,4	33,77	51,9	18,27
			10			11,57	9,08	1,36	2,59	140,2	43,20	62,5	21,84
8/4	80	40	6	8	4	6,91	5,42	0,88	2,84	100,6	12,83	44,8	7,52
			8			9,03	7,09	0,96	2,93	135,0	17,89	57,5	9,55
			10			11,07	8,69	1,04	3,01	169,7	23,30	69,1	11,36
9/6	90	60	8	9	4,5	11,45	8,99	1,48	2,95	192,0	57,60	92,1	32,65
			10			14,09	11,06	1,56	3,04	241,4	73,40	111,4	39,30
10/3,5	100	65	8	9	4,5	12.65	9,93	1,56	3,28	263,5	73,20	127,1	42,5
			10			15,59	12,24	1,64	3,37	331,0	93,00	154,3	51,2
			12			18.45	14,48	1,72	3,45	399,1	113,40	179,9	59,1
12/8	120	80	10	11	5,5	19,13	15,02	1,95	3,92	570,0	170,7	275,6	98,2
			12			22,69	17,81	2,03	4,00	686,0	207,5	323,0	114,3
			14			26,17	20,54	2,10	4,08	804,0	245,2	368,4	129,8
13/9	130	90	10	12	6	21,15	16,60	2,18	4,15	727,7	241,4	358,4	140,9
			12			25,11	19,71	2,26	4,24	871,1	292,9	419,7	164.7
			14			28,99	22,76	2,34	4,32	1020,2	345,5	479,2	186,8
15/10	150	100	12	13	6,5	28,74	22,56	2,42	4,89	1335,8	399,9	648,6	231,6
			14			33,22	26,08	2,50	4,97	1533,8	471,2	743,2	263,6
			16			37,62	29,53	2,57	5,05	1792,6	543,9	833 3	294.9
16,8	160	80	12	13	6,5	27,54	21,62	1,77	5,72	1620,0	208,5	719,0	122,0
			14			31,82	24,98	1,85	5,80	1896,0	247,6	823,0	138,6



Двутавровое железо

Примечание. Уклон внутренних граней полок 14%

№ профилей	Размеры в мм h	b	d	t	R	r	Площадь сечения F см²	Вес погон. метра g кг	Моменты инерции J_x см⁴	J_y см⁴	Моменты сопротивлен. W_x см³	W_y см³
10	100	57,0	4,5	6,3	4,5	2,7	11,03	8,659	180,4	16,1	36,1	5,65
12	120	63,4	5,1	7,1	5,1	3,1	14,34	11,257	334,4	25,2	55,7	7,95
14	140	69,8	5,7	7,9	5,7	3,4	18,08	14,193	569,0	37,7	81,3	10,80
16	160	76,2	6,3	8,8	6,3	3,8	22,26	17,474	909,0	54,3	113,6	14,26
18	180	82,6	6,9	9,6	6,9	4,1	26,87	21,093	1381,0	75,9	153,4	18,40
20	200	89,0	7,5	10,4	7,5	4,5	31,91	25,049	2014,0	103,4	201,4	23,24
22	220	95,4	8,1	11,3	8,1	4,9	37,38	29,343	2843,0	137,5	258,5	28,83
24	240	101,8	8,7	12,1	8,7	5,2	43,29	33,983	3903,0	180,0	325,0	35,36
26	260	108,2	9,3	13,0	9,3	5,6	49,63	38,960	5234,0	231,0	403,0	42,75
28	280	114,6	9,9	13,9	9,9	5,9	55,40	44,274	6878,0	293,0	491,0	51,10
30	300	121,0	10,5	14,7	10,5	6,3	63,61	49,934	8881,0	366,0	592,0	60,50
32	320	127,4	11,1	15,5	11,1	6,7	71,25	55,931	11292,0	452.0	706,0	70,90
36	360	140,2	12,3	17.2	12,3	7,4	87,82	68,939	17544,0	668,0	975,0	95,30
40	400	153,0	18,5	18,9	13,5	8,1	106,13	83,312	26087,0	954,0	1 304,0	124,70
45	450	170,0	16,2	24,3	16,2	9,7	147,00	115,000	45888,0	1 722,0	2 040,0	208,00

Допуски:

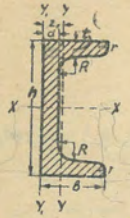
1) В толщине:
при высоте балок до 100 мм включительно ±0,75 мм
„ „ „ свыше 100 до 200 мм включительно ±1,0 „
„ „ „ „ 200 ±1,5 „

2) В ширине:
при высоте балок до 100 мм включительно — 2,0 мм и + 0,75 мм
„ „ „ свыше 100 до 200 мм „ — 3,5 „ „ + 1,0 „
„ „ „ „ 200 мм — 4,5 „ „ + 1,5 „

3) В высоте:
при балках высотой до 100 мм включительно — 1,0 мм и + 2,0 мм
„ „ „ свыше 100 до 200 мм „ — 1,5 „ „ + 3,0 „
„ „ „ „ 200 мм — 2,0 „ „ + 4,0 „

4) В длине:
для балок с нефрезерованными концами длиною до 6,5 м + 50 мм
„ „ „ „ „ „ свыше 6,5 „ +100 „
„ „ с фрезерованными концами + 10 „

Примечание. Измерение ширины и толщины полок производится на расстоянии 700 мм от концов балки.



Корытное железо (швеллерное)

Примечание. Уклон внутренних граней полок 8%

№ профилей	Размеры в мм h	b	d	t	R	r	Площ. сечен. F см²	Вес погон. метра g кг	Расст. центра тяжести z_0 см	Моменты инерции J_{y_1} см⁴	J_x см⁴	J_y см⁴	Моменты сопротивл. W_x см³	W_y см³
5	50	38	5	7,5	7,5	3,75	7,47	5,86	1,41	24,2	27,57	9,44	11,03	3,942
6,5	65	42	5,5	8	8	4	9,62	7,55	1,43	34,8	59,9	14,98	18,43	5,42
8	80	45	6	9	9	4,5	11,85	9,30	1,53	48,4	113,9	20,9	28,5	7,02
10	100	50	6	9	9	4,5	13,92	10,93	1,60	65,6	213,2	30,16	42,65	8,86
12	120	55	6,5	9,5	9,5	4,75	17,26	13,55	1,65	92,0	371,6	44,9	61,9	11,67
14	140	60	7	10,5	10,5	5,25	20,92	16,42	1,80	132,2	624,0	64,5	89,2	15,35
16	160	65	7,5	11	11	5,5	24,92	19,56	1,86	175,6	954,0	89,0	119,2	19,20
18	180	70	8	12	12	6	29,26	22,97	2,01	239,6	1433,0	121,0	159,2	24,26
20	200	75	8,5	12,5	12,5	6,25	33,93	26,64	2,08	306,0	2018,0	159,2	202,0	29,40
22	220	80	9	13,5	13,5	6,75	38,94	30,57	2,23	402,0	2831,0	207,8	257,3	36,00
24	240	85	9,5	14	14	7	44,28	34,76	2,30	499,0	3773,0	261,0	314,4	42,60
26	260	90	10	15	15	7,5	49,95	39,21	2,45	635,0	5045,0	334,0	388,0	51,00
30	300	100	11	16,5	16,5	8,25	62,30	48,91	2,68	957,0	8361,0	510,0	557,0	69,70

Допуски:

1) В толщине:
для высоты до 100 мм включительно ± 0,75 мм
" " свыше 100 до 200 мм ± 1,0 "
" " " 200 мм ± 1,5 "

2) В ширине:
для высоты до 100 мм включительно — 2,0 мм и + 0,75 мм
" " свыше 100 до 200 мм — 3,5 " " + 1,0 "
" " " 200 мм — 4,5 " " + 1,5 "

3) В высоте:
для высоты до 100 мм включительно — 1,0 мм и + 2,0 мм
" " свыше 100 до 200 мм — 1,5 " " + 3,0 "
" " " 200 мм — 2,0 " " + 4,0 "

4) В длине:
с нефрезерованными концами длиною до 6,5 м + 50 мм
" " " " свыше 6,5 " + 100 "
" фрезерованными " " + 10 "

Примечание. Измерение ширины и толщины полок производится на расстоянии 700 мм от концов швеллера.

Сталь специальных профилей и назначений.

Наименование	Размеры попереч. сечения мм a	b	c	d
1. Зетовое железо	60	45	5	7,5
	80	50	6	8,5
	100	55	6,5	9,5
	140	65	8	11,5
	200	80	10	15,0
2. Тавровое железо а) высокое	25	25	3	3,25
	40	40	5	5
	50	50	6	6
	75	75	8	8
б) низкое	60	30	6	6
	80	40	7	7
	100	50	9	9
3. Колонное (квадрант.) железо	50	35	4	6
	75	40	6	8
	100	45	8	10
4. Железо Вотерена	257	180	12	8
	305	126	12,5	6,5
5. Железо Зоре	200	90	8	4,5
	262	115	9	5,0
6. Сегментное железо	12	4		
	18	5		
	25	8		
	40	6		
	40	14		
	50	12		
	5	18		
7. Полукруглое железо	12	6		
	18	9		
	25	12,5		
	40	20		
	50	25		
8. Оконное железо двухстороннее	30	18	5	
	40	21	5	
	50	25	6	
9. Оконное железо одностороннее	30	11,5	5	
	40	13,0	5	
	50	15,5	6	
10. Овальное железо	15	7		

Табл

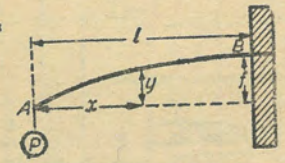
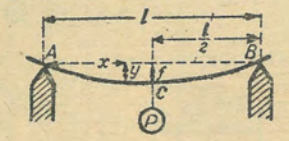
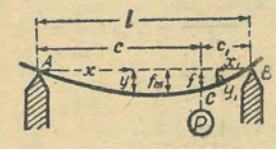
ца 29

с) Балки одинакового п
лежащие на различных опорах

Свободная длина — l, прогиб — f, высота балки — h; координаты x и y и прочие продольн
p — нагрузка в *тп* или *кг* на погонную единицу (*м* или *см*) балки; допускаемое напряжен
ции J поперечного сечения балки относительно горизонтальной оси, проведенной через цент

всей длине сечения *,
с разными видами нагрузок

размеры должны быть выражены в *м* или *см*; внешние силы V_A, V_B, P, Q и пр. — в *тп* или *кг*; изгиба $\sigma_u = \sigma_{доп}$ и модуль упругости E материала балки в *тп/м²* или *кг/см*; момент инер тяжести — в $м^4$ или *см*, соответствующей данному; J — момент сопротивления; W — в $м^3$ или $см^3$

№	Род нагрузки	Реакции опор V_A и V_B Изгибающий момент M	Нагрузка P Необходимый момент сопротивления W	Уравнение упругой линии	Прогиб f **	Примечания
1		$V_B = P$ $M_X = Px$ $M_{max} = Pl$	$P = \frac{\sigma_{доп} W}{l}$ $W = \frac{Pl}{\sigma_{доп}}$	$y = \frac{Pl^3}{2EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{Pl^3}{2EJ}\left(\frac{1}{l} - \frac{x^2}{l^3}\right)$ $\operatorname{tg}\beta_{(x=0)} = \frac{Pl^2}{2EJ} = \frac{3f}{2l}$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3} =$ $= \frac{2}{3}\frac{\sigma_{доп}}{E}\frac{l^2}{h}$	Балка, защемленная одним концом Опасное сечение у B
2		$V_A = V_B = \frac{P}{2}$ $M_X = \frac{Px}{2}$ $M_{max} \frac{Pl}{4}$	$P = 4\frac{\sigma_{доп} W}{l}$ $W = \frac{Pl}{4\sigma_{доп}}$	$y = \frac{Pl^3}{16EJ}\left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48} =$ $= \frac{1}{6}\frac{\sigma_{доп}}{E}\frac{l^2}{h}$	Балка, свободно лежащая на опорах Опасное сечение посередине
3		$V_A = \frac{Pc_1}{l}$; $V_B = \frac{Pc}{l}$ Для AC: $M_X = \frac{Pc_1x}{l}$ „ BC; $M_X = \frac{Pcc_1}{l}$ $M_{max} = \frac{Pcc_1}{l}$	$P = \sigma_{доп} W \frac{l}{cc_1}$ $W = \frac{Pcc_1}{l\sigma_{доп}}$	$y = \frac{P}{EJ}\frac{c^2c_1^2}{6l}\left(2\frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2c_1}\right)$ $y_1 = \frac{P}{EJ}\frac{c_1^2c^2}{6l}\left(2\frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2c}\right)$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3}\frac{c^2}{l^2}\frac{c_1^2}{l^2}$ f_{max} для $x = c\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c_1}{3c}}$ если $c > c_1$; $x = c_1\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c}{3c_1}}$, если $c < c_1$	Балка, лежащая свободно на опорах Опасное сечение у C
4		$V_A = \frac{5}{16}P$; $V_B = \frac{11}{16}P$ Для AC: $M_X = \frac{5}{16}Px$ „ C: $M = \frac{5}{32}Pl$ „ BC: $M_X = Pl\left(\frac{5}{32} - \frac{11}{16}\frac{x_1}{l}\right)$ $M_{max} = \frac{3Pl}{16}$	$P = \frac{16}{3}\frac{\sigma_{доп} W}{l}$ $W = \frac{3}{16}\frac{Pl}{\sigma_{доп}}$	$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{22}\left(\frac{x}{l} - \frac{5}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$ $y_1 = \frac{P}{EJ}\frac{l^2}{32}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{x_1}{l} + \frac{5}{2}\frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3}\frac{x_1^3}{l^3}\right)$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{7l^3}{768}$, для $x = l\sqrt{\frac{1}{5}}$: $f_{max} = \sqrt{\frac{1}{5}}\frac{P}{48}\frac{l^3}{EJ}$	Полузащемленная балка Опасное сечение у B Точка перегиба у $x_1 = \frac{5}{22}l$

* Формулы для реакции опор и изгибающих моментов в случае свободных опор пр
** Обозначение f относится к прогибу в точке приложения сосредоточенной силы P; ч
Значения f, выраженные через σ_u, действительны только для однородных сечений бал

менимы также к балкам с переменным сечением.
рез f_{max} (или f_m) обозначен наибольший прогиб в том случае, когда f с ним не совпадает.
с горизонтальной осью симметрии.

Таблица 29 (продолжение)

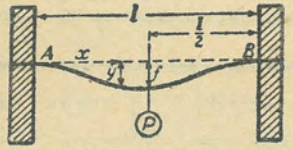
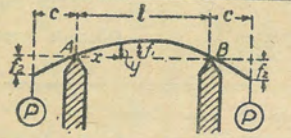
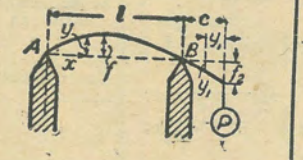
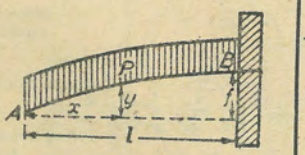
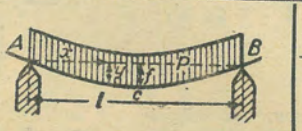
№	Род нагрузки	Реакции опор A и B Изгибающий момент M	Нагрузка P Необходимый момент сопротивления W	Уравнение упругой линии	Прогиб f	Примечания
5		$V_A = V_B = \frac{P}{2}$ Для AC: $M_X = \frac{Pl}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right)$ „ CB: $M_X = \frac{Pl}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{3}{4}\right)$ $M_{max} = \frac{Pl}{8}$	$P = 8\frac{\sigma_{доп} W}{l}$ $W = \frac{Pl}{8\sigma_{доп}}$	$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{16}\left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^2}{192}$ $= \frac{1}{12}\frac{\sigma_{доп}}{E}\frac{l^2}{h}$	Защемленная балка Опасные сечения у A, B и C Точки перегиба у $x = \frac{1}{4}l$ и $x = \frac{3}{4}l$
6	 Те же формулы действительны и для того случая, когда A и B — точки приложения нагрузок и балка концами своими лежит на опорах. Общий прогиб в середине равен тогда: $f = f_1 + f_2 = \frac{Pc}{24EJ}[3(l+2c)^2 - 4c^2]$	$V_A = V_B = P$ Для участка AB: $M = Pc = \text{const}$	$P = \frac{\sigma_{доп} W}{c}$ $W = \frac{Pc}{\sigma_{доп}}$	$y = f_1 - \left[\rho - \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{1}{2}l - x\right)^2}\right]$, где $\rho = \frac{EJ}{Pc} = \text{const}$. Упругая линия между A и B имеет форму дуги круга с радиусом ρ	f_1 в середине расстояния между опорами $f_1 = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{8}\frac{c}{l} =$ $= \frac{1}{4}\frac{\sigma_{доп}}{E}\frac{l^2}{h} = \frac{l^2}{8\rho}$ $f_2 = \frac{P}{EJ}\frac{c^2}{3}\left(c + \frac{3l}{2}\right)$	Балка, лежащая свободно на опорах; со свисающими концами Опасное сечение в любом месте между A и B
6а		$V_A = -\frac{Pc}{l}$; $V_B = \frac{P(l+c)}{l}$ $M_x = V_A x = \frac{Pcx}{l}$ $M_B = Pc$	$P = \frac{\sigma_{доп} W}{c}$ $W = \frac{Pc}{\sigma_{доп}}$	$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^2 c}{6}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right)$ $y_1 = \frac{P}{EJ}\frac{lc^2}{6}\left(\frac{2l+3c}{l}\frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{lc^2} - 2\frac{l+c}{l}\right)$	Максимальный прогиб на длине AB в C для $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}577l$ $f_1 = \frac{P}{EJ}\frac{l^2 c}{9\sqrt{3}}$ $f_2 = \frac{P}{EJ}\frac{(l+c)c^2}{3}$	Балка, лежащая свободно на опорах, с одним свисающим концом Опасное сечение в B
7		$V_B = P$ $M_X = \frac{Px^2}{2l}$ $M_{max} = \frac{Pl}{2}$	$P = 2\frac{\sigma_{доп} W}{l}$ $W = \frac{Pl}{2\sigma_{доп}}$	$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{6}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{l^4}\right)$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{8} =$ $= \frac{1}{2}\frac{\sigma_{доп}}{E}\frac{l^2}{h}$	Балка, защемленная одним концом Опасное сечение у B
8		$V_A = V_B = \frac{P}{2}$ $M_X = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ $M_{max} = \frac{Pl}{8}$	$P = 8\frac{\sigma_{доп} W}{l}$ $W = \frac{Pl}{8\sigma_{доп}}$	$y = \frac{P}{EJ}\frac{l^2}{24}\left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$ $\operatorname{tg}\beta_{(x=0)} = \frac{P}{EJ}\frac{l^2}{24} = 3{,}2\frac{f}{l}$	$f = \frac{P}{EJ}\frac{5l^3}{384} =$ $= \frac{5}{24}\frac{\sigma_{доп}}{E}\frac{l^2}{h}$	Балка, лежащая свободно на опорах Опасное сечение посередине балки

Таблица 1 (продолжение)

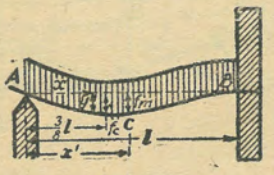
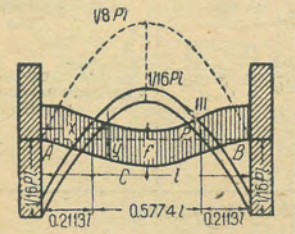
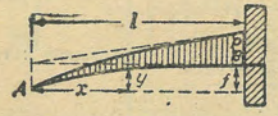
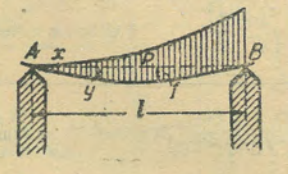
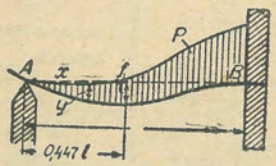
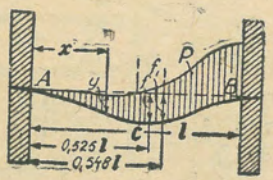
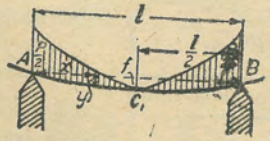
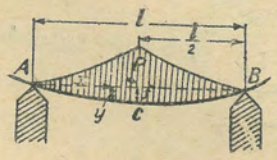
№	Род нагрузки	Реакции опор V_A и V_B Изгибающий момент M	Нагрузка P Необходимый момент сопротивления W	Уравнение упругой линии	Прогиб f	Примечания
9		$V_A=\frac{3}{8}P;\quad V_B=\frac{5}{8}P$ $M_X=\frac{Px}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{l}\right)$ $M_{\max}=\frac{Pl}{8}$ (абсолютный максимум) $M_C=\frac{9}{128}Pl$ (относительный максимум) при $x=\frac{3}{8}l$	$P=8\frac{\sigma_{доп}W}{l}$ (Нагрузка не больше чем в случае I) $W=\frac{Pl}{8\sigma_{доп}}$	$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{48}\left(\frac{x}{l}-3\frac{x^3}{l^3}+2\frac{x^4}{l^4}\right)$	$f_{\max}=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{185}$, где $\frac{l}{185}=\frac{78+110\sqrt{33}}{2\cdot 16^4}$ $f_C=\frac{175}{8^5}\frac{P}{EJ}l^3=$ $=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{187}$	Полузащемленная балка Опасное сечение у B Прогиб $f_{\max}$ при $x'=\frac{1}{16}l(1+\sqrt{33})=$ $=0{,}4215\,l$ Точка перегиба при $x=\frac{3}{4}l$ M_C при $x=\frac{3}{8}l$
10		$V_A=V_B=\frac{P}{2}$ $M_X=\frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_{\max}=\frac{1}{12}Pl$ (абсолютный максимум) $M_C=\frac{1}{24}Pl$ (относительный максимум)	$P=12\frac{\sigma_{доп}W}{l}$ $W=\frac{Pl}{12\sigma_{доп}}$	$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{24}\left(\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)$ Объяснение фиг. 10 Парабола I: кривая моментов для балки, лежащей свободно на опорах A и B (случай 8). Парабола II: то же для случая жесткого защемления в A и B (случай 10). Парабола III: то же для способа защемления в A и B, соответствующего наименьшему $M_{\max}$; в этом случае $M_A=M_B=M_C=\frac{1}{16}Pl$	$f=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{384}=$ $=\frac{1}{16}\frac{\sigma_{доп}}{E}\frac{l^2}{h}$	Балка, защемленная Опасное сечение у A и B Точки перегиба при $x=\frac{1}{2}l\left[1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ т. е. $x_1=0{,}7887l$ и $x_2=0{,}2113l$
11		$V_B=P$ $M_X=\frac{P}{3}\frac{x^3}{l^3}$ $M_{\max}=\frac{Pl}{3}$	$P=3\frac{\sigma_{доп}W}{l}$ $W=\frac{Pl}{3\sigma_{доп}}$	$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$	$f=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{15}=$ $=\frac{2}{5}\frac{\sigma_{доп}}{E}\frac{l^2}{h}$	Балка, защемленная одним концом Опасное сечение у B
12		$V_A=\frac{1}{3}P,\quad V_B=\frac{2}{3}P$ $M_X=\frac{P}{3}x\cdot\left[1-\frac{x^2}{l^2}\right]$ $M_{\max}=\frac{2}{9\sqrt{3}}Pl=$ $=0{,}128Pl$	$P=\frac{9\sqrt{3}}{2}\frac{\sigma_{доп}W}{l}=$ $=7{,}794\frac{\sigma_{доп}W}{l}$ $W=\frac{Pl}{7{,}794\sigma_{доп}}$	$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{180}\left(7\frac{x}{l}-10\frac{x^3}{l^3}+3\frac{x^5}{l^5}\right)$	Наибольший прогиб при $x=l\sqrt{1-\sqrt{\frac{8}{15}}}=$ $=0{,}5193l$ $f=\frac{Pl^3}{EJ}\frac{2+5\sqrt{\frac{8}{15}}}{225}\times$ $\times\sqrt{1-\sqrt{8:15}}=$ $=0{,}01304\frac{Pl^3}{EJ}$	Балка, лежащая свободно на опорах Опасное сечение при $x=\frac{l}{\sqrt{3}}=$ $=\frac{1}{3}l\sqrt{3}=0{,}5774l$

Таблица 2

(продолжение)

№	Род нагрузки	Реакции опор V_A и V_B Изгибающий момент M	Нагрузка P Необходимый момент сопротивления W	Уравнение упругой линии	Прогиб f	Примечания
13		$V_A=\frac{1}{5}P;\quad V_B=\frac{4}{5}P$ $M_X=Px\left(\frac{1}{5}-\frac{x^2}{3l^2}\right)$ $-M_{\max}=M_B=\frac{Pl}{7,5}$ Наибольший момент в пролете при $x=0,447\,l$ + $+M_{\max}=0,0596\,Pl$	$P=7,5\frac{\sigma_{доп}W}{l}$ $W=\frac{Pl}{7,5\,\sigma_{доп}}$	$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{60}\left(-\frac{x}{l}+\right.$ $\left.+2\frac{x^3}{l^3}-\frac{x^5}{l^5}\right)$	Наибольший прогиб при $x=\frac{l}{\sqrt{5}}=0,447\,l;$ $f=\frac{1}{209,63}\frac{Pl^3}{EJ}$	Полузащемленная балка Опасное сечение у B Точка перегиба при $x=l\sqrt{0,6}=0,775\,l$
14		$V_A=\frac{3}{10}P;\quad V_B=\frac{7}{10}P$ $M=Pl\left(-\frac{1}{15}+\frac{3}{10}\frac{x}{l}-\right.$ $\left.-\frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$ $-M_{\max}=M_B=-\frac{Pl}{10}$ $M_A=\frac{Pl}{15}$ Максимальный момент в пролете при $x=l\sqrt{0,3}$ получается $+M_{\max}=\frac{Pl}{15}(3\sqrt{0,3}-1)\approx$ $\approx\frac{Pl}{23,3}=\frac{Pl^2}{46,6}$	$P=10\frac{\sigma_{доп}W}{l}$ $W=\frac{Pl}{100\,\sigma_{доп}}$	$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{60}\left(-2\frac{x^2}{l^2}+\right.$ $\left.+3\frac{x^3}{l^3}-\frac{x^5}{l^5}\right)$	Наибольший прогиб в C при $x=\left[-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{21}{20}}\right]l=$ $=0,525l;$ $f=\frac{1}{382}\frac{Pl^3}{EJ}$	Балка защемленная Опасное сечение у B Точка перегиба при $x=0,237l$ и $0,808\,l$
15		$V_A=V_B=\frac{P}{2}$ $M_X=Px\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}+\frac{2x^2}{3l^2}\right)$ $M_{\max}=\frac{Pl}{12}$	$P=12\frac{\sigma_{доп}W}{l}$ $W=\frac{Pl}{12\sigma_{доп}}$	$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{3}{8}\frac{x}{l}-\frac{x^3}{l^3}+\right.$ $\left.+\frac{x^4}{l^4}-\frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$	$f=\frac{P}{EJ}\frac{3l^3}{320}=$ $=\frac{9}{40}\frac{\sigma_{доп}}{E}\frac{l^2}{h}$	Балка, свободно лежащая на опорах Опасное сечение посередине балки
16*		$V_A=V_B=\frac{P}{2}$ $M_X=Px\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$ $M_{\max}=\frac{Pl}{16}$	$P=6\frac{\sigma_{доп}W}{l}$ $W=\frac{Pl}{6\sigma_{доп}}$	$y=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{12}\left(\frac{5}{8}\frac{x}{l}-\right.$ $\left.-\frac{x^3}{l^3}+\frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$	$f=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{60}=$ $=\frac{1}{5}\frac{\sigma_{доп}}{E}\frac{l^2}{h}$	Балка, свободно лежащая на опорах Опасное сечение посередине балки

* Если в случае 14 очертание нагрузки вместо треугольника имеет вид параболы, вер шина которой лежит над серединой балки, то $P=6,4\frac{\sigma_{доп}W}{l}$ и $W=\frac{5}{32}\frac{Pl}{\sigma_{доп}}$.

Таблица 29 (продолжение)

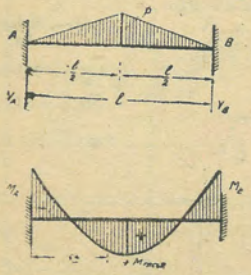
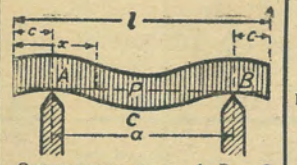
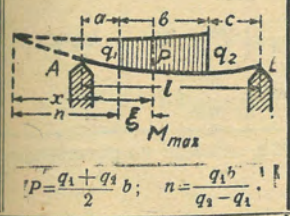
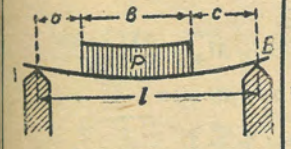
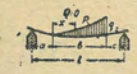
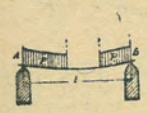
№	Род нагрузки	Реакции опор V_A и V_B	Наибольший изгибающий момент $M_{max}=W\sigma_{доп}$
17		$V_A=V_B=\frac{Pl}{4}=$	$M_B=M_A=-\frac{5}{96}pl^2$
		Момент в любом сечении на расстоянии x от A $\left(x<\frac{l}{2}\right)$ $M_x=M_A+\frac{plx}{4}-\frac{px^3}{3l}$. Наибольший момент при $x=\frac{l}{2}$ $+M_{max}=+\frac{pl^2}{32}$.	
18	Балка со свисающими концами  Опасные сечения в A, B и C. Точка перегиба при $x=\frac{l}{2}\pm\sqrt{\frac{l^2}{4}-cl}$. $M_A=M_B$ со знаком, обратным знаку M'_{max}	$V_A=V_B=\frac{P}{2}$	Для AB имеем: $M_x=\frac{Px}{2}\left(1-\frac{c}{x}-\frac{x}{l}\right)$ для $x\leqq c$ $M_x=-\frac{Px^2}{2l}$
		Наибольшие моменты $-M_{max}$ $M_A=M_B=-\frac{Pc^2}{2l}$ То же для середины балки $-M'_{max}=\frac{P}{2}\left(\frac{l}{4}-c\right)$, по своим абсолютным значениям равны при $c=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)\cdot l=0{,}207\,l$: $M_A=M'_{max}=M_{max}=0{,}021447Pl\approx\frac{1}{47}Pl$; для различных значений c это сравнительно наименьший M_{max}. Имеем следовательно: $W=\frac{Pl}{47\sigma_{доп}}$ и $P=47\cdot\frac{\sigma_{доп}W}{l}$, т. е. в том случае, когда $a=0{,}586\,l$, нагрузка почти в 6 раз больше, чем в случае 8.	

Таблица 29 (продолжение)

№	Род нагрузки	Реакция опор V_B и V_A	Наибольший изгибающий момент $M_{max}=W\sigma_{доп}$
19	Местная сплошная нагрузка с очертанием трапеции  $P=\frac{q_1+q_2}{2}b$; $n=\frac{q_1b}{q_2-q_1}$.	$V_A=\frac{P}{l}\left[c+\frac{bq_2+2q_1}{3q_2+q_1}\right]$ $V_B=P-V_A$ M_{max} при $Q=0$, т. е. при $x=\sqrt{n^2+\frac{2nV_A}{q_1}}$	$W\sigma_{доп}=M_{max}=$ $=\frac{1}{3}V_A\left[3a+2\xi-\frac{\xi n}{\lambda}\right]$, где: $\lambda=x+n$, $\xi=x-n$; $n=\frac{q_1b}{q_2-q_1}$
20	Местная сплошная нагрузка с очертанием прямоугольника 	При $q_1=q_2$ имеем: $V_A=\frac{P(2c+b)}{2l}$ $V_B=\frac{P(2a+b)}{2l}$. Если кроме того $a=c$, то $V_A=V_B=\frac{P}{2}$	При $q_1=q_2$ имеем: $W\sigma_{доп}=V_A\left[a+\frac{V_A}{2P}\right]$ Если кроме того $a=c$, то: $W\sigma_{доп}=\frac{P}{2}\left[\frac{l}{2}-\frac{b}{4}\right]$
21	Местная сплошная нагрузка с очертанием треугольника 	При $q_1=0$ имеем: $V_A=\frac{P}{l}\left[c+\frac{b}{3}\right]$ $V_A=\frac{P}{l}\left[a+\frac{2}{3}b\right]$ M_{max} при $Q=0$, т. е. при: $x=\sqrt{\frac{2bV_A}{q_2}}b=\sqrt{\frac{V_A}{P}}$	При $q_1=0$ имеем: $W\sigma_{доп}=M_{max}=$ $=V_A=\left[a+\frac{2}{3}x\right]=$ $=V_A\left[a+\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{V_A}{P}}\right]$
22		$V_A=\frac{P(2l-a)+P_1a_1}{2l}$ $V_B=\frac{P_1(2l-a_1)+Pa}{2l}$	При $V_A<P$: $W\sigma_{доп}=\frac{V_A^2a}{2P}$, при $V_B<P_1$: $W\sigma_{доп}=\frac{V_B^2a_1}{2P_1}$

Если $P=P_1$, $a=a_1$ и $l-2a=b$, то: $V_A=V_B=P$ и $W\sigma_{доп}=\frac{1}{2}Pa=\frac{1}{4}P(l-b)$.

Таблица 29 (продолжение)

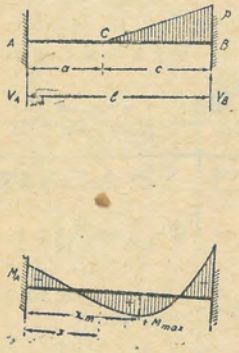
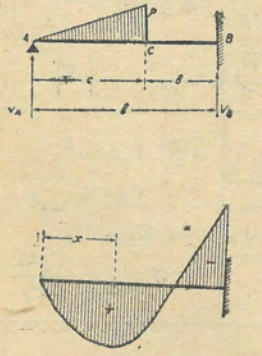
№	Род нагрузки	Реакции опор V_A и V_B и моменты
23		$V_A = \frac{pc^3}{20l^3}(3l+2a)$. $V_B = \frac{pc}{20l^3}(10l^3 - 3lc^2 - 2ac^2)$. $M_A = -\frac{pc^3}{60l^2}(2l+3a)$. Момент в любом сечении на расстоянии x от A: на участке a: $M_x = V_A x + M_A$. $M_c = \frac{pc^3}{30l^3}(3a^2+3al-l^2)$; на участке c: $M_x = V_A x + M_A - \frac{p(x-a)^3}{6c}$. Наибольший момент при $x_m = a + \frac{c^2}{l}\sqrt{\frac{3l+2a}{10l}}$. $M_B = -\frac{pc^2}{60l^2}(10al+3c^2)$.
24		$V_A = \frac{pc}{10l^3}(c^3+5l^2b)$ $V_B = \frac{pc^2}{10l^3}(5l^2-c^2)$. Момент в любом сечении на участке AC на расстоянии x от A: $M_x = +V_A x - \frac{px^3}{6c}$. $M_c = \frac{Pc^2}{30l^3}(10l^3 - 15l^2c + 3c^3)$. $M_B = \frac{pc^2}{30l^2}(5l^2-3c^2)$. Наибольший момент при $x_m = +lb + \frac{c}{l}\sqrt{\frac{c^3}{5l}}$.

Таблица 29 (продолжение)

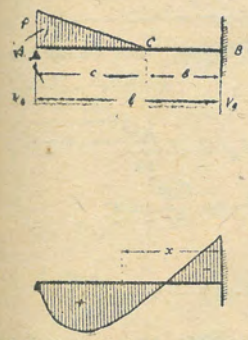
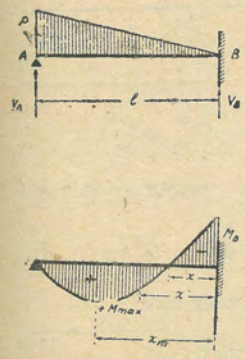
№	Род нагрузки	Реакции опор V_A и V_B и моменты
25		$V_A = \frac{p}{40cl^3}[l^4(11l-15b)+b^4(5l-b)]$ $V_B = \frac{pc}{2} - V_A$. Момент в любом сечении на участке AC на расстоянии x от A: $M_x = V_B x + M_B - \frac{p(x-b)^3}{6c}$. $M_C = V_A c - \frac{pc^2}{3}$. $M_B = V_A l - \frac{pc}{6}(3b+2c) =$ $= \frac{p}{40cl^2}\left[l^4(11l-15b)+b^4(5l-b) - 20c^2l^2\left(b+\frac{2c}{3}\right)\right]$.
26		$V_A = \frac{11pl}{40}$. $V_B = \frac{9pl}{40}$. Момент в любом сечении на расстояние x от B: $M_x = V_B x + M_B - \frac{px^3}{6l}$. Наибольший момент при $x_m = \frac{3}{2\sqrt{5}}l = 0{,}671\,l +$ $+ M_{max} = \left(\frac{9}{40\sqrt{5}} - \frac{7}{120}\right)pl^2 \approx \frac{pl^2}{23{\cdot}7}$. Момент равен нулю при $x_0 \approx 0{,}275l$ $M_B = -\frac{7}{120}pl^2 \approx -\frac{pl^2}{17{,}1}$.

Таблица 29 (продолжение)

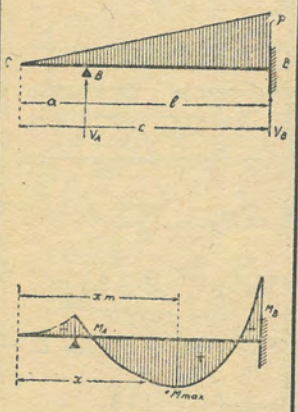
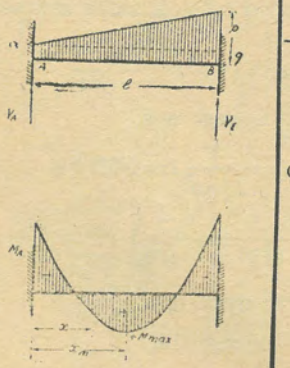
№	Род нагрузки	Реакция опор A и B
27		$V_A = \frac{p}{40lc}(10ac^2 + 5cl^2 - l^3)$. $V_B = \frac{pc}{2} + V_A$.
		Момент в любом сечении балки на расстоянии x от C: на участке a: $M_x = -\frac{px^3}{6c}$. $M_A = \frac{Pa^3}{6c} = 4$; на участке l: $M_x = V_A(x-a) - \frac{px^3}{6c}$. Наибольший момент (пока $a < 1{\cdot}836l$): при $x_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10ac^2 + 5cl^2 - l^3}{5l}}$, при $a > 1{\cdot}836l$ в B $M_B = -\frac{p}{120c}(8l^3 + 15al^2 - 10a^3)$.
28		$V_A = \frac{ql}{2} + \frac{3pl}{20}$. $V_B = \frac{ql}{2} + \frac{7pl}{20}$.
		$M_A = -\left(\frac{q}{12} + \frac{p}{30}\right)l^2$. Момент в любом сечении на расстоянии x от A: $M_x = V_A x + M_A - \frac{x^2}{6}\left(3q + \frac{px}{l}\right)$. Наибольший момент при: $x_m = -\frac{ql}{p} + \frac{l}{p}\sqrt{q^2 + qp + \frac{3p^2}{10}}$. $M_B = -\left(\frac{q}{12} + \frac{p}{20}\right)l^2$.

Таблица 29 (продолжение)

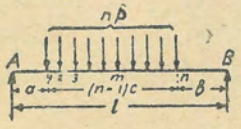
№	Род нагрузки	Реакции опор V_A и V_B и моменты
29		$V_A = \frac{pc^3}{40l^3}(5l - c)$. $V_B = \frac{pc}{2} - V_A$.
		Моменты: $M_C = +V_A a$. Моменты в любом сечении участка CB на расстоянии x от A: $Mx = +V_A x - \frac{p(x-a)^3}{6c}$. $M_B = -\frac{pc^2}{120l^2}(8l^2 + 9la + 3a^2)$. Наибольший момент при: $x_m = a + \frac{c^2}{2l}\sqrt{1 - \frac{c}{5l}}$.
30	Местная нагрузка p переменной длины a	$V_A = \frac{P(2l-a)}{2l}$ $V_B = \frac{Pa}{2l}$ M_{max} при $x = a\left[1 - \frac{a}{2l}\right] < a$
		$M_{max} = W\sigma_{доп} = \frac{P}{2}a\left[1 - \frac{a}{2l}\right]^2 = \mu Pl$, где $\mu = \frac{1}{2}\frac{a}{l}\left[1 - \frac{a}{2l}\right]^2$ $\mu_{max} = \frac{4}{27}$ при $a = \frac{2}{3}l$, тогда $x = \frac{4}{9}l$

Е. Многократная нагрузка. Когда балка находится одновременно под действием нескольких нагрузок указанных видов, на стр. 536—549, то изгибающие моменты, а равно и ординаты упругих линий для отдельных случаев складываются вместе, и по полученным суммам определяется $M_{max} = W\sigma_u$ и f_{max}, а также и соответствующие значения x. Для приведенных ниже случаев 1 и 2 (**а** и **б**), представляющих собою наиболее часто встречаемые на практике случаи, даны окончательные формулы; предпочтительнее однако определять M_{max} непосредственно, путем составления уравнения моментов относительно опасного сечения.

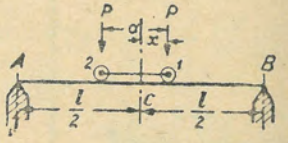
1. Неподвижные нагрузки.

Балка, свободно лежащая на опорах, нагружена n **одинаковыми сосредоточенными** силами P, приложенными (черт. 21) в $n-1$ **равноудаленных** (расстояния $= c$) точках.

$$A = \frac{nP}{l}\left(b + \frac{n-1}{2}c\right),\quad B = \frac{nP}{l}\left(a + \frac{n-1}{2}c\right).$$



Черт. 21.



Черт. 22.

Опасное сечение лежит в точке приложения m-ой силы, если

$$P > mP - A > 0,$$

так что

$$M_{max} = W\sigma_u = Aa + (m-1)\left(A - \frac{1}{2}mP\right)c.$$

В частном случае, когда $a = b$, получаем $A = B = \frac{1}{2}nP$. Если при этом точки приложения данных n сил P делят свободную длину балки l на $n_1 = n+1$ одинаковых частей, длиною каждая $\frac{1}{n_1} = a = b$, то:

если n_1 — четное число, то $M_{max} = W\sigma_u = \frac{n_1}{8}Pl$,

если n_1 — нечетное число, то $M_{max} = W\sigma_u = \frac{n_1^2 - 1}{8n_1}Pl$.

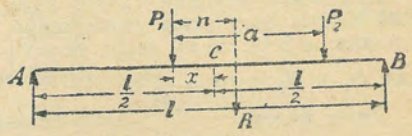
При $n = 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7$.

Коэфициенты для Pl равны: $^1/_3\ \ ^1/_2\ \ ^3/_5\ \ ^3/_4\ \ ^6/_7$.

2. Подвижные нагрузки.

Балка для рельсового пути подъемного крана (черт. 22—23) x = расстоянию одного из грузов P, от середины балки C.

а) Случай двух одинаковых грузов P, находящихся на постоянном расстоянии a друг от друга; расстояние x переменно, причем величина его колеблется между 0 и $\frac{l}{2}$ (черт. 22).



Черт. 23.

Следующие формулы действительны только тогда, когда оба груза P остаются на длине l:

$$A = P\left(1 - \frac{2x}{l} + \frac{a}{l}\right);\qquad B = P\left(1 + \frac{2x}{l} - \frac{a}{l}\right).$$

$$M_1 = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l} + \frac{2x}{l}\frac{a}{l} - \frac{4x^2}{l^2}\right);$$

$$M_2 = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l} - \frac{2a^2}{l^2} + \frac{2x}{l}\frac{3a}{l} - \frac{4x^2}{l^2}\right).$$

$M_{1\,max}$ получается при $x = {}^1/_4\,a$. $\qquad M_{2\,max}$ при $x = {}^3/_4\,a$.

$$M_{max} = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2 = \frac{P}{2l}\left(l - \frac{a}{2}\right)^2.$$

При $x = 0$ (или $x = a$) имеем:

$$M_1\ (\text{или } M_2) = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right);\ M_2\ (\text{или } M_1) = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l} - \frac{2a^2}{l^2}\right).$$

При $x = \frac{a}{2}$ имеем: $M_1 = M_2 = \frac{Pl}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right)$.

Таблица 30

Реакции опор и моменты при различных расстояниях — а — между грузами.

$a:l$	A_{max}	$M_{1\,max}$ для $x = {}^1/_4\,a$	$M_{2\,max}$ для $x = {}^3/_4\,a$	Примечание
0	2,0 P	0,500 00 Pl	0,550 00 Pl	Если $a:l > 2 - \sqrt{2} = 0{,}586$, то абсолютное максимальное значение M, всегда $= {}^1/_4\,Pl$, причем груз 1 находится посередине балки
0,1	1,9 „	0,451 25 „	0,446 25 „	
0,2	1,8 „	0,405 00 „	0,385 00 „	
0,3	1,7 „	0,361 25 „	0,316 25 „	
0,4	1,6 „	0,320 00 „	0,240 00 „	
0,5	1,5 „	0,281 25 „	0,156 25 „	
0,586	1,414 „	0,250 00 „	0,078 50 „	
0,667	1,333 „	(0,222 22) „	0	

б) Случай двух неодинаковых грузов P_1 и P_2 с постоянным расстоянием a между ними; расстояние x между грузом P_1 и серединой балки C переменно, причем оно колеблется между 0 и $\frac{1}{2}l$.

При том положении грузов, которое изображено на черт. 23, наибольший момент получается для сечения 1 в том случае, когда $P_1 > P_2$ (при условии $x > 0$). Если через $R = P_1 + P_2$ обозначим равнодействующую сил P_1 и P_2, то $n = \frac{P_2 a}{R}$.

Далее имеем:

$$A = \frac{R}{l}\left(\frac{l}{2} + x - n\right),$$

$$M_1 = A\left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{R}{l}\left(\frac{l}{2} + x - n\right)\left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{R}{l} f(x).$$

Если, начиная с $x = 0$, оба груза находятся на балке, то наибольший из всех моментов получается из выражения:

$$f'(x) = \left(\frac{l}{2} - x\right) - \left(\frac{l}{2} + x - n\right) = n - 2x = 0,$$

откуда $x = \frac{n}{2}$.

В соответствии с этим имеем:

$$M_{\max} = \frac{R}{l}\left(\frac{l}{2} + \frac{n}{2} - n\right)\left(\frac{l}{2} - \frac{n}{2}\right) = \frac{Rl}{4}\left(1 - \frac{n}{l}\right)^2 = \frac{R}{4l}(l-n)^2.$$

Если есть возможность поставить P_1 посередине балки как сосредоточенный груз, то это выражение для $M_{\max}$ надлежит сравнить с моментом $M_m = P_1 \frac{l}{4}$.

Обозначив отношение $\frac{M_m}{M_{\max}}$ через q, будем иметь:

$$q = \frac{P_1 l}{4} \cdot \frac{4l}{R(l-n)^2} = \frac{P_1}{R(1-n/l)^2} = \frac{P_1}{[Rl - P_2 a/(Rl)]^2}.$$

При $q = 1$ должно быть: $\frac{P_1}{R} = \left(1 - \frac{P_2 a}{Rl}\right)^2$,

$$\text{откуда } \frac{a}{l} = \frac{R}{P_2}\left(1 - \sqrt{\frac{P_1}{R}}\right).$$

При данных P_1 и P_2 изменение q происходит одновременно с изменением в том же направлении отношения $\frac{a}{l}$:

$$q > 1 \text{ дает } \frac{a}{l} > \frac{R}{P_2}\left(1 - \sqrt{\frac{P_1}{R}}\right);$$

Важное значение для расчета имеет $M_m = \frac{P_1 l}{4}$;

$$q < 1 \text{ дает } \frac{a}{l} < \frac{R}{P_2}\left(1 - \sqrt{\frac{P_1}{R}}\right);$$

Расчетным является $M_{\max} = \frac{R}{4l}(l-n)^2$.

Ж. Неразрезные балки.

1. Изгибающие моменты над точками опор.

Пусть означают (черт. 24):

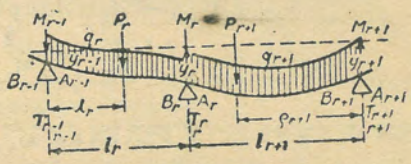
M_{r-1}, M_r, M_{r+1} — моменты над тремя любыми, следующими друг за другом опорами $r-1$, r, $r+1$ (с положительным знаком, когда момент дает прогиб балки книзу);

y_{r-1}, y_r, y_{r+1} — вертикальные расстояния, на которые у нагруженной балки по какой-либо причине опускаются вниз точки опоры $r-1$, r, $r+1$, раньше лежавшие на одной горизонтали; если, следовательно, ось балки вначале имела горизонтальное положение, то y_{r-1}, y_r, y_{r+1} и будут те расстояния, на которые нагруженные точки опоры отстоят от горизонтальной оси балки или от какой-нибудь иной горизонтали;

l_r, l_{r+1} — расстояния между опорами r и $(r+1)$ пролетов;

J_r, J_{r+1} — моменты инерции сечений балки в тех же пролетах;

L_r, R_r — статический момент площади нагрузки r пролета для простой, свободно лежащей своими концами балки относительно вертикали, проходящей через левую или соответственно правую опору этого пролета.



Черт. 24.

Имеем уравнение трех моментов:

$$6E\left(\frac{y_r - y_{r-1}}{l_r} + \frac{y_r - y_{r+1}}{l_{r+1}}\right) = M_{r-1}\frac{l_r}{J_r} + 2M_r\left(\frac{l_r}{J_r} + \frac{l_{r+1}}{J_{r+1}}\right) + M_{r+1}\cdot\frac{l_{r+1}}{J_{r-1}} + 6\frac{L_r}{l_r J_r} + \frac{6R_{r+1}}{l_{r+1}J_{r+1}}. \quad (63)$$

Пролеты могут быть при этом нагружены сплошными или сосредоточенными нагрузками.

Если имеем балку постоянного сечения, на которую действуют только такие нагрузки, которые по отдельным пролетам распределены равномерно, то, обозначая через q_r нагрузку, равномерно распределенную на единице длины пролета r, получаем уравнение Клапейрона:

$$6EJ\left(\frac{y_r - y_{r-1}}{l_r} + \frac{y_r - y_{r+1}}{l_{r+1}}\right) = M_{r-1}\,l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}\,l_{r+1} + \frac{1}{4}(q_r\,l_r^3 + q_{r+1}\,l_{r+1}^3). \quad (64)$$

Если все опоры лежат на одинаковой высоте, то уравнение (64) принимает вид:

$$M_{r-1}\,l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}\,l_{r+1} = -\frac{1}{4}(q_r\,l_r^3 + q_{r+1}\,l_{r+1}^3). \quad (65)$$

При наличии n пролетов или $n+1$ опор можно составить $n-1$ уравнение, имеющее форму (63), (64) или (65); из этих уравнений, если прибавить к ним оба уравнения, характеризующие закрепление концов балки (например $M_0 = M_n = 0$ и т. п.), можно вычислить эти $n+1$ моментов над $n+1$ опорами.

2. Реакции опор.

Обозначим через:

$A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ — части суммарных опорных реакций, получаемых от пролетов 1 до n расположенных справа;

$B_1, B_2, \ldots B_n$ — части суммарных опорных реакций, получаемых от пролетов 1 до n расположенных слева;

$T_0, T_1 \ldots T_n$ — суммарные давления на опоры, так что:

$$T_0 = A_0, \quad T_1 = A_1 + B_1 \ldots \quad T_n = B_n.$$

Тогда имеем:

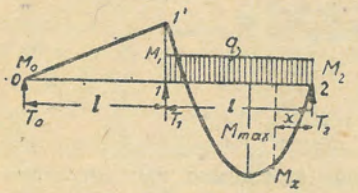
$$A = \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} + \frac{q_{r+1} l_{r+1}}{2} + \sum \frac{P_{r+1} \rho_{r+1}}{l_{r+1}}$$

$$\text{и } B_r = \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{q_r l_r}{l_r} + \sum \frac{P_r \lambda_r}{l_r};$$

отсюда суммарная реакция на опоры r:

$$T_r = \frac{q_r l_r + q_{r+1} l_{r+1}}{2} - M_r \left(\frac{1}{l_{r+1}} + \frac{1}{l_r} \right) + \frac{M_{r+1}}{l_{r+1}} + \frac{M_{r-1}}{l_r} + \sum \frac{P_{r+1} \rho_{r+1}}{l_{r+1}} + \sum \frac{P_r \lambda_r}{l_r}.$$

Пример. Дана балка, свободно лежащая на трех равноудаленных опорах, расстояния между которыми $= l$. Нагрузка одного пролета $= 0$, другой пролет нагружен равномерно силой q *кг/см* пог (черт. 25).



Черт. 25.

$$M_0 = M_2 = 0.$$

По уравнению (65) имеем:

$$4M_1 l = \frac{1}{4} q l^2,$$

откуда:

$$M_1 = -\frac{1}{16} q l^2 = -0{,}0625\ q l^2,$$

$$T_0 = +\frac{M_1}{l} = -\frac{1}{16} ql,$$

$$T_1 = \frac{ql}{2} - \frac{2M_1}{l} = \frac{ql}{2} + \frac{1}{8} ql = \frac{5}{8} ql,$$

$$T_2 = \frac{ql}{2} + \frac{M_1}{l} = \frac{ql}{2} - \frac{1}{16} ql = \frac{7}{16} ql,$$

$$M_x = +T_2 x - \frac{qx^2}{2} = \frac{7}{16} qlx - \frac{1}{2} qx^2,$$

$M = 0$ при $x = 0$ и $x = \frac{7}{8} l$,

M_{max} при $\frac{7}{16} ql - qx = 0$, следовательно $x = \frac{7}{16} l$

$$M_{max} = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{16} \right)^2 \cdot ql^2 = \frac{49}{512} ql^2 = 0{,}0957\ ql^2.$$

В соответствии с этим получаем вычерченную на черт. 25 линию моментов 01'2. Так как $M_{max} > M_1$ (по абсолютной величине), то расчет поперечного сечения необходимо вести по M_{max}.

Если у балки длиною $2l$ *см* равномерно нагруженной q *кг/см* пог, лежащей на трех опорах (все опоры расположены на одинаковой высоте и удалены друг от друга на равные расстояния l *см*), опустить среднюю опору ниже обеих остальных на величину:

$$f = 0{,}0131 \frac{ql^4}{EJ} \text{ см}, \tag{66}$$

то реакция балки благодаря этому увеличится в 1,457 раза.

В этом случае реакция достигает своей максимальной величины, так как момент над средней опорой равен наибольшему моменту в отдельных пролетах:

$$M_1 = M_{1max} = 0{,}0858\ ql^2; \quad T_0 = 0{,}4142\ ql, \quad T_1 = 1{,}1716\ ql.$$

ТАБЛИЦЫ К НЕРАЗРЕЗНЫМ БАЛКАМ.

Таблица 31

Неразрезные балки равные (l) пролетов на n опорах под равномерно распределенной нагрузкой q.

Значение	Число опор n							Единица
	3	4	5	6	7	8	9	
T_0	0,3750	0,4000	0,3929	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	ql
T_1	1,2500	1,1000	1,1428	1,1317	1,1346	1,1337	1,1340	ql
T_2	—	—	0,9286	0,9736	0,9616	0,9649	0,9640	ql
T_3	—	—	—	—	1,0192	1,0070	1,0103	ql
T_4	—	—	—	—	—	—	0,9948	ql
M_1	0,1250	0,1000	0,1071	0,1053	0,1058	0,1056	0,1057	ql^2
M_2	—	—	0,0714	0,0789	0,0769	0,0775	0,0773	ql^2
M_3	—	—	—	—	0,0865	0,0845	0,0850	ql^2
M_4	—	—	—	—	—	—	0,0825	ql^2
M_{1max}	0,0703	0,0800	0,0772	0,0779	0,0777	0,0778	0,0777	ql^2
M_{2max}	—	0,0250	0,0364	0,0332	0,0340	0,0338	0,0339	ql^2
M_{3max}	—	—	—	0,0461	0,0433	0,0440	0,0438	ql^2
M_{4max}	—	—	—	—	—	0,0405	0,0412	ql^2
λ_1	0,375	0,4000	0,3930	0,3947	0,3942	0,3944	0,3943	1
λ_2	—	0,5000	0,5357	0,5264	0,5327	0,5281	0,5283	1
λ_3	—	—	—	0,5000	0,4904	0,4930	0,4923	1
λ_4	—	—	—	—	—	0,5000	0,5026	1
ξ_1	0,750	0,8000	0,7860	0,7894	0,7884	0,7887	0,7887	1
ξ_1	—	0,2760	0,2659	0,2680	0,2675	0,2680	0,2680	1
ξ_2	—	0,7240	0,8055	0,7830	0,7899	0,7884	0,7890	1
ξ_2	—	—	—	0,1964	0,1960	0,1967	0,1960	1
ξ_3	—	—	—	0,8036	0,7850	0,7892	0,7880	1
ξ_3	—	—	—	—	—	0,2153	0,2150	1
ξ_4	—	—	—	—	—	0,7847	0,7900	1

В приведенных таблицах 31 и 32 приняты обозначения:

$T_0, T_1 \ldots$ — реакции опор,

$M_1, M_2 \ldots$ — опорные моменты (отрицательные),

M_{1max}, M_{2max} — наибольшие моменты в отдельных пролетах,

$\lambda_1 \lambda_2 \ldots$ — расстояния наибольших моментов $M_{1max}, M_{2max} \ldots$ от ближайших опор, расположенных слева,

$\xi_1, \xi_2 \ldots$ — расстояния точек перегиба упругих линий от тех же опор,

$q \ldots$ — нагрузка, приходящаяся на единицу длины каждого пролета.

Ввиду того что общее расположение в таблице 31 симметрично по отношению к середине балки, соответствующие данные таблицы указаны лишь до середины.

Таблица 32

Моменты и поперечные силы неразрезных балок с равными пролетами (таблицы Винклера).

p — постоянная и q — временная нагрузка на единицу длины

M max $= (ap + bq)\, l^2$; M min $= (ap + cq)\, l^2$

Q max $= (\alpha p + \beta q)\, l$: Q min $= (\alpha p + \gamma q)\, l$

a. Три опоры (два пролета)

Поперечные силы				Моменты			
$\frac{x}{l}$	Влияние p	Влияние q		$\frac{x}{l}$	Влияние p	Влияние q	
	α	β	γ		a	c	b
		+	−			−	+
0	+ 0,375	0,4375	0,0625	0	0,0	0	0
0,1	+ 0,275	0,3437	0,0687	0,1	+ 0,0325	0,00625	0,03375
0,2	+ 0,175	0,2624	0,0874	0,2	+ 0,0550	0,01250	0,03750
0,3	+ 0,075	0,1932	0,1182	0,3	+ 0,0675	0,01875	0,08625
0,375	0	0,1491	0,1491	0,4	+ 0,0700	0,02500	0,09500
0,4	+ 0,025	0,1359	0,1609	0,5	+ 0,0620	0,03125	0,09375
0,5	− 0,125	0,0898	0,2148	0,6	+ 0,0450	0,03750	0,08250
0,6	− 0,225	0,0544	0,2794	0,7	+ 0,0175	0,04375	0,06125
0,7	− 0,325	0,0287	0,3537	0,75	0	0,04688	0,04688
0,8	− 0,425	0,0119	0,4389	0,8	− 0,0200	0,05000	0 03000
0,9	− 0,525	0,0027	0,5277	0,85	− 0,0425	0,05773	0,01523
1,0	− 0,625	0,0	0,6250	0,9	− 0,0675	0,07361	0,00511
—	—	—	—	0,95	− 0,0950	0,09638	0,00138
—	—	—	—	1,0	− 0,1250	0,12500	0

Реакции опор

max $T_0 = 0{,}3750\ pl + 0{,}4375\ ql$; max $T_1 = 1{,}25\ (p + q)\ l$

b. Четыре опоры (три пролета)

0	+ 0,4	0,4500	0,0500	0	0	0,0	0
0,1	+ 0,3	0,3560	0,0563	0,1	+ 0,035	0,005	0,040
0,2	+ 0,2	0,2752	0,0752	0,2	+ 0,060	0,010	0,070
0,3	+ 0,1	0,2065	0,1065	0,3	+ 0,075	0,015	0,090
0,4	0	0,1496	0,1496	0,4	+ 0,080	0,020	0,100
0,5	− 0,1	0,1042	0,2042	0,5	+ 0,075	0,025	0,100
0,6	− 0,2	0,0694	0 2694	0,6	+ 0,060	0,030	0,090
0,7	− 0,3	0,0443	0,3443	0,7	+ 0,035	0,035	0,070
0,8	− 0,4	0,0280	0,4280	0,8	0	0,04022	0,04022
0,9	− 0,5	0,0193	0,5191	0,85	− 0,02125	0,04898	0,02773
1,0	− 0,6	0,0167	0,6167	0,9	− 0,04500	0,05542	0 02042
II пр.	—	—	—	0,95	− 0,07125	0,03831	0,01706
0	+ 0,5	0,5833	0,0833	1,0	− 0,10000	0,11667	0,01667
0,1	+ 0,4	0,4870	0,0870	19 пр.	{	—	—
0,2	+ 0,3	0,3991	0,0991	0	− 0,10000	0,11667	0,01667
0,3	+ 0,2	0,3210	0,1210	0,05	− 0,07625	0,09033	0,01408
0,4	+ 0,1	0,2537	0,1537	0,1	− 0,05500	0,06248	0,00748
0,5	0	0,1979	0,1979	0,15	− 0,03625	0,05678	0,02053
—	—	—	—	0,2	− 0,020	0,050	0,030
—	—	—	—	0,2764	0	0,050	0,050
—	—	—	—	0,3	+ 0,005	0,050	0,045
—	—	—	—	0,4	+ 0,020	0,050	0,070
—	—	—	—	0,5	+ 0,025	0,050	0,075

Реакции опор

max $T_0 = 0{,}40\ pl = 0{,}45\ ql$: max $T_1 = 1{,}1\ pl + 1{,}2\ ql$

Таблица 32 (продолжение)

Пять опор (4 пролета).

Поперечные силы				Моменты			
$\frac{x}{l}$	Влияние p	Влияние q		$\frac{x}{l}$	Влияние p	Влияние q	
	α	β	γ		a	c	b
I прол.		+	−	I прол.		−	+
0	+ 0,3929	0,4464	0,0535	0	0	0	0
0,1	+ 0,2929	0,3528	0,0599	0,1	+ 0,03429	0,00536	0,03964
0,2	+ 0,1929	0,2717	0,0788	0,2	+ 0,05857	0,01071	0,06929
0,3	+ 0,0929	0,2029	0,1101	0,3	+ 0,07286	0,01607	0,08893
0,3929	0	0,1498	0,1498	0,4	+ 0,07714	0,02143	0,09857
0,4	− 0,0071	0,1461	0,1533	0,5	+ 0,07143	0,02579	0,09822
0,5	− 0,1071	0,1007	0,2079	0,6	+ 0,05572	0,03214	0,08786
0,6	− 0,2071	0,0660	0,2731	0,7	+ 0,03000	0,03750	0,03750
0,7	− 0,3071	0,0410	0,3481	0,7857	0	0,04209	0,04209
0,8	− 0,4071	0,0247	0,4319	0,8	− 0,00571	0,04309	0,03738
0,9	− 0,5071	0,0160	0,5231	0,85	− 0,02732	0,05216	0,02484
1,0	− 0,6071	0,0134	0,6205	0,9	− 0,05143	0,06772	0,01629
—	—	—	—	0,95	− 0,07803	0,09197	0,01339
—	—	—	—	1,0	− 0,10714	0,12054	0,01340
II прол.				II прол.			
0	+ 0,5357	0,6027	0,0670	0	− 0,10714	0,12054	0,01340
0,1	+ 0,4357	0,5064	0,0707	0,05	− 0,08160	0,09323	0,01163
0,2	+ 0,3357	0,4187	0,0330	0,1	− 0,05857	0,07212	0,01455
0,3	+ 0,2357	0,3410	0,1153	0,15	− 0,03803	0,06340	0,02537
0,4	+ 0,1357	0,2742	0,1385	0,2	− 0,02000	0,05000	0,03000
0,5	+ 0,0357	0,2190	0,1833	0,2661	0	0,04882	0,04852
0,557	0	0,2028	0,2023	0,3	+ 0,00857	0,4821	0,05678
0,6	− 0,0643	0,1755	0,2398	0,4	+ 0,02714	0,04643	0,07356
0,7	− 0,1643	0,1435	0,3078	0,5	+ 0,03572	0,04464	0,08036
0,8	− 0,2643	0,1222	0,3865	0,6	+ 0,03429	0,04286	0,07715
0,9	− 0,3643	0,1106	0,4749	0,7	+ 0,02286	0,04107	0,06393
1,0	− 0,4643	0,1071	0,5714	0,8	+ 0,00143	0,04027	0,04070
—	—	—	—	0,8053	0	0,04092	0,04292
—	—	—	—	0,85	− 0,01303	0,04754	0,03451
—	—	—	—	0,9	− 0,03000	0,06105	0,03105
—	—	—	—	0,95	− 0,04943	0,08120	0,03173
—	—	—	—	1,0	− 0,07143	0,10714	0,035571

Реакции опор

max $T_0 = 0{,}3929\ pl + 0{,}4464\ ql$

max $T_1 = 1{,}1428\ pl + 1{,}2232\ ql$

max $T_2 = 0{,}9286\ pl + 1{,}1428\ ql$

Таблица 33

Ординаты линий влияния для моментов и поперечных сил в трехпролетной балке с равными пролетами

Пролет	$\frac{x}{l}$	Опорный моментг M_1	Моменты в сечениях 1-го пролета $x=0{,}2\,l$	$x=0{,}4\,l$	$x=0{,}6\,l$	$x=0{,}8\,l$	$x=0{,}9\,l$	Моменты в сечениях 2-го пролета $x=0{,}1\,l$	$x=0{,}2\,l$	$x=0{,}5\,l$	Опорные реакции A	B
1	0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1,0000	0
	1	−0,0264 l	+0,0747 l	+0,0494	+0,0242	−0,0011 l	−0,0138 l	−0,0231 l	−0,0198 l	−0,0099 l	+0,8736	+0,1594
	2	0512	1493	0995	0493	010	261	448	384	192	7488	3152
	3	0728	1254	1509	0763	+0,0018	355	637	546	273	6272	4633
	4	0896	1021	2042	1062	083	406	784	672	336	5104	6016
	5	1000	0 00	1600	1400	200	400	875	750	375	4000	7250
	6	1024	0595	1190	1786	381	322	896	768	384	2976	8364
	7	0952	0410	0819	1229	638	157	833	714	357	2048	9142
	8	0768	0246	0493	0739	986	+0,0109	672	576	288	1232	9728
	9	0456	0109	0218	0326	435	490	399	342	171	0544	1,0026
	1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0000
2	0,1	−0,0390 l	−0,0078 l	−0,0156 l	−0,0234 l	−0,0312 l	−0,0351 l	+0,0534 l	+0,0458 l	+0,0230 l	−0,0390	++0,9630
	2	640	128	256	384	512	576	192	1024	0520	640	8590
	3	770	154	308	462	616	693	−0,0042	0686	0870	770	8050
	4	800	160	320	480	640	720	184	0432	1280	800	6960
	5	750	150	300	450	600	675	250	0250	1750	750	5750
	6	640	128	256	384	512	576	256	0128	1280	640	4480
	7	490	098	196	294	392	441	218	0054	0870	490	3210
	8	320	064	128	192	256	288	152	0 16	0520	320	2000
	9	150	030	060	090	120	135	074	002	0230	150	0910
	1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0,1	+0,0114 l	+0,0023 l	+0,0046 l	+0,0068 l	+0,0091 l	+0,0103 l	+0,057 l	0	−0,0171 l	+0,0114	−0,0684
	2	192	38	077	115	154	173	096	0	288	192	1152
	3	228	48	095	143	190	214	119	0	357	238	1428
	4	256	51	102	154	205	230	128	0	384	256	1536
	5	250	50	100	150	200	225	125	0	375	250	1500
	6	224	45	090	134	179	202	112	0	336	224	1344
	7	182	36	073	109	146	164	091	0	273	182	1092
	8	128	26	051	077	102	115	064	0	192	128	0768
	9	066	13	026	040	053	059	033	0	099	066	0396
	1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

x — расстояние от ближайшей левой опоры.

Таблица 34

Ординаты линий влияния для моментов и поперечных сил для двухпролетной неразрезной балки с равными пролетами

Пролет	$\frac{x}{l}$	Опорный моментг M_1	Моменты в сечениях $x=0{,}2\,l$	$x=0{,}4\,l$	$x=0{,}6\,l$	$x=0{,}8\,l$	$x=0{,}9\,l$	Опорные реакции A (крайняя)	B (средняя)
1	0,0	0	0	0	0	0	0	+1,0000	0
	1	−0,0248 l	+0,0751 l	+0,0501 l	+0,0252 l	+0,0002 l	−0,0123 l	+0,8753 l	+0,1495 l
	2	480	1504	1008	0512	0016	0232	7520	2960
	3	683	1264	1527	0791	0054	0324	6318	4365
	4	840	1032	2064	1096	0128	0356	5160	5680
	5	938	0813	1625	1433	0250	0344	4063	6875
	6	960	0603	1216	1824	0432	0264	3040	7920
	7	893	0422	0843	1265	0786	0103	2108	8785
	8	720	0253	0512	0768	1024	+0 0152	1280	9440
	9	428	0115	0229	0344	0458	0515	0515	9355
	1,0	0,0000	0	0	0	0	0	0	+1,0000
2	0,1	−0,0428 l	−0,0086 l	−0,0171 l	−0,0257 l	−0,0342 l	−0,0385 l	−0,0428 l	+0,9355 l
	2	720	144	288	432	576	648	720	9440
	3	893	179	357	536	714	803	893	8785
	4	960	192	384	576	769	864	960	7920
	5	938	188	375	563	750	844	938	6875
	6	840	168	336	504	672	756	840	5690
	7	683	137	273	410	546	614	683	4365
	8	480	096	192	283	384	432	480	2960
	9	248	050	099	149	193	223	248	1495
	1,0	0,0000	0	0	0	0	0	0	0

x — расстояние от ближайшей левой опоры.

Опорные моменты для неразрезных балок с неравными пролетами.

1. Равномерно распределенная нагрузка.

а) Двухпролетная балка:

$$M_1 = -\frac{l_1}{4}\cdot k\,(q_1 + q_2\,\mu^3);\quad \mu = \frac{l_2}{l_1},\quad k = \frac{l_1}{2\,(1+\mu)}, \tag{67}$$

где q_1 и q_2 — равномерно распределенная нагрузка соответственно в 1-м и 2-м пролетах.

б) Трехпролетная балка:

$$M_1 = -\frac{q_1 l_1^2}{4k}\cdot\frac{k_3}{\mu_1} - \frac{q_2 l_2^2}{4k}\,(k_3 - 1) + \frac{q_3 l_3^2}{4k}\cdot\frac{1}{\mu_3}\cdot \tag{68}$$

$$M_2 = +\frac{q_1 l_1^2}{4k}\cdot\frac{1}{\mu_1} - \frac{q_2 l_2^2}{4k}\,(k_1 - 1) + \frac{q_3 l_3^2}{4k}\cdot\frac{k_1}{\mu_3},$$

$$\mu_1 = \frac{l_2}{l_1};\quad k_1 = \frac{2\,(1+\mu_1)}{\mu_1},$$

$$\mu_3 = \frac{l_2}{l_3};\quad k_3 = \frac{2\,(1+\mu_3)}{\mu_3};\quad k = k_1 k_3 - 1.$$

2. Уравнения линий влияния для опорных моментов.

а) Двухпролетная балка.

$$\text{1-й пролет } \eta = -kw_1, \qquad \text{2-й пролет } \eta = -k\mu^2 w_2'. \tag{69}$$

б) Трехпролетная балка.

Для M_1:

$$\text{1-й пролет } \eta = -\frac{l_1}{k}\cdot\frac{k_3}{\mu_1}w_3', \tag{70}$$

$$\text{2-й пролет } \eta = -\frac{l_2}{k}(k_3 w_2' - w_2),$$

$$\text{3-й пролет } \eta = +\frac{l_3}{k}\cdot\frac{1}{\mu_3}w_3'.$$

Для M_2:

$$\text{1-й пролет } \eta = +\frac{l_1}{k}\cdot\frac{1}{\mu_1}w_1,$$

$$\text{2-й пролет } \eta = -\frac{l_2}{k}\left(k_1 w_2 - w_2'\right),$$

$$\text{3-й пролет } \eta = -\frac{l_3}{k}\frac{k_1}{\mu_3}w_3'.$$

в) Четырехпролетная балка.

$$k_2 = \frac{2(l_1+l_2)}{l_2}; \qquad k_3 = \frac{2}{l_3}(l_3+l_4);$$

$$k_3 = \left[2(l_2+l_3) - \frac{l_2}{k_2}\right]\frac{1}{l_3}; \qquad k_2' = \frac{2}{l_2}\left[2(l_2+l_3) - \frac{l_3}{k_3'}\right];$$

$$k_4 = \frac{1}{l_4}\cdot\left[2(l_3+l_4) - \frac{l_3}{k_3}\right]; \qquad k_1' = \frac{1}{l_1}\left[2(l_1+l_2) - \frac{l_2}{k_2}\right].$$

Для M_1:

$$\text{1-й пролет } \eta = -\frac{l_1}{k_1'}w_1,$$

$$\text{2-й пролет } \eta = -\frac{l_2}{k_2k_2'-1}\left(k_2' w_2' - w_2\right),$$

$$\text{3-й пролет } \eta = +\frac{l_3}{k_2\left(k_3k_3'-1\right)}\cdot\left(k_3' w_3' - w_3\right),$$

$$\text{4-й пролет } \eta = -\frac{l_4}{k_2k_3k_4}\cdot w_4'.$$

Для M_2:

$$\text{1-й пролет } \eta = +\frac{l_1}{k_1'k_2'}w_1,$$

$$\text{2-й пролет } \eta = -\frac{l_2}{k_2k_2'-1}\left(k_2w_2 - w_2'\right)$$

$$\text{3-й пролет } \eta = -\frac{l_3}{k_3k_3'-1}\left(k_3'w_3' - w_3\right)$$

$$\text{4-й пролет } \eta = +\frac{l_4}{k_3k_4}w_4'$$

Для M_3:

$$\text{1-й пролет } \eta = -\frac{l_1}{k_1'k_2'k_3}w_1$$

$$\text{2-й пролет } \eta = +\frac{l_2}{k_3'\left(k_2k_2'-1\right)}\cdot\left(k_2w_2 - w_2'\right)$$

$$\text{3-й пролет } \eta = -\frac{l_3}{k_3k_3'-1}\cdot\left(k_3w_3 - w_3'\right)$$

$$\text{4-й пролет } \eta = -\frac{l_4}{k_4}w_4'$$

Во всех этих уравнениях w и w' берутся из таблицы 35

Таблица 35

$\frac{x}{l}$	w	w'	$\frac{x}{l}$	w	w'
0 05	0,0499	0,0926	0,55	0 3836	0,3589
0,10	0 0990	0,1710	0,60	0 3840	0,3360
0,15	0.1466	0,2359	0,65	0,3754	0,3071
0,20	0,1920	0,28 0	0.6667	0,3704	0.2962
0,25	0,2344	0,3281	0.70	0,3570	0.2730
0,30	0.2730	0 3570	0,75	0.3281	0.2344
0,3333	0 2962	0,3704	0,80	0,2880	0,1920
0,35	0.3071	0 3754	0,85	0 2359	0.1456
0,40	0 3360	0,3840	0,90	0.1710	0.0990
0,45	0,3589	0,3836	0,95	0,0926	0,0499
0,50	0,3750	0,3750	—	—	—

x – расстояние от левой опоры рассматриваемого пролета. Для вычисления моментов от равномерно распределенной нагрузки достаточно положить:

$$w = w' = \frac{ql}{4}.$$

После вычисления опорных моментов найдем: опорные реакции на крайних опорах:

$$A_0 = A_{00} + \frac{M_1}{l}; \qquad A_n = A_{0n} + \frac{M_{n-1}}{l_n}.$$

На средних опорах:

$$B_r = B_{0r} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}.$$

Поперечная сила во 2-м пролете:

$$Q_x = Q_{ox} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}.$$

Момент в r-м пролете:

$$M_x = M_{ox} + M\frac{x}{l_r} + M_{r-1}\frac{l_r - x}{l_r},$$

где A_{oo}, A_{on}, B_{or}, Q_{ox}, M_{ox} — соответствующие величины для свободно опертой балки.

3. Сопротивление кручению.

Рассматриваемое сечение призматического бруса находится под действием пары сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной к оси бруса.

Пусть означают:

M_d — крутящий момент в *кг/см*,
$G = 1 : \beta = {}^5/_{13}\, E = 0{,}385\, E$ — модуль скольжения в *кг/см²*,
τ_{max} — наибольшее напряжение среза в *кг/см²*, имеющее место в сечении,
$\tau_{доп}$ — допускаемое напряжение кручения для данного материала в *кг/см²*,
l — длину в *см* бруса, подверженного кручению,
V — его объем в *см³*.

В приведенной ниже (стр. 564 до 566) таблице 36 для допускаемого напряжения кручения материала $\tau'_{доп}$ указан соответствующий допускаемый крутящий момент для целого ряда наиболее важных сечений.

Моментом сопротивления при кручении или „полярным моментом сопротивления" называют коэфициент в выражении M_d при $\tau_{доп}$, т. е. момент сопротивления при кручении равен $\frac{M_d}{\tau_{доп}}$.

Для круглого сечения этот момент сопротивления (так же, как и в случае сопротивления изгибу) равен:

$$W_d = J_p/e,$$

где J_p — полярный момент инерции сечения, а e — расстояние наиболее удаленной точки сечения от продольной оси (улевой оси) бруса.

Для всех остальных форм сечений, как показывает таблица, это правило неприменимо.

Относительный угол скручивания ϑ, т. е. приведенная к радиусу в 1 *см* дуга скручивания двух сечений, расстояние между которыми равно 1 *см*, получается из уравнения:

$$\vartheta = \frac{M_d}{GJ_d}. \qquad (72)$$

Здесь J_d называется **угловым сопротивлением** при кручении, а GJ_d — **жесткостью при кручении.** По Сен-Венану общее выражение углового сопротивления имеет вид:

$$J_d = \frac{F^4}{40J_p}. \qquad (73)$$

Здесь J_p — полярный момент инерции, о котором говорилось выше, а F — площадь поперечного сечения в *см²*. Для более точного расчета правильнее брать вместо числа 40 другое число, лежащее между 38,5 и 42,68, в зависимости от формы сечения. Для круглого сечения $J_d = J_p$. Для тонкостенных сечений с острыми формами и вырезами, например прокатных профильных балок, а равно и кольцевых сечений (полых валов) формула Сен-Венана вообще неприменима.

Работа кручения (от $\tau = 0$ до $\tau = \tau_{max}$) равна:

$$A_d = \frac{1}{2} M_d \vartheta l = \frac{1}{2}\frac{M_d(G\vartheta)}{F\cdot\tau^2_{max}}\left(\frac{\tau^2_{max}}{G} V\right) = \eta_4 \frac{\tau^2_{max}}{G} V,$$

где

$$\eta_4 = \frac{1}{2}\frac{M_d(G\vartheta)}{F\cdot\tau^2_{max}} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_d}{\tau_{max}}\right)\left(\frac{G\vartheta}{\tau_{max}}\right)\frac{1}{F} \qquad (74)$$

представляет собою постоянную величину, зависящую только от формы сечения; значения η_4 для различных сечений даны в таблице 36 (стр. 564 - 566).

И. Сложное сопротивление.

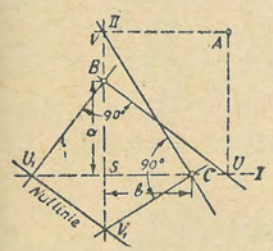
Пусть означают:

l — длину бруса в *см*,
F — сечение бруса в *см²*,
S — центр тяжести сечения бруса,
J_I — наибольший экваториальный момент инерции сечения F в *см⁴*
J_{II} — наименьший „ „ „ „ F „ „
P — силу (осевую) в *кг* оказывающую на брус растягивающее или сжимающее действие,
Q — силу (поперечную) в *кг*, оказывающую на брус срезывающее действие,
M — изгибающий момент в *кг/см*,
E — модуль упругости в *кг/см²*,
$m = \left[\frac{10}{3}\right]$ — коэфициент Пуасона.

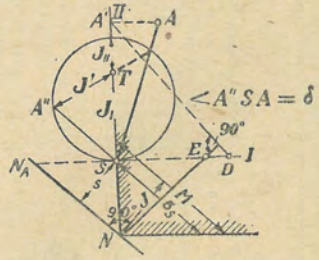
а) Брус подвержен действию нормальных напряжений.

Растяжение (или сжатие) и изгиб

Материал обладает свойствами сопротивления растяжению и сжатию. Изгибающий момент M и осевая сила P могут быть приведены к одной силе P, приложенной в точке A силовой линии (на расстоянии $p = \frac{M}{P}$ от центра тяжести S), так что $M = Pp$.



Черт. 26.



Черт. 27.

1. Определение нулевой линии для точки приложения силы *P*. По способу Мора, с помощью главных радиусов инерции a и b: на главных осях сечения SI с J_I и SII с J_{II} (черт. 26) откладываем отрезки $SC = b$ и $SB = a$, соединяем точку C с основанием V перпендикуляра, опущенного

Таблица 36

Допускаемые крутящие моменты, напряжения кручения и относительные углы скручивания [1]

№	Форма сечения	Напряжения кручения τ и τ_{max}	Допускаемый крутящий момент M_d	Крутящий момент M_d при относительном угле скручивания ϑ	Относительный угол скручивания ϑ при наибольшем напряжении кручения τ_{max}; η_k - коэфициент работы. $A = \frac{1}{2} M_d \vartheta l = \eta_k \frac{\tau^2_{max}}{G} V$
1		τ_{max} в точках окружности сечения [2] на расстоянии ρ от центра $\tau = \frac{2\rho}{d} \cdot \tau_{max}$	$M_d = \frac{\pi}{16} d^3 \tau_{доп}$	$M_d = \frac{\pi}{32} d^4 G\vartheta$	$\vartheta = 2\frac{\tau_{max}}{G}\frac{1}{d}$; $\eta_k = \frac{1}{4}$
2		τ_{max} в точках внешней окружности на расстоянии ρ от центра $\tau = \frac{2\rho}{d} \cdot \tau_{max}$	$M_d = \frac{\pi}{16}\frac{D^4 - d^4}{D} \tau_{доп} \approx 1{,}6\, d_m^3\, s\, \tau_{доп}$, так как $d_m = \frac{1}{2}(D+d)$, $s = \frac{1}{2}(D-d)$	$M_d = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) G\vartheta$	$\vartheta = 2\frac{\tau_{max}}{G}\frac{1}{D}$; $\eta_k = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{d^2}{D^2}\right)$
3	 $h : d = n > 1$	τ_{max} в крайних точках малой оси b; τ в крайних точках большой оси $\tau = \frac{1}{n} \cdot \tau_{max}$	$M_d = \frac{\pi}{16} b^3 h\, \tau_{доп} = \frac{\pi}{16} n\, b^3\, \tau_{доп}$	$M_d = \frac{\pi}{16}\frac{n^3}{n^2+1} b^4 G\vartheta$	$\vartheta = \frac{n^2+1}{n^2}\frac{\tau_{max}}{G}\frac{1}{b}$; $\eta_k = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$
4		То же	$M_d = \frac{\pi}{16}\frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} \tau_{доп} = \frac{\pi}{16} n \frac{b^4 - b_0^4}{b} \tau_{доп}$	$M_d = \frac{\pi}{16}\frac{n^3}{n^2+1} \cdot (b^4 - b_0^4) G\vartheta$	$\vartheta = \frac{n^2+1}{n^2}\frac{\tau_{max}}{G}\frac{1}{d}$; $\eta_k = \frac{1}{8}\left[1 + \left(\frac{b_0}{b}\right)^2\right] \times \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$
5	Произвольное кольцо постоянной ширины δ 	F_a, F_i — поверхности наружного и внутреннего колец, F_m — поверхность среднего кольца, U_m — периметр внутреннего очертания кольца, τ_d — среднее напряжение в кольце	$M_d = (F_a F i)\, s \tau_d$	$M_d \approx 2\,(F_a + F_i) \cdot \frac{F_m^2}{U_m} G\vartheta$	$\vartheta = \frac{1}{2}\frac{U_m}{F_m}\frac{\tau_d}{G}$; $\eta_k = \frac{1}{4}\frac{F_a + F_i}{F_m}$
6		τ_{max} по середине сторон сечения. В углах $\tau = 0$	$M_d = 0{,}208\, b^3\, \tau_{доп}$	$M_d = 0{,}1404\, b^4\, G\vartheta$	$\vartheta = 1{,}481\frac{\tau_{max}}{G}\frac{1}{b}$; $\eta_k = 0{,}154$
7	 $h \cdot b = n > 1$	τ_{max} по середине сторон h. По середине сторон b: $\tau = \eta_4 \cdot \tau_{max}$ В углах $\tau = 0$	$M_d = \eta_3\, n\, b^3$ доп $= \eta_2\, b^3\, h\, \tau_{доп}$	$M_d = \eta_3\, n\, b^4\, G\vartheta = \eta_3\, b^3\, h\, G\vartheta$	$\vartheta = \frac{\eta_2}{\eta_3} \cdot \frac{\tau_{max}}{G}\frac{1}{b}$; η_k — см. следующую таблицу 36а
8		τ_{max} по середине сторон сечения, в углах $\tau = 0$	$M_d = \frac{b^3}{20} \cdot \tau_{max}$	$M_d = \frac{b^4}{46{,}188} G\vartheta$	$\vartheta = 2\frac{\tau_{max}}{G}\frac{1}{h} = 2{,}309\frac{\tau_{max}}{G}\frac{1}{b}$; $\eta_k = 0{,}133$

[1] Составлена преимущественно по книге доктора К. Вебера, Die Lehre von der Drehungstigkeit, Берлин, 1921 г.

[2] Небольшой желобок полукруглой формы или незначительный острый надрез на окружности дает лишь небольшое уменьшение момента M_d, зато сильно изменяется тогда местное напряжение τ; в первом случае оно увеличивается вдвое, во втором оно возрастает до $\tau = \infty$.

Таблица 35 (Продолжение)

№	Форма сечения	Напряжения кручения τ и τ_{max}	Допускаемый крутящий момент Md	Крутящий момент M_d при относительном угле скручивания ϑ	Относительный угол скручивания ϑ при наибольшем напряжении кручения τ_{max}; η_4 – коэффициент работы $A = \frac{1}{2} M_d \vartheta l = \eta_4 \frac{\tau_{max}^2}{G} V$
9	**Сечения прокатных балок** (⊥ ⊏ ⊏ и +) составлены из прямоугольников ab	τ_{max} по середине прямоугольника, толщина которого = d_{max}, d – меньшая сторона, b – большая сторона треугольника, d_{max} – меньшая сторона наиболее толстого прямоугольника. В точках наружного очертания, за исключением самых крайних, $\tau = d\vartheta$. В закруглениях τ немного больше	$Md = \frac{(\Sigma\, d^3\, b)}{3} \cdot \tau_{max}$	$M_d = \frac{1}{8} \eta\, \Sigma\,(d^2\, b) \cdot G\vartheta$	$\vartheta = \frac{\tau_{max}}{G} \frac{1}{d_{max}}$ $\eta_4 = \frac{1}{6} \eta \frac{\Sigma\,(d^3 b)}{\Sigma (db) \cdot d^2_{max}}$

Значения η (по Фепплю)

$\eta = 1{,}30$ для ⊥ ⊏ ⊏ ⊏ и +

$\eta < 1{,}30$ для ⊥

$> 1{,}00$ для ⊏

$\approx 1{,}00$ для ⊏

$+ \eta = 1{,}17$ для +

Таблица 36а

Значения коэффициентов η_1 до η_4 для прямоугольных сечений

n =	1 квадрат	1,5	2	3	4	6	8	10	∞ лист
η_1 =	1,000	0,853	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743
η_2 =	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
η_3 =	0,140	0,196	0,229	0,263	0,231	0,259	0,303	0,313	0,333
η_4 =	0,154	0,136	0,132	0,136	0,141	0,149	0,154	0,156	0,167

из точки A на ось S II, а точку B с основанием U перпендикуляра, опущенного из той же точки A на ось S I, затем проводим из точки B линию, перпендикулярную к BU, а из точки C линию, перпендикулярную к CV. обе эти линии пересекают оси S I и S II в двух точках нулевой линии U_1 и V_1.

По способу Р. Ляндa, с помощью круга инерции (черт. 27). Нулевая линия параллельна оси SA'', сопряженной с силовой линией SA, проходящей через центр тяжести S и отстоящей от нее (от оси SA'') на расстоянии $s = \frac{J'}{Fp}$. Положение нулевой линии лучше всего определяется с помощью точки пересечения ее N с одной из главных осей сечения. Для этого вычерчиваем круг инерции так, чтобы он касался одной из главных осей, проходящих через точку S, например оси S I; при этом главная точка инерции T находится на другой главной оси S II. Теперь откладываем на оси S I постоянные отрезки $SE = \frac{J_1}{n}$ и $SD = \frac{n}{F}$, оба в том же масштабе, в котором построено сечение, причем n выбираем соответствующим образом, как величину третьей степени (например $n = 100$ *см*³). Проводя далее AA' параллельно S I и EN перпендикулярно к DA', получаем положение нулевой линии NN_A, параллельной SA''. Настоящий способ имеет особенно важное значение при определении напряжений.

Обратно, когда дана нулевая линия, можно, пользуясь способами Мора и Ляндa, определить точку приложения силы P.

2. Определение напряжений. Напряжение σ_s в центре тяжести не зависит от положения точки приложения силы P (стало быть и от величины момента $M = Pp$); напряжение $\sigma_s = \frac{P}{F}$ имеет тот же характер, что и P (оно является напряжением сжатия, если P — сила сжимающая); σ_s следовательно равно среднему напряжению сечения.

Напряжения получаются из уравнения $\sigma = y \frac{M}{J'}$, где по черт. 27, $J' = \frac{J}{\sin \delta} = TA''$, а y — расстояние данной точки сечения от ранее проведенной нулевой линии NN_A. **Предельное напряжение** σ_{max} получается непосредственно из диаграммы распределения напряжений или же величина ее определяется аналитически:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J'} \cdot e, \text{ где } e = y_{max}. \qquad (75)$$

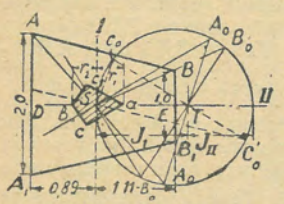
Без построения нулевой линии предельные напряжения σ_{max} и σ_{min} определяются (с помощью круга инерции) следующим образом.

Строим (черт. 27) сопряженную с силовой линией SA ось центров тяжести SA'' или, что то же, нулевую линию для случая действия одного только момента Pp; обозначим расстояние наиболее удаленной точки сечения F по обе стороны от SA'': в сторону A (P) через e_1, со знаком силы P (если сила растягивающая, то +, в противном случае —), в противоположную сторону — через e_2 с другим знаком; тогда будем иметь:

$$\sigma_{max} = \sigma_s + \sigma_1 = \frac{P}{F} + \frac{M}{J} e_1; \quad \sigma_{min} = \sigma_s + \sigma_2 = \frac{P}{F} + \frac{M}{J} e_2. \qquad (76)$$

Здесь σ_{max} — большее, σ_{min} — меньшее из обоих полученных значений.

3. Ядро сечения — это та площадь, внутри которой должна находиться точка A приложения силы P, если сечение претерпевает напряжения только одинакового знака. Если точка A лежит вне ядра, то в сечении имеют место напряжения как растяжения, так и сжатия; если A лежит на контуре ядра сечения, то это указывает на наличие таких напряжений в крайних точках, которые доходят до нуля не меняя своего знака.



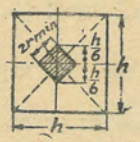
Черт. 28.

Точками ядра силовой линии называются точки пересечения контура ядра с силовой линией. Расстояние r (в $см$) каждой такой точки ядра от центра тяжести S называется (радиусом сопротивления или плечом).

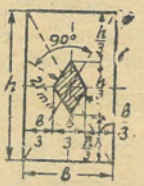
Построение ядра сечения производится по одному из способов, указанных в п. 1. Проще всего подсчитать r для точек ядра главной оси, построить при помощи известных главных моментов инерции J_I и J_{II} круге инерции, а вместе с тем и направления сторон ядра, сопряженные с углами линии, охватывающей сечение. На черт. 28 показано примерное построение ядра $acbc_1$ для трапеции ABB_1A_1.

Черт. 28. $F = 3\,см^2$; $J_I = 0{,}963\,см^4$; $J_{II} = 0{,}629\,см^4$; $W_1 = 0{,}963 : 0.89 = 1{,}03\,см^3$; $W_2 = 0{,}963 : 1{,}1 = 0{,}87\,см^3$; $r_1 = 1{,}03 : 3{,}0 = 0{,}36\,см$; $r_2 = 0{,}87 : 3{,}0 = 0{,}29\,см$. Направление стороны ac (параллельной A'_0S) сопряжено с AS, направление bc (параллельной SB'_0) сопряжено с BS. Поверка: направление Sc должно быть сопряжено с направлением AB (SC'_0 параллельно AB).

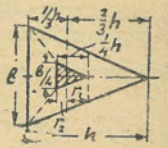
С известным приближением можно принять $Sb = \frac{1}{2} SD$, $Sa = \frac{1}{3} SE$.



Черт. 29.



Черт. 30.



Черт. 31.

Ядро и наименьшее плечо ядра r_{min} для некоторых сечений.

Квадрат (черт. 29). $r_{min} = \frac{h}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}1179\,h$.

Диагонали ядра $= \frac{1}{3} h$.

Прямоугольник (черт. 30). $r_{min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2 + h^2}}$.

Диагонали ядра $= \frac{1}{3} h$ и $\frac{1}{3} b$.

Треугольник равнобедренный (черт. 31).

$$r_1 = \frac{1}{6} h, \qquad r_2 = \frac{1}{12} h.$$

Ядро имеет форму треугольника, подобного сечению; основание его $= \frac{1}{4} b$, высота $= \frac{1}{4} h$.

Восьмиугольник (черт. 32). $r_{min} = 0{,}2256\,R$.

Круг (черт. 33). $r = \frac{1}{8} d = \text{const}$.

Полый квадрат (внешняя сторона $= H$, внутренняя $= h$). Ядро имеет форму квадрата, подобного черт. 29.

$$r_{min} = \frac{H}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{h}{H}\right)^2\right] = 0{,}1179\,H \left[1 + \left(\frac{h}{H}\right)^2\right].$$

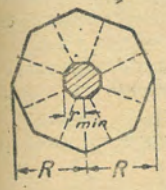
Полый восьмиугольник [радиусы обоих описанных кругов $= R_a$ и R_i; толщина стенок $= 0{,}9239\ (R_a - R_i)$].

Ядро имеет форму восьмиугольника, как на черт. 32.

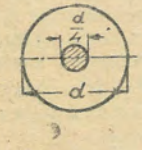
$$r_{min} = 0{,}2256 R_a \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^2\right].$$

Круглое кольцо (черт. 34). $r_{min} = \frac{D}{8} \left[1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = \text{const}$.

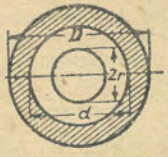
Двутавровое сечение. Ядро имеет вид ромба так же, как в случае прямоугольного сечения.



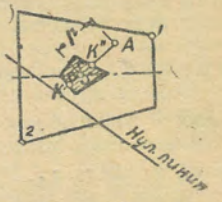
Черт. 32.



Черт. 33.



Черт. 34.



Черт. 35.

4. Определение предельных напряжений с помощью точек ядра. Когда известны точки ядра K', K'' для данной силовой линии AS (черт. 35), предельные напряжения сечения σ_{max} и σ_{min} определяются следующим образом:

Если обозначим через $M' = P \cdot \overline{AK'}$ и $M'' = P \cdot \overline{AK''}$ моменты силы P (в точке A) относительно точек ядра, через W' и W'' величины сопротивления для нулевой линии, сопряженной с силовой линией, то будем иметь,

$$\sigma_{max} \text{ и } \sigma_{min} = \frac{M'}{W''} \text{ и } \frac{M''}{W'}. \qquad (77)$$

При симметричных сечениях всегда:

$$\sigma_{max} = \frac{M'}{W'} \text{ и } \sigma_{min} = \frac{M''}{W''}. \qquad (78)$$

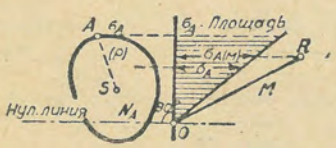
Согласно сказанному в п. 4 можно брать вместо W' и W'' Fr' и Fr'', где r' и r'' обозначают плечи ядра на силовой линии; а так как $AK' =$

$= p + r'$, $AK'' = p - r''$, то получается также:

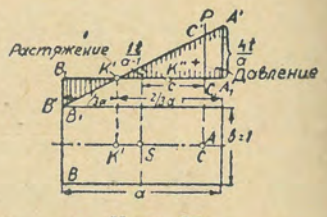
$$\sigma_{max} = \left(1 + \frac{p}{r'}\right)\frac{P}{F}, \qquad \sigma_{min} = \left(-1 + \frac{p}{r''}\right)\frac{P}{F}. \tag{79}$$

Знаки для σ определяются с помощью нулевой линии. Например по черт. 36 для сжимающей силы P имеем σ_{max} (в точке 1) — сжатие, σ_{min} (в точке 2) — растяжение, так как точка 1 лежит с той же стороны нулевой линии, что и A, точка же 2 лежит с противоположной стороны.

5. Взаимодействие напряжений. Если A и B две какие-нибудь точки сечения, то сила P, действующая в A, вызывает в B напряжение, равное напряжению в A, вызываемому действием силы P в B.



Черт. 36.



Черт. 37.

6. Площадь влияния напряжения. Если для какого-нибудь определенного напряженного состояния отложить напряжения σ из точек приложения их в виде отрезков, перпендикулярных к сечению, то крайние точки этих отрезков образуют некоторую поверхность, называемою п л о щ а д ь ю н а п р я ж е н и й, которая может бы ь изображена в боковой проекции (черт. 36).

Если, с другой стороны, переменные величины σ_A какой-нибудь неподвижной точки A при перемещающейся силе $P = 1t$ отложить из точек приложения этой последней, то получится л и н и я в л и я н и я σ_A или, короче, площадь σ_A. Из сказанного в п. 6 следует:

Линия влияния напряжения σ_A равна площади напряжений для силы $P = 1t$, приложенной в точке A. Эту площадь напряжений можно построить согласно черт. 27 причем $M = 1t \cdot SA$.

Д е й с т в и е м о м е н т а $M\,t\,см = (M\,см)\cdot(1t)$. Если от нулевой точки O площади σ_A провести линию OR, равную и параллельную $M\,см$ (черт. 36), то ордината, соответствующая точке R, даст напряжение $\sigma_{A(M)}$, вызываемое моментом M. Таким образом, при одном только действии моментов площадь σ_A может быть передвинута параллельно самой себе, так что нулевая точка O совпадает с S.

7. Формула Новье для напряжений в прямоугольных балках. П р я м о у г о л ь н и к. Для прямоугольников длиною a и шириною $b = 1\,м$ линия влияния напряжения σ_A в крайних точках сечения может быть с успехом использована при определении сечений подпорных стен и сводов (черт. 37). За единицу силы примем 1t. Прямая $A'\,K'\,B'$, ограничивающая площадь σ_A, отнесенная к A_1B_1, проходит через точку ядра K', соответствующую точке $A\left(K'A_1 = \frac{2}{3}a\right)$, и у точки S отсекает ординату $\sigma_s = 1t:a\cdot 1$, а у крайней точки A ординату $4t:a\cdot 1$; эти ординаты откладываются в масштабе σ.

Сила P (в t), приложенная в какой-нибудь точке C, вызывает тогда у края сечения в точке A напряжение:

$$\sigma_A = +P\cdot\overline{C_1C}. \tag{80}$$

Напряжение с знаком + будем иметь в точке A лишь до тех пор, пока точка приложения силы P остается на длине $AK' = \frac{2}{3}a$.

А н а л и т и ч е с к и напряжения в крайних точках сечения определяются из уравнений:

$$\sigma_A = \frac{6M'_k}{a^2} \text{ и } \sigma_B = \frac{6M''_k}{a^2}, \tag{81}$$

в которых M'_k и M''_k означают моменты силы P относительно точек ядра K' и K''. Если сила P приложена в C (на линии AS, черт. 37), то, обозначив эксцентриситет (т. е. отклонение от центра тяжести) SC через c, будем иметь также:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_A\\ \sigma_B\end{matrix}\right\} = \sigma\,\frac{max}{min} = \frac{P}{a^2}(a \pm 6c) = \frac{P}{a}\left(1 \pm \frac{6c}{a}\right). \tag{82}$$

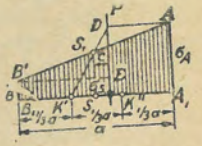
Для того чтобы сечение испытывало лишь напряжения сжатия, должно существовать условие: $\frac{6c}{a} < 1$ или $c < \frac{1}{6}a$, т. е. сила P должна быть приложена в средней трети $K'K''$ длины сечения.

Так как в случае прямоугольного сечения со сторонами a и b:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_s} = 1 + \frac{6c}{a} = \left(\frac{a}{6} + c\right):\frac{a}{6}, \tag{83}$$

то для определения напряжений в крайних точках (черт. 38) можно применить следующий простой г р а ф и ч е с к и й с п о с о б:

Из центра тяжести S восстанавливаем перпендикулярно к A_1B_1 среднее напряжение $\sigma_s = \frac{P}{a} = SS_1$, проводим линию $K'S_1$ до пересечения ее в точке D с направлением действия силы P, далее DA' параллельно B_1A_1 и наконец линию $A'S_1B'$; тогда ординаты линии напряжений $A'B'$ (заштрихованная площадь $A'S_1B'B_1A_1$) будут изображать напряжения, вызываемые в сечении силой P; A_1A' и B_1B' буд т представлять собою напряжения в крайних точках.



Черт. 38.

б) Брус испытывает нормальные и срезывающие напряжения.

Когда какая-нибудь часть сечения бруса испытывает нормальное напряжение σ и напряжение среза τ, то оба эти напряжения согласно сказанному на стр. 511 должны быть сложены в одно главное напряжение N' в частности при $m = \frac{10}{3}$ имеем:

$$N' = 0{,}35\,\sigma \pm 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\sigma_0\tau)^2}. \tag{84}$$

Размеры сечения должны быть выбраны такими, чтобы ни в одной точке его не получилось $N' > \sigma_{доп}$.

В означенной формуле $\alpha_0 = \frac{\sigma_{доп}}{1{,}3\,\tau_{доп}}$ означает отношение напряжений под $\sigma_{доп}$ вообще (т. е. $\sigma_р$, $\sigma_с$ или $\sigma_и$) надо понимать соответствующее допускаемое нормальное напряжение, под $\tau_{доп}$ вообще допускаемое напряжение среза (сдвига). При этом необходимо принять во внимание характер нагрузки, под действием которой данный брус находится.

1. Растяжение (или сжатие) и срез. Под влиянием внешних сил на сечение F действуют: осевая сила P и срезывающая (сдвигающая) сила Q. Сила P вызывает одинаковое повсюду нормальное напряжение:

$$\sigma = \pm \frac{P}{F}; \tag{85}$$

сила Q, наоборот, вызывает неодинаковые напряжения среза, из которых необходимо определить наибольшее, т. е. τ_{max} согласно выведенным выше (стр. 507 и 508) формулам (τ_{max} большей частью имеет место у оси центра тяжести). Наибольшее главное напряжение в сечении равно:

$$N' \frac{\max}{\min} = 0{,}35\sigma \pm 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\alpha_0^2\tau^2_{max}} =$$

$$= \left[0{,}35 \pm 0{,}65\sqrt{\left(1 + \frac{2\alpha_0\,\tau_{max}}{\sigma}\right)^2}\right]\sigma = \xi\sigma \lessgtr \sigma_{доп}, \tag{86}$$

где $\alpha_0 = \sigma_{доп} : 1{,}3\,\tau_{доп}$ или $\alpha_0 = \sigma_{dдоп} : 1{,}3\,\tau_{доп}$.

2. Изгиб и срез. На сечение действует изгибающий момент M, вызывающий нормальные напряжения σ, и срезывающая сила Q, лежащая в плоскости изгибающего момента и вызывающая напряжения среза τ.

В этом случае следует применить вышеприведенную общую формулу для N' в которой $\alpha_0 = \frac{\sigma'_{доп}}{1{,}3\,\tau_{доп}}$; для σ и τ надо брать те величины, для которых главное напряжение N' получается максимальным.

3. Растяжение (или сжатие) и кручение. Для этого случая применимо все сказанное выше в п. 1 с той только разницей, что вместо срезывающей силы Q надо брать крутящий момент M_d, а вместо $\tau_{доп}$ — значение τ_d.

4. Изгиб и кручение. На сечение действуют изгибающий момент M и крутящий момент M_d. Плоскость изгибающего момента M пересекает плоскость сечения под прямым углом, плоскость момента M_d перпендикулярна к оси бруса. Момент M в каждом элементе сечения вызывает нормальное напряжение σ, момент M_d дает в том же сечении напряжение среза τ; оба эти напряжения, как уже указывалось выше, должны быть найдены. Для вычисления главного напряжения N' применяется общая формула, в которой $\alpha_0 = \frac{\sigma_{доп}}{1{,}3\,\tau_{доп}}$; при этом для σ и τ следует брать те именно значения, при которых главное напряжение N' получается максимальным.

Круглое и круглое кольцевое сечения (черт. 39 и 40). Здесь точки, соответствующие σ_{max} и τ_{max}, совпадают.

Если обозначим через W требуемый момент сопротивления, так что

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \text{ (круг) или соответственно (для кольца)}$$

$$W = \frac{\pi D^3}{32}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right],$$

то из уравнения:

$$M_i = 0{,}35\,M + 0{,}65\sqrt{M^2 + (\alpha_0 M_d)^2} = \xi M, \tag{87}$$

определяем $W = \frac{M_i}{\sigma_{доп}}$ (таблицу значений ξ — см. стр. 574 и 575).

Эллиптическое сечение (черт. 41). Изгибающий момент M разлагаем на M_1 с осью 1 и M_2 с осью 2.



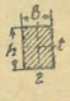
Черт. 39.



Черт. 40.



Черт. 41.



Черт. 42.

Точное определение наибольшего главного напряжения — дело сложное. Для установления размеров сечения достаточно вычислить h и b из обоих уравнений:

$$\frac{\pi}{32} bh^2\sigma_{доп} \gtrless M'_i = 0{,}35\,M_1 + 0{,}65\sqrt{M_1^2 + (\alpha_0 M_d)^2},$$

$$\frac{\pi}{32} b^2h\sigma_{доп} \gtrless M''_i = 0{,}35\,M_2 + 0{,}65\sqrt{M_2^2 + (\alpha_0 M_d)^2}, \tag{88}$$

причем $\alpha_0 = \sigma_{доп} : 1{,}3\tau_{доп}$.

Для определения M'_i и M''_i можно пользоваться таблицей 37 значений ξ.

При $M_1 = 0$ наибольшее напряжение бывает в крайних точках оси b; во всех остальных случаях наибольшее напряжение имеет место в некоторой точке на наружном контуре эллипса между 1 и 2 (черт. 84).

Прямоугольное сечение (черт 42). Моменты M_1 и M_2 имеют те же значения, что и выше при эллиптическом сечении. Для данного случая имеем:

$$^1/_6\,bh^2\sigma_{доп} \gtrless M'_i = 0{,}35\,M_1 + 0{,}65\sqrt{M_1^2 + (^3/_2\,\alpha_0 M_d)^2},$$

$$^1/_6\,b^2h\sigma_{доп} \gtrless M''_i = 0{,}35\,M_2 + 0{,}65\sqrt{M_2^2 + (^3/_2\alpha_0 M_d)^2},$$

Для определения M'_i и M''_i можно пользоваться таблицей 37 значений ξ.

Необходима дополнительная проверка, будет ли

$$\frac{M_1}{^1/_6\,bh^2} + \frac{M_2}{^1/_6\,b^2h} \lessgtr \sigma_{доп}.$$

Для наибольшего напряжения — см. сказанное относительно эллиптического сечения.

Таблица 37. Значения $\xi = 0{,}35 + 0{,}65\sqrt{1 + (\alpha_0 M_d/M)^2}$

$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ
0,01	1,000 03	0,46	1,065 44	0,91	1,228 84	1,36	1,447 22
0,02	1,000 13	0,47	1,068 16	0,92	1,233 21	1,37	1,452 46
0,03	1,000 29	0,48	1,070 95	0,93	1,237 62	1,38	1,457 72
0,04	1,000 52	0,49	1,073 81	0,94	1,242 07	1,39	1,463 00
0,05	1,000 81	0,5	1,076 72	0,95	1,246 55	1,4	1,468 31
0,06	1,001 18	0,51	1,079 67	0,96	1,251 03	1,41	1,473 63
0,07	1,001 60	0,52	1,082 66	0,97	1,255 53	1,42	1,478 95
0,08	1,002 08	0,53	1,085 69	0,98	1,260 07	1,43	1,484 27
0,09	1,002 63	0,54	1,088 78	0,99	1,264 63	1,44	1,489 59
0,1	1,003 24	0,55	1,091 83	1,0	1,269 24	1,45	1,494 91
0,11	1,003 90	0,56	1,094 85	1,01	1,273 86	1,46	1,500 27
0,12	1,004 64	0,57	1,098 04	1,02	1,278 50	1,47	1,505 63
0,13	1,005 44	0,58	1,101 29	1,03	1,283 14	1,48	1,511 01
0,14	1,006 32	0,59	1,104 61	1,04	1,287 82	1,49	1,516 41
0,15	1,007 27	0,6	1,108 03	1,05	1,292 50	1,5	1,521 81
0,16	1,008 28	0,61	1,111 47	1,06	1,297 22	1,51	1,527 23
0,17	1,009 33	0,62	1,114 91	1,07	1,301 96	1,52	1,532 65
0,18	1,010 45	0,63	1,118 35	1,08	1,306 72	1,53	1,538 09
0,19	1,011 64	0,64	1,121 89	1,09	1,310 50	1,54	1,543 53
0,2	1,012 87	0,65	1,125 25	1,1	1,316 30	1,55	1,548 98
0,21	1,014 17	0,66	1,128 76	1,11	1,321 10	1,56	1,554 42
0,22	1,015 53	0,67	1,132 31	1,12	1,325 92	1,57	1,559 90
0,23	1,016 97	0,68	1,135 00	1,13	1,330 78	1,58	1,565 38
0,24	1,018 46	0,69	1,139 69	1,14	1,335 66	1,59	1,570 90
0,25	1,020 01	0,7	1,143 43	1,15	1,340 58	1,6	1,576 42
0,26	1,021 61	0,71	1,147 20	1,16	1,345 50	1,61	1,581 94
0,27	1,023 28	0,72	1,150 99	1,17	1,350 43	1,62	1,587 46
0,28	1,025 00	0,73	1,154 81	1,18	1,355 37	1,63	1,592 98
0,29	1,026 79	0,74	1,158 65	1,19	1,360 33	1,64	1,598 53
0,3	1,028 62	0,75	1,162 50	1,2	1,365 33	1,65	1,604 09
0,31	1,030 51	0,76	1,166 36	1,21	1,370 55	1,66	1,609 65
0,32	1,032 46	0,77	1,170 27	1,22	1,375 39	1,67	1,615 21
0,33	1,034 47	0,78	1,174 25	1,23	1,380 43	1,68	1,620 79
0,34	1,036 54	0,79	1,178 31	1,24	1 385 47	1,69	1,626 39
0,35	1,038 66	0,8	1,182 41	1,25	1,390 51	1,7	1,632 00
0,36	1,040 85	0,81	1,186 53	1,26	1,395 59	1,71	1,637 62
0 37	1,043 08	0,82	1,190 67	1,27	1,400 68	1,72	1,643 24
0,38	1,045 35	0,83	1,194 81	1,28	1,405 80	1,73	1,648 86
0,39	1,047 68	0,84	1,198 95	1,29	1,410 92	1,74	1,654 48
0,4	1,050 07	0,85	1,203 09	1,3	1,416 08	1,75	1,660 12
0,41	1,052 50	0,86	1,207 28	1,31	1,421 25	1,76	1,665 76
0,42	1,055 00	0,87	1,211 51	1,32	1,426 43	1,77	1,671 42
0,43	1,057 55	0,88	1,215 84	1,33	1,431 62	1,73	1,677 08
0,44	1,060 14	0,89	1,220 15	1,34	1,436 82	1,79	1,682 76
0,45	1,062 78	0,9	1,224 49	1,35	1,442 02	1,8	1,688 44

(*Продолжение*)

$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ	$\frac{\alpha_0 M_d}{M}$	ξ
1,81	1,694 12	2,21	1,926 44	2,61	2,163 76	3,05	2,433 35
1,82	1,699 82	2,22	1,932 44	2,62	2,172 84	3,1	2,467 25
1,83	1,705 52	2,23	1,938 43	2,63	2,178 91	3,15	2,493 20
1,84	1,711 23	2,24	1,944 44	2,64	2,184 99	3,2	2,529 20
1,85	1,716 93	2,25	1,950 44	2,65	2,191 06	3,25	2,560 24
1,86	1,722 65	2,26	1,956 38	2,66	2,197 14	3,3	2,591 32
1,87	1,728 37	2,27	1,962 32	2,67	2,203 23	3,35	2 622 45
1,88	1,734 09	2,28	1,968 27	2,68	2,209 33	3,4	2,653 62
1,89	1,739 85	2,29	1,974 23	2,69	2,215 42	3,45	2,684 82
1,9	1,745 61	2,3	1,980 19	2,7	2,221 51	3,5	2,716 04
1,91	1,751 37	2,31	1,986 15	2,71	2,227 61	3,55	2,747 30
1,92	1,757 13	2,32	1,992 11	2,72	2,233 71	3,6	2,778 60
1,93	1,762 80	2,33	1,998 09	2,73	2,239 82	3,65	2,809 93
1,94	1,768 67	2,34	2,004 07	2,74	2,245 92	3,7	2,841 29
1,95	1,774 45	2,35	2,010 05	2,75	2,252 02	3,75	2,872 68
1,96	1,780 25	2,36	2,016 03	2,76	2,258 13	3,8	2,904 10
1,97	1,786 02	2,37	2,022 01	2,77	2 264 25	3,85	2,935 54
1,98	1,791 82	2,38	2,028 00	2,78	2,270 36	3,9	2,967 01
1,99	1,797 63	2,39	2 034 00	2,79	2,276 48	3 95	2 998 50
2,0	1,803 45	2,4	2,040 00	2,8	2,282 59	4,0	3,030 02
2,01	1,809 27	2,41	2,046 01	2,81	2,288 72	4,05	3,061 56
2,02	1 815 09	2,42	2 052 02	2,82	2,294 85	4,1	3,093 53
2,03	1,820 91	2,43	2,058 02	2,83	2,300 97	4,15	3,124 71
2,04	1,826 75	2,44	2,064 03	2,84	2,307 10	4,2	3,156 32
2,05	1,832 59	2,45	2,070 05	2,85	2,313 53	4,25	3,187 94
2,06	1,838 45	2,46	2,076 08	2,86	2,319 37	4,3	3,219 59
2,07	1,844 28	2,47	2,082 11	2,87	2 325 51	4,35	3,251 25
2,08	1,850 14	2,48	2,088 13	2 88	2,331 64	4,4	3,282 93
2,09	1,856 00	2,49	2,094 16	2.89	2 337 78	4,45	3 314 63
2,1	1,861 86	2,5	2,100 18	2,9	2 343 92	4,5	3,346 35
2,11	1,867 74	2,51	2,106 22	2,91	2 350 07	4,55	3,378 09
2,12	1,873 62	2,52	2.112 27	2,92	2 356 22	4,6	3,409 84
2,13	1 879 50	2,53	2.118 31	2.93	2,362 38	4,65	3,441 61
2,14	1,835 38	2 54	2,124 36	2 94	2,338 53	4,7	3,473 39
2,15	1,891 27	2,55	2,130 40	2.95	2,374 68	4,75	3,505 18
2,16	1,897 09	2,56	2,136 49	2,96	2.380 84	4,8	3,536 99
2,17	1 902 92	2,57	2,142 51	2,97	2,337 00	4,85	3,563 81
2,18	1,903 76	2,58	2.143 57	2,98	2,393 17	4,9	3,600 65
2,19	1,914 60	2,59	2,154 63	2,99	2,3 9 33	4,95	3,632 50
2,2	1,920 44	2,6	2,160 69	3 0	2,405 49	5,0	3,664 37

III. РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛИТ.

Изгиб жестких, плоских плит; плоские, жесткие плиты в отношении изгиба.

а) Четырехугольные плиты.

Формула Баха. По формуле Баха для четырехугольной плиты со сторонами a и b (причем принимается, что $b<a$ и отношение $\frac{b}{a}=\xi<1$) общее расчетное выражение имеет вид:

$$\delta^2=0{,}5\varphi\frac{b^2}{\sigma}\cdot\frac{p}{1+\xi^2}, \qquad (1)$$

где p — среднее давление в $кг/см^2$ ($т/м^2$); φ — коэфициент, учитывающий форму заделки по контуру плиты, который имеет значение для свободно лежащей плиты $\varphi=1{,}13$ и для плиты, заделанной по всему контуру $\varphi=0{,}75$;
σ — допускаемое напряжение на изгиб в $кг/см^2$ ($т/м^2$);
δ — расчетная толщина плиты в $см$ ($м$)
b — ширина плиты в $см$ ($м$);

Применительно к расчету обшивки щитов формула Баха может быть представлена так:

$$\delta^2=25\,000\frac{\varphi}{\sigma}\cdot\frac{\xi^2}{1+\xi^2}h^3;$$

$$\delta=158\sqrt{\frac{\varphi}{\sigma}}\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}h^{3/2}, \qquad (2)$$

где δ — толщина обшивки в $мм$;
σ — допускаемое напряжение в $кг/см^2$;
h — напор равной высоте щита в $м$.

Для частного случая при $\sigma=1\,250$ $кг/см^2$ имеем при:

$\varphi=1{,}13$, $\delta=4{,}75\frac{\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}}h^{\frac{3}{2}}$ при $\varphi=0{,}75$: $\delta=3{,}87\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}h^{\frac{3}{2}}$.

Формулы Тимошенко. Проф. Тимошенко рассматривает случай загрузки плиты, покоящейся на двух параллельных балках, причем края плиты не могут сближаться, что вызывает при действии на нее грузов появление продольных сил в местах заделки, которые уменьшают изгибающие моменты в плите.

Проф. Тимошенко рассматривает два случая, которые справедливы для $\alpha<4$.

1-й случай, когда края плиты не могут сближаться, но могут поворачиваться:

1. $\alpha^2(1+\alpha^2)^2=3\cdot\frac{1}{\delta^2}\left[\frac{5}{384}\cdot\frac{pb^4\cdot12\,(1-m^2)}{E\delta^3}\right]=0{,}060651\left(\frac{p}{E}\right)^2\left(\frac{b}{\delta}\right)^8$
2. $\sigma_c'=\frac{6}{\delta^2}\left[\frac{pb^2}{8}-\frac{\pi^2\alpha^2EI}{b^2}\cdot\frac{5}{384}\cdot\frac{pb^4}{EI\,(1+\alpha^2)}\right]=0{,}75p\left[1-\frac{1{,}023\alpha^2}{1+\alpha^2}\right]\left(\frac{b}{\delta}\right)^2$
3. $\sigma''=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\pi^2\alpha^2\delta^2E}{12b^2}=0{,}0822\alpha^2E\left(\frac{\delta}{b}\right)^2$
4. $\sigma_0=\sigma_c'+\sigma''$

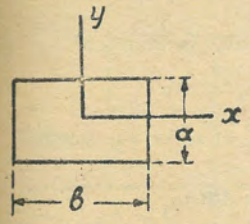
2-й случай, когда края плиты не могут сближаться и поворачиваться:

5. $\alpha^2\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)^2=0{,}002\,26\left(\frac{p}{E}\right)^2\left(\frac{b}{\delta}\right)^8$
6. $\sigma_0'=0{,}5P\left[1-\frac{0{,}154\alpha^2}{1+\frac{\alpha^2}{4}}\right]\left(\frac{b}{\delta}\right)^2$
7. $\sigma_c'=0{,}25P\left[1-\frac{0{,}308\alpha^2}{1+\frac{\alpha^2}{4}}\right]\left(\frac{b}{\delta}\right)^2$
8. $\sigma''=0{,}822\alpha^2E\left(\frac{\delta}{b}\right)^2$
9. $\sigma_0=\sigma_0'+\sigma''$
10. $\sigma_0=\sigma_c'+\sigma''$.

В приведенных формулах проф. Тимошенко кроме известного обозначения δ введены следующие:
p — давление на единицу площади;
α — отвлеченное число, характеризующее способ заделки краев плиты, определяется из уравнения 1-го и 5-го;
m — коэфициенты Пуасона, для материала плиты, принят $m=0{,}3$;
E — модуль упругости материала, обычно $E=2{,}200\,000$ $кг/см^2$;
I — момент инерции;
σ_c' — нормальное напряжение в пролете от изгиба;
σ'' — нормальное напряжение от продольной растягивающей силы;
σ_c — полное наибольшее нормальное напряжение в середине пролета;
σ_0' — нормальное напряжение в плите на опоре от изгиба;
σ_0 — полное наиболее нормальное напряжение в плите на опоре.

Формулы Маркуса. Формулы Маркуса приводятся для плит с различной заделкой опор в следующих таблицах (1 по 18):

1. Свободно лежащая прямоугольная плита



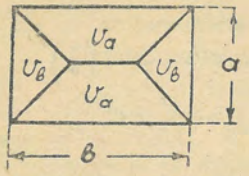
а) Изгибающие моменты в пролете:

$$M_{b\,max}=\frac{pb^2}{8}\cdot\frac{a^4}{a^4+b^4}\left(1-\frac{5}{6}\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}\right)=\gamma_b\,pb^2$$

$$M_{a\,max}=\frac{pa^2}{8}\cdot\frac{b^4}{a^4+b^4}\left(1-\frac{5}{6}\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}\right)=\gamma_a\,pa^2$$

Таблица 1 значений $10^4\gamma_b$ и $10^4\gamma_a$

	$\frac{a}{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_b	0,5	59	63	67	72	76	081	85	90	95	100
	0,6	105	111	116	122	127	133	139	144	150	156
	0,7	162	168	175	181	187	193	200	206	213	219
	0,8	226	232	239	246	252	259	266	273	280	286
	0,9	293	300	307	314	321	329	336	343	350	357
γ_a	0,9	447	438	429	420	412	403	395	387	330	372
	0,8	551	540	529	518	507	496	486	476	466	456
	0,7	676	663	650	637	624	611	599	587	575	563
	0,6	813	799	785	771	758	744	730	716	703	689
	0,5	946	933	920	907	894	881	867	854	840	826



б) Площади нагрузки, передающиеся на ребра

$$\gamma_b=\frac{Q}{4}\frac{a}{b}=\gamma_b Q \text{ и } \gamma_a=\frac{Q}{2}\left[1-\left(\frac{a}{2b}\right)\right]=\gamma_a Q.$$

Для значения $\frac{a}{b}=1$ имеем $\gamma_a=\gamma_b=0{,}25$

Таблица 2 значений $10^4\gamma_b$ и $10^4\gamma_a$

	$\frac{a}{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_b	0,5	1250	1275	1330	1325	1350	1375	1400	1425	1450	1475
	0,6	1500	1525	1550	1575	1600	1625	1650	1675	1700	1725
	0,7	1750	1775	1800	1825	1850	1875	1900	1925	1950	1975
	0,8	2000	2025	2050	2075	2100	2125	2150	2175	2200	2225
	0,9	2250	2275	2300	2325	2350	2375	2400	2425	2450	2475
γ_a	0,9	2750	2725	2700	2675	2650	2625	2600	2575	2550	2525
	0,8	3000	2975	2950	2925	2900	2875	2850	2825	2800	2775
	0,7	3250	3225	3200	3175	3150	3125	3100	3075	3050	3025
	0,6	3500	3475	3450	3425	3400	3375	3350	3325	3300	3275
	0,5	3750	3725	3700	3675	3650	3625	3600	3575	3550	3525

в) Добавочный краевой момент и соответствующая ему нагрузка:

$$M_b=\frac{Qa}{24}\cdot\frac{10}{13}\left(1-\frac{5}{6}\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}\right)\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}=\frac{5}{32}Q_1a=\gamma_\mu Qa;$$

при $\frac{a}{b}=1$ получаем $\gamma_\mu=0{,}0548$; $\mu_a=\gamma_\mu Qb$;

$$Q_1=\frac{1}{15}Q\cdot\frac{10}{13}\left(1-\frac{5}{6}\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}\right)\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}=\gamma_{Q_1}Q;\quad \text{при } \frac{a}{b}=1 \text{ имеем: } \gamma_Q=0{,}00935$$

Таблица 3 значений $10^4\gamma_\mu$ и $10^4\gamma_{Q_1}$

	$\frac{a}{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_μ	0,5	388	398	408	418	428	437	446	455	464	472
	0,6	480	488	495	502	509	516	522	528	533	539
	0,7	544	548	553	557	561	564	568	571	574	576
	0,8	579	581	583	585	587	589	590	591	592	593
	0,9	594	595	596	596	597	597	598	598	598	598
γ_Q	0,5	60,6	62,2	63,8	65,3	66,8	68,3	69,7	71,1	72,5	73,8
	0,6	75,0	76,2	77,4	78,5	79,6	80,6	81,5	82,5	83,3	84,2
	0,7	84,9	85,7	86,4	87,0	87,6	88,2	88,7	89,2	89,7	90,1
	0,8	90,5	90,8	91,1	91,4	91,7	92,0	92,2	92,4	92,6	92,7
	0,8	92,9	93,0	93,2	93,2	93,3	93,3	93,4	93,4	93,5	93,5

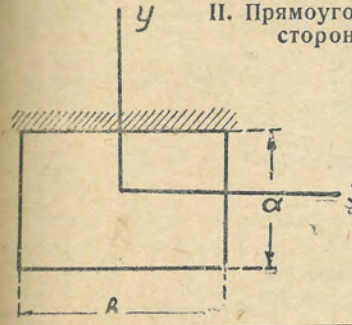
в) Общая нагрузка на боковые ребра:

$$B_b=V_b+Q_1=\gamma_b Q \qquad B_a=V_a+Q_1=\gamma_a Q$$

При $\frac{a}{b}=1$ имеем $\gamma_a=\gamma_b=0{,}3038$

Таблица 4 значений $10^4\gamma_b$ и $10^4\gamma_a$

	$\frac{a}{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_b	0,5	1638	1673	1708	1743	1778	1812	1846	1880	1914	1947
	0,6	1980	2013	2045	2077	2109	2141	2172	2203	2233	2264
	0,7	2294	2323	2353	2382	2411	2439	2468	2496	2524	2551
	0,8	2579	2606	2633	2660	2687	2714	2740	2766	2792	2818
	0,9	2844	2870	2896	2921	2947	2972	2998	3023	3048	3073
γ_a	0,9	3344	3320	3296	3271	3247	3222	3198	3173	3148	3123
	0,8	3579	3556	3533	3510	3487	3464	3440	3416	3392	3368
	0,7	3794	3773	3753	3732	3711	3689	3668	3646	3624	3601
	0,6	3980	3963	3945	3927	3909	3891	3872	3853	3833	3814
	0,5	4138	4123	4108	4093	4078	4062	4046	4030	4014	3997



II. Прямоугольная плита, свободно лежащая тремя сторонами и закрепленная на четвертой

а) Изгибающие моменты в пролете

$$M_b \max=\frac{9pb^2}{128}\frac{5a^4}{5a^4+2b^4}\left(1-\frac{75}{32}\cdot\frac{a^2b^2}{5a^4+2b^4}\right)=\gamma_b pb^2$$

$$M_a \max=\frac{pa^2}{8}\cdot\frac{2b^4}{5x^4+2b^4}\left(1-\frac{5}{3}\cdot\frac{a^2b^2}{5a^4+2b^4}\right)=\gamma_a pa^2$$

Для $\frac{a}{b}=\frac{}{a}=1$ имеем $\gamma_a=0{,}0334$

Таблица 5 значений $10^4\gamma_b$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Для $\frac{a}{b}$	0,5	0071	0075	0080	0084	0089	0093	0098	0103	0107	0112
	0,6	0117	0122	0127	0132	0138	0143	0148	0153	0158	0164
	0,7	0169	0174	0180	0185	0191	0196	0202	0207	0213	0218
	0,8	0224	0229	0235	0241	0246	0252	0257	0263	0269	0274
	0,9	0280	0285	0291	0296	0302	0307	0313	0318	0323	0329
Для $\frac{b}{a}$	0,9	0389	0384	0378	0372	0367	0361	0356	0350	0345	0339
	0,8	0448	0442	0437	0431	0425	0419	0413	0407	0401	0395
	0,7	0507	0501	0496	0490	0484	0478	0472	0166	0460	0454
	0,6	0561	0555	0551	0546	0540	0535	0529	0524	0518	0513
	0,6	0608	0603	0599	0595	0590	0586	0581	0576	0571	0566

Для $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}=1$ имеем $\gamma_a=0{,}0272$

Таблица 6 значений $10^4\gamma_a$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Для $\frac{a}{b}$	0,5	0886	0371	0855	0840	0824	0809	0793	0777	0761	0746
	0,6	0730	0715	0699	0684	0669	0654	0639	0624	0610	0596
	0,7	0582	0568	0554	0541	0528	0515	0503	0490	0478	0466
	0,8	0455	0444	0432	0422	0411	0401	0391	0381	0371	0362
	0,9	0352	0343	0335	0326	0318	0310	0302	0294	0287	0279
Для $\frac{b}{a}$	0 9	0204	0211	0217	0224	0231	0237	0244	0251	0258	0265
	0,8	0144	0149	0155	0161	0167	0173	0179	0185	0191	0198
	0,7	0093	0098	0102	0107	0112	0117	0122	0127	0133	0138
	0,6	0055	0058	0061	0065	0069	00 2	0076	0080	0035	0089
	0,5	0028	0030	0032	0035	0037	0040	0043	0045	0048	0051

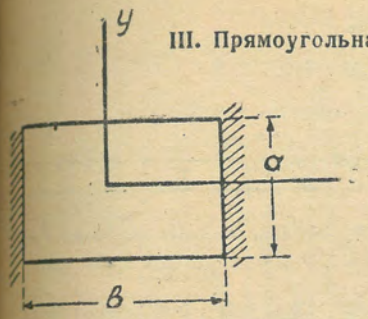
б) Момент заделки

$$M_{b\,\min}=-\frac{pb^2}{8}\cdot\frac{5a^4}{5a^4+2b^4}=-\gamma_b pb^2$$

Для $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}=1$ имеем $\gamma_b=0{,}0393$

Таблица 7 значений $10^4\gamma_b$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Для $\frac{a}{b}$	0,5	0169	0181	0193	0206	0219	0233	0247	0261	0276	0291
	0,6	0306	0321	0337	0353	0369	0386	0402	0419	0435	0452
	0,7	0469	0486	0502	0519	0536	0552	0568	0585	0601	0617
	0,8	0632	0648	0663	0678	0693	0708	0722	0736	0750	0763
	0,9	0777	0789	0802	0814	0827	0838	0850	0861	0872	0883
Для $\frac{b}{a}$	0,9	0990	0981	0972	0962	0953	0943	0933	0923	0913	0903
	0 8	1074	1056	1059	1051	1042	1034	1026	1017	1008	0999
	0,7	1140	1135	1129	1122	1116	1110	1103	1096	1089	1082
	0,6	1188	1184	1180	1176	1171	1167	1162	1157	1152	1146
	0,5	1220	1217	1214	1212	1209	1206	1203	1199	1196	1192



III. Прямоугольная плита с заделанными 2 ребрами

А. Заделаны параллельные ребра

а) Изгибающие моменты в пролете:

$$M_{b\,\max}=\frac{pb^2}{24}\cdot\frac{5a^4}{5a^4+b^4}\left(1-\frac{25}{18}\cdot\frac{a^2b^2}{5a^4+b^4}\right)=\gamma_b pb^2$$

$$M_{a\,\max}=\frac{pa^2}{8}\cdot\frac{b^4}{5a^4+b^4}\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{a^2b^2}{5a^4+b^4}\right)=\gamma_a pa^2$$

Для $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}=1$ имеем $\gamma_b=0{,}0267$

Таблица 8 значений $10^4\gamma_b$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Для $\frac{a}{b}$	0,5	0073	0077	0031	0085	0089	0093	0097	0101	0106	0110
	0,6	0114	0118	0123	0127	0131	0136	0140	0144	0148	0153
	0,7	0157	0161	0165	0170	0174	0178	0182	0186	0190	0194
	0,8	0198	0202	0206	0210	0214	0218	0221	0225	0229	0232
	0,9	0235	0239	0242	0245	0249	0252	0255	0258	0261	0264
Для $\frac{b}{a}$	0,9	0295	0292	0290	0287	0284	0281	0278	0275	0273	0270
	0,8	0322	0319	0317	0314	0311	0309	0306	0303	0301	0298
	0,7	0346	0344	0341	0339	0337	0334	0332	0329	0327	0324
	0,6	0367	0365	0363	0361	0359	0357	0355	0353	0350	0348
	0,5	0384	0382	0380	0379	0377	0375	0374	0372	0370	0368

Для $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}=1$ имеем $\gamma_a=0{,}0179$

Таблица 9 значений $10^4\gamma_a$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Для $\frac{a}{b}$	0,5	0801	0783	0764	0746	0728	0709	0691	0673	0655	0638
	0,6	0620	0603	0586	0570	0554	0538	0522	0507	0492	0477
	0,7	0463	0449	0435	0422	0409	0396	0384	0372	0361	0349
	0,8	0338	0328	0317	0303	0298	0288	0279	0271	0262	0254
	0,9	0246	0238	0231	0224	0217	0210	0203	0197	0191	0185
Для $\frac{b}{a}$	0,9	0128	0132	0137	0142	0147	0152	0158	0163	0168	0174
	0,8	0085	0089	0093	0097	0101	0105	0110	0114	0118	0123
	0,7	0053	0056	0059	0062	0065	0068	0071	0075	0078	0082
	0 6	0030	0032	0034	0036	0038	0040	0043	0045	0047	0050
	0,5	0015	0016	0017	0019	0020	0021	0023	0024	0026	0028

б) Момент заделки

$$M_b \min = -\frac{pb^2}{8}\frac{5a^4}{5a^4+b^4} = -\gamma_b pb^2$$

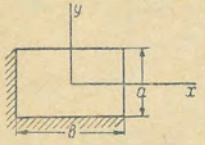
Для $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}=1$ имеем $\gamma_b = 0{,}1042$

Таблица 10 значений $10^4\gamma_b$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Для $\frac{a}{b}$	0,5	0298	0316	0335	0354	0373	0392	0412	0432	0452	0472
	0,6	0492	0511	0531	0551	0570	0590	0609	0627	0646	0664
	0,7	0682	0699	0717	0733	0750	0766	0782	0797	0812	0826
	0,8	0840	0853	0867	0879	0892	0904	0915	0927	0937	0948
	0,9	0958	0968	0977	0986	0995	1004	1012	1020	1027	1034
Для $\frac{b}{a}$	0,9	1105	1099	1093	1087	1081	1075	1068	1062	1055	1048
	0,8	1155	1151	1146	1142	1137	1132	1127	1121	1116	1111
	0,7	1193	1190	1186	1183	1179	1176	1172	1168	1164	1160
	0,6	1218	1216	1214	1212	1209	1207	1204	1202	1199	1196
	0,5	1235	1233	1232	1231	1229	1228	1226	1224	1222	1220

В. Защемлены непараллельные стороны

а) Изгибающий момент в пролете



$$M_b \max = \frac{9}{128} pb^2 \frac{a^4}{a^4+b^4}\left(1-\frac{15}{32}\cdot\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}\right) = \gamma_b pb^2$$

$$M_a \max = \frac{9}{128} pa^2 \frac{b^4}{a^4+b^4}\left(1-\frac{15}{32}\cdot\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}\right) = \gamma_a pa^2$$

Для $\frac{a}{b}=1$ имеем $\gamma_a=\gamma_b=0{,}0269$

Таблица 11 значений $10^4\gamma_b$ и $10^4\gamma_a$

	$\frac{a}{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_b	0,5	0037	0039	0042	0045	0048	0051	0055	0058	0061	0065
	0,6	0069	0072	0076	0080	0084	0089	0093	0097	0102	0106
	0,7	0111	0116	0120	0125	0130	0135	0140	0145	0150	0156
	0,8	0161	0166	0171	0177	0182	0187	0193	0198	0204	0209
	0,9	0215	0220	0226	0231	0237	0242	0247	0253	0258	0264
γ_a	0,9	0327	0321	0315	0309	0303	0297	0291	0286	0280	0275
	0,8	0393	0386	0379	0372	0366	0359	0353	0346	0340	0333
	0,7	0462	0455	0448	0441	0434	0427	0420	0413	0406	0399
	0,6	0529	0532	0516	0509	0503	0496	0490	0483	0476	0469
	0,5	0589	0583	0578	0572	0566	0560	0554	0548	0542	0536

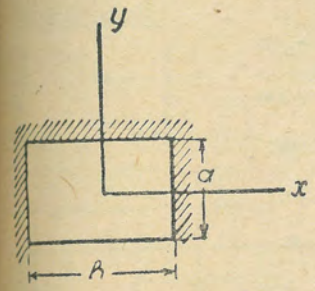
б) Момент заделки

$$M_b \min = -\frac{pb^2}{8}\frac{a^4}{a^4+b^4} = -\gamma_b pb^2 \quad M_a \min = -\frac{pa^2}{8}\frac{b^4}{a^4+b^4} = -\gamma_a pa^2$$

Для $\frac{a}{b}=1$ имеем $\gamma_a=\gamma_b=0{,}0625$

Таблица 12 значений $10^4\gamma_b$ и $10^4\gamma_a$

	$\frac{a}{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_b	0,5	0074	0079	0085	0091	0098	0105	0112	0119	0127	0135
	0,6	0143	0152	0161	0170	0180	0189	0199	0210	0220	0231
	0,7	0242	0253	0265	0276	0288	0300	0313	0325	0338	0350
	0,8	0353	0376	0389	0402	0415	0429	0442	0455	0469	0482
	0,9	0495	0503	0522	0535	0548	0561	0574	0587	0600	0612
γ_a	0,9	0755	0742	0728	0715	0702	0689	0676	0663	0650	0638
	0,8	0887	0874	0861	0848	0835	0821	0808	0795	0781	0768
	0,7	1003	0997	0985	0974	0962	0950	0937	0925	0912	0900
	0,6	1107	1098	1089	1080	0170	1061	1051	1040	1030	1019
	0,5	1176	1171	1165	1159	1152	1145	1138	1130	1123	1115



IV. Прямоугольная плита с тремя заделанными ребрами

а) Изгибающие моменты в пролете

$$M_b \max = \frac{pb^2}{24}\frac{2a^4}{2a^4+b^4}\left(1-\frac{5}{9}\cdot\frac{a^2b^2}{2a^4+b^4}\right) = \gamma_b pb^2$$

$$M_a \max = \frac{9}{128} pa^2 \frac{b^4}{2a^4+b^4}\left(1-\frac{15}{32}\cdot\frac{a^2b^2}{2a^4+b^4}\right) = \gamma_a pa^2$$

Для $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}=1$ имеем $\gamma_b=0{,}0226$

Таблица 13 значений $10^4\gamma_b$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Для $\frac{a}{b}$	0,5	0041	0043	0046	0049	0052	0055	0059	0062	0065	0069
	0,6	0072	0076	0079	0083	0087	0091	0095	0098	0102	0106
	0,7	0110	0114	0018	0122	0127	0131	0135	0139	0143	0147
	0,8	0151	0155	0159	0163	0167	0171	0175	0179	0183	0187
	0,9	0190	0194	0198	0202	0205	0209	0213	0216	0220	0223
Для $\frac{b}{a}$	0,9	0261	0257	0254	0250	0247	0243	0240	0236	0233	0230
	0,8	0295	0291	0288	0285	0281	0278	0274	0271	0268	0264
	0,7	0327	0324	0321	0318	0314	0311	0308	0305	0301	0298
	0,6	0355	0352	0349	0347	0344	0341	0339	0336	0333	0330
	0,5	0377	0375	0373	0371	0369	0366	0364	0362	0359	0357

Для $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}=1$, имеем $\gamma_a=0{,}0198$

Таблица 14 значений $10^4\gamma_a$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Для $\frac{a}{b}$	0.5	0560	0553	0546	0538	0531	0523	0515	0508	0500	0492
	0.6	0484	0475	0467	0459	0451	0443	0434	0426	0418	0410
	0.7	0401	0393	0385	0377	0369	0361	0353	0345	0338	0330
	0,8	0323	0315	0308	0301	0294	0287	0280	0273	0267	0260
	0,9	0254	0248	0242	0236	0230	0224	0219	0213	0208	0203
Для $\frac{b}{a}$	0,9	0149	0154	0158	0163	0168	0173	0178	0183	0188	0193
	0,8	0105	0109	0113	0117	0122	0126	0130	0135	0140	0144
	0.7	0063	0071	0074	0078	0081	0085	0089	0093	0097	0101
	0.6	0039	0042	0044	0047	0050	0052	0055	0058	0061	0054
	0,5	0020	0022	0023	0025	0027	0029	0031	0033	0035	0037

б) Момент заделки

$$M_b\ \min=-\frac{pb^2}{12}\cdot\frac{2a^4}{2a^4+b^4}=-\gamma_b pb^2$$

$$M_a\ \min=-\frac{pa^2}{8}\frac{b^4}{2a^4+b^4}=-\gamma_a pa^2$$

Для $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}=1$ имеем $\gamma_b=0{,}0556$

Таблица 15 значений $10^4\gamma_b$

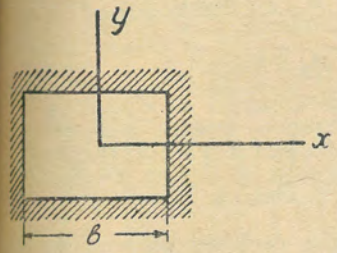
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Для $\frac{a}{b}$	0,5	0093	0099	0106	0114	0121	0129	0137	0145	0154	0163
	0.6	0172	0181	0190	0200	0209	0219	0229	0239	0250	0260
	0,7	0270	0281	0291	0302	0312	0323	0334	0344	0354	0365
	0,8	0375	0386	0396	0406	0416	0426	0435	0445	0454	0464
	0,9	0473	0482	0491	0499	0508	0516	0525	0533	0540	0548
Для $\frac{b}{a}$	0 9	0627	0621	0614	0606	0599	0592	0585	0578	0570	0563
	0.8	0692	0686	0680	0674	0667	0661	0 54	0648	0641	0634
	0 7	0744	0739	0735	0730	0725	0720	0714	0709	0703	0697
	0.6	0783	0779	0776	0772	0769	0765	0761	0757	0753	0749
	0,5	0808	0806	0804	0802	0799	0797	0794	0792	0789	0786

Для $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}=1$ имеем $\gamma_a=0{,}0417$

Таблица 16 значений $10^4\gamma_a$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Для $\frac{a}{b}$	0,5	1111	1101	1091	1080	1068	1057	1045	1032	1019	1006
	0,6	0993	0979	0965	0951	0936	0921	0906	0891	0876	0860
	0 7	0844	0829	0813	0797	0781	0766	0750	0734	0718	0703
	0,8	0687	0672	0656	0641	0626	0612	0597	0583	0568	0554
	0,9	0541	0527	0514	0501	0488	0475	0463	0451	0439	0428
Для $\frac{b}{a}$	0,9	1309	0319	0330	0340	0351	0362	0373	0384	0395	0406
	0,8	0212	0221	0230	0240	0249	0259	0268	0278	0288	0298
	0 7	0134	0141	0148	0155	0163	0171	0179	0187	0195	0204
	0,6	0076	0081	0086	0091	0097	0102	0108	0114	0121	0127
	0,5	0038	0041	0044	0047	0051	0055	0059	0063	0067	0071

V. Прямоугольная плита с заделанными краями



а) Изгибающие моменты в пролете

$$M_b\ \max=\frac{pb^2}{24}\frac{a^4}{a^4+b^4}\left(1-\frac{5}{18}\cdot\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}\right)=\gamma_b pb^2$$

$$M_a\ \max=\frac{pa^2}{24}\frac{b^4}{a^4+b^4}\left(1-\frac{5}{18}\cdot\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}\right)=\gamma_a pa^2$$

Для $\frac{a}{b}=1$ имеем $\gamma_a=\gamma_b=0{,}0179$

Таблица 17 значений $10^4\gamma_b$ и $10^4\gamma_a$

	$\frac{a}{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_b	0,5	0022,9	0024.6	0026,4	0028,3	0030.2	0032.2	0034 3	0036 5	0038 8	0041.2
	0,6	0043,6	0046,1	0048,7	0051,3	0054 0	0556.8	0059 7	0062 6	0065 6	0068,1
	0,7	0071.8	0075.0	0078.2	0081,5	0084,9	0088,3	0091.7	0095,2	00 8,7	0102,0
	0,8	0106,0	0109.0	0113.0	0117,0	0120 0	0124.0	0128.0	0131.0	0135.0	0139,7
	0,9	0143,0	0146.0	0150,0	0154,0	0158,0	0161 0	0165 0	0169,0	0172,0	0176,0
γ_a	0 9	0217	0213	0210	0206	0202	0198	0194	0190	0187	0183
	0,8	0258	0254	0250	0246	0242	0238	0234	0229	0225	0221
	0 7	0299	0295	0291	0287	0283	0279	0275	0271	0267	0262
	0,6	0336	0333	0329	0326	0322	0318	0315	0311	0307	0303
	0,5	0367	0364	0361	0358	0355	0352	0349	0346	0343	0340

б) Моменты заделки

$$M_b\ \min=-\frac{pb^2}{12}\frac{a^4}{a^4+b^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{18}\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}}=-\gamma_b pb^2;\quad M_a\ \min=-\frac{pa^2}{12}\frac{a^4}{a^4+b^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{18}\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}}=-\gamma_a pa^2$$

Для $\frac{a}{b}=1$ имеем $\gamma_a=\gamma_b=0{,}0484$

Таблица 18 значений $10^4\gamma_b$ и $10^4\gamma_a$

	$\frac{a}{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_b	0.5	0052	0057	0061	0066	0071	0076	0081	0087	0092	0099
	0 6	0105	0111	0118	0125	0133	0140	0148	0156	0164	0173
	0 7	0181	0190	0199	0208	0218	0227	0237	0247	0257	0267
	0 8	0277	0287	0298	0308	0319	0329	0340	0350	0361	0372
	0.9	0382	0393	0403	0413	0424	0434	0444	0454	0464	0474
γ_a	0.9	0583	0572	0563	0553	0543	0533	0523	0513	0503	0494
	0 8	0677	0668	0659	0649	0640	0631	0621	0612	0602	0592
	0.7	0755	0748	0741	0734	0726	0718	0710	0702	0694	0685
	0,6	0809	0805	0801	0796	0791	0785	0780	0774	0768	0761
	0,5	0839	0837	0835	0833	0830	0827	0824	2821	0817	0813

Таблицы проф. Галеркина.

Проф. Галеркиным дано достаточно полное решение вопроса для расчета плит. Принимая положение координатных осей, как указано на чертеже 43, изгибающие моменты M_y и M_x выражены через коэфициенты α и β следующим образом:

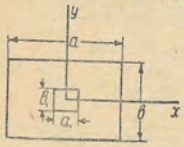


Рис. 43.

$$M_y = \alpha P;\ M_x = \beta \cdot P \qquad (5)$$

где P — полная нагрузка на площадку $a_1 \times b_1$ обычно принимается в тоннах, размерность момента получается в зависимости от того, как берется ширина плиты; если ширина принимается в один метр, то момент измеряется тонно-метрами, если ширина взята в сантиметрах, то момент измеряется тонно-сантиметрами.

Ниже приводятся таблицы с 20 по 33 для свободно опертых плит при двух значениях коэфициента Пуассона: 0,3 и 0,25.

Преобразованная применительно к расчету обшивки щитов формула проф. Галеркина может быть представлена следующим образом:

$$\delta = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\sigma}} \cdot h^{3/2} \qquad (6)$$

где значения α_1 берутся по таблице 33 (см. стр. 591) в зависимости от отношения размеров обшивки щита b к h, h — напор на щит, равный его высоте в *м*, σ — допускаемое напряжение в *кг/см²* и δ толщина обшивки в *мм*.

Таблица 19

$\xi = b/h$	α_1 при свободно опертых краях	α_1' при заделанных краях	ξ	α_1 свободные края	α_1' заделанные края	ξ	d_1 свободные края
0.5	111,6	—	—	—	—	—	—
0,7	115,5	77,4	1.8	1,677	—	3,0	188,7
1,0	117.3	81,3	2,0	1 737	—	3,2	189.3
1,2	135,0	93,6	2,2	1,765	—	3,6	190.8
1,4	148,8	101,7	2,4	1,797	—	4,0	192,3
1,6	150,6	106,5	2,6	1,833	—	—	—
—	—	—	2,8	1,857	—	—	—

Таблица 20

$b=a$; $m=0.3$

Коэфициенты α в выражении $M_y=\alpha P$

b_1/a \ a_1/a	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	S	0,321	0,251	0,209	0,180	0 158	0,141	0,125	0,112	0 102	0 092
0,1	0 378	0 284	0 232	0,197	0,170	0 150	0,134	0,120	0,108	0,093	0,088
0 2	0,308	0,254	0 214	0,184	0,161	0,142	0,127	0.114	0 103	0 093	0,084
0.3	0 262	0.225	0.195	0 168	0.151	0,134	0 120	0.108	0.098	0.088	0,080
0,4	0.232	0 203	0.179	0.158	0.141	0,126	0 113	0.102	0.092	0.084	0 076
0.5	0,208	0.185	0.164	0.146	0.131	0 116	0 106	0.096	0.087	0,079	0.071
0,6	0,188	0 168	0.150	0,135	0 121	0 109	0 099	0 090	0 081	0 074	0,067
0.7	0,170	0.153	0 137	0,124	0.112	0.101	0.091	0 083	0,076	0,069	0,062
0,8	0 155	0,140	0.126	0 114	0 103	0 094	0,085	0 077	0,070	0 063	0.057
0,9	0,147	0.127	0,115	0,104	0 094	0 086	0 078	0 070	0,064	0 058	0 053
1	0,127	0,115	0,105	0,095	0,086	0,078	0,071	0,064	0,058	0,053	0,048

Таблица 21

$b=a$; $m=0.3$

Коэфициенты β в выражении $M_x=\beta P$

b_1/a \ a_1/a	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	S	0,378	0,308	0,262	0,232	0,208	0,188	0 170	0,155	0,141	0,127
0,1	0,321	0,284	0,254	0,225	0,203	0,185	0 168	0,153	0 140	0,127	0,115
0.2	0 251	0,232	0,214	0 195	0,179	0 164	0,150	0,137	0,126	0,115	0,105
0.3	0,209	0,197	0 184	0,168	0,158	0,146	0,135	0,124	0,114	0.104	0 095
0.4	0.180	0,170	0.161	0,151	0,141	0,131	0 121	0,112	0,103	0.094	0,086
0.5	0,158	0,150	0 142	0,134	0,126	0,116	0 109	0,101	0 094	0,086	0,078
0.6	0,141	0,134	0,127	0 120	0,113	0,106	0,099	0,091	0,085	0 078	0,071
0.7	0,125	0,120	0 114	0,108	0 102	0,096	0,090	0,083	0,077	0,070	0,064
0,8	0,112	0,108	0,103	0,098	0,092	0,087	0 081	0,076	0,070	0 064	0,058
0,9	0,102	0,098	0,093	0,088	0,084	0 079	0 074	0,069	0,063	0,058	0,053
1	0,092	0,068	0,084	0,080	0,076	0,071	0,067	0,062	0,057	0 053	0,048

Таблица 22

$b=a$; $m=0,25$

Коэфициенты α в выражении $M_y=\alpha P$

b_1/a \ a_1/a	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	S	0,305	0 238	0,198	0,170	0 148	0 133	0,118	0 106	0,096	0 087
0 1	0 367	0,273	0 222	0 187	0,162	0 142	0,127	0 113	0 102	0 092	0 083
0,2	0,299	0 245	0,206	0 176	0 153	0,135	0,121	0 108	0 098	0 038	0 080
0 3	0 255	0,218	0 188	0,161	0,144	0,128	0 115	0 103	0 093	0 034	0 076
0,4	0 226	0,197	0,173	0,151	0,135	0,121	0,108	0 098	0 088	0,080	0 072
0 5	0 200	0,179	0,159	0,141	0 126	0 111	0,102	0 092	0 083	0,075	0 068
0.6	0 183	0 163	0,146	0 131	0 117	0,105	0,095	0 036	0 078	0,071	0,064
0,7	0,166	0,148	0,133	0 120	0 108	0,097	0,088	0,080	0,073	0,066	0 060
0 8	0,151	0 136	0 123	0,111	0,100	0,090	0,082	0,074	0 067	0,061	0,055
0,9	0,137	0,124	0,112	0,101	0,091	0,033	0 075	0,068	0 062	0 056	0,051
1	0,124	0,113	0,102	0,092	0,083	0,075	0,068	0,062	0,056	0,051	0,046

Таблица 23

$b=a$; $m=0{,}25$

Коэффициенты β в выражении $M_x=\beta P$

b_1/a \ a_1/a	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	∞	0,367	0,299	0,255	0,226	0,200	0,183	0,166	0,151	0,137	0,124
0,1	0,305	0,273	0,245	0,218	0,197	0,179	0,163	0,148	0,136	0,124	0,113
0,2	0,238	0,222	0,206	0,188	0,173	0,159	0,146	0,133	0,123	0,112	0,102
0,3	0,198	0,187	0,176	0,161	0,151	0,141	0,131	0,120	0,111	0,101	0,092
0,4	0,170	0,162	0,153	0,144	0,135	0,126	0,117	0,108	0,100	0,091	0,083
0,5	0,148	0,142	0,135	0,128	0,121	0,111	0,105	0,097	0,090	0,083	0,075
0,6	0,133	0,127	0,121	0,115	0,108	0,102	0,095	0,088	0,082	0,075	0,068
0,7	0,118	0,113	0,108	0,103	0,098	0,092	0,086	0,080	0,074	0,068	0,062
0,8	0,106	0,102	0,093	0,093	0,088	0,083	0,078	0,073	0,067	0,062	0,056
0,9	0,096	0,092	0,088	0,084	0,080	0,075	0,071	0,066	0,061	0,056	0,051
1	0,087	0,083	0,080	0,076	0,072	0,068	0,064	0,060	0,055	0,051	0,046

Таблица 24

$b=1{,}2a$; $m=0{,}3$

b_1/a \ a_1/a	Коэф. α в выраж. $M_y=\alpha P$						Коэф. β в выраж. $M_x=\beta P$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	∞	0,265	0,198	0,154	0,125	0,103	∞	0,301	0,232	0,186	0,153	0,126
0,2	0,322	0,229	0,177	0,142	0,116	0,095	0,249	0,211	0,177	0,149	0,125	0,104
0,4	0,250	0,197	0,158	0,129	0,106	0,088	0,179	0,160	0,140	0,121	0,103	0,085
0,6	0,206	0,169	0,139	0,116	0,095	0,078	0,140	0,127	0,113	0,099	0,085	0,070
0,8	0,171	0,146	0,121	0,101	0,084	0,070	0,113	0,103	0,093	0,082	0,070	0,059
1,0	0,149	0,125	0,105	0,088	0,074	0,061	0,094	0,086	0,078	0,069	0,059	0,049
1,2	0,126	0,107	0,090	0,076	0,063	0,052	0,079	0,073	0,066	0,058	0,050	0,042

Таблица 25

$b=1{,}2a$; $m=0{,}25$

b_1/a \ a_1/a	Коэф. α в выраж. $M_y=\alpha P$						Коэф. β в выраж. $M_x=\beta P$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	∞	0,253	0,188	0,146	0,119	0,098	∞	0,292	0,225	0,180	0,149	0,123
0,2	0,314	0,222	0,170	0,135	0,111	0,091	0,235	0,202	0,171	0,144	0,121	0,100
0,4	0,245	0,192	0,153	0,125	0,103	0,084	0,168	0,152	0,134	0,116	0,099	0,082
0,6	0,202	0,165	0,135	0,113	0,092	0,076	0,131	0,119	0,107	0,094	0,081	0,067
0,8	0,171	0,142	0,118	0,099	0,082	0,068	0,106	0,097	0,088	0,078	0,067	0,056
1,0	0,146	0,123	0,103	0,086	0,072	0,059	0,087	0,081	0,073	0,065	0,056	0,047
1,2	0,124	0,105	0,088	0,074	0,062	0,051	0,074	0,068	0,062	0,055	0,047	0,040

Таблица 26

$b=1{,}4a$; $m=0{,}3$

b_1/a \ a_1/a	Коэф. α в выраж. $M_y=\alpha P$						Коэф. β в выраж. $M_x=\beta P$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	∞	0,276	0,208	0,163	0,134	0,110	∞	0,299	0,230	0,183	0,151	0,125
0,2	0,332	0,239	0,186	0,152	0,125	0,103	0,246	0,208	0,175	0,147	0,124	0,102
0,4	0,261	0,207	0,168	0,138	0,115	0,095	0,177	0,157	0,138	0,119	0,101	0,083
0,6	0,219	0,181	0,151	0,126	0,105	0,086	0,138	0,125	0,111	0,097	0,083	0,069
0,8	0,187	0,158	0,134	0,112	0,094	0,078	0,112	0,102	0,091	0,080	0,069	0,058
1,0	0,162	0,139	0,118	0,100	0,084	0,070	0,093	0,085	0,077	0,068	0,058	0,049
1,2	0,141	0,122	0,104	0,089	0,075	0,062	0,079	0,072	0,065	0,058	0,050	0,042
1,4	0,123	0,106	0,091	0,077	0,065	0,054	0,068	0,062	0,056	0,050	0,043	0,036

Таблица 27

$b=1{,}4a$; $m=0{,}25$

b_1/a \ a_1/a	Коэф. α в выраж. $M_y=\alpha P$						Коэф. β в выраж. $M_x=\beta P$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	∞	0,264	0,199	0,156	0,127	0,105	∞	0,289	0,222	0,177	0,146	0,121
0,2	0,324	0,232	0,180	0,146	0,120	0,099	0,232	0,198	0,161	0,141	0,119	0,098
0,4	0,256	0,202	0,163	0,134	0,111	0,092	0,165	0,149	0,131	0,113	0,096	0,079
0,6	0,215	0,177	0,147	0,122	0,102	0,084	0,128	0,117	0,105	0,092	0,079	0,066
0,8	0,184	0,155	0,131	0,110	0,092	0,076	0,103	0,095	0,085	0,075	0,065	0,054
1,0	0,160	0,136	0,116	0,098	0,082	0,068	0,085	0,079	0,071	0,063	0,055	0,046
1,2	0,139	0,120	0,102	0,087	0,073	0,060	0,072	0,067	0,062	0,054	0,046	0,039
1,4	0,121	0,104	0,089	0,076	0,064	0,053	0,062	0,058	0,052	0,046	0,040	0,034

Таблица 28

$b=1{,}6a$; $m=0{,}3$

b_1/a \ a_1/a	Коэф. α в выраж. $M_y=\alpha P$						Коэф. β в выраж. $M_x=\beta P$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	∞	0,282	0,214	0,169	0,139	0,114	∞	0,297	0,228	0,182	0,151	0,123
0,2	0,340	0,246	0,193	0,157	0,130	0,107	0,244	0,206	0,173	0,145	0,122	0,101
0,4	0,268	0,214	0,175	0,144	0,120	0,099	0,174	0,155	0,136	0,117	0,099	0,082
0,6	0,226	0,188	0,157	0,132	0,110	0,091	0,135	0,123	0,109	0,095	0,081	0,068
0,8	0,196	0,166	0,141	0,120	0,100	0,083	0,110	0,100	0,089	0,079	0,068	0,056
1,0	0,171	0,147	0,126	0,108	0,091	0,075	0,091	0,083	0,075	0,066	0,057	0,047
1,2	0,151	0,131	0,113	0,097	0,082	0,068	0,077	0,071	0,064	0,056	0,049	0,041
1,4	0,134	0,117	0,101	0,086	0,073	0,061	0,067	0,061	0,055	0,049	0,042	0,035
1,6	0,118	0,113	0,089	0,077	0,065	0,054	0,058	0,054	0,048	0,043	0,037	0,031

Таблица 29

$b=1{,}6a$; $m=0{,}25$

b_1/a	Коэф. α в выраж. $M_y=\alpha P$ при a_1/a = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	К эф. β в выраж. $M_x=\beta P$ при a_1/a = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	∞	0,271	0,205	0,162	0,134	0,109	∞	0,286	0 220	0,175	0.145	0,119
0,2	0,333	0,239	0.186	0,152	0,125	0,103	0,230	0,196	0,165	0,139	0 117	0.097
0,4	0,263	0,210	0,170	0,140	0 116	0,096	0,163	0,146	0,128	0,111	0 094	0,78
0,6	0.222	0,184	0,154	0,129	0,107	0,089	0,125	0,114	0,102	0,089	0.077	0,064
0,8	0.193	0.164	0,139	0,117	0,098	0,081	0,101	0,093	0,083	0,073	0,063	0,053
1,0	0,169	0.145	0,124	0,106	0,089	0,074	0,083	0,076	0,069	0 061	0 053	0,044
1,2	0,149	0,129	0,111	0,095	0,080	0,067	0,070	0,065	0,059	0,052	0,045	0,037
1,4	0.132	0,115	0,099	0,085	0,072	0,060	0,060	0,056	0,050	0,045	0,039	0,032
1,6	0,117	0,102	0,088	0,076	0,065	0,053	,053	0,049	0,044	0,039	0,034	0,028

Таблица 30

$b=1{,}8a$; $m=0{,}30$

b_1/a	Коэф. α в выраж. $M_y=\alpha P$ при a_1/a = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	Коэф. β в выраж. $M_x=\beta P$ при a_1/a = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	∞	0.286	0.218	0,173	0.143	0,117	∞	0,295	0,226	0,180	0,149	0,122
0,2	0.345	0.250	0.197	0,161	0.133	0,110	0,243	0,204	0 171	0,144	0,121	0,100
0,4	0.273	0,219	0,179	0.148	0,123	0,102	0,173	0,154	0,134	0,115	0,098	0,081
0,6	0,230	0,192	0.161	0,135	0,113	0,094	0,134	0,121	0,107	0.094	0,080	0.067
0,8	0,200	0,171	0,146	0,123	0,104	0,086	0,108	0,098	0,088	0.077	0,066	0,055
1,0	0,177	0,153	0 132	0,112	0.095	0,079	0,089	0,082	0,073	0,065	0,056	0,046
1,2	0.157	0,137	0,119	0,102	0,086	0,072	0,076	0,069	0,062	0,055	0,047	0,039
1,4	0 140	0,123	0,107	0,092	0 078	0,065	0,065	0,060	0 054	0 047	0.041	0.034
1,6	0,126	0,111	0,096	0,083	0,071	0,059	0,057	0 052	0,047	0,042	0 036	0,030
1,8	0,113	0,099	0,086	0,075	0,063	0,059	0,051	0,046	0,042	0,037	0,032	0,027

Таблица 31

$b=1{,}8a$; $m=0{,}25$

b_1/a	К эф. α в выраж. $M_y=\alpha P$ при a_1/a = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	Коэф. β в выраж. $M^c=\beta P$ при a_1/a = 0	0,2	0.4	0,6	0,8	1
0	∞	0 275	0,209	0 166	0,137	0,112	∞	0,284	0 218	0,174	0,144	0,118
0,2	0,337	0,243	0,191	0,156	0,129	0,106	0,228	0,194	0,163	0,138	0,115	0,095
0,4	0 263	0,214	0,174	0 144	0,120	0,099	0,161	0 144	0 126	0,109	0 093	0,077
0,6	0,227	0.189	0,158	0,133	0.111	0,092	0,123	0,112	0.100	0,088	0 075	0,063
0,8	0,197	0.168	0,143	0.121	0 102	0 034	0,099	0,090	0 081	0.072	0 062	0,051
1,0	0.175	0.151	0,130	0,111	0,093	0,077	0.081	0.075	0 067	0.059	0,051	0.043
1,2	0,155	0,135	0,117	0.101	0,085	0,071	0,068	0,063	0,057	0 050	0 043	0,036
1,4	0,139	0,122	0,106	0,091	0,077	0,064	0,059	0,054	0,049	0,043	0,037	0,031
1,6	0,125	0,109	0,095	0,082	0,070	0,058	0,051	0.047	0,043	0,038	0,033	0 027
1,8	0,112	0,098	0,086	0,074	0,063	0,052	0,045	0,042	0,038	0,033	0,029	0,024

Таблица 32

$b=2a$; $m=0{,}3$

b_1/a	Коэф. α в выраж. $M_y=\alpha P$ при a_1/a = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	Коэф. β в выраж. $M_x=\beta P$ при a_1/a = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	∞	0.289	0,220	0,175	0,144	0,118	∞	0,294	0.225	0,179	0,148	0,122
0,2	0,347	0,252	0.163	0,199	0,135	0,111	0,242	0,203	0,170	0,143	0,120	0.099
0,4	0,275	0,221	0,181	0,150	0,125	0,103	0,172	0.152	0 133	0,114	0,097	0,081
0,6	0,233	0,195	0,164	0,138	0,115	0,095	0,133	0.120	0,106	0,093	0,079	0,065
0,8	0,203	0,174	0,148	0,126	0.106	0,088	0,107	0 097	0 087	0,076	0,065	0 054
1,0	0.179	0,155	0,134	0,115	0,097	0,080	0,089	0,081	0,073	0,064	0,055	0.046
1,2	0,161	0,141	0,122	0,105	0,089	0,074	0 074	0 068	0 061	0,054	0,046	0,039
1,4	0 144	0,127	0,111	0,096	0 081	0,068	0,064	0,058	0,052	0,046	0,040	0,033
1,6	0,130	0,115	0,101	0,087	0,074	0,062	0,056	0,051	0,046	0 040	0,035	0,029
1,8	0,118	0,104	0,091	0,079	0 067	0,056	0,049	0,045	0,041	0,036	0 031	0,026
2,0	0,107	0,094	0,083	0,072	0,061	0,051	0,044	0,041	0,037	0,032	0,028	0,023

Таблица 33

$b=2a$; $m=0{,}25$

b_1/a	Коэф. α в выраж. $M_y=\alpha P$ при a_1/a = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	Коэф. β в выраж. $M_x=\beta P$ при a_1/a = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	∞	0,278	0,212	0,168	0,133	0,114	∞	0,283	0,217	0,173	0,142	0,117
0,2	0,340	0,245	0,193	0,158	0,131	0,108	0,227	0.193	0,162	0,136	0 114	0,095
0,4	0,270	0,217	0 177	0,146	0,122	0,100	0 159	0,143	0,125	0,108	0,192	0,076
0,6	0.230	0,192	0,161	0,135	0,113	0,093	0,122	0,111	0,099	0,087	0.074	0,062
0,8	0.201	0,171	0,146	0,124	0.104	0,086	0.097	0,089	0,080	0,070	0,061	0,051
1,0	0,177	0,153	0,132	0,113	0,095	0,079	0.080	0,074	0,066	0,059	0 051	0 042
1,2	0,159	0.139	0,121	0,104	0,088	0,073	0.067	0 061	0,055	0,049	0 042	0,035
1,4	0,143	0,126	0,110	0,095	0,080	0,067	0,057	0,052	0,047	0,042	0,036	0 030
1,6	0,129	0,114	0,100	0 086	0,073	0,061	0,050	0,045	0,041	0,036	0,031	0,026
1,8	0,117	0,104	0,091	0,079	0,067	0,056	0,044	0,040	0,036	0,032	0,028	0,023
2,0	0,106	0,094	0,082	0,071	0,061	0 050	0,039	0,036	0,033	0,029	0,025	0,021

Способ Киршгофа

Киршгофом разработано определение наибольших усилий в плоском прямоугольном настиле, свободно лежащем на опорах под действием треугольной нагрузки, что чаще всего встречается в расчете гидротехнических сооружений. Общая система координат принята согласно чертежу 44 с началом координат в верхней точке настила. Таким образом значения наибольших моментов должны соответствовать сечениям с абсциссой $x=0$.

Для определения расчетных усилий необходимо определить максимальное значенне момента по ординате y. Общее выражение момента по Кирхгофу пишется:

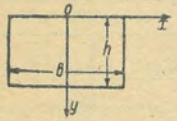


Рис. 44.

$$M_y = \frac{P_m \cdot h^2}{15{,}5} \cdot \left\{ \left[1 - \frac{0{,}7}{Ch\left(\frac{\pi}{2}\cdot\xi\right)} - \frac{0{,}55\,Sh\left(\xi\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{Ch^2\left(\xi\cdot\frac{\pi}{2}\right)} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{0{,}3}{Ch\left(\xi\cdot\frac{\pi}{2}\right)} \right] \cdot \sin\frac{\pi y}{h} - \frac{1}{8}\left[1 - \frac{0{,}70}{Ch(\pi\xi)} - \frac{1{,}10\,Sh(\pi\xi)}{Ch^2(\pi\xi)} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{0{,}3}{Ch(\pi\xi)} \right] \cdot \sin 2\,\frac{\pi y}{h} \right\},$$

где обозначения общепринятые кроме P_m максимального давления по основанию треугольника.

Обозначая выражение в квадратных скобках через A и B и включая в множитель B выражение перед скобками $\frac{1}{8}$, общее уравнение принимает вид:

$$M_y = \frac{P_m h^2}{15{,}5} \cdot \left(A \sin\frac{\pi y}{h} - B\,\mathrm{Sin}\cdot\frac{2\pi y}{h} \right). \qquad (8)$$

Для определения ординаты y для M_{max} необходимо взять первую производную от M_y, приравнять ее нулю и полученное значение для y подставить в общее выражение момента.

Результаты таких вычислений сведены в таблице 34, где выражение для максимального значения момента M_y приведено в зависимости от $P_m \cdot h^2$ по формуле $_{max} M_y = \alpha \cdot P_m \cdot h^2$.

Таблица 34

ξ	A	B	y/h	α	ξ	A	B	y/h	α
0,5	0,108	0,050	0,630	0,0835	2.2	0,861	0.124	0,578	0,0576
0,7	0,228	0,077	0,640	0,0169	2,4	0.892	0,124	0,575	0,0595
1.0	0,397	0,102	0,622	0.0285	2,6	0,923	0,124	0,575	0,0613
1 2	0.489	0,110	0,611	0.0331	2,8	0,937	0.124	0,575	0 0620
1,4	0,616	0,117	0,600	0,0410	3,0	0,952	0,124	0,575	0,0630
1,6	0,697	0,120	0,595	0,0473	3.2	0,934	0,124	0,575	0,0638
1,8	0,7 5	0,122	0,592	0,0523	3,6	0,980	0,124	0,575	0,0646
2,0	0,818	0,124	0,585	0,0550	4,0	0,989	0,124	0,575	0,0655

Для определения размера обшивки на основании данных, приведенных в таблице, можно написать общую формулу:

$$\delta = \sqrt{\frac{6 \cdot {}_{max}M_y}{\sigma}} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\sigma}} h^{\frac{3}{2}}, \qquad (9)$$

где значения α_1 приведены в таблице 35. При этом надо h брать в метрах, σ в $кг/см^2$, а размеры обшивки получаем в m.

Таблица 35

ξ	α_1
0,5	71,7
0,7	100,5
1,0	130,5
1,2	141,3
1,4	155,5
1,6	168,6
1,8	174,6
2,0	181,5
2,2	185,4
2,4	189,0
2,6	191,4
2,8	192,6
3,0	194,1
3,2	195,0
3,6	196,8
4,0	198,1

б) Круглые плиты по Баху

1. Круглые плиты, равномерно нагруженные давлением p $кг/см^2$. Напряжение в центре плиты и на ее окружности определяют по уравнению:

$$\sigma = \frac{\varphi \cdot pr^2}{\delta^2}, \qquad (10)$$

где

r — радиус перекрываемого отверстия плитой в $см$;

φ — коэфициент Баха;

δ — толщина плиты в $см$.

Коэфициент Баха φ для напряжений в центре плиты от полной заделки до свободной опоры повышается с величины: $\varphi = 0{,}34$ до $\varphi = 0{,}87$. Наоборот, для напряжений по наружной окружности φ с величины 0,68 понижается до 0. Поэтому для свободной плиты φ принимается равным 0,87, а для плиты с заделанными краями $\varphi = 0{,}68$.

Для эластичной заделки плиты при условии одинакового напряжения в центре плиты и у краев получаем $\varphi = 0{,}5$. Напряжения в этом случае получают наименьшее значение.

Прогиб в центре плиты

$$f = \psi \cdot \frac{r^4}{\delta^3} \cdot \frac{p}{E}, \qquad (11)$$

где ψ колеблется от 0,17 до 0,70 в зависимости от заделки плиты.

2. Круглые плиты, нагруженные в середине силой P $кг$.

α — свободно лежащие круглые плиты:

$$\sigma_{max} = 0{,}334 \cdot \left(1{,}3 \ln\frac{r}{r_0} + 1 \right) \cdot \frac{P}{\delta^2} \cong \frac{3}{\pi} \varphi \left(1 - \frac{2}{5}\frac{r_0}{r} \right) \frac{P}{\delta^2}. \qquad (12)$$

$$f = 0{,}55 \cdot \frac{r^2}{\delta^3} \cdot \frac{P}{E},$$

β — заделанные по краям круглые плиты:

$$\sigma_{max} = 0{,}43 \frac{P}{\delta^2} \ln\frac{r}{r_0}.$$

$$f = 0{,}22 \frac{r^2}{\delta^3} \cdot \frac{P}{E}, \qquad (13)$$

где приняты следующие обозначения:

r – радиус круглого отверстия в $см$;

r_0 — радиус площади приложенной нагрузки P в *см*;
φ — 1,50 до 1,67;
f — прогиб плиты;
δ — толщина плиты в *см*.
Остальные обозначения известны.

IV. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ.

А. Лишние неизвестные.

1. Статически неопределимые конструкции.

Конструкции называются статически неопределимыми, если число имеющихся уравнений равновесия недостаточно для определения усилий в сечениях ее элементов. При расчете таких систем исходят из статически определимой системы, жесткой в кинематическом смысле; она образуется из данной системы путем приравнивания нулю соответственного числа опорных реакций, поперечных или нормальных сил или изгибающих моментов. Это достигается путем разреза соответственных элементов или постановки в них шарниров. Усилия в поперечных сечениях, возмещающие сделанные разрезы или поставленные шарниры, называют лишними неизвестными и обозначают через $X_1, \ldots, X_n$. Они действуют на основную систему так же, как и нагрузки P, в качестве внешних сил.

На основании закона независимости действия сил любое усилие может быть выражено через:

$$K = K_0 - X_1 K_1 - X_2 K_2 \ldots - X_n K_n.$$

K_0 — усилие, вызванное в основной системе внешней нагрузкой.
$K_1, K_2 \ldots, K_n$ представляют собой те усилия основной системы, которые вызваны силами $-X=1, -X_2=1, \ldots, -X_n=1$. (1)

При n лишних неизвестных получим n уравнений $\delta_k = 0$, выражающих равенство нулю относительных перемещений в местах разрезов или постановки шарниров. Вследствие линейной зависимости между деформациями и силами эти условия могут быть выражены в виде:

$$0 = \delta_{km} + \delta_{kt} + \delta_{ks} - X_1\delta_{k_1} - \ldots - X_k\delta_{kk} - \ldots - X_n\delta_{kn}$$

или

$$X_1\delta_{k_1} + \ldots + X_k\delta_{kk} + \ldots + X_n\delta_{kn} = \delta_{km} + \delta_{kt} + \delta_{ks} = \delta_{k_0}, \quad (2)$$

где:
δ_{km} — значение δ_k под влиянием внешней нагрузки,
δ_{kt} — значение δ_k под влиянием изменения температуры,
δ_{ks} — значение δ_k под влиянием смещения опор,
δ_{k_0} — сумма этих трех значений,
$\delta_{k_1} \ldots$ — значение δ_k, вызванное силой $-X_1=1$ и т. д.

Статически неопределимая система с одной лишней неизвестной:

$$X_1\delta_{11} = \delta_{10};\ X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}. \quad (3)$$

Статически неопределимая система с двумя лишними неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} &= \delta_{10}; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} &= \delta_{20}; \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{\delta_{10}\delta_{22} - \delta_{20}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \\ X_2 &= \frac{\delta_{20}\delta_{11} - \delta_{10}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \end{aligned}\right| \quad (4)$$

Вместо деформаций полезно подставлять их увеличенное значение: для шарнирных ферм в EF_c раз и для систем с изгибающимися стержнями в EJ_c раз, где F_c и J_c означают некоторые произвольные площади для поперечного сечения и момента инерции; обычно выбирают наибольшее или наименьшее из значений, имеющихся в системе. Поэтому в дальнейшем под δ_{ik} будет подразумеваться деформация, помноженная на EJ_c или на EF_c.

Тогда для шарнирных ферм имеем:

$$\delta_{kk} = \sum S_k^2 \frac{F_c}{F} s, \quad \delta_{ik} = \sum S_i S_k \frac{F_c}{F} s, \quad (5)$$

$$\delta_{k_0} = \sum S_k S_0 \frac{F_c}{F} s + EF_c \sum S_k \alpha_t t_s - EF_c \sum C_k \delta_c. \quad (6)$$

Для предварительных расчетов можно, пренебрегая различием площадей F поперечных сечений стержней, принимать $\frac{F_c}{F} = 1$.

В стержневых системах без учета продольных сил:

$$\delta_{kk} = \int M_k^2 \frac{J_c}{J}\, ds, \quad \delta_{ik} = \int M_i M_k \frac{J_c}{J}\, ds, \quad (7)$$

$$\delta_{k_0} = \int M_k M_0 \frac{J_c}{J}\, ds + EJ_c \int N_k \alpha_t t_s ds + EJ_c \int M_k \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{d} - EJ_c \sum C_k \delta_c. \quad (8)$$

Здесь для основной системы:
S_k, M_k, N_k, C_k — усилия в поперечных сечениях и опорные реакции под влиянием $-X_k = 1$;
S_i, M_i — усилия в поперечных сечениях под влиянием $-X_i = 1$;
M_0, S_0 — те же силы под влиянием расчетной нагрузки.

Деформации от температуры определяются или изменением температуры t_s волокна в центре тяжести сечения или разностью температуры крайних волокон $\Delta t = t_н - t_в$ (расстояние между крайними волокнами равно d); α_t — коэфициент расширения материала.

2. Инфлюэнтные линии лишних неизвестных

По теореме Максвелла $\delta_{km} = \delta_{mk}$, поэтому инфлюэнтные линии лишних неизвестных X_k находятся по линиям прогиба δ_{mk} нагружаемого пояса от нагрузки $-X_k = 1$.

Для статически неопределимой системы с одной лишней неизвестной:

$$X_1 = \frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}}. \quad (9)$$

Для статически неопределимой системы с двумя лишними неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\delta_{11}-\delta_{12}\frac{\delta_{21}}{\delta_{22}}}\left(\delta_{m1}-\delta_{m2}\frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}\right), \\ X_2 &= \frac{1}{\delta_{22}-\delta_{21}\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}}\left(\delta_{m2}-\delta_{m1}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

3. Определение лишних неизвестных по теореме Кастильяно

Действительная работа деформации шарнирной фермы будет:

$$A_l = \frac{1}{2}\sum S^2\frac{s}{EF} \tag{11}$$

и для стержневой системы в общем случае:

$$A_l = \frac{1}{2}\int N^2\frac{ds}{EF} + \frac{1}{2}\int M^2\frac{ds}{EJ}. \tag{12}$$

Внутренние силы являются при этом функциями внешней нагрузки P и лишних неизвестных $X_1, \ldots, X_n$, которые прежде всего должны удовлетворять условиям равновесия. Так как эти условия должны удовлетворяться произвольными значениями лишних неизвестных, то последние являются независимыми параметрами функции A_l. Можно однако доказать, что работа деформации достигает своего минимума для действительного значения лишних неизвестных; значит для этого случая частные производные функции A_l по лишним неизвестным X_k равны нулю.

При изменении температуры и смещении опор вместо A_l имеем:

$$\left.\begin{aligned} A &= A_l + \sum Sa_t t_s - \sum C\delta_c, \\ A &= A_l + \int Na_t t_s ds + \int Ma_t\frac{\Delta_t}{d}ds - \sum C\delta_c. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Первое выражает работу для шарнирной фермы, второе — для общего случая стержневой системы.

При n лишних неизвестных получаются n уравнений следующего вида:

Для шарнирной фермы:

$$\frac{\partial A}{\partial X_k} = \sum S\frac{\partial S}{\partial X_k}\frac{S}{EF} + \sum\frac{\partial S}{\partial X_k}a_t t_s - \sum\frac{\partial C}{\partial X_k}\delta_c = 0. \tag{14}$$

Для общего случая $\Delta t = 0$:

$$\frac{\partial A}{\partial X_k} = \int M\frac{\partial M}{\partial X_k}\frac{ds}{Ej} + \int N\frac{\partial N}{\partial X_k}\frac{ds}{EF} + \int\frac{\partial N}{\partial X_k}a_t t_s ds - \sum\frac{\partial C}{\partial X_k}\delta_c = 0. \tag{15}$$

Если усилия в поперечных сечениях стержней и опорные реакции представить как функции нагрузки и лишних неизвестных, то:

$$\frac{\partial S}{\partial X_k} = -S_k;\quad \frac{\partial N}{\partial X_k} = -N_k;\quad \frac{\partial M}{\partial X_k} = -M_k;\quad \frac{\partial C}{\partial X_k} = -C_k. \tag{16}$$

4. Независимое определение отдельных лишних неизвестных в дважды и трижды статически неопределимых системах.

Лишние неизвестные получаются независимыми друг от друга, если коэфициенты $\delta_{ik}\,(i \neq k)$ равны нулю. В дважды статически неопределимой системе это коэфициент δ_{12}, в трижды статически неопределимой системе — δ_{12}, δ_{23} и δ_{31}. Для выполнения этих дополнительных условий вводятся новые лишние неизвестные, которые должны быть представлены в виде линейных функций первоначальных неизвестных. Коэфициенты δ_{ik} зависят поэтому от параметров этих линейных функций, которые могут определяться из условий $\delta_{ik} = 0$.

Если обе независимых друг от друга составляющих одной опорной реакции являются лишними неизвестными дважды статически неопределимой системы, то угол φ между ними является параметром.

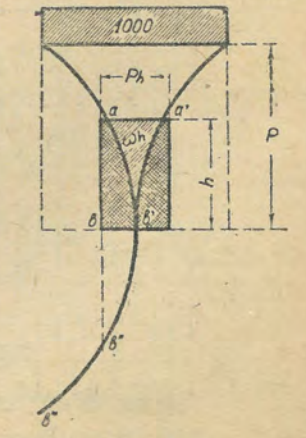
В трижды статически неопределимой системе за лишние неизвестные часто принимают три составляющие опорных реакций или момент и две составляющих. Каждая из этих групп может быть заменена эквивалентной системой сил, состоящей из момента, получающегося вследствие переноса, и силы, приложенной в любой точке плоскости. Эта система сил определяется тремя параметрами. Два из них — это координаты x_0 и y_0 точки приложения силы, а третья — угол φ между ее двумя составляющими.

Этот прием геометрического преобразования лишних неизвестных может быть без затруднений применен также и для многократно статически неопределимых систем путем соответственного выбора лишних неизвестных. При выборе этих неизвестных должно соблюдаться дополнительное условие $\delta_{ik} = 0$.

Б. Расчет труб.

а) Расчет давления грунта на трубы, уложенные на определенной глубине.

При расчете давления грунта на трубы, уложенные достаточно глубоко приходится учитывать уменьшение давления грунта по мере заглубления укладки трубы по сравнению с общим весом столба грунта над трубой до определенного предела, за которым давление постоянно. Чаще всего расчеты уменьшения давления грунта производятся по Фрюлингу, учитывая изменение давления грунта по параболическому закону. В определенной зоне грунта от поверхности или при заглублении на глубину больше активной зоны давление на трубу определяется постоянной площадью криволинейного треугольника (Ω), а в пределах активной зоны разностью площадей $\Omega - \omega$, где ω — площадь криволинейного треугольника ниже расположения трубы (см. черт. 45).



Черт. 45.

Активная зона по данным различных авторов принимается в пределах от 5 до 10 $м$.

Закон изменения давления по Эмпергеру принимается следующий:

$$P_1 = \gamma\frac{(t-h)^2}{t^2}, \tag{17}$$

где

h — глубина заложения трубы от поверхности до ключа трубы;
γ — объемный вес в $т/м^3$ или давление $т/м^2$ от временной нагрузки;
t — активная зона в пределах от 5 до 10 $м$;
P_1 — величина фиктивной нагрузки или коэфициент соответствующей нагрузки в тоннах, расположенной на поверхности.

Для определения давления необходимо бывает подсчитать (см. черт. 45) площади криволинейных треугольников полного и ограниченного, считая от вершины параболы, глубиной заложения трубы; тогда общее давление определяется как разность между общей площадью призмы обрушения Ω и частичными площадями призмы обрушения ω, умноженными на γ. Давление тогда определяется формулой:

$$P = \alpha\gamma, \tag{18}$$

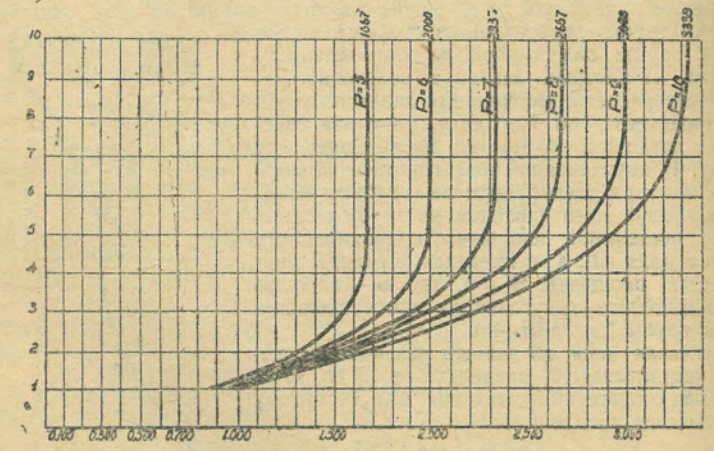
где α — берутся по таблице 36.

Таблица 36

h/t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0,903	0,626	2,190	2,613	2,916	3,120	3,243	3,303	3,330	3,333
9	0,893	1,538	2,110	2,485	2,736	2,880	2,957	2,496	3,000	—
8	0,873	1,537	2,014	2,332	2,525	2,625	2,660	2,667	—	—
7	0,865	1,483	1,859	2,150	2,279	2,326	2,333	—	—	—
6	0,833	1,403	1,748	1,926	1,991	2,000	—	—	—	—
5	0,814	1,307	1,560	1,654	1,667	—	—	—	—	—

Для определения давления в $т/м^2$ прилагается график 2 (черт. 46).

В тех случаях, когда трубы укладываются в больших сплошных насыпях, следует учитывать возможность значительной осадки всей насыпи



Черт. 46. Давление P_1 по Эмпергеру.

когда давление на трубы значительно превосходит даже полное давление от засыпанного грунта над трубами. Поэтому в этих случаях полезно бывает производить расчет на полное давление грунта, учитывая, что излишек давления будет компенсироваться боковым давлением на трубы.

б) Статический расчет жестких труб.

1. Труба под сосредоточенной нагрузкой силой P.

Изгибающий момент и продольная сила для любого сечения трубы (кольца), наклоненного под углом $(90 - \omega)°$ к горизонтальному диаметру согласно черт. 47, представляется для нагрузки силой P на основании данных для расчета кривых брусьев в следующем виде:

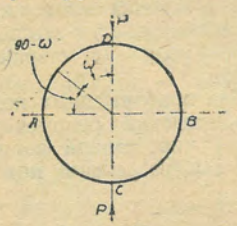
$$M = \frac{P}{2} r[1 - \operatorname{Cos}(90 - \omega] + M'_0 \tag{19}$$

$$N = \frac{P}{2} \operatorname{Cos}(90 - \omega).$$

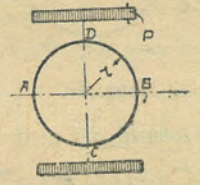
Подставляя полученные значения в общую формулу деформации крпвого бруса и решая его относительно момента $M_A = M_B = M_0$, получаем:

$$M_A = M_B = M_0 = -\frac{Pr}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) - \frac{P}{\pi}\frac{S}{F}, \tag{20}$$

где r — радиус трубы, S — статический момент и F — площадь сечения.



Черт. 47.



Черт. 48.

Если пренебречь влиянием продольной силы, получаем:

$$M_0 = -\frac{Pr}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = -0{,}182\,Pr;\ N_A = N_B = \frac{P}{2} \tag{21}$$

$$M_D = M_C = 0{,}318\,Pr;\ N_D = N_C = 0.$$

2. Формула Фрюлинга.

2 — расчет труб под равномерной нагрузкой по p $т/м^2$ производится обычно по формуле Фрюлинга (см. черт. 48).

$$M_A = M_B = M_0 = -\frac{pr^2}{4} = -\frac{pd^2}{16};\ N_A = N_B = Pr$$

$$M_D = M_C = +\frac{pr^2}{4} = \frac{pd^2}{16};\ N_D = N_C = 0, \tag{22}$$

где M_0 — расчетный момент, а r и d радиус и диаметр трубы в $м$.

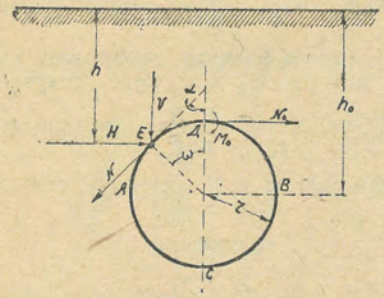
3. Формула фон-Завадского.

Инженером фон-Завадским выведена формула для расчета тонкостенных труб, уложенных в грунт.

По исследованиям инж. фон-Завадского предельные напряжения при $\omega = 0$ и $\omega = 90°$ (см. черт. 49) определяются уравнением:

$$M_0 = \gamma h_0 r^2 \left\{ \frac{\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi}{2} - \frac{r}{h_0}\left[0{,}2326 - 0{,}096\operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\right]\right\} \quad (23)$$

$$M_{90} = \gamma h_0 r^2 \left\{ \frac{\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi}{2} - \frac{r}{h_0}\left[0{,}2195 - 0{,}0707\operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\right]\right\}$$



Черт. 49.

Максимальные значения получаются по второй формуле M_{90} при всех значениях $\varphi > 18°40'$, что чаще всего встречается в практике.

В формуле фон-Завадского приняты следующие обозначения:

γ — объемный вес грунта,

r — радиус труб,

h_0 — глубина заложения центра трубы от поверхности земли,

φ — угол естественного откоса грунта.

Для приближенных подсчетов инж. фон-Завадский рекомендует пользоваться упрощенной формулой, имеющей достаточный процент точности для любого сечения под углом ω:

$$M_\omega = \gamma h_0 r \operatorname{Cos} 2\omega \left\{ \frac{\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi}{2} - \frac{r}{h_0}\left[0{,}226 - 0{,}085\operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\right]\right\}. \quad (24)$$

в) Расчет деревянных трубопроводов

При расчете деревянных трубопроводов в основном приходится рассчитывать размеры клепок и бандажей.

1. Расчет клепок

а) Обычный метод расчета клепок сводится к расчету их как балок с заделанными концами, опирающимися на бандажи.

Размеры клепок определяются по формуле:

$$\delta = 0{,}707 l \sqrt{\frac{p}{\sigma}}, \quad (25)$$

где приняты следующие обозначения:

δ — толщина клепки в *см*,

l — расстояние между бандажами в *см*,

p — давление воды в *кг/см²*,

σ — допускаемое напряжение дерева на изгиб; обычно принимают σ около 50 *кг/см²*.

Принимая приведенное выше напряжение дерева, формула может быть приведена к следующему виду:

$$\delta = 0{,}1 l \sqrt{p}\ см. \quad (26)$$

б) Для определения размеров клепок существуют и эмпирические формулы. Так Byron рекомендует для определения размеров клепок следующую формулу:

$$\delta = \frac{D \cdot h}{0 \cdot 207} \quad (27)$$

δ — толщина клепки в *см*,

D — внутренний диаметр трубы в *м* и

h — напор воды в *м*,

в) Толщина клепок в трубах фабричного производства приводится в таблицах 37 и 38.

Таблица 37

Толщина клепок в трубах „фабричного“ производства.

Внутренний диаметр трубы	Толщина клепок	При давлении ниже чем	Толщина клепок	При давлении ниже чем
мм	*мм*	*м*	*мм*	*м*
51	25	—	—	—
76	25	—	—	—
102	27	—	—	—
127	27	—	—	—
152	29	—	—	—
203	29	—	—	—
254	29	75	32	75
305	30	75	32	75
355	30	75	32	75
407	32	60	33	60
458	32	60	33	60
508	33	45	35	45
559	33	45	35	45
610	33	45	35	45
660	35	45	38	45
710	35	45	38	45
762	35	45	38	45
813	35	45	38	45

Таблица 38

Толщина клепок и размеры досок для „бесконечных" труб

Внутренний диаметр труб	Размеры досок	Толщина клепок после обстрожки по радиусу
мм	*мм*	*мм*
458—610		35,0
685		36,5
762		38,0
915	51 × 153	39,5
1 070		41,5
1 220		43,0
1 370	63 × 204	54.0
1 520		63,0
1 675	76 × 204	65,0
1 830		66,5

2. Расчет бандажа.

Расчет бандажа в основном должен производиться при учете основного усилия, вызванного давлением воды, дополнительного усилия, возникающего вследствие разбухания дерева, и первоначального напряжения, создаваемого натяжением гаек при монтаже.

1) Основное усилие, вызываемое внутренним давлением воды, составляет:

$$P' = \frac{1}{2} pDl \text{ в } кг. \tag{28}$$

2) Дополнительное усилие, возникающее вследствие разбухания дерева, определяется:

$$P'' = q\delta l \text{ в } кг. \tag{29}$$

3) Первоначальное напряжение, создаваемое натяжением гаек при монтаже, определяется из того условия, что для водонепроницаемости труб достаточно, чтобы первоначальный нажим превосходил раза в полтора давление воды, просачивающейся между клепками, поэтому соответствующее усилие стержня определяется так:

$$P''' = \frac{3}{2} p\delta l \text{ в } кг. \tag{30}$$

В приведенных формулах приняты следующие обозначения:
P — полное усилие, приходящееся на стержень в *кг*;
p — внутреннее давление воды в *кг*;
D — внутренний диаметр трубы в *см*;
l — расстояние между соседними бандажами в *см*;
q — напряжение разбухания, которое определяется по Adons'у в 6—7 *кг/см²*, по Henny — в 5,0—9,5 *кг/см²*, по данным испытательной лаборатории Стокгольмского политехникума — в 10 *кг/см²* и наконец по данным германских исследований — в 14 *кг/см²*.

В среднем чаще всего напряжение разбухания принимается в 10—12 *кг/см²*.

Суммируя полученные 3 усилия в стержне, получаем:

$$P = P' + P'' + P''' = l\left[P\left(\frac{1}{2}D + \frac{3}{2}\delta\right) + q\delta\right] = \omega\sigma, \tag{31}$$

где ω — сечение стержня в *см²* и
σ — напряжение в пределах от 800 до 1 000 *кг/см²*.

Ввиду большого значения для деревянных трубопроводов бандажей, допускаемое напряжение принимается значительно пониженным; несмотря на это требования к материалу предъявляются высокие. Так временное сопротивление железа, употребляемого на бандажи, должно быть в пределах от 3 600 до 4 500 *кг/см²*; допускаемое напряжение на растяжение должно быть в пределах 1 200 – 1 500 *кг/см²*; предел упругости должен составлять не менее половины от временного сопротивления; удлинение при разрыве пробного стержня в 200 *мм* должен быть не более 22 % кроме того при изгибании в холодном состоянии вокруг цилиндра того же диаметра, что и стержень бандажа, последний не должен показывать трещин.

Из полученной формулы легко определяется диаметр сечения стержня:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{\sigma}, \tag{32}$$

где d — обозначает диаметр стержня бандажа.

Однако при выборе сечения стержня необходимо учитывать не только допускаемое напряжение на растяжение железа, но также допускаемое напряжение на смятие дерева (τ_c).

В зависимости от породы дерева допускаемое напряжение на смятие допускается в пределах от 42 до 55 *кг/см²*.

При этом допускается, что бандажи вдавливаются в дерево на глубину, соответствующую центральному углу в 60°, так что соприкосновение железа с деревом происходит по уплотненной поверхности, последняя по ширине равна радиусу стержня бандажа $\left(\frac{d}{2}\right)$.

Совокупность приведенных выше обоих требований дает возможность получить следующее уравнение:

$$\frac{\pi d^2}{4}\sigma = \tau_c\left(\frac{D}{2} + \delta\right)\frac{d}{2}, \tag{33}$$

откуда определяется максимальный допускаемый диаметр стержня:

$$d = \frac{2}{\pi}\frac{\tau_c}{\sigma}\left(\frac{D}{2} + \delta\right), \tag{34}$$

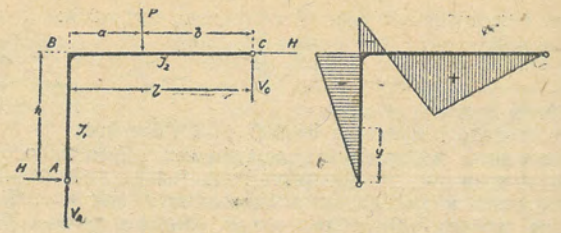
где τ — максимальное допускаемое напряжение дерева на смятие и
σ — максимальное допускаемое напряжение растяжения.

Обычно в интересах облегчения монтажа рекомендуется употреблять бандажи одинакового сечения вдоль всего трубопровода; расстояния же между ними должно изменяться соответственно давлению в трубе.

Во всех случаях расстояние между бандажами не должно превосходить 25 *см*.

В. Расчет рам.

Расчет рамных конструкций ограничиваем приведением формул для расчета определенных рамных конструкций, приспособленных для гидротехнического строительства. При этом не приведены расчеты для рамных конструкций, специально приспособленных для мостов. Общее число конструкций рам и соответственных нагрузок достигает 85.



Черт. 50.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\qquad V_A=\frac{Pb}{l}+\frac{Hh}{l}$$

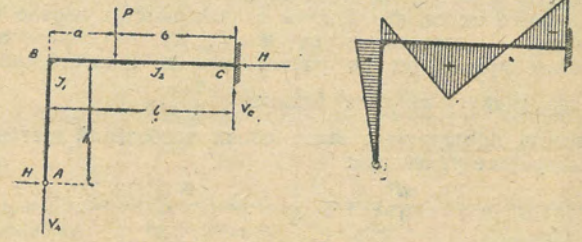
$$V_C=-\frac{Pa}{l}-\frac{Hh}{l};\quad H_C=-\frac{Pab\,(l+b)}{2hl^2\,(k+1)}$$

Момент в любом сечении стойки на расстоянии y от A:

$$M_y=-Hy;\quad M_B=-Hh.$$

Момент под грузом:

$$M_p=\frac{Pab\,(2l^2k+3la-a^2)}{2l^3\,(k+1)},$$



Черт. 51.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=\frac{Pb^2}{l^3}\cdot\frac{2k\,(a+2l)+3\,(2a+l)}{4k+3}$$

$$V_C=P-V_A;\quad H=\frac{3Pab^2}{hl^2\,(4k+3)}$$

Моменты:

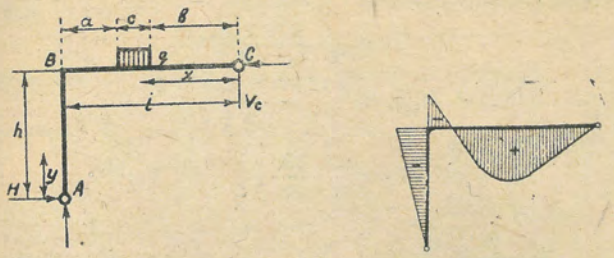
$$M_B=-Hh$$

$$M_p=V_Aa-Hh=\frac{Pab^2}{l^3}\cdot\frac{2k\,(a+2l)+6a}{4k+3}$$

$$M_C=-\frac{Pab}{l^2}\cdot\frac{2k\,(2l-b)+3a}{4k+3}$$

Момент в любом сечении стойки на расстоянии y от A:

$$M_y=-Hy;\quad M_B=-Hh.$$



Черт. 52.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=\frac{qc}{l}\left(b+\frac{c}{2}\right)+H\frac{h}{l}$$

$$V_c=\frac{qc}{l}\left(a+\frac{c}{2}\right)-H\frac{h}{l};\quad H=\frac{qc\,(2b+c)\,(2l^2-2b^2-2bc-c^2)}{8hl^2\,(k+1)}$$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от C:

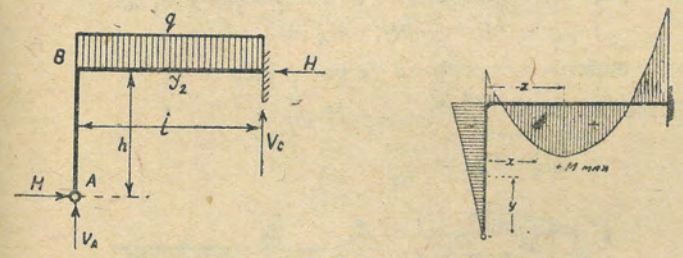
на участке a: $M_x=V_Cx-qc\left(x-b-\frac{c}{2}\right)$

„ „ c: $M_x=V_Cx-\frac{q}{2}(x-b)^2$

„ „ b: $M_x=V_Cx$

Момент в любом сечении стойки

$$M_y=-H_y;\quad M_B=-H_h$$



Черт. 53.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\qquad H=\frac{ql^2}{4h\,(4k+3)}.$$

$$V_A=\frac{3ql}{2}\cdot\frac{k+1}{4k+3};\quad V_C=ql-V_A=\frac{ql}{2}\cdot\frac{5k+3}{4k+3}$$

Момент в любом сечении стойки на расстоянии y от A:

$$M_y=-Hy;\quad M_B=-Hh.$$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от B:

$$M_x=V_Ax-Hh-\frac{qx^2}{2}.$$

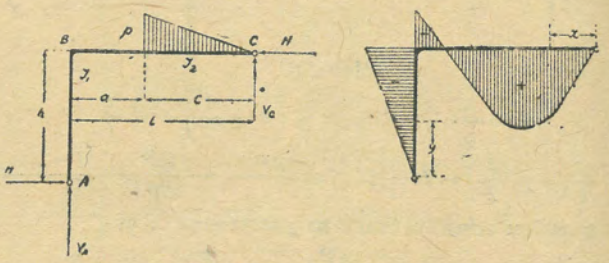
Наибольший момент при:

$$x_0 = \frac{3l}{2} \cdot \frac{k+1}{4k+3} +$$

$$+ M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{9k^2+10k+3}{(4k+3)^2}$$

Момент заделки:

$$M_C = \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{2k+1}{4k+3}$$



Черт. 54.

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad V_A = \frac{pc^2}{3l} + H \cdot \frac{h}{l}; \quad V_C = \frac{pc}{6l}(3a+c) - H \cdot \frac{h}{l},$$

$$H = \frac{pc^2(5l^2-3c^2)}{30hl^2(k+1)}.$$

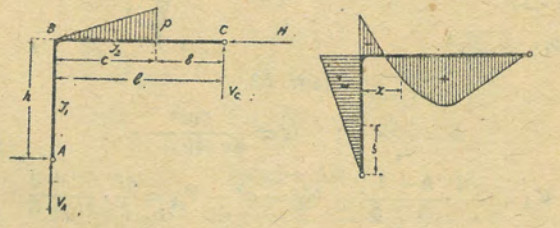
Момент в любом сечении стойки на расстоянии y от A:

$$M_y = -Hy; \quad M_B = -Hh.$$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от C:

на участке a: $M_x = \frac{pc^2}{3l}(l-x) - H \cdot \frac{h}{l} \cdot x$

„ „ c: $M_x = V_C x - \frac{px^3}{6c}$



Черт. 55.

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad V_A = \frac{pc}{6l}(3b+c) + H\frac{h}{l}; \quad V_C = \frac{pc^2}{3l} - H\frac{h}{l};$$

$$H = \frac{pc^2[5l(8l-9c)+12c^2]}{120hl^2(k+1)}.$$

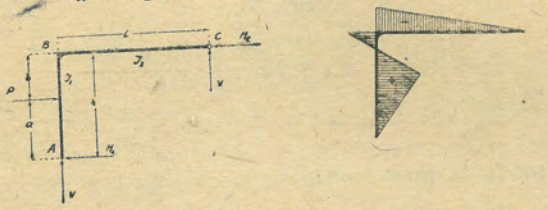
Момент в любом сечении стойки на расстоянии y от A:

$$M_y = -Hy; \quad M_B = -Hh.$$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от B:

на участке c: $M_x = V_A x - Hh - \frac{px^3}{6c}$

„ „ b: $M_x = V_C(l-x)$



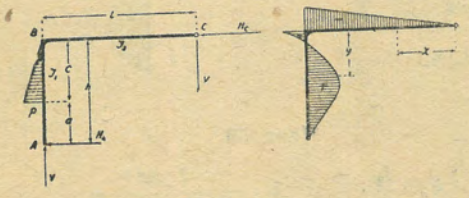
Черт. 56.

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad V_A = \frac{Pab(a+h)}{2h^2 l(k+1)} k;$$

$$H_A = P \cdot \frac{b}{h} - V_A \cdot \frac{l}{h}; \quad H_C = P \cdot \frac{a}{h} + V_A \cdot \frac{l}{h}.$$

Моменты:

$$M_P = \frac{Pab}{2h^3} \cdot \frac{2h^2k+3hb-b^2}{k+1} \cdot k; \quad M_B = -V_A l$$



Черт. 57.

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad V_A = \frac{pc^2k}{120h^2l} \cdot \frac{5h(8h-9c)+12c^2}{k+1}$$

$$H_A = \frac{pc^2}{3h} - V_A \cdot \frac{l}{h}; \quad H_C = \frac{pc}{6h}(3a+c) + V_A \cdot \frac{l}{h}.$$

Момент в любом сечении стойки на расстоянии y от B:

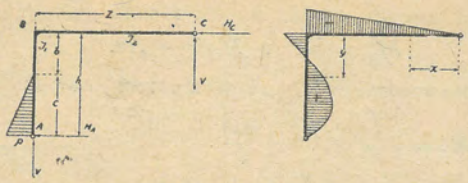
на участке a: $M_y = +H_A(h-y)$

„ „ c: $M_y = +H_C y - V_A l - \frac{py^3}{6c}$

$M_B = -V_A l$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от C:

$$M_x = -V_A x$$



Черт. 58.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=\frac{pc^2k}{120\,h^2l}\cdot\frac{10\,h^2-3c^2}{k+1}\cdot$$

$$H_A=\frac{pc}{6h}(3b+2c)-V_A\cdot\frac{l}{h};\quad H_C=\frac{pc^2}{6h}+V_A\cdot\frac{l}{h}\cdot$$

Момент в любом сечении стойки на расстоянии y от B:

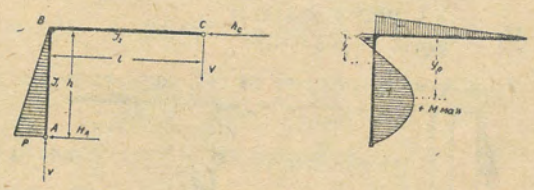
на участке c: $M_y=H_Cy-V_Al-\frac{p(y-b)^3}{6c}$

„ „ b: $M_y=H_Cy-V_Al$

$M_B=-V_Al$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от C:

$$M_x=-V_Ax$$



Черт. 59.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=\frac{7\,ph^2k}{120\,l(k+1)}$$

$$H_A=\frac{ph}{3}-V_A\cdot\frac{l}{h};\quad H_C=\frac{ph}{6}+V_A\cdot\frac{l}{h}\cdot$$

Момент в любом сечении стойки на расстоянии y от B:

$$M_y=\frac{py}{6h}(h^2-y^2)-\frac{V_Al}{h}(h-y)\cdot$$

Наибольший момент:

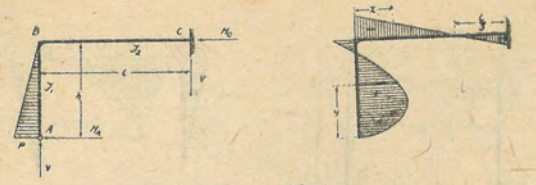
при $y_0=h\sqrt{\frac{27k+20}{60(k+1)}}$;

$$+M_{max}=+\frac{ph^2}{6}\left[\frac{27k+20}{30(k+1)}\sqrt{\frac{27k+20}{60(k+1)}}-\frac{7k}{20(k+1)}\right]$$

$M_B=-V_Al$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от C:

$$M_x=-V_Ax;$$



Черт. 60.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=\frac{13\,ph^2}{20l}\cdot\frac{k}{4k+3}$$

$$H_A=\frac{ph}{10}\cdot\frac{9k+10}{4k+3};\quad H_C=\frac{ph}{2}-H_A=\frac{ph}{10}\cdot\frac{11k+5}{4k+3}\cdot$$

Момент в любом сечении балки на расстоянии y от A:

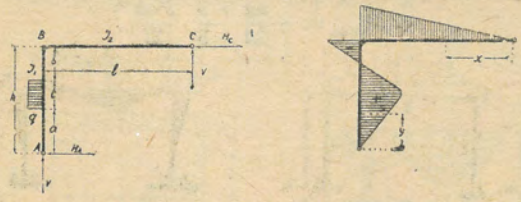
$$M_y=H_Ay-\frac{py^2}{6h}(3h-y)$$

$$M_B=H_Ah-\frac{ph^2}{3}=-\frac{13\,ph^2}{30}\cdot\frac{k}{4k+3}$$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от B:

$$M_x=V_Ax+H_Ah-\frac{ph^2}{3}$$

$$M_C=+\frac{13\,ph^2}{60}\cdot\frac{k}{4k+3}\cdot$$



Черт. 61.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=\frac{qc\,k(2a+c)(2h^2-2a^2-2ac-c^2)}{8h^2l(k+1)};$$

$$H_A=\frac{qc}{h}\left(b+\frac{c}{2}\right)-V_A\cdot\frac{l}{h};\quad H_C=\frac{qc}{h}\left(a+\frac{c}{2}\right)+V_A\cdot\frac{l}{h}$$

Момент в любом сечении стойки на расстоянии y от A:

на участке a: $M_y=H_Ay$

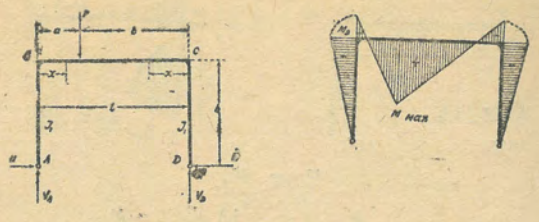
„ „ c: $M_y=H_Ay-\frac{q}{2}(y-a)^2$

„ „ b: $M_y=H_Ay-qc\left(y-a-\frac{c}{2}\right)$

$M_B=-V_Al$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от C:

$$M_x=-V_Ax$$



Черт. 62.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=\frac{Pb}{l};\quad V_D=\frac{Pa}{l}$$

$$H=\frac{3Pab}{2hl(2k+3)}$$

$$M_A=M_D=0;\quad M_B=M_C=-\frac{3}{2}\cdot\frac{Pab}{(2k+3)\,l}$$

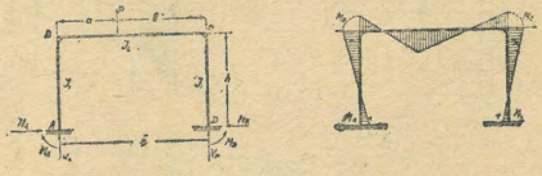
Момент в любом сечении балки на расстоянии x от B или соответственно от C:

на участке a: $M_x=\frac{Pb}{l}\cdot x+M_B$

„ „ b: $M_x=\frac{Pa}{l}\cdot x+M_C$.

Опасное сечение при $x=a$

$$+M_{\max}=+\frac{4k+3}{2k+3}\cdot\frac{Pab}{2l}.$$



Черт. 63.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad \delta=\frac{a}{l}$$

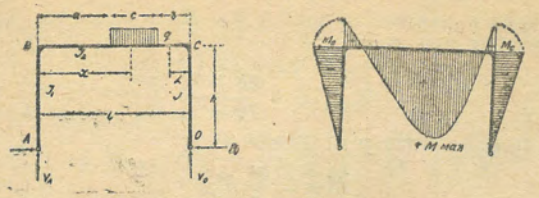
$$V_A=\frac{Pb}{l}\cdot\frac{1+\delta-2\delta^2+6k}{1+6k};\quad V_D=\frac{Pa}{l}\cdot\frac{3\delta-2\delta^2+6k}{1+6k}$$

$$H_A=H_D=\frac{3Pab}{2hl(2+k)}$$

$$M_A=\frac{Pab}{2l}\cdot\frac{5k-1+2\delta(2+k)}{(2+k)(1+6k)}$$

$$M_D=\frac{Pab}{2l}\cdot\frac{3+7k-2\delta(2+k)}{(2+k)(1+6k)}$$

$$M_B=M_A-H_Ah;\quad M_C=M_D-H_Ah;\quad M_P=M_A-H_Ah+V_Aa.$$



Черт. 64.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=\frac{qc}{2l}(2b+c);\quad V_D=\frac{qc}{2l}(2a+c)$$

$$H=\frac{qc(-6b^2+6bl-6bc-2c^2+3cl)}{4hl(2k+3)}$$

$$M_A=M_D=0$$

$$M_B=M_C=-\frac{qc(-6b^2+6bl-6bc-2c^2+3cl)}{4l(2k+3)}$$

Момент в любом сечении балки

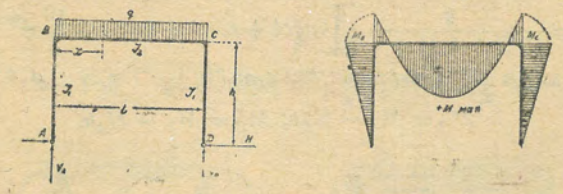
на участке a: $M_x=V_Ax+M_B$ (x измеряется от B)

c: $M_x=V_Ax-q\frac{(x-a)^2}{2}+M_B$ (x измеряется от B)

b: $M_B=V_Dx+M_c$ (x измеряется от C).

Опасное сечение при $x=a+\frac{V_A}{q}=a+\frac{c}{2l}(2b+c)$

$$+M_{\max}=+\frac{qc(2b+c)}{2l}\left[a+\frac{c}{4l}(2b+c)\right]+M_B.$$



Черт. 65.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=V_B=\frac{ql}{2}$$

$$H=\frac{ql^2}{4h(2k+3)}$$

$$M_A=M_D=0;\quad M_B=M_C=-\frac{ql^2}{4(2k+3)}$$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от B:

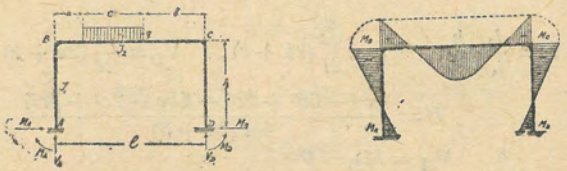
$$M_x=\frac{ql}{2}\cdot x-\frac{qx^2}{2}+M_B.$$

Опасное сечение при $x=\frac{l}{2}$:

$$+M_{\max}=+\frac{2k+1}{2k+3}\cdot\frac{ql^2}{8}$$

Момент в стойке считая y от A или D

$$M_{cm}=\frac{y}{h}M_B$$



Черт. 66.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_D=qc-V_A$$

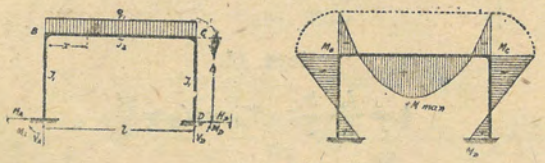
$$V_A=\frac{qc}{l^3(1+6k)}\left[3abc+b^2(3l-2b)+c^2\left(l+\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)+3l^2(2b+c)k\right]$$

$$H_A=H_D=\frac{qc}{4hl(2+k)}(6ab+3cl-2c^2)$$

$$M_A=\frac{q}{4l^2(2+k)(1+6k)}\left[6abcl+4a^2c^2+8ab^2c+\frac{10}{3}\cdot c^3l-c^2l^2-2c^4+\right.$$
$$\left.+(14abcl+2a^2c^2-4ab^2c-2c^3l+5c^2l^2-c^4)k\right]$$

$$M_D=\frac{q}{4l^2(2+k)(1+6k)}\left[6abcl+4b^2c^2+8a^2bc+\frac{10}{3}\cdot c^3l-c^2l^2-\right.$$
$$\left.-2c^4+(14abcl+2b^2c^2-4a^2bc-2c^3l+5c^2l-c^4)k\right]$$

$$M_B=M_A-H_Ah;\ M_C=M_D-H_Ah.$$



Черт. 67.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=V_D=\frac{ql}{2}$$

$$H_A=H_D=\frac{ql^2}{4h(2+k)};$$

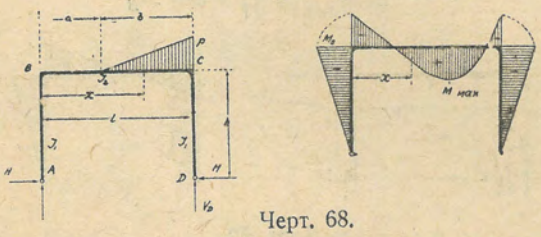
$$M_A=M_D=\frac{ql^2}{12(2+k)};\quad M_B=M_C=-\frac{ql^2}{6(2+k)}.$$

Момент в любом сечении балки BC на расстоянии x от B:

$$M_x=\frac{qx}{2}(l-x)-\frac{ql^2}{6(2+k)}$$

Наибольший момент в балке:

$$+M_{\max}=\frac{ql^2}{8}-\frac{ql^2}{6(2+k)}=\frac{ql^2}{24}\cdot\frac{2+3k}{2+k}$$



Черт. 68.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=\frac{b^2p}{6l};\quad V_D=\frac{bp}{2}-\frac{b^2p}{6l}$$

$$H=\frac{p}{8hl}\cdot\frac{b^2l+bl^2-b^3}{2k+3}$$

$$M_A=M_D=0;\quad M_B=M_C=-\frac{p}{8l}\cdot\frac{b^2l+bl^2-b^3}{2k+3}.$$

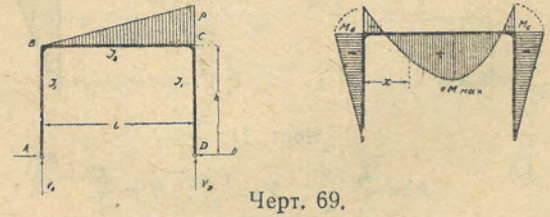
Момент в любом сечении балки BC на расстоянии x от B:

на участке a: $M_x=\frac{b^2p}{6l}x+M_B$

„ „ b: $M_x=\frac{p}{6lb}[b^3x-x^3l+3x^2al-3xa^2l+a^3l]+M_B$

Опасное сечение при $x=a+b\sqrt{\frac{b}{3l}}$

$$+M_{\max}=\frac{pb^2}{6l}\left(a+\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3l}}\right)+M_B$$



Черт. 69.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=\frac{pl}{6};\quad V_D=\frac{pl}{3}$$

$$H=\frac{pl^2}{8h(2k+3)}$$

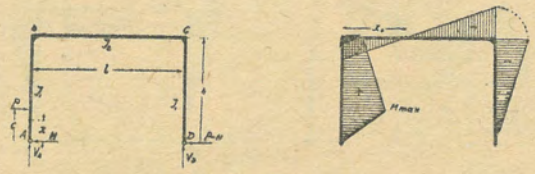
$$M_A=M_D=0;\quad M_B=M_C=-\frac{pl^2}{8(2k+3)}$$

Момент в любом сечении балки BC на расстоянии x от B:

$$M_x = \frac{plx}{6}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) + M_B$$

Опасное сечение при $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$

$$+M_{max} = \frac{pl^2}{27}\sqrt{3} + M_B$$



Черт. 70.

$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A = V_D = \frac{Pc}{l}$$

$$H = \frac{k\,[4h^3 + c^3 - 3ch^2] + 6h^3 - 3ch^2}{h^3\,(2k+3)}\cdot\frac{P}{2}.$$

Момент в любом сечении стойки AB:

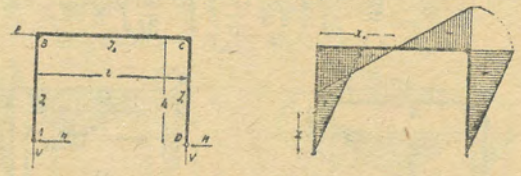
на участке c: $M_x = H\cdot x$

„ „ $(h-c)$: $M_x = H\cdot x - P\,(x-c)$

$$M_B = \frac{k(h^2+c^2)+3h^2}{2h^2\,(2k+3)}\cdot Pc;\quad M_C = \frac{k\,(c^2-3h^2)-3h^2}{2h^2\,(2k+3)}\cdot P\cdot c$$

Момент в балке равен нулю при:

$$x_0 = \frac{k\,(h^2+c^2)+3h^2}{2h^2\,(2k+3)}\cdot l$$



Черт. 71.

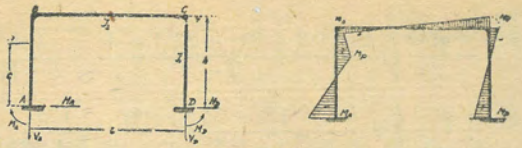
$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V = \frac{Ph}{l};\quad H = \frac{P}{2}.$$

Момент в любом сечении стойки на расстоянии x от A или соответственно от D:

$$M_x = \pm Hx$$

$$M_B = \frac{P}{2}\cdot h = -Mc.$$

Момент равен нулю при $x_0 = \frac{l}{2}$



Черт. 72.

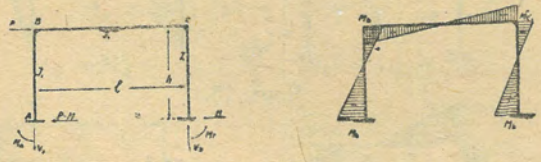
$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad \delta = \frac{c}{h};\quad V_A = V_D = \frac{3Pc\delta\,k}{l(1+6k)}$$

$$H_A = P - H_D;\quad H_D = \frac{P\delta^2}{2\,(2+k)}\,[3\,(1+k) - \delta\,(1+2k)]$$

$$M_A = \frac{Pc\delta}{2}\left[\frac{2}{\delta} - \frac{3+2k-\delta\,(1+k)}{2+k} - \frac{3k}{1+6k}\right]$$

$$M_D = +\frac{Pc\delta}{2}\left[\frac{3+2k-\delta\,(1+k)}{2+k} - \frac{3k}{1+6k}\right]$$

$$M_B = M_A - H_D h + Pc;\quad M_C = M_D - H_D h;\quad M_P = M_A + H_A c.$$



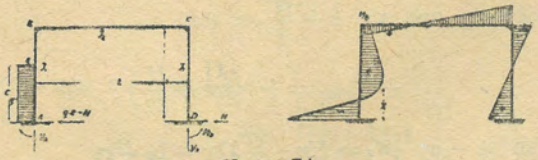
Черт. 73.

$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A = V_D = \frac{3Phk}{l(1+6k)};\quad H = \frac{P}{2}$$

Моменты:

$$M_A = -\frac{Ph}{2}\cdot\frac{1+3k}{1+6k};\quad M_D = +\frac{Ph}{2}\cdot\frac{1+3k}{1+6k}$$

$$M_B = +\frac{Ph}{2}\cdot\frac{3k}{1+6k};\quad M_C = -\frac{Ph}{2}\cdot\frac{3k}{1+6k}$$



Черт. 74.

$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad \delta = \frac{c}{h};\quad V_A = V_D = \frac{qc^2\delta k}{l(1+6k)}$$

$$H = -\frac{qc\delta^2}{8}\cdot\frac{4\,(1+k) - \delta\,(1+2k)}{2+k}$$

Моменты:

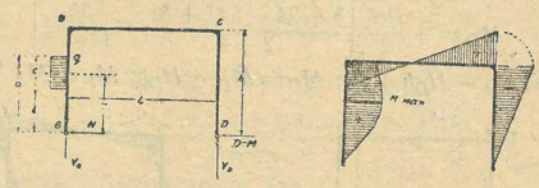
$$M_A = -\frac{qc^2\delta}{24}\left[\frac{12}{\delta} - \frac{4(3+2k)-3\delta(1+k)}{2+k} - \frac{12k}{1+6k}\right]$$

$$M_D = +\frac{qc^2\delta}{24}\left[+\frac{4(3+2k)-3\delta(1+k)}{2+k} - \frac{12k}{1+6k}\right].$$

Момент в любом сечении на участке AE на расстоянии x от A:

$$M_x = M_A + (qc - H)x - \frac{qx^2}{2};\quad M_E = M_A - H_C + \frac{qc^2}{2}$$

$$M_B = M_A - Hh + \frac{qc^2}{2};\quad M_C = M_D - Hh$$



Черт. 75.

$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A = V_D = \frac{qc}{l}\left(b + \frac{c}{2}\right)$$

$$H = [k(16h^3c + a^4 - b^4 - 6a^2h^2 + 6b^2h^2) + 6h^2(4hc - a^2 + b^2)]\,\frac{q}{8h^3(2k+3)}.$$

Момент в любом сечении стойки AB
на участке b: $M_x = Hx$

» » c: $M_x = Hx - \frac{q}{2}(x-b)^2$

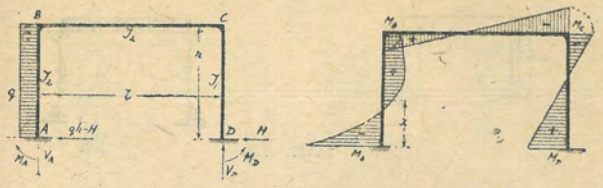
Опасное сечение при $x = b + \frac{H}{q}$

$$+M_{\max} = +H\left(b + \frac{H}{2q}\right)$$

на участке $(h-a)$: $M_x = Hx - \frac{qc}{2}(2x - 2b - c)$

$$M_B = Hh - \frac{qc}{2}(2h - 2b - c)$$

$$M_C = -[k(a^4 - b^4 - 6a^2h^2 + 6b^2h^2) + 6h^2(a^2 - b^2)]\,\frac{q}{8h^2(2k+3)}$$



Черт. 76.

$$k\,\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A = V_D = \frac{qh^2k}{l(1+6k)};\quad H = \frac{qh}{8}\cdot\frac{3+2k}{2+k}$$

Моменты:

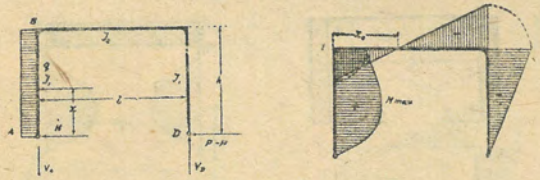
$$M_A = -\frac{qh^2}{24}\left(12 - \frac{9+5k}{2+k} - \frac{12k}{1+6k}\right)$$

$$M_D = +\frac{qh^2}{24}\cdot\left(\frac{9+5k}{2+k} - \frac{12k}{1+6k}\right)$$

Моменты в любом сечении стойки AB на расстоянии x от A:

$$M_x = M_A + (qh - H)x - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_B = M_A - Hh + \frac{qh^2}{2};\quad M_C = M_D - Hh$$



Черт. 77.

$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A = V_D = \frac{qh^2}{2l};\quad H = \frac{11k+18}{2k+3}\cdot\frac{qh}{8}$$

Момент в любом сечении стойки AB:

$$M_x = H\cdot x - \frac{qx^2}{2}$$

Опасное сечение при $x = \frac{h}{8}\cdot\frac{11k+18}{2k+3}$

$$+M_{\max} = \frac{q}{2}\left(\frac{h}{8}\cdot\frac{11k+18}{2k+3}\right)^2$$

$$M_B = +\frac{3qh^2(k+2)}{8(2k+3)};\quad M_C = -\frac{qh^2}{8}\cdot\frac{5k+6}{2k+3}$$

Момент в балке равен нулю при

$$x_0 = \frac{3}{4}\cdot\frac{k+2}{2k+3}\cdot l$$



Черт. 78.

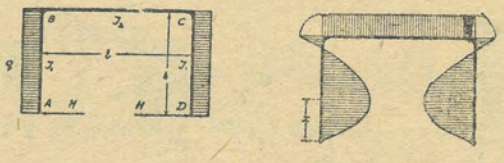
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad H_B=\frac{qh}{4}\cdot\frac{3+2k}{2+k}$$

$$M_0=M_B=-\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{k}{2+k}$$

$$M_A=M_0+H_B h-\frac{qh^2}{2}=-\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{k+3}{2+k}$$

В боковой стойке $M_{\max}$ получается от точки B на расстоянии $x=\frac{H_B}{q}$:

$$M_{\max}=M_0+\frac{H_B^2}{2p}$$



Черт. 79.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=V_D=0;\quad H=\frac{3}{4}qh\cdot\frac{k+2}{2k+3}$$

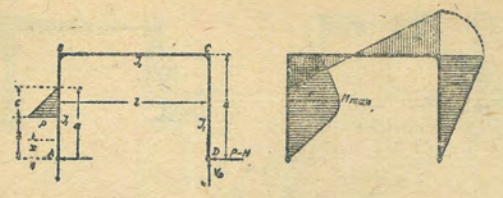
Момент в любом сечении стойки на расстоянии x от A или соответственно от D:

$$M_x=Hx-\frac{qx^2}{2}$$

$$M_B=M_C=-\frac{qh^2}{4}\cdot\frac{k}{2k+3}$$

Момент в любом сечении балки BC:

$$M_x=-\frac{qh^2}{4}\cdot\frac{k}{2k+3}$$



Черт. 80.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad P=\frac{pc}{2};\quad V_A=V_D=\frac{pc}{6l}(3b+c)$$

$$H=\left\{k\left[2h^3(a^2+b^2)-4h^3ab+\frac{a^5}{20}+\frac{b^5}{5}-\frac{ab^4}{4}-\frac{a^3h^2}{2}+\frac{3}{2}ah^2b^2-h^2b^3\right]+\right.$$
$$\left.+h^2\left(3ha^2-6ahb+\frac{3}{2}ab^2+3hb^2-\frac{c^3}{2}-b^3\right)\right\}\frac{p}{2h^3c(2k+3)}$$

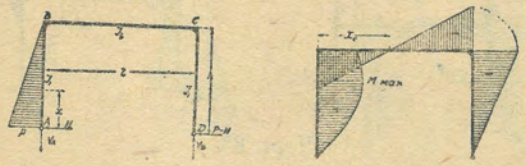
Момент в любом сечении стойки AB:

на участке b: $M_x=Hx$

„ „ c: $M_x=Hx-\frac{p}{6c}(x-b)^2(3c-x+b)$

„ „ $(h-a)$: $M_x=Hx-\frac{pc}{2}\left(x-a+\frac{2}{3}c\right)$

$$M_B=Hh-\frac{pc}{2}\left(h-a+\frac{2}{3}c\right);\quad M_C=-\left(\frac{pc}{2}-H\right)h$$



Черт. 81.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=V_D=\frac{ph^2}{6l};\quad H=\frac{31k+50}{2k+3}\cdot\frac{ph}{40}$$

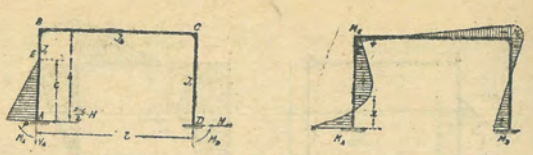
Момент в любом сечении стойки AB:

$$M_x=Hx-\frac{p}{6h}x^2(3h-x)$$

$$M_B=+\frac{ph^2}{120}\cdot\frac{13k+30}{2k+3};\quad M_C=-\frac{ph^2}{40}\cdot\frac{9k+10}{2k+3}$$

Момент в балке равен нулю при:

$$x_0=\frac{l}{20}\cdot\frac{3k+30}{2k+3}$$



Черт. 82.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad \delta=\frac{c}{h};\quad V=\frac{pkc^2\delta}{4l(1+6k)}$$

$$H=\frac{pc\delta^2}{40}\cdot\frac{5(1+k)-\delta(1+2k)}{2+k}.$$

Моменты:

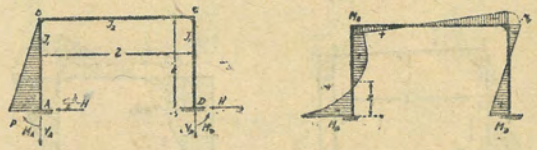
$$M_A=-\frac{pc^2\delta}{120}\left[\frac{20}{\delta}-\frac{5(3+2k)-3\delta(1+k)}{2+k}-\frac{15k}{1+6k}\right]$$

$$M_D=+\frac{pc^2\delta}{120}\left[\frac{5(3+2k)-3\delta(1+k)}{2+k}-\frac{15k}{1+6k}\right].$$

На участке AE (x измеряется от A):

$$M_x=M_A+\left(\frac{pc}{2}-H\right)x-\frac{px^2}{6c}(3c-x)$$

$$M_E=M_A-Hc+\frac{pc^2}{6};\quad M_B=M_A-Hh+\frac{pc^2}{6};\quad M_C=M_D-Hh$$



Черт. 83.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=V_D=\frac{pkh^2}{4l(1+6k)};\quad H=\frac{Ph}{40}\cdot\frac{4+3k}{2+k}$$

Моменты:

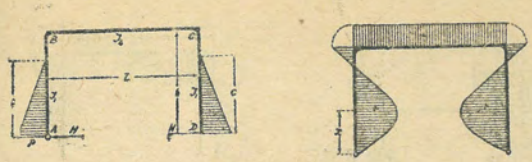
$$M_A=-\frac{ph^2}{120}\left(20-\frac{12+7k}{2+k}-\frac{15k}{1+6k}\right)$$

$$M_D=+\frac{ph^2}{120}\left(+\frac{12+7k}{2+k}-\frac{15k}{1+6k}\right)$$

На участке AB (x измеряется от A):

$$M_x=M_A+\left(\frac{ph}{2}-H\right)x-\frac{px^2}{6h}(3h-x)$$

$$M_B=M_A-Hh+\frac{ph^2}{6};\quad M_C=M_D-Hh$$



Черт. 84.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=V_D=0$$

$$H=\frac{pc}{20h^3(2k+3)}\left[k(20h^3+c^3-10ch^2)+30h^3-10ch^2\right]$$

Момент в любом сечении стойки на расстоянии x от A или соответственно от D:

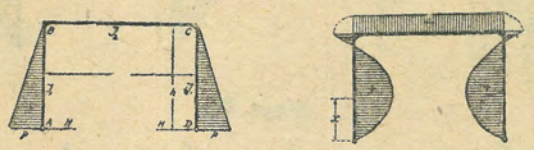
на участке c: $M_x=Hx-\frac{p}{6c}\cdot x^2(3c-x)$

„ „ $(h-c)$: $M_x=Hx-\frac{pc}{6}(3x-c)$

$$M_B=M_C=Hh-\frac{pc}{6}(3h-c)$$

Момент в любом сечении балки BC:

$$M_x=Hh-\frac{pc}{6}(3h-c)$$



Черт. 85.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V_A=V_D=0;\quad H=\frac{ph}{20}\cdot\frac{11k+20}{2k+3}$$

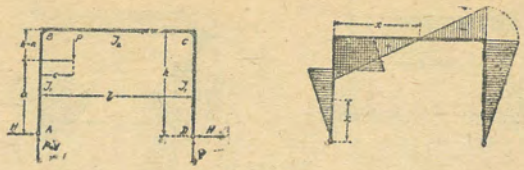
Момент в любом сечении стойки на расстоянии x от A или соответственно от D:

$$M_x=Hx-\frac{p}{6h}\cdot x^2(3h-x)$$

$$M_B=M_C=-\frac{ph^2}{60}\cdot\frac{7k}{2k+3}.$$

Момент в любом сечении балки:

$$M_x=-\frac{ph^2}{60}\cdot\frac{7k}{2k+3}$$



Черт. 86.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V=\frac{Pc}{l};\quad H=3Pc\,\frac{k(h^2-a^2)+h^2}{2h^3(2k+3)}$$

Момент в любом сечении стойки

на участке a: $M_x=-Hx$

„ „ $(h-a)$: $M_x=Pc-Hx$

$M_B=Pc-Hh$

Момент в любом сечении балки BC на расстоянии x от B:

$$M_x=\frac{Pc}{l}(l-x)-Hh;\quad M_C=-Hh$$



Черт. 87.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad V=P;\quad H=3Pc\cdot\frac{k(h^2-a^2)+h^2}{h^3(2k+3)}$$

Момент в любом сечении стойки

на участке a: $M_x=-Hx$

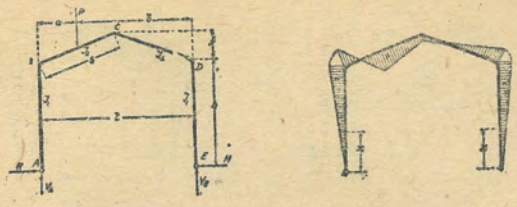
$(h-a)$: $M_x=Pc-Hx$

$M_B=M_C=Pc-Hh$

Момент в балке положителен при: $a>0{,}577\,h\left(=\frac{h}{\sqrt{3}}\right)$

„ „ „ равен нулю при: $a=0{,}577\,h$

„ „ „ отрицателен : $a<0{,}577$



Черт. 88.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s};\quad V_A=\frac{Pb}{l};\quad V_E=\frac{Pa}{l}$$

$$H=\frac{Pa}{4l^2}\cdot\frac{6blh+f(3l^2-4a^2)}{h^2(3+k)+f(3h+f)}$$

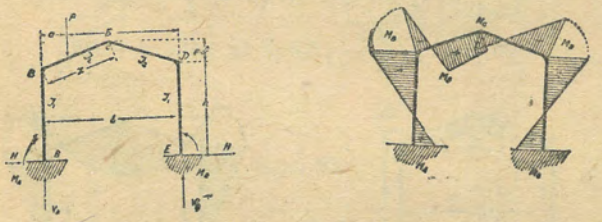
Момент в любом сечении стойки на расстоянии x от A или E:

$$M_x=-Hx;\quad M_B=-Hh$$

Момент под грузом:

$$M_P=V_Aa-H\left(h+\frac{2fa}{l}\right)$$

$$M_C=\frac{Pa}{2}-H(h+f);\quad M_D=-Hh$$



Черт. 89.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s};\quad V_A=\frac{Pb}{l}+\frac{M_E-M_A}{l};\quad V_E=\frac{Pa}{l}-\frac{M_E-M_A}{l}$$

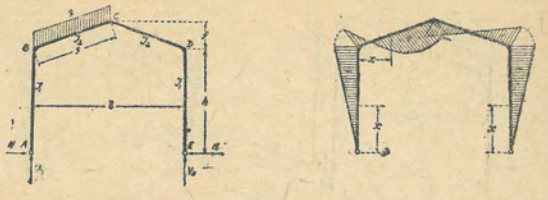
$$H=\frac{Pa}{l^2}\cdot\frac{3l^2k(h+f)-4a^2f(k+1)-3al(kh-f)}{(hk+f)^2+4k(h^2+hf+f^2)}$$

$$M_A=\frac{Pa}{2l^2}\left[\frac{2lh^2bk+3hlf(2a+lk)-f^2l(l+4a)-4a^2fh(k+2)-4a^2f^2}{(hk+f)^2+4k(h^2+hf+f^2)}-\frac{b(b-a)}{3k+1}\right]$$

$$M_E=\frac{Pa}{2l^2}\left[\frac{2lh^2bk+3hlf(2a+lk)-f^2l(l+4a)-4a^2fh(k+2)-4a^2f^2}{(hk+f)^2+4k(h^2+hf+f^2)}+\frac{b(b-a)}{3k+1}\right]$$

$$M_B=-Hh+M_A;\quad M_D=-Hh+M_E$$

$$M_C=-H(h+f)+M_E+V_E\cdot\frac{l}{2};\quad M_p=-H\left(h+\frac{2fa}{l}\right)+M_A+V_Aa$$



Черт. 90.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s};\quad V_A=\frac{3ql}{8};\quad V_E=\frac{ql}{8}$$

$$H=\frac{ql^2}{64}\cdot\frac{8h+5f}{h^2(3+k)+f(3h+f)}.$$

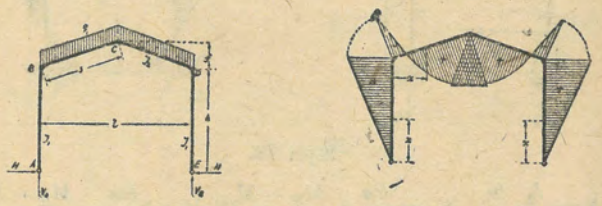
Момент в любом сечении стойки AB или DE на расстояниях x от A или соответственно от E:

$$M_x=-Hx;\quad M_B=-Hh$$

Момент в любом сечении нагруженной половины балки BC на горизонтальном расстоянии x от B:

$$M_x=V_Ax-H\left(h+\frac{2fx}{l}\right)$$

$$M_C=V_B\cdot\frac{l}{2}-H(h+f);\quad M_D=+Hh$$



Черт. 91.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s};\quad V_A=V_E=\frac{ql}{2}$$

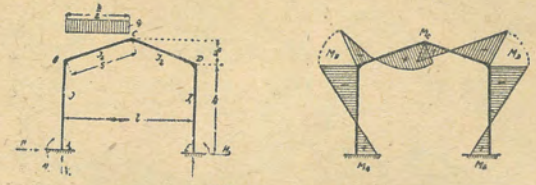
$$H=\frac{ql^2}{32}\cdot\frac{8h+5f}{h^2(3+k)+f(3h+f)}$$

Момент в любом сечении стойки на расстоянии x от A или соответственно от E:

$$M_x=-Hx;\quad M_B=-Hh$$

Момент в любом сечении балки на расстоянии x от B:

$$M_x=\frac{qx}{2}(l-x)-H\left(h+\frac{2fx}{l}\right);\quad M_C=\frac{ql^2}{8}-H(h+f)$$



Черт. 92.

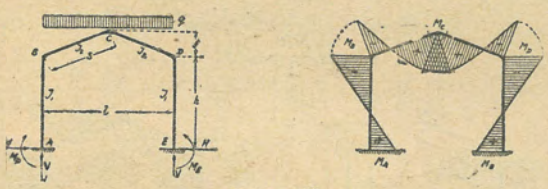
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s};\quad V_A=\frac{3ql}{8}+\frac{M_E-M_A}{l};\quad V_E=\frac{ql}{8}-\frac{M_E-M_A}{l}$$

$$H=\frac{ql^2}{16}\cdot\frac{k(4h+5f)+f}{(hk+f)^2+4k(h^2+hf+f^2)}$$

$$M_A=\frac{ql^2}{96}\left[\frac{kh(8h+15f)+f(6h-17f)}{(kh+f)^2+4k(h^2+hf+f^2)}-\frac{1}{2(3k+1)}\right]$$

$$M_E=\frac{ql^2}{96}\left[\frac{kh(8h+15f)+f(6h-17f)}{(kh+f)^2+4k(h^2+hf+f^2)}+\frac{1}{2(3k+1)}\right]$$

$$M_B=-Hh+M_A;\quad M_D=-Hh+M_E;\quad M_C=-H(h+f)+M_E+V_E\cdot\frac{l}{2}$$



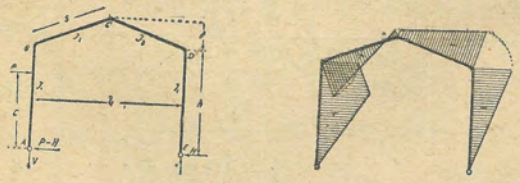
Черт. 93.

$$V=\frac{ql}{2};\qquad k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{S}$$

$$H=\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{k(4h+5f)+f}{(hk+f)^2+4k(h^2+hf+f^2)}$$

$$M_A=M_E=\frac{ql^2}{48}\cdot\frac{kh(8h+15f)+f(6h-17f)}{(kh+f)^2+4k(h^2+hf+f^2)}$$

$$M_B=M_D=-H_h+M_A;\quad M_C=-H(h+f)+M_A+\frac{ql^2}{4}$$

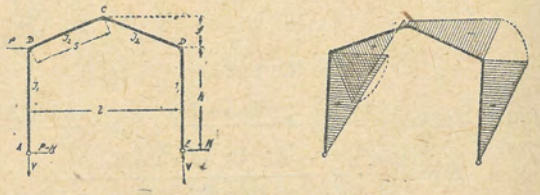


Черт. 94.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s};\quad V=\frac{Pc}{l};\quad H=\frac{Pc}{4}\cdot\frac{k\left(3h-\frac{c^2}{h}\right)+3(2h+f)}{h^2(3+k)+f(3h+f)}.$$

Моменты:

$$M_P=(P-H)\cdot c;\quad M_B=Pc-Hh$$
$$M_C=\frac{Pc}{2}-H(h+f);\quad M_D=-Hh$$

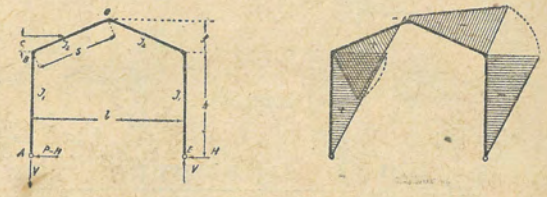


Черт. 95.

$$V=\frac{Ph}{l};\qquad k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s}$$
$$H=\frac{Ph}{4}\cdot\frac{2hk+3(2h+f)}{h^2(3+k)+f(3h+f)}.$$

Моменты:

$$M_B=(P-H)h;\ M_D=-Hh$$
$$M_C=\frac{Ph}{2}-H(h+f)$$



Черт. 96.

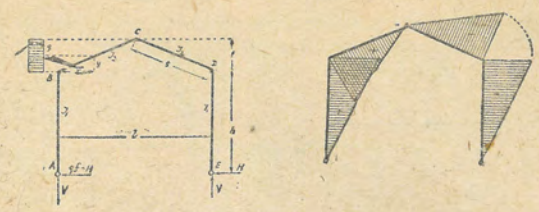
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s};\quad V=\frac{P(h+c)}{l};$$
$$H=\frac{P}{4}\cdot\frac{2kh^2+3(h+c)(2h+f)-\frac{c^2}{f}(3h+c)}{h(3+k)+f(3h+f)}$$

Моменты:

$$M_B=(P-H)h;\quad M_D=-Hh$$
$$M_P=(P-H)(h+c)-\frac{P(c+h)c}{2f}$$
$$M_C=\frac{P(c+h)}{2}-H(h+f)$$

Для $c=f$

$$V=\frac{P(h+f)}{l}$$
$$H=\frac{P}{2}$$
$$M_B=\frac{P}{2}h$$
$$M_C=0$$
$$M_D=-\frac{P}{2}h$$



Черт. 97.

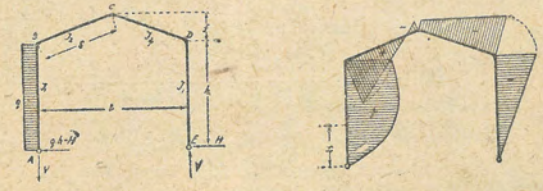
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s};\quad V=\frac{qf(2h+f)}{2l};$$
$$H=\frac{qf}{16}\cdot\frac{8h^2(k+3)+5f(4h+f)}{h^2(3+k)+f(3h+f)}.$$

Моменты:

$$M_B=(P-H)h$$

Для BC, когда абсцисса x и ордината y измеряется от B:

$$M_x=(P-H)(h+y)-Vx-\frac{qy^2}{2}$$
$$M_C=V\cdot\frac{l}{2}-H(h+f);\quad M_D=-Hh.$$

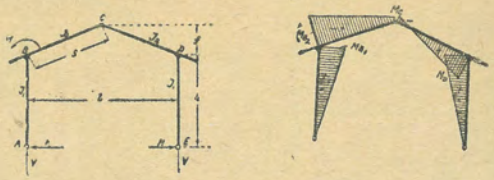


Черт. 98.

$$V=\frac{qh^3}{2l};\qquad k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s}$$
$$H=\frac{qh^2}{16}\cdot\frac{5hk+6(2h+f)}{h^2(3+k)+f(3h+f)}.$$

Моменты:
в стойке AB (x измеряется от A):

$$M_x=(qh-H)x-\frac{qx^2}{2};\qquad M_B=\frac{qh^2}{2}-Hh$$
$$M_C=\frac{qh^2}{4}-H(h+f);\quad M_D=-Hh$$



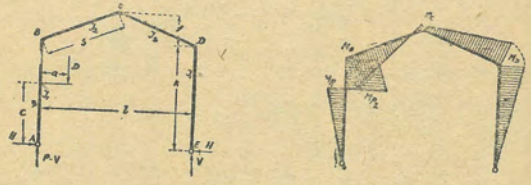
Черт. 99.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s};\quad V=\frac{M}{l};$$

$$H=\frac{3M}{4}\cdot\frac{2h+f}{h^2(3+k)+f(3h+f)}$$

Моменты: $M_{B_1}=Hh;\quad M_{B_2}=Hh-M$

$$M_C=H(h+f)-\frac{M}{2};\quad M_D=Hh.$$



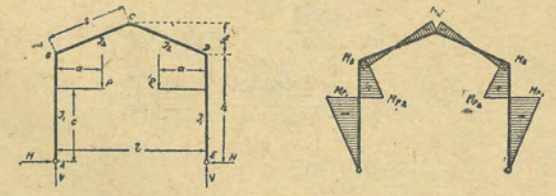
Черт. 100.

$$V=\frac{Pa}{l};\quad k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s}$$

$$H=\frac{3Pa}{h}\cdot\frac{k(h^2-c^2)+h(2h+f)}{h^2(3+k)+f(2h+f)}.$$

Моменты:

$$M_{p_1}=-Hc;\quad M_{p_2}=Pa-Hc$$
$$M_B=Pa-Hh;\quad M_D=-Hh$$
$$M_C=P\cdot\frac{a}{2}-H(h+f)$$



Черт. 101.

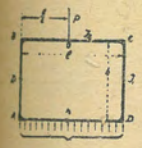
$$V=P;\quad k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{s}$$

$$H=\frac{3Pa}{2h}\cdot\frac{k(h^2-c^2)+h(2h+f)}{h^2(3+k)+f(3h+f)}.$$

Моменты:

$M_{p_1}=-Hc$ (непосредственно под консолью)
$M_{p_2}=Pa-Hc$ (непосредственно над консолью)
$M_B=M_D=Pa-Hh;\quad M_C=Pa-H(h+f).$

Замкнутые рамы.



Черт. 102.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad H_B=\frac{1}{8}\cdot\frac{Pl}{h}\cdot\frac{1}{3+k}$$

$$M_0=\frac{Pl}{24}\cdot\frac{6k^2+20k+9}{(k+3)(k+1)}$$

$$Mh=M_0=H_Bh-\frac{ql^2}{8}=M_A+\frac{Pl}{8}=\frac{Pl}{24}\cdot\frac{3k^2+11k+3}{(k+3)(k+1)}$$

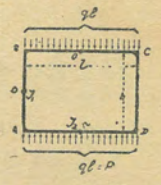
$$M_B=M_0-\frac{Pl}{4}=-\frac{Pl}{24}\cdot\frac{4k+9}{(k+3)(k+1)}$$

$$M_A=M_0+H_Bh-\frac{Pl}{4}=M_B+H_Bh=-\frac{Pl}{24}\cdot\frac{k+6}{(k+3)(k+1)}$$

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad H_0=0;$$

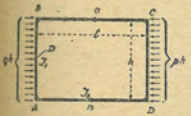
$$M_0=M_n=\frac{ql}{2}\quad\frac{3k+1}{k+1}$$

$$M_D=M_B=M_A=M_0-\frac{ql^2}{8}=-\frac{ql^2}{12}\cdot\frac{1}{k+1}$$



Черт. 103.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad H_B=\frac{qh}{2}$$



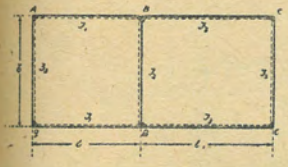
Черт. 104.

$$M_0=M_B=-\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{k}{k+1}$$

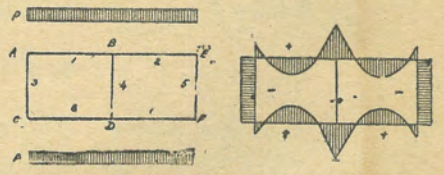
$$M_D=M_0+\frac{qh^2}{4}=\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{2k+3}{k+1}$$

$$M_A=M_h=M_C.$$

Двухпролетные рамы



Черт. 105.



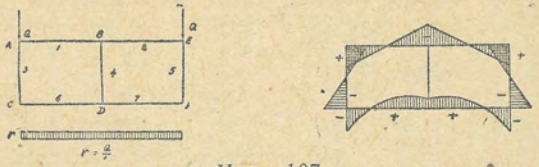
Черт. 106.

Равномерное изменение температуры всей рамы не вызывает никаких моментов поперечных или осевых сил.

$$k=\frac{I_2}{I}\cdot\frac{h}{l};\quad M^A=M^C=M^E=M^F=-\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{1}{2k+1}$$

$$M_1^B=M_2^B=M_6^D=M_7^D=-\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{3k+1}{2k+1}$$

$$M_4^B=M_4^D=0$$



Черт. 107.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad m=24\,(k+6)\,(2k+1)$$

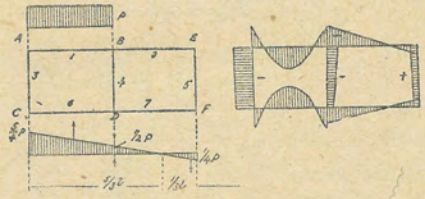
$$M^A=M^E=+Pl\cdot\frac{47k+18}{m}$$

$$M_1^B=M_2^B=-Pl\cdot\frac{15k^2+49k+18}{m}$$

$$M^C=M^F=-Pl\cdot\frac{49k+30}{m}$$

$$M_6^D=M_7^D=+Pl\cdot\frac{9k^2+11k+6}{m}$$

$$M_4^B=M_4^D=0$$



Черт. 108.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad m=20\,(k+2)\,(6k^2+6k+1);$$

$$N_1=138k^2+265k+43;\quad N_3=81k^2+148k+37;$$
$$N_2=78k^2+205k+83;\quad N_4=21k^2+88k+27;$$

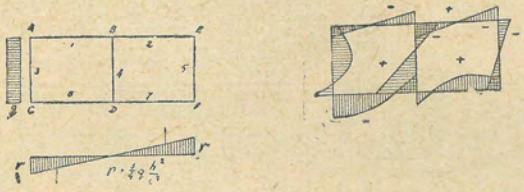
$$\left.\begin{matrix}M^A\\M^E\end{matrix}\right\rangle=-\frac{pl^2}{24}\left(\frac{1}{2k+1}\pm\frac{N_1}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M^C\\M^F\end{matrix}\right\rangle=-\frac{pl^2}{24}\left(\frac{1}{2k+1}\pm\frac{N_2}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M_1^B\\M_2^B\end{matrix}\right\rangle=-\frac{pl^2}{24}\left(\frac{3k+1}{2k+1}\pm\frac{N_3}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M_6^D\\M_7^D\end{matrix}\right\rangle=-\frac{pl^2}{24}\left(\frac{3k+1}{2k+1}\pm\frac{N_4}{m}\right);$$

$$M_4^B=-\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{N_3}{m};\quad M_4^D=-\frac{pl^2}{12}\cdot\frac{N_4}{m}$$



$$r=\frac{3}{4}\,q\,\frac{h^2}{l^2}$$

Черт. 109.

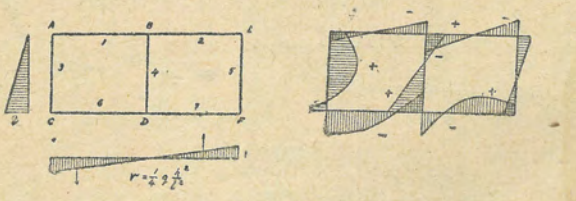
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad m=20\,(k+2)\,(6k^2+6k+1);\quad n=\frac{2k+1}{k}$$

$$N_1=120k^3+278k^2+335k+63;\quad N_3=120k^3+529k^2+382k+63;$$
$$N_2=360k^3+742k^2+285k+27;\quad N_4=120k^3+611k^2+558k+87;$$

$$\left.\begin{matrix}M^A\\M^E\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{2}{n}\pm\frac{N_1}{m}\right);\qquad \left.\begin{matrix}M_1^B\\M_2^B\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{1}{n}\pm\frac{N_3}{m}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}M^C\\M^F\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{2}{n}\pm\frac{N_2}{m}\right);\qquad \left.\begin{matrix}M_6^D\\M_7^D\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{1}{n}\pm\frac{N_4}{m}\right)$$

$$M_4^B=-\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{N_3}{m};\quad M_4^D=+\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{N_4}{m}$$



Черт. 110.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad m=20\,(k+2)\,(6k^2+6k+1);\quad n=\frac{10\,(k+6)\,(2k+1)}{k};$$

$$N_1=24k^3+50k^2+99k+21;\quad N_3=36k^3+169k^2+120k+21;$$
$$N_2=144k^3+298k^2+109k+9;\quad N_4=36k^3+203k^2+192k+29;$$

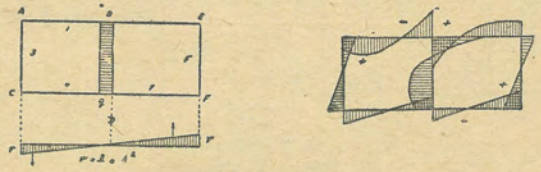
$$\left.\begin{matrix}M^A\\M^E\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{8k+59}{n}\pm\frac{N_1}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M^C\\M^F\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{12k+61}{n}\pm\frac{N_2}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix} M_1^B \\ M_2^B \end{matrix}\right\rangle = -\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{7k+31}{n} \pm \frac{N_3}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix} M_6^D \\ M_7^D \end{matrix}\right\rangle = +\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{3k+29}{n} \pm \frac{N_4}{m}\right);$$

$$M_4^B = -\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{N_3}{m}; \quad M_4^D = +\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{N_4}{m}.$$



Черт. 111.

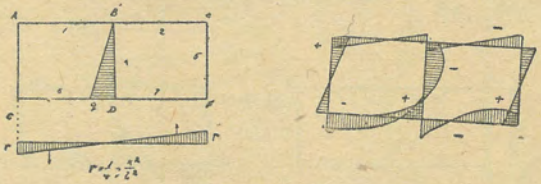
$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l}; \quad m = 20\,(k+2)\,(6k^2+6k+1)$$

$$N_1 = 240k^3+518k^2+335k+63; \quad N_3 = 2\,9k^2+262k+63;$$
$$N_2 = 240k^3+502k^2+285k+27; \quad N_4 = 240k^3+911k^2+678k+87;$$

$$\left.\begin{matrix} M^A \\ M^E \end{matrix}\right\rangle = \pm\frac{qh^2}{24}\cdot\frac{N_1}{m}; \qquad \left.\begin{matrix} M_1^B \\ M_2^B \end{matrix}\right\rangle = \mp\frac{qh^2}{24}\cdot\frac{N_3}{m};$$

$$\left.\begin{matrix} M^C \\ M^F \end{matrix}\right\rangle = \mp\frac{qh^2}{24}\cdot\frac{N_2}{m}; \qquad \left.\begin{matrix} M_6^D \\ M_7^D \end{matrix}\right\rangle = \pm\frac{qh^2}{24}\cdot\frac{N_4}{m};$$

$$M_4^B = -\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{N_3}{m}; \qquad M_4^D = +\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{N_4}{m}.$$



Черт. 112.

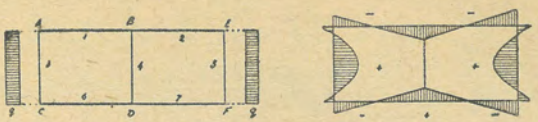
$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l}; \quad m = 20\,(k+2)\,(6k^2+6k+1)$$

$$N_1 = 72k^3+158k^2+97k+21; \quad N_3 = -12k^3+31k^2+62k+21;$$
$$N_2 = 72k^3+166k^2+107k+9; \quad N_4 = 108k^3+365k^2+254k+29$$

$$\left.\begin{matrix} M^A \\ M^E \end{matrix}\right\rangle = \pm\frac{qh^2}{24}\cdot\frac{N_1}{m}; \qquad \left.\begin{matrix} M_1^B \\ M_2^B \end{matrix}\right\rangle = \mp\frac{qh^2}{24}\cdot\frac{N_3}{m};$$

$$\left.\begin{matrix} M^C \\ M^F \end{matrix}\right\rangle = \mp\frac{qh^2}{24}\cdot\frac{N_2}{m}; \qquad \left.\begin{matrix} M_6^D \\ M_7^D \end{matrix}\right\rangle = \pm\frac{qh^2}{24}\cdot\frac{N_4}{m};$$

$$M_4^B = -\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{N_3}{m}; \qquad M_4^D = +\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{N_4}{m}.$$



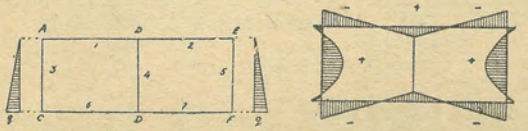
Черт. 113.

$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};$$

$$M^A = M^C = M^E = M^F = -\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{k}{2k+1};$$

$$M_1^B = M_2^B = M_6^D = M^D = +\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{k}{2k+1};$$

$$M_4^B = M_4^D = 0.$$



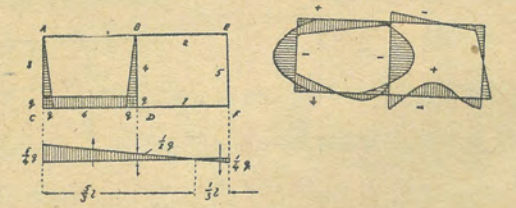
Черт. 114.

$$k = \frac{I_2}{I}\cdot\frac{h}{l}; \quad m = \frac{20\,(k+6)\,(2k+1)}{k}$$

$$M^A = M^E = -\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{8k+59}{m}; \quad M_1^B = M_2^B = +\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{7k+31}{m};$$

$$M^C = M^F = -\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{12k+61}{m}; \quad M_6^D = M_7^D = +\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{3k+29}{m};$$

$$M_4^B = M_4^D = 0.$$



Черт. 115.

$$k = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l}; \quad m = 20\,(k+2)\,(6k^2+6k+1)$$

$$n = \frac{10\,(k+6)\,(2k+1)}{k}; \quad t = \frac{l^2}{h^2}$$

$$N_1 = 2k\,(24k^2+54k-1) - t\,(18k^2+5k+3);$$
$$N_2 = 2k\,(36k^2+66k+1) + t\,(42k^2+55k+7);$$
$$N_3 = 2k\,(24k^2+69k+29) - t\,(21k^2+8k-3);$$
$$N_4 = 2k\,(36k^2+81k+31) + t\,(39k^2+52k+13);$$

$$\left.\begin{matrix} M^A \\ M^E \end{matrix}\right\rangle = + \frac{qh^2}{24}\left(+\frac{8k+59}{n} \pm \frac{N_1}{m}\right);$$

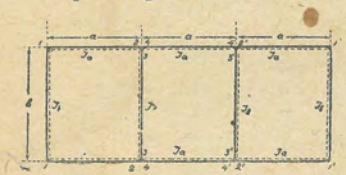
$$\left.\begin{matrix} M^C \\ M^F \end{matrix}\right\rangle = + \frac{qh^2}{24}\left(+\frac{12k+61}{n} \pm \frac{N_2}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix} M_1^B \\ M_2^B \end{matrix}\right\rangle = + \frac{qh^2}{24}\left(-\frac{7k+31}{n} \pm \frac{N_3}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix} M_6^D \\ M_7^D \end{matrix}\right\rangle = + \frac{qh^2}{24}\left(-\frac{3k+29}{n} \pm \frac{N_4}{m}\right);$$

$$M_4^B = + \frac{qh^2}{12} \cdot \frac{N_3}{m}; \quad M^D = + \frac{qh^2}{12} \cdot \frac{N_4}{m}.$$

Трехпролетные рамы. Ниже для трехпролетных рам даны формулы для всех угловых моментов кроме среднего пролета, для которого эти значения можно найти по формулам

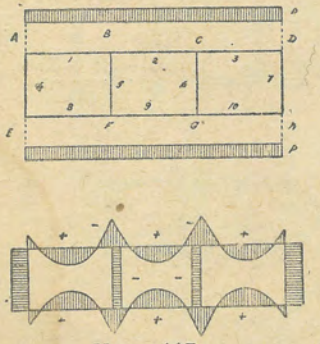


Черт. 116.

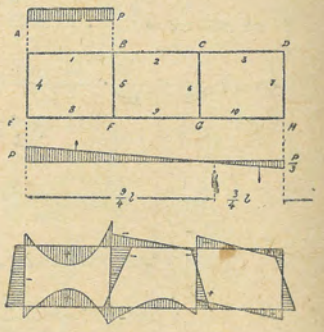
$$M_2^B = M_1^B - M_5^B; \quad M_2^C = M_3^C - M_6^C$$

$$M_9^F = M_3^F - M_5^F; \quad M_9^G = M_{10}^G - M_6^G$$

Равномерное изменение температуры всей рамы не вызывает никаких моментов, поперечных или осевых сил.



Черт. 117.



Черт. 118.

Формулы для рамы с загрузкой по чертежу 117:

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad m = 5k^2 + 5k + 1$$

$$M^A = M^D = M^E = M^H = -\frac{pl^2}{12} \cdot \frac{3k+1}{m}$$

$$M_1^B = M_3^C = M_8^F = M_{10}^G = -\frac{pl^2}{12} \cdot \frac{6k^2+6k+1}{m}$$

$$M_5^B = M_6^C = M_5^F = M_6^G = -\frac{pl^2}{12} \cdot \frac{k}{m}$$

Формулы для рамы с загрузкой по чертежу 118:

$$n = 6\,(5k^2 + 5k + 1)\,(k^2 + 12k + 18); \quad m = 90\,(k+3)\,(9k^2 + 7k + 1)$$

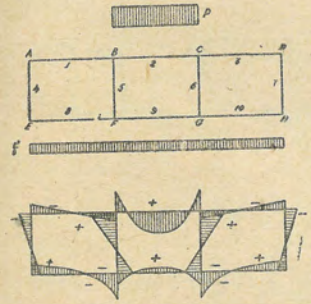
$$\left.\begin{matrix} M^A \\ M^D \end{matrix}\right\rangle = -\frac{pl^2}{24}\left(\frac{S_1}{n} \pm \frac{N_1}{m}\right); \qquad \left.\begin{matrix} M^E \\ M^H \end{matrix}\right\rangle = -\frac{pl^2}{24}\left(\frac{S_2}{n} \pm \frac{N_2}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix} M_1^B \\ M_3^C \end{matrix}\right\rangle = -\frac{pl^2}{12}\left(\frac{S_3}{n} \pm \frac{N_3}{m}\right); \qquad \left.\begin{matrix} M_8^F \\ M_{10}^G \end{matrix}\right\rangle = -\frac{pl^2}{24}\left(\frac{S_4}{n} \pm \frac{N_4}{m}\right);$$

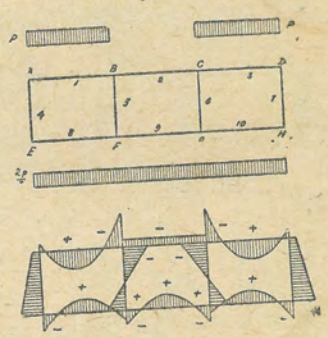
$$\left.\begin{matrix} M_5^B \\ M_6^C \end{matrix}\right\rangle = -\frac{pl^2}{24}\left(\frac{S_5}{n} \pm \frac{N_5}{m}\right); \qquad \left.\begin{matrix} M_5^F \\ M_6^G \end{matrix}\right\rangle = +\frac{pl^2}{24}\left(\frac{S_6}{n} \mp \frac{N_6}{m}\right);$$

$$S_1 = -162k^3 - 159k^2 + 168k + 54$$
$$S_2 = 198k^3 + 581k^2 + 600k + 126$$
$$S_3 = 51k^4 + 483k^3 + 1217k^2 + 888k + 162$$
$$S_4 = -9k^4 + 66k^3 + 125k^2 + 96k + 18$$
$$S_5 = 131k^3 + 795k^2 + 798k + 162$$
$$S_6 = 109k^3 + 525k^2 + 330k + 54$$

$$N_1 = 792k^2 + 1865k + 297$$
$$N_2 = 252k^2 + 1445k + 237$$
$$N_3 = 675k^3 + 2727k^2 + 1577k + 243$$
$$N_4 = 855k^3 + 2867k^2 + 1597k + 243$$
$$N_5 = 513k^2 + 1016k + 261$$
$$N_6 = -27k^2 + 596k + 201$$



Черт. 119.



Черт. 120.

Формулы для рам загруженных по чертежу 119.

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad m = 3\,(5k^2 + 5k + 1)\,(k^2 + 12k + 18);$$

$$M^A = M^D = -\frac{pl^2}{24} \cdot \frac{N_1}{m}; \qquad M^E = M^H = +\frac{pl^2}{24} \cdot \frac{N_2}{m};$$

$$M_1^B = M_3^C = +\frac{pl^2}{24} \cdot \frac{N_3}{m}; \qquad M_8^F = M_{10}^G = -\frac{pl^2}{24} \cdot \frac{N_4}{m};$$

$$M_5^B = M_6^C = +\frac{pl^2}{24} \cdot \frac{N_5}{m}; \qquad M_5^F = M_6^G = -\frac{pl^2}{24} \cdot \frac{N_6}{m};$$

$$N_1 = 180k^3 + 361k^2 + 228k + 54;$$
$$N_2 = 18\,k^3 + 359k^2 + 204k + 18;$$
$$N_3 = 15k^4 + 18k^3 + 131k^2 + 168k + 54;$$
$$N_4 = 45k^4 + 402k^3 + 961k^2 + 624k + 90;$$
$$N_5 = 125k^3 + 723k^2 + 690k + 162;$$
$$N_6 = 115k^3 + 597k^2 + 438k + 54;$$

Формулы для рам загруженных по чертежу 120.

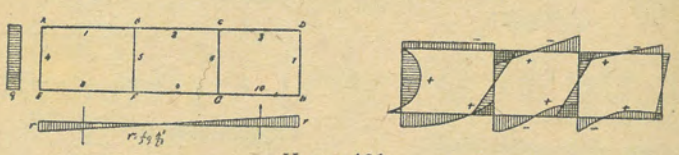
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad m=3(5k^2+5k+1)(k^2+12k+18)$$

$$M^A=M^D=-\frac{pl^2}{24}\cdot\frac{N_1}{m};\qquad M^E=M^H=-\frac{pl^2}{24}\cdot\frac{N_2}{m};$$

$$M_1^B=M_3^C=-\frac{pl^2}{24}\cdot\frac{N_3}{m};\qquad M_8^F=M_{10}^G=-\frac{pl^2}{24}\cdot\frac{N_4}{m};$$

$$M_5^B=M_6^C=-\frac{pl^2}{24}\cdot\frac{N_5}{m};\qquad M_5^F=M_6^G=+\frac{pl^2}{24}\cdot\frac{N_6}{m};$$

$$N_1=-162k^3-139k^2+168k+54;$$
$$N_2=198k^3+581k^2+600k+126;$$
$$N_3=51k^3+486k^3+1217k^2+888k+162;$$
$$N_4=-9k^4+66k^3+125k^2+96k+18;$$
$$N_5=131k^3+795k^2+798k+162;$$
$$N_6=109k^3+525k^3+330k+54.$$



Черт. 121.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad n=\frac{5k^2+5k+1}{k};\quad m=90(k+3)(9k^2+7k+1)$$

$$\left.\begin{matrix}M^A\\M^D\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{5k+2}{n}\pm\frac{N_1}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M^E\\M^H\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{5k+2}{n}\pm\frac{N_2}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M_1^B\\M_3^C\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{k+1}{n}\pm\frac{N_3}{m}\right);$$

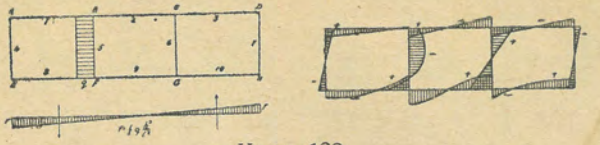
$$\left.\begin{matrix}M_8^F\\M_{10}^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{k+1}{n}\pm\frac{N_4}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M_5^B\\M_6^C\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{1}{n}\pm\frac{N_5}{m}\right);\qquad \left.\begin{matrix}M_3^F\\M_6^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{1}{n}\pm\frac{N_6}{m}\right);$$

$N_1=405k^3-189k^2+1045k+216;$ $\quad N_4=495k^3+4021k^2+2531k+324$

$N_2=2025k^3+4779k^2+1325k+84;$ $\quad N_5=1215k^3+6741k^2+4307k+612$

$N_3=-405k^3+909k^2+1259k+216;$ $\quad N_6=1215k^3+7029k^2+5203k+708$



Черт. 122.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad n=\frac{5k^2+5k+1}{k};\quad m=90(k+3)(9k^2+7k+1)$$

$$\left.\begin{matrix}M^A\\M^D\end{matrix}\right\rangle=\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{1}{n}\pm\frac{N_1}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M^E\\M^H\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{1}{n}\pm\frac{N_2}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M_1^B\\M_3^C\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{3k+2}{n}\pm\frac{N_3}{m}\right);$$

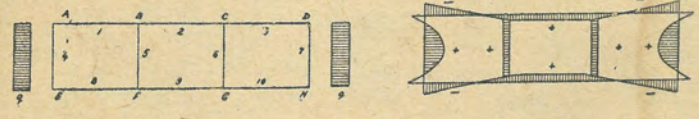
$$\left.\begin{matrix}M_8^F\\M_{10}^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{3k+2}{n}\pm\frac{N_4}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M_5^B\\M_6^C\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{5k+3}{n}\pm\frac{N_5}{m}\right);\qquad \left.\begin{matrix}M_5^F\\M_6^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{5k+3}{n}\pm\frac{N_6}{m}\right);$$

$N_1=1215k^3+2331k^2+1315k+216;$ $\quad N_4=495k^3+4111k^2+2801k+324;$

$N_2=1215k^3+2259k^2+1055k+84;$ $\quad N_5=405k^3+3951k^2+3227k+612;$

$N_3=-405k^3+819k^2+989k+216;$ $\quad N_6=2025k^3+9819k^2+6283k+708$



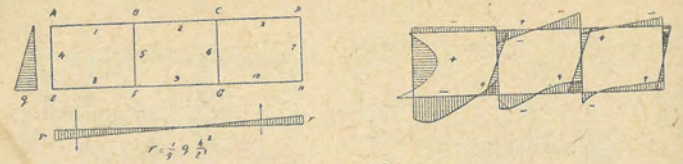
Черт. 123.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad m=\frac{5k^2+5k+1}{k}$$

$$M^A=M^D=M^E=M^H=-\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{5k+2}{m}$$

$$M_1^B=M_3^C=M_8^F=M_{10}^G=+\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{k+1}{m}$$

$$M_5^B=M_6^C=M_5^F=M_6^G=+\frac{qh^2}{12}\cdot\frac{1}{m}$$



Черт. 124.

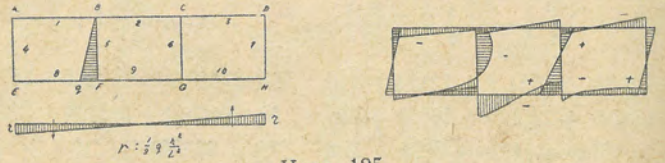
$$n=\frac{10\,(5k^2+5k+1)\,(k^2+12k+18)}{k};\quad m=540\,(k+3)\,(9k^2+7k+1);$$

$$\left.\begin{matrix}M^A\\M^D\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{S_1}{n}\pm\frac{N_1}{m}\right);\qquad \left.\begin{matrix}M^E\\M^H\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{S_2}{n}\pm\frac{N_2}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M_1^B\\M_3^C\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{S_3}{n}\pm\frac{N_3}{m}\right);\qquad \left.\begin{matrix}M_8^F\\M_{10}^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{S_4}{n}\pm\frac{N_4}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M_5^B\\M_6^C\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{S_5}{n}\pm\frac{N_5}{m}\right);\qquad \left.\begin{matrix}M_5^F\\M_6^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{S_6}{n}\pm\frac{N_6}{m}\right).$$

$S_1=20k^3+290k^2+554k+177;$ $\quad N_1=243k^3+2799k^2+1577k+432;$
$S_2=30k^3+330k^2+586k+183;$ $\quad N_2=5103k+12357k^2+3217k+168;$
$S_3=10k^3+85k^2+166k+93;$ $\quad N_3=-1323k^3+729k^2+2221k+432;$
$S_4=45k^2+134k+87;$ $\quad N_4=1017k^3-8753k^2+5305k+648;$
$S_5=20k^2+75k+93;$ $\quad N_5=2187k^3+13203k^2+8317k+1224;$
$S_6=-10k^2+45k+87;$ $\quad N_6=2187k^3+13959k^2+10649k+1416.$



Черт. 125.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad n=\frac{10\,(5k^2+5k+1)\,(k^2+12k+18)}{k};$$
$$m=540\,(k+3)\,(9k^2+7k+1)$$

$$\left.\begin{matrix}M^A\\M^D\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{S_1}{n}\pm\frac{N_1}{m}\right);\qquad \left.\begin{matrix}M^E\\M^H\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{S_2}{n}\pm\frac{N_2}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M_1^B\\M_3^C\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{S_3}{n}\pm\frac{N_3}{m}\right);\qquad \left.\begin{matrix}M_8^F\\M_{10}^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{S_4}{n}\pm\frac{N_4}{m}\right);$$

$$\left.\begin{matrix}M_5^B\\M_6^C\end{matrix}\right\rangle=-\frac{qh^2}{24}\left(-\frac{S_5}{n}\pm\frac{N_5}{m}\right);\qquad \left.\begin{matrix}M_5^F\\M_6^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{qh^2}{24}\left(+\frac{S_6}{n}\pm\frac{N_6}{m}\right);$$

$S_1=20k^2+75k+93;$ $\quad N_1=2187k^3+4383k^2+2333k+432;$
$S_2=-10k^2+45k+87;$ $\quad N_2=2187k^3+4419k^2+2353k+168;$
$S_3=15k^3+175k^2+375k+177;$ $\quad N_3=-837k^3+837k^2+1465k+432;$
$S_4=15k^3+205k^2+405k+183;$ $\quad N_4=1503k^3+9401k^2+6169k+648;$
$S_5=20k^3+265k^2+584k+261;$ $\quad N_5=243k^3+5211k^2+5131k+1224;$
$S_6=30k^3+365k^2+676k+279;$ $\quad N_6=5103k^3+22707k^2+13943k+1416.$



Черт. 126.

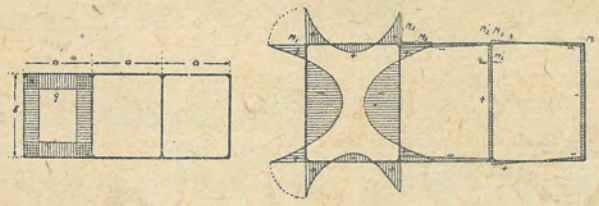
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{l};\quad m=\frac{20\,(5k^2+5k+1)\,(k^2+12k+18)}{k};$$

$$M^A=M^D=-\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{N_1}{m};\qquad M^E=M^H=-\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{N_2}{m};$$

$$M_1^B=M_3^C=+\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{N_3}{m};\qquad M_8^F=M_{10}^G=+\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{N_4}{m};$$

$$M_5^B=M_6^C=+\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{N_5}{m};\qquad M_5^F=M_6^G=+\frac{qh^2}{6}\cdot\frac{N_6}{m}.$$

$N_1=20k^3+290k^2+554k+177;$ $\quad N_4=45k^2+134k+87;$
$N_2=30k^3+330k^2+586k+183;$ $\quad N_5=20k^2+75k+93;$
$N_3=10k^3+85k^2+166k+93;$ $\quad N_6=-10k^2+45k+87.$



Черт. 127.

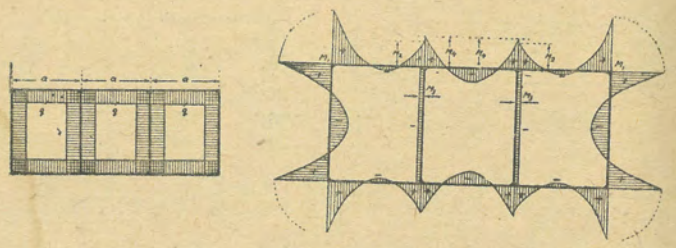
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{b}{a};\quad n=5k^2+5k+1;\quad m=9k^2+7k+1;$$

$$\left.\begin{matrix}M^A=M^E\\M^D=M^H\end{matrix}\right\rangle=+\frac{q}{24}\left[\frac{a^2\,(4k+1)+b^2k\,(5k+1)}{n}\pm\frac{a^2\,(6k+1)+b^2k\,(9k+1)}{m}\right]$$

$$\left.\begin{matrix}M_1^B=M_8^F\\M_3^C=M_{10}^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{q}{24}\left[\frac{a^2\,(3k+1)\,(k+1)+b^2k\,(2k+1)}{n}\pm\frac{a^2\,(9k^2+6k+1)+b^2k}{m}\right]$$

$$\left.\begin{matrix}M_5^B=M_5^F\\M_6^C=M_6^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{q}{24}\left[\frac{a^2\,(3k+1)+b^2k\,(5k+2)}{n}\pm\frac{a^2\,(6k^2+5k+1)+b^2k\,(3k+2)}{m}\right]$$

$$\left.\begin{matrix}M_2^B=M_9^F\\M_2^C=M_6^G\end{matrix}\right\rangle=+\frac{q}{24}\,(a^2-b^2)\,k\,(3k+1)\left[\frac{1}{n}\pm\frac{1}{m}\right].$$



Черт. 128.

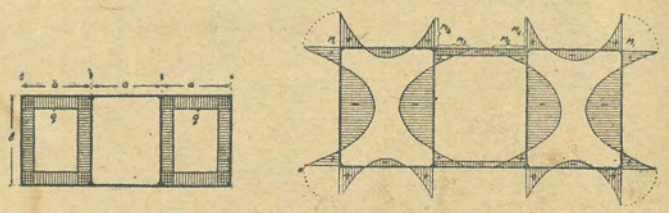
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{b}{a};\quad n=5k^2+5k+1;$$

$$M^A=M^E=M^B=M^H=M_1=+\frac{q}{12}\cdot\frac{a^2(3k+1)+b^2k(5k+2)}{n}$$

$$M_1^B=M_3^C=M_8^F=M_{10}^G=M_2=+\frac{q}{12}\cdot\frac{a^2(6k^2+6k+1)-b^2k(k+1)}{n}$$

$$M_5^B=M_6^C=M_5^F=M_6^G=M_3=+\frac{qk}{12}\cdot\frac{a^2-b^2}{n}$$

$$M_2^B=M_2^C=M_9^F=M_9^G=M_4=+\frac{q}{12}\cdot\frac{a^2(6k^2+5k+1)-b^2k^2}{n}$$



Черт. 129.

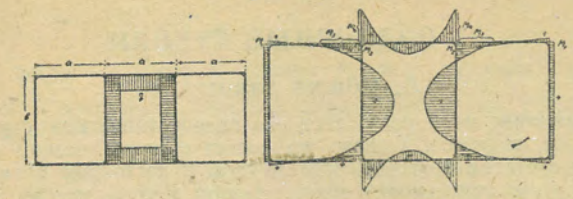
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{b}{a};\quad n=5k^2+5k+1;$$

$$M^A=M^E=M^B=M^H=M_1=+\frac{q}{12}\cdot\frac{a^2(4k+1)+b^2k(5k+1)}{n}$$

$$M_1^B=M_3^C=M_8^F=M_{10}^G=M_2=+\frac{q}{12}\cdot\frac{a^2(3k+1)(k+1)+b^2k(2k+1)}{n}$$

$$M_5^B=M_6^C=M_5^F=M_6^G=M_3=+\frac{q}{12}\cdot\frac{a^2(3k+1)+b^2k(5k+2)}{n}$$

$$M_2^B=M_2^C=M_9^F=M_9^G=M_4=+\frac{qk}{12}\cdot\frac{(a^2-b^2)(3k+1)}{n}$$



Черт. 130.

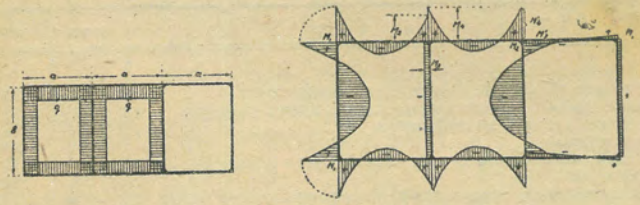
$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{b}{a};\quad n=5k^2+5k+1;$$

$$M^A=M^E=M^B=M^H=M_1=-\frac{qk}{12}\cdot\frac{a^2-b^2}{n}$$

$$M_1^B=M_3^C=M_8^F=M_{10}^G=M_2=+\frac{qk}{12}\cdot\frac{(a^2-b^2)(3k+2)}{n}$$

$$M_5^B=M_6^C=M_5^F=M_6^G=M_3=-\frac{b}{12}\cdot\frac{b^2k(5k+3)+a^2(2k+1)}{n}$$

$$M_2^B=M_2^C=M_9^F=M_9^G=M_4=+\frac{q}{12}\cdot\frac{a^2(3k+1)(k+1)+b^2k(2k+1)}{n}$$



Черт. 131.

$$k=\frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{b}{a};\quad n=5k^2+5k+1;\quad m=9k^2=7k+1;$$

$$\left.\begin{matrix}M_1\\M_1'\end{matrix}\right\rangle=+\frac{q}{24}\left[\frac{a^2(2k+1)+b^2k(5k+3)}{n}\pm\frac{a^2(6k+1)+b^2k(9k+1)}{m}\right]$$

$$\left.\begin{matrix}M_2\\M_2'\end{matrix}\right\rangle=+\frac{q}{24}\left[\frac{a^2(9k^2+8k+1)-b^2k(4k+3)}{n}\pm\frac{a^2(9k^2+6k+1)+b^2k}{m}\right]$$

$$\left.\begin{matrix}M_3\\M_3'\end{matrix}\right\rangle=-\frac{q}{24}\left[\frac{a^2(k+1)+b^2k(5k+4)}{n}\pm\frac{a^2(6k^2+7k+1)+b^2k(3k+2)}{m}\right]$$

$$\left.\begin{matrix}M_4\\M_4'\end{matrix}\right\rangle=+\frac{q}{24}\left[\frac{a^2(9k^2+9k+2)+b^2k(k+1)}{n}\pm\frac{(a^2-b^2)k(3k+1)}{m}\right],$$

где $M_1=M^A=M^E$, $M_1'=M^D=M^H$, $M_2=M_1^B=M_8^F$,

$M_2'=M_3^C=M_{10}^G$, $M_3=M_5^B=M_5^F$, $M_3'=M_6^C=M_6^G$,

$M_4=M_2^B=M_9^F$, $M_4'=M_2^C=M_9^G$.

V. ПОДПОРНЫЕ СТЕНКИ

А. Общие данные

Конструирование подпорных стенок в гидротехническом строительстве имеет большое значение. Однако их расчет в теоретическом отношении за последнее столетие почти не продвинулся. В настоящее время еще не установлены углы внутреннего трения грунта и углы трения засыпки о поверхность стенки. Только последними работами Терцаги дана общая характеристика призм обрушения с делением их вида соответственно двум фазам работы подпорной стенки.

1-я криволинейная призма обрушения в — I фазе пока стенка не получила чувствительных деформаций.

2-я прямолинейная призма обрушения — во II фазе, — когда стенка получает чувствительные перемещения.

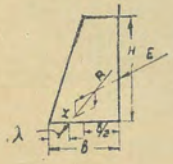
Во всяком случае форма призм обрушения окончательно для точных теоретических расчетов не установлена, но для технических расчетов этот вопрос и не играет столь большой роли. Для расчетов давления грунта необходимо пользоваться данными зависимости между весом единицы объема грунта и его углом естественного откоса. Для практических расчетов можно рекомендовать следующую таблицу этих зависимостей.

Зависимость γ и φ для подпорных стенок.

Таблица 1

№ п/п.	Грунты	γ кг	$\varphi°$	$tg\,\varphi$
1	Илистый, торфяной, насыщенный водою грунт	1 600	30	0,577
2	Песок мелкий, илистый насыщенный водою (плывун)	1 900	15	0,268
3	Мокрый, чистый, мелкий песок	2 000	25	0,466
4	Лесс мокрый	1 800	20	0,364
5	Чистый, совершенно сухой, мелкий песок	1 600	35	0,700
6	Лесс сухой	1 600	40	0,839
7	Песок крупный, гравелистый, насыщенный водой	1 900	35	0,466
8	Галька с песком, насыщенным водою	2 000	25	0,466
9	Песок крупный гравелистый, сухой	1 800	40	0,839
10	Галька с песком	1 850	35	0,700
11	Глинистый слабый грунт, насыщенный водою	1 800	20	0,364
12	Сугл нок и супесок, насыщенный водою	1 900	20	0,364
13	Глинистый плотный, влажный грунт	1 600	40	0,839
14	Суглинок и супесок естественной влажности	1 500	40	0,839
15	Глина с галькой и валунами	2 000	40	0,839
16	Глина сухая, плотная	1 600	45	1,000
17	Глина очень плотная	1 800	45	1,000
18	Глинобетон влажный	2 200	45	1,000

Обычно при проектировании размерами подпорной стенки предварительно задаются, а затем их проверяют расчетом. Размеры считаются достаточными, если при данных размерах стенка удовлетворяет трем условиям.



Черт. 132.

1. Равнодействующая R сил E (давления земли) и P (соответственного веса стенки) должна пересекать основание стенки в некоторой точке x, не вызывая при этом в кладке напряжений больше допускаемых (см. черт 132).

Строительная практика многих стран не допускает растягивающих напряжений в кладке, однако в настоящее время растягивающие напряжения допускают, но в ограниченных пределах порядка 2—3 $кг/см^2$ для бетонных стенок.

Если точка x лежит в средней трети, т. е. если $k=\frac{\lambda}{b}>0{,}333$, то в основании появляется лишь сжимающее напряжение, и последнее определяется по формуле

$$\sigma=\frac{P}{b}\left(1\pm\frac{6e}{b}\right)$$

где σ — напряжение,

P — собственный вес стенки,

b — ширина основания стенки,

$e=\frac{l}{2}-\lambda$ эксцентриситет,

$\lambda=\frac{\text{момент удержив.} - \text{момент опрокид.}}{\text{собственный вес стенки}}$ или плечо опрокидывания.

Если точка x лежит вне ядра сечения, т. е. $k<0{,}333$, то наибольшее давление в крайней точке, ближайшей к точке x, определяется по формуле:

$$\sigma=\frac{2P}{3\lambda}=\frac{2P}{3kb}. \qquad (2)$$

2. Коэфициент устойчивости на опрокидывание стенки (η_1) должен быть больше единицы, т. е.

$$\eta_1=\frac{M_{уд.}}{M_{окр.}}>1.$$

3. Коэфициент устойчивости на скольжение должен быть также больше единицы, т. е.

$$\eta_{ск}=\frac{Pf}{E}>1{,}0, \qquad (3)$$

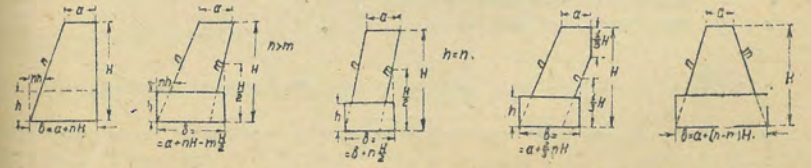
где f — коэфициент трения кладки по кладке при проверке по обрезу фундамента и кладки по грунту при проверке по подошве фундамента,

f — кладки по кладке принимается около 0,65,

f — кладки по грунту в зависимости от типа основания принимается в пределах 0,20—0,50.

Для выявления вышеуказанных трех условий необходимо начать с определения внешних сил. Таковыми являются собственный вес стенки P и давление грунта на тело стенки E. Собственный вес стенки может быть определен на основании ее размеров, а потому они должны быть предварительно заданы.

Ниже приводим для некоторых профилей подпорных стенок формулы для определения собственного веса стенки P и ее момента ($M_{уд.}$) относительно ребра вращения.



Черт. 133. Черт. 134. Черт. 135. Черт. 136. Черт. 137.

По чертежу 133:

$$P = \frac{2a + nH}{2} H\delta.$$

$$M_{уд.} = \left[H^2\left(an + \frac{1}{3}n^2H\right) + \frac{1}{2}a^2H\right]\delta.$$

По чертежу 134:

$$P = \left[\frac{2a + nH}{2}\right]\left(H - 0{,}375mH\right)\delta.$$

$$M_{уд.} = \left\{H^2\left(an + \frac{1}{3}n^2H\right) + \frac{1}{2}a^2H - 0{,}375mH\left[a + H(n - 0{,}25m)\right]\right\}\delta.$$

По чертежу 135:

$$P = (aH + 0{,}125nH^2)\,\delta.$$

$$M_{уд.} = \left[H^2\left(an + \frac{1}{3}n^2H\right) + 0{,}5a^2H - 0{,}375nH(a + 0{,}75nH)\right]\delta.$$

По чертежу 136:

$$P = (aH + 0{,}834nH^2)\,\delta.$$

$$M_{уд.} = \left[H^2\left(an + \frac{1}{3}n^2H\right) + 0{,}5a^2H - 0{,}166nH^2\left(a + \frac{5}{6}nH\right)\right]\delta.$$

По чертежу 137:

$$P = \frac{2a + (n + m)H}{2} H\delta.$$

$$M_{уд.} = \left[H^2\left(an + \frac{1}{3}n^2H\right) + 0{,}5a^2H + 0{,}5nH^2\left(a + nH + \frac{1}{3}mH\right)\right]\delta.$$

Б. Активное давление земли и подбор размеров подпорных стенок

Для расчетов активного давления грунта на подпорные стенки необходимо рассматривать два основных случая:

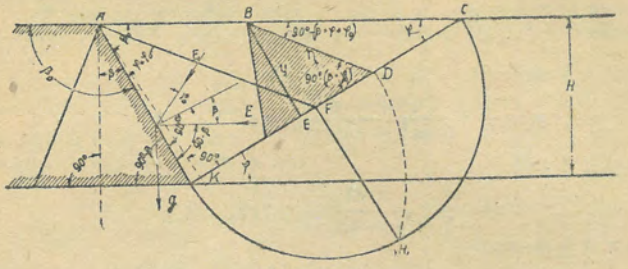
1) расчет давления при горизонтальной засыпке;
2) расчет давления при негоризонтальной засыпке.

Каждый из предложенных случаев должен рассматриваться в разрезе
а) без учета временной нагрузки и
б) с учетом временной нагрузки.

1. Расчет давления при горизонтальной засыпке по Ребхану

Метод Ребхана считаем возможным применять для всех подпорных стенок сооружений 3, 4 и 5 классов и для стенок 1 и 2 классов при отсутствии фильтрационного давления.

а) без учета временной нагрузки.



Черт. 138.

В основу практических расчетов до настоящего времени кладутся основные положения, выдвинутые Куломбом, Понселе и Ребханом, сводящиеся к определению призм обрушения, ограниченных прямолинейной поверхностью. Для вывода основных формул возможно пользоваться общим построением Ребхана, изображенным на чертеже 138, давление по которому выражается формулой:

$$E = \frac{1}{2}\gamma y\eta, \tag{4}$$

где γ — единичный вес грунта,
y и η — ординаты треугольника давления, построенного по методу Ребхана.

Обозначая высоту стенки через H, угол наклона стенки относительно вертикали β и относительно горизонтали β_0 (см. черт. 138), угол естественного откоса грунта φ, угол трения грунта о поверхность стенки φ_0, получаем, производя необходимые вычисления, следующую формулу:

$$E = \frac{1}{2}\gamma H^2 \frac{\cos^2(\beta - \varphi)}{\left[\frac{1}{\sin\varphi} + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi_0)}{\cos\beta\cos(\beta + \varphi_0)\sin\varphi}}\right]^2 \cos^2\beta\cos(\beta + \varphi_0)\sin^2\varphi}. \tag{5}$$

Для определения необходимых в расчете горизонтальной и вертикальной составляющей давления получаем формулы для этих давлений в следующем виде.

а) Горизонтальная составляющая.

$$E_1 = aH^2.$$

б) Вертикальная составляющая:

$$E_2 = a_1H^2,$$

где приняты следующие обозначения:

$$a = \frac{1}{2}\gamma \frac{\cos^2(\beta - \varphi)}{\left[\frac{1}{\sin\varphi} + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi)}{\cos\beta\cos(\beta + \varphi_0)\sin\varphi}}\right]^2 \cos^2\beta\sin^2\varphi}. \tag{6}$$

$$a_1 = a\,\mathrm{tg}\,(\beta + \varphi_0). \tag{7}$$

Значения коэфициентов α и α_1 для различных грунтов и наклонов стенки зависят от заложения откоса стенки $m = \operatorname{tg}\beta$. Подсчеты значений α и α для ходовых величин $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \varphi$ даны ниже в таблице 2.

Отдельные значения формул для разных видов стенок получаются:

при $\varphi_0 = 0$ и β не $= 0$

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma \frac{\cos^2(\beta - \varphi)}{(\cos\beta + \sin\varphi)^2}; \quad \alpha_1 = \alpha \operatorname{tg}\beta$$

при $\varphi_0 = 0$ и $\beta = 0$

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma \frac{\cos^2\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}; \quad \alpha_1 = 0$$

при $\varphi_0 = \varphi$ и β не $= 0$

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma \frac{\cos^2(\beta-\varphi)}{\cos^2\beta\left[1+\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\beta\cos(\beta+\varphi)}}\right]^2}; \quad \alpha_1 = \alpha \operatorname{tg}(\beta-\varphi) \qquad (8)$$

при $\varphi_0 = \varphi$ и $\beta = 0$

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma \frac{\cos^2\varphi}{[1+\sqrt{2}\sin\varphi]^2}; \quad \alpha_1 = \alpha \operatorname{tg}\varphi.$$

Таблица 2

значений α и α_1 к формулам 6 и 7

γ	φ°	$m=\operatorname{tg}\beta$											
		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{5}$		0		$+\frac{1}{10}$		$+\frac{1}{6}$		$+\frac{1}{5}$	
		α	α_1	α	α_1	α	α_1	α	α_1	α	α_1	α	α_1
		При $\varphi_0=\varphi$											
2,0	25	0,188	−0,005	0,270	0,066	0,321	0,150	0,346	0,206	0,359	0,247	0,365	0,269
1,9	25	0,179	−0,005	0,257	0,062	0,305	0,142	0,329	0,196	0,341	0,234	0,347	0,255
1,8	20	0,237	0,027	0,312	0,047	0,361	0,131	0,382	0,185	0,395	0,224	0,400	0,244
1,9	20	0,250	0,029	0,330	0,050	0,381	0,139	0,403	0,195	0,407	0,236	0,423	0,258
1,6	40	0,046	0,011	0,095	0,052	0,129	0,108	0,146	0,150	0,134	0,180	0,158	0,198
1,5	40	0,043	0,010	0,089	0,046	0,121	0,102	0,137	0,141	0,144	0,169	0,149	0,186
2,0	40	0,057	0,014	0,118	0,065	0,161	0,135	0,183	0,188	0,199	0,225	0,198	0,248
2,2	45	0,037	0 013	0,009	0,064	0,138	0,138	0,157	0,192	0,162	0,237	0,174	0,261
2,0	30	0,138	0,008	0,246	0,070	0,258	0,149	0,280	0,202	0,299	0 242	0,299	0,263
2,0	20	0,263	0,030	0,377	0,053	0,401	0,146	0,424	0,205	0,434	0,248	0,445	0,271
		При $\varphi_0=0$											
2,0	20	0,309	−0,155	0,418	−0,084	0,488	0	0,525	0,053	0,549	0,062	0,555	0,111
1,9	20	0,294	−0,147	0,397	−0,076	0,466	0	0,499	0,050	0,521	0,037	0,535	0,106
1,8	20	0,278	−0,139	0,376	−0,075	0,441	0	0,473	0,047	0,493	0,052	0,503	0,101
2,0	25	0,223	−0,112	0,330	−0,066	0,405	0	0,443	0,044	0,468	0,070	0,478	0 045
1,9	25	0,212	−0,106	0,314	−0,063	0,385	0	0,421	0,042	0,445	0,075	0,455	0.043
2,0	30	0,166	−0,083	0,151	−0,051	0.333	0	0,372	0,037	0,397	0,066	0,409	0 032
2,0	40	0,067	−0,034	0,148	−0,030	0.217	0	0,255	0,026	0,280	0,047	0,292	0,058
1,6	40	0,044	−0,027	0,118	−0,024	0,174	0	0,204	0,020	0,224	0,037	0,234	0,047
1,5	40	0,050	−0,025	0,111	−0 022	0,163	0	0,194	0,019	0,210	0,035	0,218	0,044
2,2	45	0,043	−0,022	0,119	−0,024	0,189	0	0,228	0,023	0,254	0,042	0,267	0,053

б) С учетом временной нагрузки. Учет временной нагрузки на призму обрушения размером p $т/м^2$ вводится путем добавления к горизонтальной и вертикальной составляющим давления земли коэфициента

$$\varepsilon = 1 + \frac{2p}{\gamma H}.$$

Общие формулы получают вид:

Для горизонтального давления земли

$$E_1 = \alpha H^2\left(1 + \frac{2p}{\gamma H}\right). \qquad (10)$$

Для вертикальной составляющей давления:

$$E_2 = \alpha_1 H^2\left(1 + \frac{2p}{\gamma H}\right).$$

При расчете прежде всего бывает необходимо для различных типов стенок знать значения α, углы призмы обрушения w и общие выражения для давления земли E при $\varphi_0 = 0$, так как эти условия чаще всего принимаются в расчетах, а также выражение опрокидывающего момента $M_{оп}$.

На стр. 648 и 649 приводим таблицу 4 с профилями стенок за номерами типов 1, 2 и 3, что соответствует вертикальной задней грани ($\beta = 0$), наклонной задней грани при $\beta > 0$ и $\beta < 0$. В таблице приняты обозначения типов с буквой „$а$“ для случая без временной нагрузки и с буквой „$б$“ для случая с временной нагрузкой.

Ниже приводим таблицы 3, 5 и 6 для приведенных выше типов стенок для определения значений ξ_1 α' и α''.

Значения величин $\xi = \frac{\alpha}{2}$ для типа загружения α профиля стены 1.

Значения величин

$$E = \frac{1}{2}\xi H^2 \quad \text{и} \quad M_{оп} = \frac{1}{6}\xi H^3.$$

Таблица 3

φ^0 \ λ	2,00	1,90	1,80	1,70	1,60	1,50
15	1,176	1.117	1,058	1,000	1,941	0,882
20	0,980	0.931	0,882	0,833	0,784	0,735
25	0 812	0,771	0,731	0,690	0,650	0,609
30	0,666	0,633	0,599	0,566	0,533	0,500
35	0.542	0.515	0,488	0,461	0,434	0,407
45	0,266	0 325	0,308	0,291	0,274	0,257

Тип загружения б стенки профиля 1:

$$\alpha' = \frac{\xi\left(1+\frac{2h}{H}\right)}{\gamma} = \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right); \quad \left(1+\frac{2h}{H}\right); \quad \alpha'' = \operatorname{tg}^2\left(45-\frac{\varphi}{2}\right)\left(1+\frac{3h}{H}\right);$$

$$E = \frac{\alpha'\gamma H^2}{2}; \quad M_{оп} = \frac{\alpha_1\gamma H^3}{6}$$

Таблица 4

Формулы для определения давления земли при горизонтальной засыпке

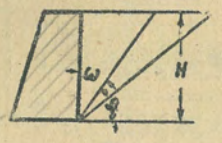
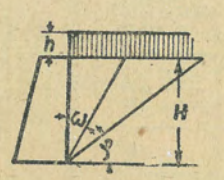
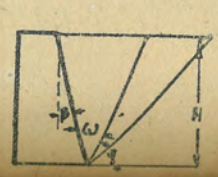
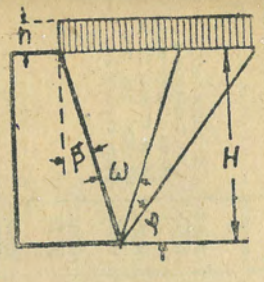
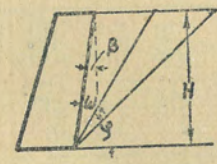
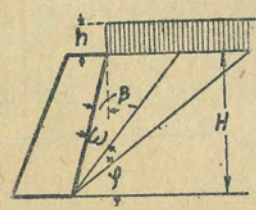
№№	Профиль стенок и тип загрузки	Выражение для угла ω	Выражение для величины ξ	Выражение для велич. давления грунта E	Выражение для величины определения момента M_{on}
1а		$45^\circ - \frac{\varphi}{6}$	$\gamma \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\xi H^2$	$\frac{1}{6}\xi H^3$
1б		$45^\circ - \frac{\varphi}{2}$	$\gamma \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\xi H^2 \times \left(1+\frac{2h}{H}\right)$	$\frac{1}{6}\xi H^3\left(1+\frac{3h}{H}\right)$
2а		$45^\circ - \frac{\varphi-\beta}{2}$	$\gamma\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi+\beta}{2}\right)+\operatorname{tg}\beta\right]^2 \operatorname{Cos}\beta$	$\frac{1}{2}\xi H^2$	$\frac{1}{6}\xi H^3$
2б		$45^\circ - \frac{\varphi-\beta}{2}$	$\gamma\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi+\beta}{2}\right)+\operatorname{tg}\beta\right]^2 \operatorname{Cos}\beta$	$\frac{1}{2}\xi H^2 \times \left(1+\frac{2h}{H}\right)$	$\frac{1}{6}\xi H^3\left(1+\frac{3h}{H}\right)$
3а		$45^\circ - \frac{\varphi+\beta}{2}$	$\gamma\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi-\beta}{2}\right)-\operatorname{tg}\beta\right]^2 \operatorname{Cos}\beta$	$\frac{1}{2}\xi H^2$	$\frac{1}{6}\xi H^3$
3б		$45^\circ - \frac{\varphi+\beta}{2}$	$\gamma\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi-\beta}{2}\right)-\operatorname{tg}\beta\right]^2 \operatorname{Cos}\beta$	$\frac{1}{2}\xi H^2 \times \left(1+\frac{2h}{H}\right)$	$\frac{1}{6}\xi H^3\left(1+\frac{3h}{H}\right)$

Таблица 5

значений α'.

$\frac{h}{H}$ \ φ	15	20	25	30	35	40	45	Примечание
0,10	0,703 / 0,706	0,588 / 0,637	0,487 / 0,528	0,400 / 0,433	0,325 / 0,352	0,261 / 0,282	0,205 / 0,222	Верхние цифры дают величины значения α', а нижние — α''
0,20	0 824 / 0,942	0,686 / 0,784	0,568 / 0,560	0,465 / 0,533	0,379 / 0,434	0,304 / 0,347	0,239 / 0,273	
0,30	0.942 / 1,135	0.784 / 0,932	0,650 / 0,772	0,533 / 0,633	0,433 / 0,515	0,348 / 0,412	0,273 / 0,325	
0,40	1,060 / 1,295	0,782 / 1,078	0,731 / 0,894	0,600 / 0,733	0,488 / 0,597	0,391 / 0,477	0,308 / 0,576	
0.50	1,176 / 1,470	0,980 / 1,255	0,812 / 1,030	0,666 / 0,833	0,542 / 0,651	0,434 / 0,542	0,342 / 0,427	
0,60	1,295 / 1,645	1, 080 / 1,372	1,893 / 1,135	0.733 / 0,933	0,596 / 0.732	0,478 / 0,606	0,376 / 0,478	
0,70	1.413 / 1.825	1.177 / 1,520	0,975 / 1,257	0,800 / 1,033	0,650 / 0,941	0,522 / 0,673	0.411 / 0,530	
0,80	1,530 / 2,000	1,175 / 1.666	1,055 / 1,380	0,966 / 1.133	0,705 / 0,922	0,565 / 0,738	0,444 / 0,582	
0.90	1,650 / 1,175	1,372 / 1,814	1,137 / 1,500	0,933 / 1,233	0,758 / 1,010	0,608 / 0,830	0,478 / ,536	
1,00	1.766 / 2,350	1.470 / 1,960	1,220 / 1,623	0,899 / 1,333	0,813 / 1,085	0,652 / 0,858	0.513 / 0,683	

Значения величин α' к типу загружения 2а и 3а

$$\alpha_1 = \frac{\xi}{\gamma}\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi \pm \beta}{2}\right) \pm \operatorname{tg}\beta\right]^2 \cos\beta$$

$$E = \frac{1}{2}\alpha'\gamma H^2; \quad M_{on} = \frac{1}{6}\alpha'\gamma H^3$$

Таблица 6

tg β \ φ	15	20	25	30	35	40	45	Примечание
1/3	0,677 / 0,479	0,630 / 0,389	0.553 / 0,281	0,427 / 0,222	0,416 / 0,162	0.358 / 0,145	0,306 / 0,077	Верхние цифры дают значения величин α' для профиля стенки 2, а нижние для профиля стенки 3
1/4	0,684 / 0,504	0,592 / 0,410	0,515 / 0,354	0,441 / 0,246	0,378 / 0,190	0,321 / 0,136	0,269 / 0,097	
1/5	0,660 / 0,534	0,568 / 0 426	0,496 / 0,336	0,417 / 0,264	0,354 / 0.261	0,297 / 0,151	0.246 / 0,116	
1/6	0,647 / 0,543	0 555 / 0,438	0.472 / 0,348	0.403 / 0,276	0,338 / 0,213	0.282 / 0.162	0,233 / 0,120	

$\gamma = 1{\cdot}78 \qquad \varphi = 30^\circ$

$k = 1/3 \qquad \delta = 2{\cdot}20\ tn$

$m = 0_6$

$n = 1/3$

$E = \alpha H^2 = 0{\cdot}259H^2$

$E_1 = \alpha_1 H^2 = 0{\cdot}0069H^2$

$M_y = \alpha_1 H^3 = 0{\cdot}122H^3$

$M_0 = \alpha_2 H^3 = 0{\cdot}086H^3$

$\eta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1{\cdot}40$

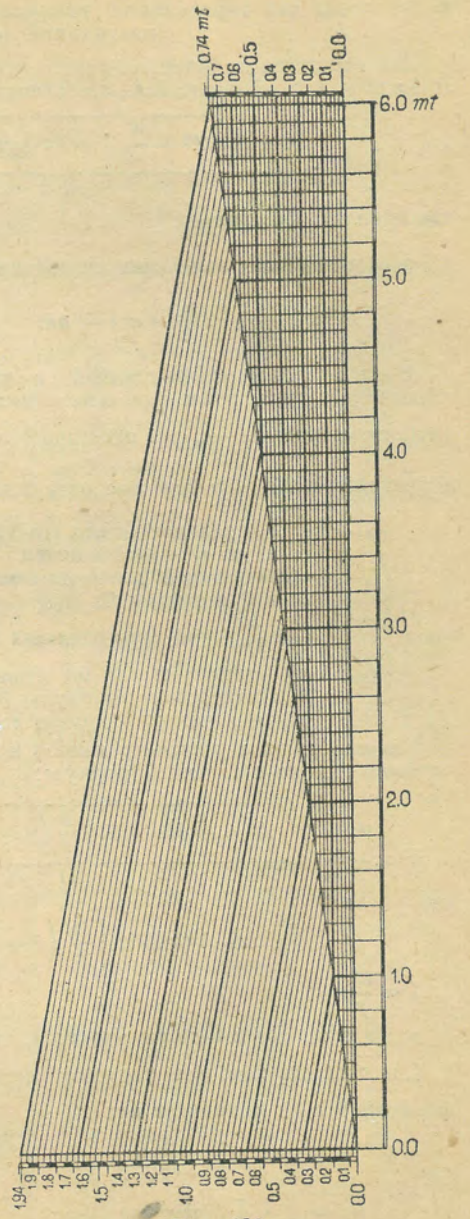


Рис. 139.

2. Формулы для определения размеров подпорных стенок при горизонтальной засыпке

Для определения размеров стенок по основанию при горизонтальной засыпке можно рекомендовать следующую формулу:

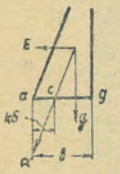
$$\xi' = \frac{A + \sqrt{A^2 + \frac{4}{3}(1-2k)\left(n^2 - m^2 + 2\frac{\alpha}{\delta} + 2\frac{\alpha_1 m}{\delta}\right)}}{2(1-2k)}, \qquad (9)$$

где приняты обозначения:

m — коэфициент заложения внутреннего откоса стенки.

$$A = (k-1)\left(2\frac{\alpha_1}{\delta} - m\right) - nk.$$

k — коэфициент, указывающий в какой части основания проходит равнодействующая давления земли; обычно k принимается для стенки без растяжения равным $\frac{1}{3}$, для практических расчетов допускаются значения в пределе $k = \frac{1}{5}$. Графическое изображение значений k см. на чертеже 140.



Черт. 140.

δ — единичный вес кладки подпорной стенки.

α и α_1 — коэфициенты горизонтальной и вертикальной составляющей давления земли, выражающиеся по формулам 2 и 3 и таблице 2.

$\xi = \frac{b}{H}$, или относительная ширина стенки по низу,

b — ширина стенки по основанию.

Приведенная формула (9) легко выражается графиками, образец которого приводится выше (см. черт. 139).

Размер стенок с учетом временной нагрузки в соответствии с черт. 141 определяется по следующей формуле:

$$\xi' = \frac{A_1 + \sqrt{A_1^2 + \frac{4}{3}(1-2k)\left[\frac{2}{\delta}\left(1 + \frac{3}{\gamma\lambda}\right)(\alpha_1 m + \alpha) + (n^2 - m^2)\right]}}{2(1-2k)}, \qquad (11)$$

где

$$A_1 = (k-1)\left[\frac{2\alpha_1}{\delta}\left(1 + \frac{2}{\gamma\lambda}\right) - m\right] - kn$$

$$\lambda = \frac{H}{p}$$

α, α_1, n, m, δ и k — те же значения, что и в формуле (9).

Для частного наиболее распространенного случая при $m = 0$ и $k = \frac{1}{3}$ формулы 9 и 11 принимает вид

$$\xi = -2\frac{\alpha_1}{\delta} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4\alpha_1}{\delta} + n\right)^2 + 4\left(n^2 + 2\frac{\alpha}{\delta}\right)}$$

$$\xi' = \frac{1}{2}\left[\sqrt{Б^2 + B} - Б\right];$$

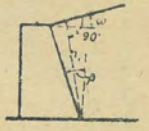
где

$$Б = \frac{4\alpha_1}{\delta}\left(1 + \frac{2}{\gamma\lambda}\right) + n, \qquad B = 4\left[\frac{2\alpha}{\delta}\left(1 + \frac{3}{\gamma\lambda}\right) + n^2\right]. \qquad (12)$$

Дополнительно при $\lambda = \infty$ получаем:

$$\xi' = -\frac{1}{2}\left[\frac{4\alpha_1}{\delta} + n\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4\alpha_1}{\delta} + n\right)^2 + 4\left(\frac{2\alpha}{\delta} + n^2\right)},$$

т. е. получаем формулу одинаковую с расчетом стенок без временной нагрузки.



Черт. 141.

При расчете подпорных стенок с внутренней наклонной гранью, когда угол наклона является положительным или $m = \operatorname{tg}\beta > 0$, размеры стенок получаются при принятии угла трения грунта о стенку $\varphi_0 = 0$ чрезвычайно большими, поэтому чаще всего для расчета таких подпорных стенок φ_0 считают равным φ, т. е. приближают условия расчета подпорных стенок этого типа к трению призмы обрушения грунта по грунту, что в некоторой степени оправдывается и фактическими условиями работы подпорных стенок

3. Расчет подпорных стенок при негоризонтальной засыпке

Расчет подпорных стенок при негоризонтальной засыпке чаще всего производится по методу Ренкена с учетом приложения равнодействующей давления земли под углом, соответствующим углу засыпки ρ. В этом случае чаще всего принимается во внимание, что угол засыпки ρ является углом естественного откоса φ и следовательно давление грунта определяется как две составляющие горизонтальная и вертикальная давления, приложенного под углом φ к стенке.

Общее выражение для формул давления приводится в проработке проф. Скрыльникова в таблице 7 на стр. 654.

Ниже приводим таблицы 8, 9 и 10 для определения давления земли на подпорные стенки при негоризонтальной засыпке. В них давление земли выражается формулой

$$E = \frac{1}{2}\gamma H^2\alpha' = \alpha H^2 \text{ (без временной нагрузки)},$$

$$E = \frac{1}{2}\gamma H^2\alpha' + \gamma h H\alpha' = \alpha H^2 + 2hH \text{ (с временной нагрузкой)},$$

где h временная нагрузка, выраженная через высоту грунта, т. е. $h = \frac{p}{\gamma}$.

Значения величин α для типа загружения 1 при $\tau = \varphi$

$$\alpha' = \gamma\cos^2\varphi,$$

$$E = \alpha H^2; \quad M_{оп} = \frac{1}{6}\alpha H^3.$$

Таблица 7

№ №	Профиль стенок и тип загрузки	Выражение для угла ω	Выражение для величины α	Выражение для велич. давления грунта E	Выражение для величины определения момента M_{on}
1		при $\tau = \varphi$ имеем $\omega = 90° - \varphi$	$\gamma \operatorname{Cos}^2 \varphi$	$\frac{1}{2} \alpha H^2$	$\frac{1}{6} \alpha H^3$.
2		—	$\gamma \dfrac{\operatorname{Cos} \varphi}{(1 + \sqrt{2} \operatorname{Sin} \varphi)^2}$	$\frac{1}{2} \alpha H^2$	$\frac{1}{6} \alpha H^3$
3		$\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \cdot \left[1 + \dfrac{ab}{(H+b)^2 \operatorname{tg} \omega}\right]}$	—	$\frac{2}{1} \gamma \cdot \dfrac{(H+b)^2}{\operatorname{tg}(\omega + \varphi)} \cdot \dfrac{\operatorname{tg} \omega - \frac{ab}{(H+b)^2}}{\operatorname{tg}(\omega + \varphi)}$	$\dfrac{(H+b)^2 \operatorname{tg} \omega - ab}{\operatorname{tg}(\omega + \varphi)}$

Примечание. В формуле для типа 3 принято, что точка приложения силы E лежит на высоте $l = \frac{H}{3}$, но для точного определения этой величины необходимо найти центр тяжести призмы обрушения, а затем провести прямую параллельно плоскости обрушения, и точка пересечения прямой с задней гранью стенки дает точку приложения силы E. Принятие $l = \frac{H}{3}$ вполне допустимо, так как трение засыпки о стену в формулы не введено, а следовательно введено некоторое преувеличение давления.

Таблица 8

значений α.

φ \ γ	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5
15	1,866	1,773	1,679	1,586	1,493	1,400
20	1,768	1,680	1,591	1,503	1,414	1,326
25	1,642	1,560	1,478	1,396	1,314	1,332
30	1,500	1,425	1,350	1,275	1,200	1,125
35	1,342	1,275	1,208	1,141	1,074	1,007
40	1,176	1,117	1,058	1,000	0,941	0,882
45	1,00	0,950	0,900	0,850	0,800	0,750

Значения величин α для типа загружения 2 при $\tau = \varphi$

$$E = \frac{1}{2} \alpha H^2; \quad M_{on} = \frac{1}{6} \alpha H^3$$

Таблица 9

значений α.

φ \ γ	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
15	0,778	0,830	0,882	0,934	0,986	1,040
20	0 641	0,684	0,727	0 768	0,812	0,855
25	0 533	0,568	0,604	0,640	0,676	0,712
30	0,445	0,474	0,504	0,533	0,563	0,593
35	0,376	0 401	0,426	0,452	0 476	0,502
40	0,317	0 338	0,359	0,380	0,402	0,422
45	0,265	0,283	0,300	0,318	0,336	0 354

Значения величин $\alpha' = \frac{\alpha}{\gamma}$ для типа загружения 3 при $\tau = \varphi$

$$E = \frac{\alpha' \gamma H^2}{2}; \quad M_{on} = \frac{1}{6} \alpha' \gamma H^3$$

Таблица 10

значений α′

b/H \ φ	15	20	25	30	35	40	45
0,00	0 588	0,490	0,406	0,333	0 271	0,217	0 171
0 10	0,687	0,575	0 477	0,394	0,318	0 256	0,204
0 20	0 747	0 636	0,528	0 441	0,357	0 292	0,231
0,30	0 787	0,680	0 572	0,478	0,388	0,321	0,255
0,40	0,811	0,708	0,602	0,508	0,416	0,344	0 276
0,50	0,837	0,733	0,632	0,534	0 438	0,366	0 294
0,60	0 847	0,750	0,650	0,553	0,456	0,382	0,310
0,70	0,858	0,763	0,667	0,569	0,472	0 397	0,320
0 80	0,863	0,776	0,681	0 588	0,487	0,410	0 330
0 90	0,873	0,790	0,692	0,598	0,501	0,422	0,340
1,00	0 876	0,790	0,702	0 608	0,514	0 433	0,350
∞	0,933	0,884	0,821	0,750	0,671	0,588	0,500

4. Точка приложения давления грунта

При всех расчетах подпорных стенок точку приложения равнодействующей давления грунта обычно считают приложенной на $\frac{1}{3}$ высоты от основания. Поэтому все расчеты на устойчивость подпорных стенок на опрокидывание для горизонтальной составляющей давления земли (E_1) входит плечо $l=\frac{H}{3}$. При расчете подпорных стенок с временной нагрузкой обычно принимают плечо для двух сил раздельно для давления земли в виде треугольника соответствующего давлению грунта с горизонтальной засыпкой и второе — давления временной нагрузки, представляющего эпюру в виде прямоугольника. В этом случае получаем для первой силы (E) плечо $l=\frac{H}{3}$, а для силы, вызванной давлением временной нагрузки, обозначаем ее через E_p, плечом является $l_p=\frac{H}{2}$ (см. черт. 142).

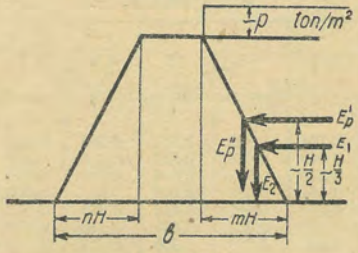


Рис. 142.

При проверочных опытных исследованиях точно установить бесспорность приложения точки давления грунта на высоте $\frac{1}{3}$ от основания соответствующей эпюры давления, выраженной треугольником, не удалось, но во всяком случае при всех исследованиях установлено, что точка приложения давления грунта находится вблизи указанного центра давления и поэтому для практических расчетов эти размеры оказываются достаточными и дающими правильное выражение активных сил давления земли.

В. Пассивное давление земли

Пассивное давление земли в расчете гидротехнических сооружений встречается в основном при расчете выпора грунта под влиянием давления на него по основанию фундаментов и при расчете на сдвиг подпорных стенок, имеющих засыпку с наружной стороны.

Пассивное давление грунта учитывается по формуле:

$$E_p=\frac{1}{2}\cdot H^2\cdot \operatorname{tg}^2\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right), \qquad (15)$$

где

γ — единичный вес грунта,

H — высота грунта, соответствующая его напору,

φ — угол естественного откоса.

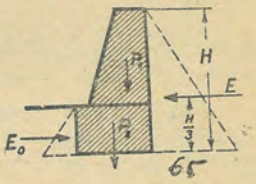
При сравнении пассивного давления грунта с его активным давлением для частных случаев при $\varphi=30^\circ$ получается увеличение пассивного давления по сравнению с активным примерно на 800%.

Расчет фундаментов

а) Напряжение на грунт

Расчет фундаментов подпорных стенок в гидротехнике в настоящее время является наименее обоснованным расчетом. Практически в гидротехнических сооружениях, в которых фундаменты подпорных стенок непосредственно соприкасаются с относительно массивными флютбетами, следует эти фундаменты рассматривать как составляющие одно целое с флютбетами, а расчет их следует производить как специального флютбета, загруженного двумя массивными стенками и моментом от давления земли; причем флютбет рассчитывается как балка на упругом основании. Однако наличие швов между основной частью флютбета и фундаментами подпорных стенок дает основание в отдельных случаях производить расчет фундаментов самостоятельно. Расчет фундаментов в основном сводится к расчету напряжений грунта по крайней кромке линии фундамента.

Расчет напряжений грунта по крайней кромке линии фундамента осложняется следующими соображениями.



Черт. 143а.

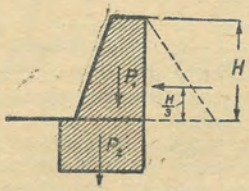
При относительно невысоких подпорных стенках гидротехнических сооружений (наиболее часто встречаются высоты порядка 2—4 *м* при глубине фундаментов не менее 1,0—2,0 *м*) они имеют фундаменты значительной глубины, что дает большое расхождение в значениях давлений земли на высоту только подпорной стенки и подпорной стенки вместе с фундаментом. Поэтому устойчивость подпорных стенок по основанию фундаментов оказывается уменьшенной и значения напряжений грунта преувеличенными, не считая случаев расчета набережных, где условия работы подпорных стенок оказываются иными, так как они могут работать полной высотой (высота стенки плюс фундамент).

Для приведения в соответствие расчетных данных и фактических напряжений грунта прибегают к следующим искусственным приемам кроме приведенного выше, являющемся наиболее точным приемом расчета напряжений грунта по основанию как под балкой, лежащей на упругом основании:

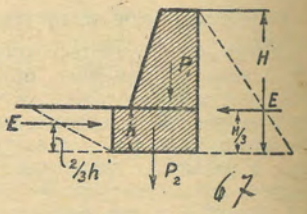
1) Учет давления грунта с противоположной стороны (см. черт. 143а) в общих расчетах дает незначительное влияние и незначительное уменьшение напряжения грунта.

2) В отдельных случаях при расчете напряжений грунта по основанию пробуют учитывать только активное давление земли E, но на высоту равную высоте стенки (см. черт. 143б), а активное давление грунта на стенку фундамента считают уравновешивающимся пассивным отпором грунта с противоположной стороны. В этом случае напряжения на грунт оказываются по расчету несколько меньшими, но общая схема расчета является менее вероятной.

3) В отдельных случаях при расчете фундамента подпорных стенок принимают в расчет отпор флютбета, как это изображено на чертеже 143в. В этом случае величина отпора равна полному горизонтальному активному давлению земли, преобразуемому в треугольник давления отпора с высотой, равной глубине фундамента. Расчет напряжения грунта и устойчивость стенок по основанию фундамента в этом случае оказываются более удовлетворительными. Однако вопрос наличия отпора флютбета, как это изображено на чертеже 143в является вопросом недоказанным и спорным.



Черт. 143б.



Черт. 143в.

Повидимому наиболее правильным является для невысоких стенок при глубине заложения фундамента, равной не менее половины высоты стенки, считать давление по основанию фундамента равномерным, определяемым следующим уравнением:

$$\sigma = \frac{P_1}{\omega}, \qquad (16)$$

где P_1 — представляет вес стенки с фундаментом и вертикальной составляющей давления земли, а ω — площадь основания стенки.

б) Глубина заложения фундамента

Глубина заложения фундамента может быть определена по ниже приведенным формулам в таблице 11.

Таблица 11

№	Автор	Формула
1.	Крей	$H_0 = h \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$.
2.	Паукер	$h = H_0 \operatorname{tg}^4\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$.
3.	Янковский	$h = 0{,}5 H_0 \operatorname{tg}^4\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$.
4.	Спальвинг	$H_0 = h(1 + 2\operatorname{tg}\varphi)^3 + b\sqrt{8\operatorname{tg}\varphi^3(1 + 2\operatorname{tg}\varphi)}$.
5.	Пузыревский . .	$h = H_0 \frac{\operatorname{ctg}\varphi + \varphi - \frac{1}{2}\pi}{\operatorname{ctg}\varphi + \varphi + \frac{1}{2}\pi} - \frac{b\pi \operatorname{ctg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{2\operatorname{ctg}\varphi + \varphi + \frac{1}{2}\pi}$.
6.	Бельзецкий . .	$h = H_0 \operatorname{tg}^4\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) - b\frac{1 - \operatorname{tg}^4\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)}$.

В выше приведенных формулах:

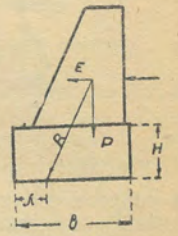
$$H_0 = \frac{P}{\gamma\Omega},$$

т. е. вес стены заменен эквивалентным ей по весу столбом грунта, имеющим высоту H_0.

h — глубина заложения фундамента,
P — вес стенки,
Ω — площадь распределения давления на грунт,
φ — угол естественного откоса грунта,
γ — удельный вес грунта.

При определении площади Ω надо иметь в виду (см. черт. 144), что Ω берется в зависимости от λ по следующим данным при $\lambda > \frac{1}{3} b$ принимают $\Omega = bl$.

при $\lambda < \frac{1}{3} b$ принимают $\Omega = 3\lambda l$.



Черт. 144.

Здесь l — длина фундамента, измеренная нормально к плоскости чертежа

VI. РАСЧЕТ БАЛОК НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В гидротехнической практике встречаются следующие основные случаи балок, лежащих на упругом основании.

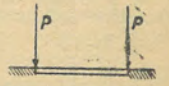
а) Основания высоких зданий, высоконапорных башен и элеваторов представляют балки, загруженные по концам сосредоточенными силами согласно чертежу 145 и лежащие на сплошном упругом основании.



б) Флютбет доков и бетонных шлюзов представляет балку (см. черт. 146), загруженную двумя массивными стенками и лежащую на сплошном упругом основании.

в) Железобетонные флютбеты шлюзов, перепадов, быстротоков и других гидротехнических сооружений представляют собой балку на упругом основании, загруженную по концам вертикальными силами (см. черт. 147) — собственным весом стенки — и моментами давления земли.

Помимо приведенных нагрузок во всех трех случаях — a, b, c — возможны еще дополнительные нагрузки от бычков, расположенных в пролете, которые представляют вертикальные, а иногда и моментные нагрузки в пролете.



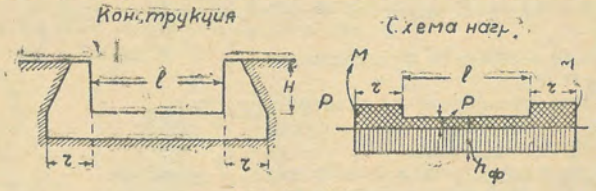
Черт. 145.

Во всех схемах нагрузок (см. черт. 147) вводим следующие обозначения:

P — вертикальные силы — вес стенки и вертикальная составляющая — давление земли,
P_1 — вес бычка или ряда бычков,
M — внешний момент в частности от давления земли,
H_ϕ — равномерно распределенный фильтрационный выпор,

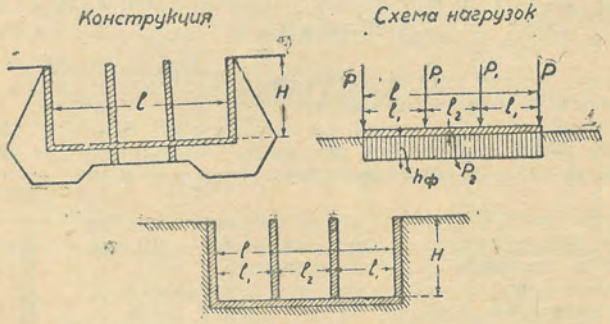
q_g — равномерно распределенная нагрузка от соответственного веса флютбета или стенок.

При всех расчетах балок на упругом основании в гидротехнике следует придерживаться принципа независимости действия силы, который обосновывается самим характером линейного диференциального уравнения для балки



Черт. 146.

на упругом основании. Соответственно с этим деформации каждой последующей совокупности сил, раз они положительны, будут прибавляться к уже имеющейся деформации от предыдущей совокупности сил путем простого арифметического сложения или вычитания в зависимости от того, имеющаяся деформация положительная или отрицательная. Проще говоря, деформация упругого сжатия грунта под балкой от определенной нагрузки каждый раз будет откладываться от имеющегося уже упругого сжатия или, вообще говоря, от криволинейной поверхности грунта, получившей такой вид от нагрузок, действующих непосредственно перед рассматриваемой.



Черт. 147.

Следовательно для всех схем нагрузок расчет можно производить последовательным наложением совокупности сил, причем основными расчетными схемами нагрузок будут служить следующие в зависимости от этапов возведения тех или иных гидротехнических сооружений.

1. На построенном флютбете или основании возводятся боковые стенки — схема нагрузок изображена на чертеже 148.

2. На том же флютбете возводятся бычки, влияние которых учитывается дополнительно к приведенной схеме нагрузки по чертежу 149.

3. Сооружение засыпается грунтом фактически дополняется нагрузка (см. черт. 150) моментами от давления земли.



Черт. 148.

4. В сооружение пускается вода, начинает действовать фильтрационный выпор, и получается нагрузка по черт. 151.

В качестве расчетных усилий необходимо принимать не напряжения от перечисленных выше 4 нагрузок, а влияние от суммы следующих нагрузок.

1-й этап — сооружение не засыпано, возведены флютбет, устои и бычки.



Черт. 149.

Схема нагрузки балки на упругом основании — ряд вертикальных сил (см. черт. 152).

2-й этап — сооружение закончено, произведена засыпка грунта за стенки сооружения; получаем совокупность нагрузок от вертикальных сил, принятых в расчет в первом этапе плюс (+) добавочное усилие от момента, вызываемого давлением земли на боковые стенки. В отдельных случаях, когда учитывается и вертикальная составляющая давления земли (P_2, суммируются усилия и от этих добавочных вертикальных сил (см. чертеж 153).

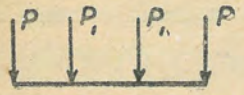


Черт. 150.

3-й этап. В готовом сооружении пропускается вода, и начинает действовать фильтрационный выпор. К получаемым расчетным усилиям по 2-му этапу добавляется влияние от фильтрационного выпора, и таким образом получаются результирующие расчетные элементы при действии сооружения (см. черт. 154).



Черт. 151.



Черт. 152.

Производя расчеты любого сечения, за расчетные усилия как на сжатие, так и на растяжение, должны быть взяты те пределы, которые оказываются максимальными для одного из перечисленных этапов.

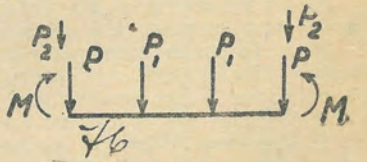
При рассмотрении теории расчета балок на упругом основании принимаются во внимание следующие положения.

а) Напряжения грунта считают пропорциональными упругим его осадкам, т. е.

$$q = ky, \qquad (1)$$

где y — осадка или прогиб и k — модуль упругости грунта или модуль постели.

б) На изгиб балок, лежащих на упругом основании, оказывают влияние только неравномерно распределенные нагрузки, сосредоточенные силы и частично равномерно распределенные нагрузки, причем под нагрузками понимаются как действующие силы, так и действующие моменты.



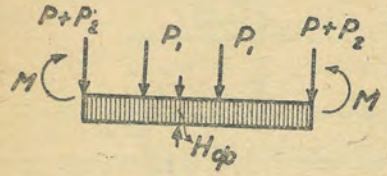
Черт. 153.

в) При расчетах балок на упругом основании главнейшим фактором является модуль деформации или радиус жесткости балки, определяемый по уравнению

$$S = \sqrt[4]{\frac{4EI}{bk}}, \qquad (2)$$

где E — коэфициент упругости материала сооружения,
I — момент инерции сечения балки,
b — ширина рассматриваемой балки основания или его полосы,
k — модуль постели или модуль упругости грунта.

г) Модуль деформации и напряжения в балке, лежащей на упругом основании, зависят от модуля упругости грунта.



Черт. 154.

Упругая часть напряжения грунта, зависящая от неравномерной нагрузки, выражается:

$$q - \frac{q_g}{b} = ky, \qquad (3)$$

где q_g — равномерно распределенная нагрузка.

Величина ky имеет размерность в $кг/см^2$ или $т/м^2$. Для сохранения размерности величины k должны измеряться в $кг/см^3$, или $т/м^3$. Пределами значения величины k являются 1 — 150 $кг/см^3$. В настоящее время значение модуля постели k для различных грунтов и искусственных оснований недостаточно изучено, не имеется достаточного количества определенных опытами значений k для отдельного вида грунтов, не считая того, что вовсе не изучено влияние на величину k влажности грунтов и размера испытываемой или работающей площадки. Однако, учитывая, что изменение величины k даже до 100% вызывает изменение в расчетных элементах в пределах от 10 до 20%, можно пользоваться даже и менее точными данными для значения k. Для пользования и выбора значений k можно привести следующие данные.

1. Головное сооружение Малекской ветки Голодностепского канала рассчитывалось для грунта типа плывуна, на $k = 1$ $кг/см^3$.

2. Проф. Занден для нормальных условий гражданских зданий берет $k = 2$ $кг/см^3$.

3. Проф Пастернак принимает для нормальных условий фундамента зданий $k = 5$ $кг/см^3$.

4. Бурджарский перепад в Ташкенте в плотном лессовом грунте рассчитан на k от 2 до 5 $кг/см^3$.

5. Проф. Пузыревский рекомендует для нормальных песчанистых грунтов $k = 1{,}5 — 2{,}0$ $кг/см^3$.

6. Проф. Франциус рекомендует для доков на песчанистом основании принимать $k = 10$ $кг/см^3$, учитывая размер крупных опорных площадок под доками; опытные данные, полученные им для k в тех же условиях дали $k = 1$ $кг/см^3$.

7. По Циммерману для баласта при расчетах железнодорожных шпал принимают значение k в пределах от 3 до 8 $кг/см^3$.

Креутер связал значения k с временем укладки баластного материала и считал $k = 6$ $кг/см^3$ для свеже уложенного баласта, для слежавшегося $k = 9$ $кг/см^3$ и для уплотнившегося $k = 16$ $кг/см^3$.

8. Бренеке для оснований на песке принимает $k = 1 — 4$ $кг/см^3$.

9. Инженер Лейтц для расчета бетонной одежды дороги с подготовкой основания дает $k = 4 — 128$ $кг/см^3$, учитывая относительно большую площадь основания под бетонированной одеждой дороги.

10. Американские инженеры для расчета бетонных дорог принимают k в пределах 1,3 — 5 $кг/см^3$.

11. Для песка по опытам берлинской городской железной дороги получено $k = 18{,}24$ $кг/см^3$.

12. По опытам в Киле для песка получено $k = 13{,}3$ $кг/см^3$.

13. По опытам в Бремене для песка $k = 22{,}1$ $кг/см^3$.

д) Обычно принимается, что упругое основание следует за изгибом балки воспринимая как сжимающие, так и растягивающие напряжения. Вполне ясно, что основание гидротехнического сооружения воспринимать растягивающие напряжения не может. В большинстве случаев растягивающие напряжения в расчетах гидротехнических сооружений не будут появляться, так как влияние собственного веса стенок и других постоянных нагрузок в отдельных случаях могут доминировать и предопределять общий положительный прогиб балки. В отдельных случаях возможно появление растягивающих напряжений грунта. В этих случаях возможны два выхода:

1-й — принимать в расчет растягивающие напряжения, так как это в сильной степени не искажает результатов расчетов напряжений грунта и усилий в самих балках,

2-й — можно путем приближенных расчетов, которые приводятся ниже (см. стр. 681), исключить отрицательные реакции грунта из расчета.

Принимаем для расчета следующие обозначения:

1. Внешние силы:

а) сосредоточенные нагрузки — P;
б) моменты от внешних сил — M;
в) равномерно распределенные внешние нагрузки (или собственный вес балки) — q_g.

2. Усилия, возникающие в балке:

а) перерезывающая сила — Q;
б) изгибающий момент в балке — G;
в) интенсивность нагрузки или напряжение грунта под балкой — q;
г) угол поворота оси балки при изгибе — d;
д) ордината прогибов оси балки — y.

3. Фиктивные силы:

а) изгибающий момент — G'
б) перерезывающие силы — Q'

4. Элементы балки:

а) момент инерции — I;
б) модуль упругости материала балки — E;
в) ширина рассматриваемой балки — b.

5. Отдельные обозначения в расчетах:

а) тригонометрические гиперболические функции:
cos гиперболический — Ch;
sin гиперболический — Sh;
б) тригонометрические круговые функции cos, sin, tg;
в) интегральные постоянные C_i, C_i', A_i, A_i';
г) абсциссы x;
д) приведенные абсциссы $\varphi = \frac{x}{S}$;
е) модуль деформации $S = \sqrt[4]{\frac{4EI}{bk}}$.

Основные уравнения в дифференциальном виде для расчета балок на упругом основании имеют вид:

$$\frac{d^4G}{dx^4}+\frac{4G}{S^4}=0 \qquad (3а)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\left(y-\frac{q_g}{k}\right)\frac{4}{S^4}=0 \qquad (3-б)$$

Общий интеграл уравнения был дан еще Винклером для уравнения 3-б в следующем виде:

$$y=\frac{q_g}{k}+C_1'e^{\varphi}\sin\varphi+C_2'e^{\varphi}\cos\varphi+C_3'e^{-\varphi}\sin\varphi+C_4'e^{-\varphi}\cos\varphi. \qquad (4а)$$

В последнее время общий вид интегрального выражения уравнения 3-б применяется в следующем виде:

$$y=\frac{q_g}{k}+C_1\operatorname{Ch}\varphi\cos\varphi+C_2\operatorname{Sh}\varphi\sin\varphi+C_3\operatorname{Sh}\varphi\cos\varphi+C_4\operatorname{Ch}\varphi\sin\varphi, \qquad (4-б)$$

где интегральные постоянные с интегральными постоянными уравнения 4-а связаны следующими равенствами:

$$C_1=C_2'+C_4';\quad C_2''=C_1'-C_3';\quad C_3'=C_2'-C_4';\quad C_4=C_1'+C_3'.$$

В соответствии с уравнением 4-б общий интеграл уравнения 3-а представляется в следующем виде:

$$G=C_1\operatorname{Ch}\varphi\cos\varphi+C_2\operatorname{Sh}\varphi\sin\varphi+C_3\operatorname{Sh}\varphi\cos\varphi+C_4\operatorname{Ch}\varphi\sin\varphi. \qquad (6)$$

Как указывалось выше, в дальнейшем как правило **приводим все нагрузки к концевым нагрузкам** балки, используя в этом случае метод, предложенный инж. Пастернаком, что дает значительные упрощения при расчетах.

В общем методе исследования исключаем упругие осадки балок вместо обычно применяемого исключения изгибающего момента. Для расчетов пользуемся основными уравнениями с общим его интегралом в виде уравнения (6). Общий вид уравнений, необходимых для расчета балок на упругом основании, получается путем трехкратного диференцирования уравнений (6), что дает следующие основные общие уравнения:

$$\begin{aligned}
G&=C_1\cdot Y_4+C_2Y_1+C_3Y_2+C_4Y_3\\
SQ&=-C_1Y_2+C_2Y_3+C_3Y_1+C_4Y_2\\
\frac{S^2}{2}q&=-C_1Y_1+C_2Y_4-C_3Y_3+C_4Y_2\\
\frac{S^3}{2}d&=-C_1Y_3-C_2Y_2-C_3Y_2+C_4Y_1,
\end{aligned} \qquad (7)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
Y_1&=\operatorname{Sh}\varphi\sin\varphi; & Y_2&=\operatorname{Ch}\varphi\sin\varphi-\operatorname{Sh}\varphi\cos\varphi;\\
Y_3&=\operatorname{Ch}\varphi\sin\varphi+\operatorname{Sh}\varphi\cos\varphi; & Y_4&=\operatorname{Ch}\varphi\cos\varphi;\\
Y_5&=\operatorname{Sh}\varphi\cos\varphi; & Y_6&=\operatorname{Ch}\varphi\sin\varphi;\\
Y_7&=\operatorname{Ch}\varphi\cos\varphi-\operatorname{Sh}\varphi\sin\varphi; & Y_8&=\operatorname{Ch}\varphi\cos\varphi+\operatorname{Sh}\varphi\sin\varphi.
\end{aligned} \qquad (8)$$

5) Для облегчения подсчетов приведены таблицы значений Y-ков (см. табл. 1).

Таблица 1

Для симметрично и одностороне загруженных коротких балок на упругом основании

φ	Y_1 $\operatorname{Sh}\varphi\sin\varphi$	Разн.	Y_2 $\operatorname{Ch}\varphi\sin\varphi-\operatorname{Sh}\varphi\cos\varphi$	Разн.	Y_3 $\operatorname{Ch}\varphi\sin\varphi+\operatorname{Sh}\varphi\cos\varphi$	Разн.	Y_4 $\operatorname{Ch}\varphi\cos\varphi$	Разн.
0,00	0,0000		0,0000		0,0000		1,0000	
		25		0		1 000		0
0,05	0,0025		0,0000		0,1000		1,0000	
		75		6		1 000		0
0,10	0,0100		0,0006		0,2000		1,0000	
		125		16		1 000		1
0,15	0,0225		0,0022		0,3000		0,9999	
		175		32		1 000		2
0,20	0,0400		0,0054		0,4000		0,9997	
		225		50		1 000		4
0,25	0,0625		0,0104		0,5000		0,9993	
		275		76		998		6
0,30	0,0900		0,0180		0,5998		0,9987	
		325		106		998		12
0,35	0,1225		0,0286		0,6996		0,9975	
		375		141		997		18
0,40	0,1600		0,0427		0,7993		0,9957	
		424		181		995		25
0,45	0,2024		0,0608		0,8988		0,9932	
		474		225		991		37
0,50	0,2498		0,0833		0,9979		0,9895	
		524		276		988		48
0,55	0,3022		0,1109		1,0967		0,9847	
		573		330		982		63
0,60	0,3595		0,1439		1,1949		0,9784	
		622		390		974		81
0,65	0,4217		0,1829		1,2923		0,9703	
		670		445		965		103
0,70	0,4887		0,2284		1,3888		0,9600	
		718		524		954		127
0,75	0,5603		0,2808		1,4842		0,9473	
		766		598		940		155
0,80	0,6371		0,3406		1,5782		0,9318	
		812		678		922		187
0,85	0,7183		0,4034		1,6704		0,9131	
		858		761		903		223
0,90	0,8041		0,4815		1,7607		0,8908	
		902		849		877		263
0,95	0,8943		0,5694		1,8484		0,8645	
		946		941		851		308
1,00	0,9889		0,6635		1,9335		0,8337	
		987		1038		816		357
1,05	1,0876		0,7673		2,0151		0,7980	
		1027		1138		778		412
1,10	1,1903		0,8811		2,0929		0,7568	
		1065		1243		733		471
1,15	1,2968		1,0054		2,1662		0,7097	
		1101		1352		684		536
1,20	1,4069		1,1406		2,2346		0,6561	
		1133		1464		626		606
1,25	1,5202		1,2870		2,2972		0,5955	
		1163		1578		562		683
1,30	1,6365		1,4448		2,3534		0,5272	
		1189		1693		490		764
1,35	1,7554		1,6144		2,4024		0,4508	
		1212		1815		409		852
1,40	1,8766		1,7959		2,4423		0,3646	

Таблица 1 (продолжение)

φ	Y_1 $\mathrm{Sh}\,\varphi \sin\varphi$	Разн.	Y_2 $\mathrm{Sh}\,\varphi \sin\varphi - \mathrm{Ch}\,\varphi \cos\varphi$	Разн.	Y_3 $\mathrm{Ch}\,\varphi \sin\varphi + \mathrm{Sh}\,\varphi \cos\varphi$	Разн.	Y_4 $\mathrm{Ch}\,\varphi \cos\varphi$	Разн.
1,45	1,9996	1230	1,9897	1938	2,4751	318	0,2710	946
1,50	2,1239	1243	2,1959	2062	2,4971	220	0,1664	1064
1,55	2,2491	1252	2,4145	2186	2,5081	110	0,0512	1152
1,60	2,3745	1254	2,6468	2313	2,5070	11	−0,0753	1265
1,65	2,4996	1251	2,8895	2437	2,4927	143	−0,2136	1383
1,70	2,6236	1240	3,1456	2551	2,4638	289	−0,3644	1508
1,75	2,7457	1221	3,4141	2685	2,4193	445	−0,5284	1640
1,80	2,8652	1195	3,6947	2806	2,3577	606	−0,7060	1776
1,85	2,9812	1160	3,9871	2924	2,2777	800	−0,8980	1920
1,90	3,0927	1115	4,2908	3037	2,1776	1001	−1,1049	2069
1,95	3,1983	1059	4,6051	3146	2,0562	1214	−1,3273	2224
2,00	3,2979	993	4,9301	3247	1,9115	1457	−1,5556	2383
2,05	3,3893	914	5,2647	3346	1,7425	1690	−1,8205	2549
2,10	3,4717	824	5,6078	3431	1,5470	1955	−2,0923	2718
2,15	3,5436	719	5,9587	3509	1,3245	2225	−2,3814	2891
2,20	3,6036	600	6,3162	3585	1,0702	2543	−2,6882	3068
2,25	3,6501	465	6,6790	3638	0,7352	2850	−3,0131	3249
2,30	3,6815	314	7,0457	3667	0,4639	3183	−3,3562	3431
2,35	3,6962	147	7,4146	3689	0,1134	3535	−3,7177	3615
2,40	3,6922	40	7,7842	3696	−0,2772	3906	−4,0976	3799
2,45	3,6678	244	8,1524	3682	−0,7038	4296	−4,4961	3985
2,50	3,6209	469	8,5170	3646	−1,1770	4702	−4,9128	4167
2,55	3,5494	715	8,8757	3587	−1,6900	5130	−5,3477	4349
2,60	3,4511	983	9,2260	3503	−2,2472	5572	−5,8003	4526
2,65	3,3239	1272	9,5650	3390	−2,8506	6034	−6,2701	4698
2,70	3,1653	1586	9,8898	3248	−3,5018	6512	−6,7535	4834
2,75	2,9729	1924	10,1970	3072	−4,2024	7003	−7,2588	5023
2,80	2,7442	2287	10,4832	2862	−4,9540	7516	−7,7759	5271
2,85	2,4756	2676	10,7443	2614	−5,7580	8040	−8,3067	5308
2,90	2,1675	3091	10,9772	2329	−6,6158	8578	−8,8471	5404
2,95	1,8141	3534	11,1766	1994	−7,5284	9126	−9,4039	5568
3,00	1,4137	4004	11,3383	1617	−8,4969	9685	−9,9669	5630

При расчете балок на упругом основании необходимо различать следующие 3 типа балок в зависимости от их длины (L):

1) балки абсолютно жесткие, когда $\lambda = \frac{L}{S} < \frac{\pi}{4}$;

2) балки короткие при $\frac{\pi}{4} < \lambda < \pi$;

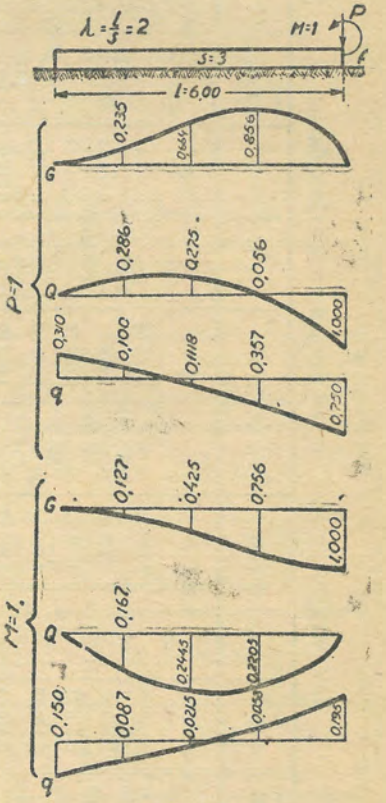
3) балки длинные при $\lambda > \pi$.

Абсолютно жесткие балки имеют EI (жесткость), по сравнению с податливостью основания примерно равную бесконечности, а потому они не дают изгиба и имеют прямолинейные деформации грунта, зависящие лишь от перемещения концов.

Длинные балки имеют более одной волны деформации, и следовательно влияние нагрузки принимается затухающим по длине балки.

Короткие балки имеют длину в пределах одной волны.

В гидротехнических конструкциях чаще всего встречаются балки короткие и балки абсолютно жесткие. К последним относятся подпорные стенки, устои и другие массивные конструкции. Длинные балки в гидротехнических конструкциях встречаются относительно редко.



Черт. 155.

А. Короткие балки

При расчете коротких балок рассматриваем 3 основных случая:

а) нагрузка в конце короткой балки: моментом M и сосредоточенной силой P;

б) короткие балки, симметрично загруженные по концам, моментами M и сосредоточенными силами P;

в) нагрузка в виде момента M и сосредоточенной силы P, приложенной в промежуточной точке короткой балки или способ приведения нагрузок к концевым.

а) Короткие балки с концевой нагрузкой, моментом M и сосредоточенной силой P.

Рассмотрение деформации и изменений основных усилий в коротких балках, загруженных односторонней концевой нагрузкой, производится при выборе начала координат в ненагруженном конце балки, т. е. свободном (см. черт. 155) Таким образом абсциссы x и приведенные абсциссы — φ отсчитываются от свободного конца. Предельное значение абсцисс для данной балки обозначают через $\left(\frac{L}{S}\right)$, что чаще всего называют приведенной длиной балки и для ее обозначения принимают выражение $\lambda = \frac{L}{S}$.

Таблица 2

Для загруженных с одной стороны коротких балок

λ	ρ_1	Разн.	ρ_2	Разн.	ρ_3	Разн.	ρ_4	Разн.	ρ_5	Разн.	ρ_6	Разн.	λ
0,50	24,186 61	5,951 60	12,026 62	2,078 05	4,002 52	0,363 15	2,995 92	0,521 31	0,999 04	0,090 92	11,968 09	2,987 58	0,50
0,55	18,235 01	4,123 93	9,948 57	1.577 86	3,639 37	301 90	2,474 61	396 82	0,908 12	77 43	8,980 51	2,074 37	0,55
0,60	14,111 08	2,945 70	8,370 71	1,225 84	3,337 47	255 30	2,077 79	309 99	0,831 69	64 53	6,906 14	1,485 65	0,60
0,65	11,165 38	2,159 40	7,144 87	0,971 25	3,082 17	218 55	1,768 80	245 75	0,767 16	56 35	5,420 49	1,092 22	0,65
0,70	9,005 98	1,616 71	6,173 62	781 52	2,863 62	188 94	1,523 05	198 46	0,711 81	48 22	4,328 27	0,820 77	0,70
0,75	7,389 27	1,233 18	5,392 10	637 50	2,674 68	164 92	1,324 59	162 55	0,663 59	42 35	3,507 50	628 94	0,75
0,80	6,156,09	0 956 10	4,754 60	525 37	2,509 76	145 19	1,162 04	135 14	0,621 24	37 48	2,878 56	490 50	0,80
0,85	5,199 99	751 33	4,229 23	441 00	2,364 57	128 53	1,026 90	113 43	0,583 86	33 47	2,388 06	390 14	0,85
0,90	4,448 66	597 87	3,788 23	370 12	2,236 04	114 54	0,913 47	0,096 34	0,550 39	30 12	1,997,92	309 02	0,90
0,95	3 850 79	480 81	3,418 11	313 96	2,121 50	102 59	0,817 13	82 46	0,520 27	27 35	1,688 90	252 48	0,95
1,00	3,369 98	390 30	3,104 15	268 36	2,018 91	0,092 27	0,734 67	71 28	0,492 92	24 90	1,436 42	207 30	1,00
1,05	2,979 68	319 49	2,835 79	230 77	1,926 64	83 36	0,663 39	62 05	0,468 02	22 89	1,229 12	171 79	1,05
1,10	2 660,19	263 39	2,605 02	199 44	1,843 28	75 52	0,601 34	54 38	0,445 13	21 08	1,057 33	143 69	1,10
1,15	2,396 80	218 56	2,405 58	173 20	1,767 76	68 64	0,546 96	47 98	0,424 05	19 52	0,913 64	121 111	1,15
1,20	2,178 24	182 33	2,232,38	150 99	1,699 12	62 53	0,498 98	42 62	0,404 53	18 18	0,792 53	102 92	1,20
1,25	1,995 91	152 85	2,081,39	132 09	1,636 59	57 08	0,456 36	38 05	0,386 35	17 04	0,689 61	0,088 05	1,25

Таблица 2 (продолжение)

λ	ρ_1	Разн.	ρ_2	Разн.	ρ_3	Разн.	ρ_4	Разн.	ρ_5	Разн.	ρ_6	Разн.	λ
1,30	1,843 05	128 68	1,949 30	115 90	1,579 51	52 20	0 418 31	34 15	0,369 31	16 00	0,601 56	75 80	1,30
1,35	1,714 37	108 71	1,833 40	101 94	1,527 31	47 81	0,384 16	30 79	0,353 31	15 13	0,525 76	65 67	1,35
1,40	1,605 66	0,092 09	1,731 46	0,089 83	1,479 50	43 81	0,353 37	27 90	0,338 18	14 33	0,460 09	57 22	1,40
1,45	1,513 57	88 21	1,641 63	79 30	1,435 69	40 21	0,325 47	25 39	0,323 85	13 59	0,402 87	50 06	1,45
1,50	1,435 36	66 54	1,562 33	70 08	1,395 48	36 90	0,300 08	23 18	0,310 26	13 00	0,352 81	44 02	1,50
1,55	1,368 82	56 69	1,492 25	61 97	1,358 58	33 89	0,276 90	21 26	0,297 26	12 41	0,308 79	38 88	1,55
1,60	1,312 13	48 34	1,430 28	54 84	1,324 69	31 10	0,255 64	19 55	0,284 85	11 93	0,269 91	34 47	1,60
1,65	1,263 79	41 23	1,375 44	48 52	1,293 59	28 55	0,236 09	18 04	0,272 92	11 48	0,235 44	30 67	1,65
1,70	1,222 56	35 16	1,326 92	42 91	1,265 04	26 19	0,218 05	16 70	0,261 44	11 07	0,204 77	27 43	1,70
1,75	1,187 40	29 97	1,284 01	37 84	1,238 85	24 01	0,201 35	15 49	0,250 37	10 71	0,177 34	24 40	1,75
1,80	1,157 43	25 53	1,246 07	33 75	1,214 84	21 99	0,185 86	14 41	0,239 66	10 36	0,152 94	21 95	1,80
1,85	1,131 90	21 70	1,212 57	29 55	1,192 85	20 12	0,171 45	13 42	0,229 30	10 06	0,130 99	19 72	1,85
1,90	1,110 20	18 91	1,183 02	26 54	1,172 73	18 90	0,158 03	12 61	0,219 24	0,009 86	0,111 27	17 79	1,90
1,95	1,091 29	15 10	1,156 48	22 34	1,153 83	16 24	0,145 42	11 66	0,209 38	9 41	0,093 48	15 95	1,95
2,00	1,076 19	13 16	1,134 14	20 04	1,137 59	15 27	0,133 76	10 88	0,199 97	9 25	0,077 53	14 40	2,00
2,05	1,063 03	0,011 07	1,114 10	0,017 52	1,122 32	0,013 87	0,122 78	0,010 18	0,190 72	9 01	0,063 13	0,013 00	2,05
2,10	1,051 96		1,096 58		1,108 45		0,112 50		0,281 71		0,050 13		2,10

Таблица 2 (продолжение)

λ	ρ_4	Разн.	ρ_2	Разн.	ρ_3	Разн.	ρ_4	Разн.	ρ_5	Разн.	ρ_6	Разн.	λ
2,15	1,042 69	0,009 27	1,081 31	15 27	1,095 87	12 58	0,102 84	9 66	0,172 94	8 87	0,038 44	11 69	2,15
2,20	1,034 96	0,007 73	1,068 05	13 26	1,084 49	11 38	0,093 78	9 06	0,164 38	8 56	0,027 85	10 59	2,20
2,25	1,028 55	6 41	1,056 58	11 48	1,074 23	10 26	0,085 28	8 50	0,156 04	8 34	0,018 34	9 51	2,25
2,30	1,023 27	5 28	1 046 69	0 009 88	1,064 99	0,009 24	0 077 28	8 50	0,147 91	8 13	0,009 80	8 54	2,30
2,35	1,018 94	4 33	1,038 23	8 46	1,056 70	8 29	0,069 78	7 00	0,139 99	7 92	0,002 14	7 66	2,35
2,40	1,015 43	3 51	1,031 01	7 22	1,049 29	7 41	0,062 74	7 04	0,132 28	7 71	— 0,004 71	6 85	2,40
2,45	0,012 60	2 83	1,024 90	6 11	1,042 68	6 61	0,056 14	6 60	0,124 78	7 50	— 0,010 82	6 11	2,45
2,50	1,010 35	2 25	1,019 76	5 14	1,036 81	5 87	0,049 95	6 19	0,117 49	7 29	— 0,016 24	5 42	2,50
2,55	1,008 53	1 77	1,015 47	4 29	1,031 62	5 19	0,044 15	5 80	0,110 41	7 08	— 0,021 02	4 78	2,55
2,60	1,007 21	1 37	1,011 93	3 54	1,027 03	4 59	0,038 73	5 42	0,103 54	6 87	— 0,025 22	4 20	2,60
2,65	1,006 16	1 05	1,009 03	2 90	1,023 02	4 01	0,033 67	5 06	0,096 88	6 66	— 0,028 87	3 65	2,65
2,70	1,005 37	79	1,006 68	2 35	1,019 51	3 51	0,028 95	4 72	0,090 45	6 43	— 0,032 03	3 16	2,70
2,75	1,004 80	57	1 004 81	1 87	1,016 46	3 05	0 025 55	4 39	0,084 23	6 22	— 0,034 71	2 68	2,75

Общие уравнения для расчета коротких балок на упругом основании с односторонней концевой нагрузкой приводятся к следующему виду:

$$G_1 = A_1 Y_1 - A_2 Y_2; \qquad SQ = A_1 Y_3 - 2A_2 Y_1$$
$$\frac{S^2}{2} q = A_1 Y_4 - A_2 Y_3, \qquad \frac{S^3}{2} d = -A_1 Y_2 - 2A_2 Y_4, \tag{9}$$

где $A_1 = C_2$ и $A_2 = C_3 = -C_4$.

Для определения интегральных постоянных A_1 и A_2 пользуются обычным методом решения уравнений для концевых сечений под нагрузкой, откуда получаем:

$$A_1 = 2(2\rho_1 M - S\rho_3 \cdot P),$$
$$A_2 = 2(\rho_6 M - S\rho_4 P), \tag{10}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\rho_4 = \frac{\mathrm{Sh}\,\lambda \sin\lambda}{\mathrm{Ch}\,2\lambda + \cos 2\lambda - 2}$$
$$\rho_5 = \frac{\mathrm{Ch}\,\lambda \sin\lambda - \mathrm{Sh}\,\lambda \cos\lambda}{\mathrm{Ch}\,2\lambda + \cos 2\lambda - 2}$$
$$\rho_6 = \frac{\mathrm{Ch}\,\lambda \sin\lambda + \mathrm{Sh}\,\lambda \cos\lambda}{\mathrm{Ch}\,2\lambda + \cos 2\lambda - 2} \tag{11}$$

В дальнейшем при решениях отдельных вопросов большие упрощения вносит пользование инфлюэнтными значениями, через которые обозначают коэфициенты в выражениях для углов поворота и напряжений грунта, т. е. для сечения:

при $\varphi = 0$, имеем: $d_0 = -\frac{4}{S^3} \cdot A_2; \qquad q_0 = \frac{2}{S^2} \cdot A_1.$ (12)

При $\varphi = \lambda$, имеем: $d_\lambda = A_{d1} \cdot M + A_{d2} \cdot P$ (13)

$$q_\lambda = A_{q1} \cdot M + A_{q2} \cdot P,$$

где приняты следующие инфлюэнтные значения:

$$A_{d1} = -\frac{4}{S^3}\rho_1; \quad A_{q1} = -\frac{2}{S^2}\rho_2; \tag{14}$$
$$A_{d2} = +\frac{2}{S^2}\rho_2; \quad A_{q2} = +\frac{2}{S}\rho_3,$$

где приняты для ρ следующие обозначения:

$$\rho_1 = \frac{\mathrm{Sh}\,2\lambda + \sin 2\lambda}{\mathrm{Ch}\,2\lambda + \cos 2\lambda - 2}$$
$$\rho_2 = \frac{\mathrm{Ch}\,2\lambda - \cos 2\lambda}{\mathrm{Ch}\,2\lambda + \cos 2\lambda - 2} \tag{15}$$
$$\rho_3 = \frac{\mathrm{Sh}\,2\lambda - \sin 2\lambda}{\mathrm{Ch}\,2\lambda + \cos 2\lambda - 2}$$

Для практического пользования выше приводятся таблицы значений ρ для пользования (см. стр. 668, табл. 2).

Общий вид эпюр момента перерезывающих сил и напряжений грунта для балок, загруженных в одном конце сосредоточенной силой и моментом, представлен на черт. 155.

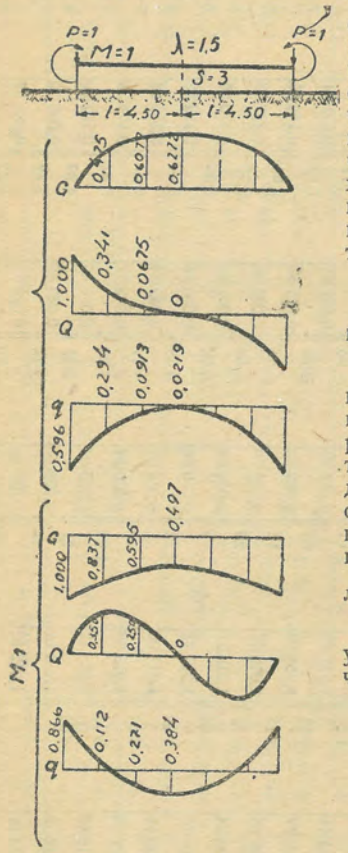
Таблица 3

Для коротких балок с симметричной краевой загрузкой

λ	ρ'_1	Разн.	ρ'_2	Разн.	ρ'	Разн.	ρ'_4	Разн.	ρ'_5	Разн.	ρ'_6	Разн.	ρ'_7
0,50	0,497 25		0,165 48		1,033 08		0,494 83		0,123 87		0,041 31		0,490 66
0,55	0,545 60	— 0,048 35	0,199 58	— 0,031 10	0,952 96	+ 0,080 12	0,492 48	+ 0,012 35	0,135 71	— 0,011 84	0,049 80	— 0,008 49	0,442 19
0,60	0,593 20	— 47 60	0,236 51	— 36 93	0,890 03	+ 0,062 93	0,489 41	+ 3 07	0,147 24	— 11 53	0,058 94	— 9 14	0,400 73
0,65	0,639 91	— 46 71	0,276 05	— 39 54	0,840 89	+ 49 14	0,485 48	+ 3 93	0,158 42	— 11 18	0,068 71	— 9 77	0,364 51
0,70	0,685 50	— 45 59	0,317 97	— 41 92	0,803 14	+ 37 75	0,480 59	+ 4 89	0,169 11	— 10 69	0,079 04	— 10 33	0,332 21
0,75	0,729 72	— 44 22	0,361 97	— 44 00	0,774 97	+ 28 17	0,474 68	+ 5 91	0,179 26	— 10 15	0,089 80	— 10 76	0,302 96
0,80	0,772 31	— 42 59	0,407 69	— 45 72	0,755 01	+ 19 96	0,467 59	+ 7 09	0,188 76	— 9 50	0,100 91	— 11 11	0,276 07
0,85	0,813 01	— 40 70	0,454 73	— 47 00	0,742 17	+ 12 84	0,459 24	+ 8 35	0,197 48	— 8 72	0,112 28	— 11 37	0,251 04
0,90	0,851 41	— 38 40	0,502 63	— 47 90	0,735 51	+ 6 66	0,449 10	+ 10 14	0,205 33	— 7 85	0,123 72	— 11 44	0,227 47
0,95	0,887 64	— 36 23	0,550 93	— 48 30	0,734 24	+ 1 27	0,438 59	+ 10 51	0,212 20	— 6 87	0,135 11	— 11 39	0,205 13
1,00	0,921 12	— 33 48	0,599 09	— 48 16	0,737 64	+ — 3 40	0,426 2.	+ 12 35	0,218 00	— 5 80	0,146 27	— 11 16	0,183 79
1,05	0,951 73	— 30 61	0,646 59	— 47 50	0,745 02	— 7 38	0,412 51	+ 13 73	0,222 64	— 4 64	0,157 07	— 10 80	0,163 35
1,10	0,979 26	— 27 53	0,692 91	— 46 32	0,755 73	— 10 71	0,397 46	+ 15 05	0,226 05	— 3 41	0,167 33	— 10 26	0,143 72
1,15	1,003 67	— 24 41	0,737 55	— 44 64	0,769 17	— 13 44	0 381 19	+ 16 27	0,228 20	— 2 15	0,176 92	— 9 59	0,124 88
1,20	1,024 85	— 21 18	0 780 04	— 42 49	0,784 73	— 15 56	0,363 84	+ 17 35	0,229 07	— 87	0,185 71	— 8 79	0,106 83
1,25	1,042 83	— 17 98	0,819 97	— 39 93	0,801 84	— 17 11	0,345 52	+ 18 32	0,228 65	+ 42	0,193 56	— 7 85	0,089 57
1,30	1,057 65	— 14 82	0,857 01	— 37 04	0,819 96	— 18 12	0,326 39	+ 19 13	0,226 96	+ 1 69	0,200 38	— 6 82	0,073 12
1,35	1,069 43	— 11 78	0,890 88	— 33 87	0,838 61	— 18 65	0,306 66	+ 19 73	0,224 74	+ 2 19	0,206 08	— 5 70	0,057 64
1,40	1,078 34	— 000,8 91	0,921 43	— 30 55	0,857 34	— 18 73	0,286 55	+ 20 11	0,220 09	+ 3 28	0,210 62	— 4 54	0,042 88
1,45	1,084 60	— 6 26	0,948 54	— 27 11	0,875 77	— 18 43	0,266 17	+ 20 38	0,215 04	+ 5 05	0,213 97	— 3 35	0,029 14
1,50	1,088 46	— 3 86	0,972 22	— 23 68	0,893 56	— 17 79	0,245 80	+ 20 37	0,209 06	+ 5 98	0,216 15	— 2 18	0,016 38
1,55	1,090 18	— 1 72	0,992 52	— 20 30	0,910 44	— 16 88	0,25 59	+ 20 21	0,202 29	+ 6 77	0,217 17	— 1 02	0,004 60
1,60	1,090 04	+ 14	1,009 56	— 17 04	0,926 22	— 15 78	0,205 70	+ 19 89	0,194 83	+ 7 46	0,217 09	+ 8	0,006 18
1,65	1,088 35	+ 1 69	1,023 58	— 14 02	0,940 74	— 14 52	0,186 28	+ 19 42	0,186 80	+ 8 03	0,215 93	+ 1 16	0,015 96
1,70	1,085 37	+ 2 98	1,034 74	— 11 16	0,953 92	— 13 18	0,166 81	+ 19 47	0,178 36	+ 8 44	0,213 84	+ 2 09	0,024 77
1,75	1,081 36	+ 4 01	1,043 33	— 000,8 59	0,965 69	— 11 77	0,149 35	+ 17 46	0,169 57	+ 8 79	0,210 85	+ 2 99	0,032 63
1,80	1,076 59	+ 4 77	1,049 60	— 6 27	0,976 07	— 10 38	0,132 13	+ 17 22	0,160 58	+ 8 99	0,207 06	+ 3 79	0,039 57
1,85	1,071 27	+ 5 32	0,053 84	— 4 24	0,985 09	— 9 02	0,115 73	+ 16 40	0,151 47	+ 9 11	0,202 58	+ 4 48	0,045 63
1,90	1,065 60	+ 5 67	1,056 32	— 2 48	0,992 79	— 7 70	0,100 22	+ 15 51	0,142 34	+ 9 13	0,197 48	+ 5 10	0,050 85
1,95	1,059 74	+ 5 86	1,057 31	— 0 99	0,999 67	— 6 88	0,085 66	+ 14 56	0,133 26	+ 9 08	0,191 86	+ 5 62	0,055 30
2,00	1,053 85	+ 5 89	1 057 04	+ 0 27	1,004 58	— 4 91	0,072 04	+ 13 62	0,124 29	+ 8 97	0,185 81	+ 6 05	0,059 00
2,05	1,048 04	+ 5 81	1,055 77	+ 1 27	1,008 86	— 4 28	0,059 38	+ 12 66	0,115 50	+ 8 79	0,179 41	+ 6 40	0,062 04
2,10	1,042 41	+ 5 63	1,053 69	+ 2 08	1,012 21	— 3 35	0,047 65	+ 11 73	0,106 94	8 56	0,172 74	6 67	0,064 45
2,15	1,037 03	+ 5 38	1,051 00	+ 2 69	1,014 72	— 2 51	0,036 86	10 79	0,098 63	8 31	0,165 85	6 89	0,066 30
2,20	1,031 96	+ 5 07	1,047 86	+ 3 14	1,016 51	— 1 79	0,026 91	9 95	0,090 62	8 01	0,158 83	7 02	0,067 60
2,25	1,027 24	+ 4 72	1,044 41	+ 3 45	1,017 67	— 1 16	0,017 83	9 08	0,082 91	771	0,151 71	7 12	0,068 44
2,30	1,022 89	+ 4 35	1,040 77	+ 3 64	1,018 29	62	0,009 58	8 25	0,075 53	7 38	0,144 55	7 16	0,068 85
2,35	1,018 92	+ 3 97	1,037 05	+ 3 72	1,018 47	18	0,002 10	7 48	0,068 49	7 04	0,137 38	7 17	0,068 88
2,40	1,015 34	+ 3 58	1,033 34	+ 3 71	1,018 27	20	0,004 64	2 54	0,061 79	6 70	0,130 26	7 12	0,068 57
2,45	1,012 14	+ 3 20	1,029 70	+ 3 64	1,017 78	49	0,010 68	6 04	0,055 44	6 35	0,123 22	7 04	0,067 96
2,50	1,009 31	+ 2 83	1,026 18	+ 3 52	1,017 06	72	0,016 07	5 39	0,049 44	6 00	0,116 28	6 94	0,067 07
2,55	1,006 83	+ 2 48	1,022 84	+ 3 34	1,016 16	90	0,020 84	4 77	0,043 77	5 67	0,109 46	6 82	0,065 95
2,60	1,004 68	+ 2 15	1,019 68	+ 3 16	1,015 12	1 04	0,025 04	4 20	0,038 45	5 32	0,102 80	6 66	0,064 63
2,65	1,002 85	+ 1 83	1,016 76	+ 2 92	1,014 01	1 11	0,028 69	3 65	0,033 46	4 99	0,096 29	6 51	0,063 12
2,70	1,001 31	+ 1 54	1,014 07	+ 2 69	1,012 85	1 16	0,031 85	3 16	0,028 79	4 67	0,089 97	6 32	0,061 46
2,75	1,000 01	+ 1 30	1,011 60	+ 2 47	1,011 67	1 18	0,034 55	2 70	0,024 44	4 35	0,083 83	6 14	0,059 67

Необходимо иметь в виду, что в практических расчетах приведенными уравнениями 9 и 10, возможно пользоваться раздельно для каждого вида нагрузки — для загрузки моментом M и для загрузки сосредоточенной силой P. Для этого принимают в первом случае $P=0$, а во втором $M=0$.

Таким образом удается произвести подсчеты изменения основных усилий в зависимости от одного вида нагрузки, что дает правильные типы эпюр и возможность в связи с этим проверки расчетов. Все расчеты для балок на упругом основании производятся с точностью не менее чем до четвертого десятичного знака, так как приходится оперировать с относительно малыми величинами, что в отдельных случаях может дать при меньшей точности значительные ошибки в подсчетах.



Черт. 156.

б) Короткие балки с симметричной концевой нагрузкой

Короткие балки с симметричной концевой нагрузкой в гидротехнических расчетах имеют наибольшее распространение. Симметрично загруженные короткие балки рассчитывают, выбирая начало координат в середине пролета балки (см. черт. 156). Таким образом симметрично загруженные концевой нагрузкой балки считают короткими при предельных значениях λ, отнесенных к половине балки, т. е., $\lambda = \frac{L}{2S}$.

Общие уравнения для расчета балок на упругом основании принимают вид, учитывая что

$$C_3 = 0 \text{ и } C_4 = 0:$$

$$\begin{aligned} G_1 &= C_1 Y_4 + C_2 \cdot Y_1; \\ SQ &= -C_1 Y_2 + C_2 Y_3. \\ \frac{S^2}{2} q &= -C_1 Y_1 + C_2 Y_4; \\ \frac{S^3}{2} d &= -C_1 Y_3 - C_2 Y_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Определяя интегральные постоянные так, как и в случае односторонней загрузки, т. е. пользуясь данными моментов и перерезывающих сил для концевых сечений при $\varphi = \lambda$, получаем:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(\rho_4' M - S\rho_5' P), \\ C_2 &= 2(\rho_6' M + S\rho_7' P). \end{aligned} \tag{17}$$

Инфлюэнтные значения получают следующий вид:

$$\begin{aligned} A_{d1}' &= -\frac{4}{S^3}\rho_1' & A_{q1}' &= -\frac{2}{S^2}\rho_2' \\ A_{d2}' &= +\frac{2}{S^2}\rho_2' & A_{q2}' &= +\frac{2}{S}\rho_3' \end{aligned} \tag{18}$$

В приведенных формулах приняты следующие обозначения:

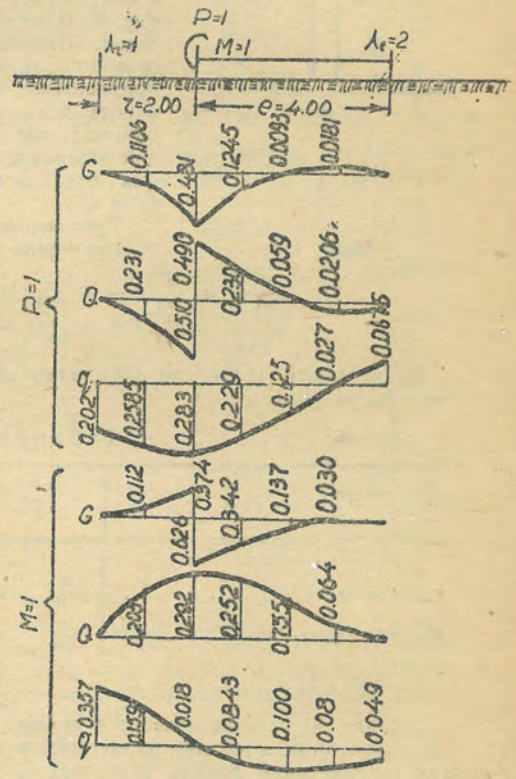
$$\begin{aligned} \rho_1' &= 2\frac{\mathrm{Ch}^2\lambda - \cos^2\lambda}{\mathrm{Sh}\,2\lambda + \sin 2\lambda} \\ \rho_2' &= \frac{\mathrm{Sh}\,2\lambda - \sin 2\lambda}{\mathrm{Sh}\,2\lambda + \sin 2\lambda} \\ \rho_3' &= 2\frac{\mathrm{Sh}^2\lambda + \cos^2\lambda}{\mathrm{Sh}\,2\lambda + \sin 2\lambda} \\ \rho_4' &= \frac{\mathrm{Ch}\,\lambda\sin\lambda + \mathrm{Sh}\,\lambda\cos\lambda}{\mathrm{Sh}\,2\lambda + \sin 2\lambda} \\ \rho_5' &= \frac{\mathrm{Sh}\,\lambda + \sin\lambda}{\mathrm{Sh}\,2\lambda\ \sin 2\lambda} \\ \rho_6' &= \frac{\mathrm{Ch}\,\lambda\sin\lambda \quad \mathrm{Sh}\,\lambda\cos\lambda}{\mathrm{Sh}\,2\lambda + \sin 2\lambda} \\ \rho_7' &= \frac{\mathrm{Ch}\,\lambda\cos\lambda}{\mathrm{Sh}\,2\lambda + \sin 2\lambda} \end{aligned} \tag{19}$$

Для упрощения расчетов в таблице 3 (см стр. 672) приведены значения ρ_1' для коротких балок с симметричной концевой нагрузкой.

Эпюры моментом перерезывающих сил и напряжений грунта получают вид, изображенный на черт. 156.

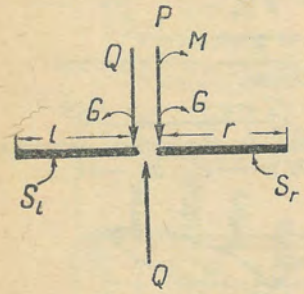
c — **короткие балки с нагрузкой моментом *M* — и сосредоточенной силой *P*, приложенной в промежуточной точке** (приведение нагрузок к концевым).

Так как для расчета балок на упругом основании применяем метод приведения всех нагрузок к виду концевой нагрузки, то нагрузку, приложенную в пролете балки (см. черт. 157), приводим к концевой нагрузке. Это делается путем сечения балки непосредственно под нагрузкой с приложением к каждой из частей балки фиктивных сил, выражающих внутренние действующие силы, которые необходимо приложить к каждой из частей, для того чтобы выразить влияние другой части балки на основные усилия. Сечения балки производят так, как это указано на черт. 158. При расчетах коротких балок необходимо, чтобы каждая из отсеченных половин балок являлась по своей характеристике короткой балкой. Случай, когда имеем одну из половин в виде жесткой или длинной балки, рассмотрим в комбинированном случае.



Черт. 157.

При производстве сечения балки, в левой части балки можно оставлять только фиктивные нагрузки G' и Q', а в правой — приложенные внешние нагрузки M и P и фиктивные G' и Q' или наоборот. В правой части балки тогда оказываются приложенными нагрузки: момент $M_r = M + G'$ и сосредоточенная сила $P_r = P - Q'$.



Черт. 158.

Для определения фиктивных сил необходимо составить выражение для углов поворота и напряжения грунта в точке сечения балки, т. е. в загруженных концах полученных двух балок. Приравнивая напряжение в концевом сечении для левой и правой балок, а также приравнивая абсолютное значение углов поворота для левой и правой частей (учитывая обратные значения для углов поворота в левой и правой частях), получаем два уравнения для определения двух фиктивных сил G' и Q'.

Приравнивая напряжение грунта и абсолютные значения углов для точки сечения, получаем:

$$\begin{aligned} a^l_{d1} G' + a^l_{d2} Q' &= -a^r_{d1}(M + G') - a^r_{d2}(P - Q') \\ a^l_{q1} G' + a^l_{q2} Q' &= a^r_{q1}(M + G') + a^r_{q2}(P - Q'). \end{aligned} \tag{20}$$

Приведенные уравнения (20) легко записываются в табличной форме следующего вида:

Таблица 4

Равенства	G'	Q'	M	P
Углов поворота	$a^l_{d_1} + a^r_{d_1}$	$a^l_{d_2} - a^r_{d_2}$	$a^r_{d_1}$	$a d_2$
Напряжения грунта	$a^l_{q_1} - a^r_{q_1}$	$a^l_{q_2} + a^r_{q_2}$	$-a^r_{q_1}$	$-a^r_{q_2}$

Таблица (4) разворачивается в уравнение путем умножения коэфициентов, помеченных в таблице на соответствующие силы G', Q', M, P и сумма этих произведений должна равняться 0. В том случае, когда коэфициент деформации балки для левой и правой половин оказывается общим, таблица 4 легко преобразовывается в следующий вид:

Таблица 5

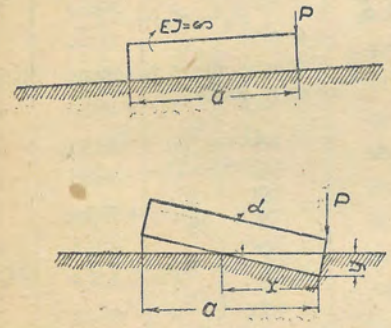
Равенства	G'	Q'	M	P
Углов поворота	$2(\rho^l_1 + \rho^r_1)$	$-S(\rho^l_2 - \rho^r_2)$	$2\rho^r_1$	$-S\rho^r_2$
Напряжения грунта	$-S(\rho^l_2 - \rho^r_2)$	$S^2(\rho^l_3 + \rho^r_3)$	$S\rho^r_2$	$-S^2\rho^r_3$

Для частного случая, когда нагрузки приложены в середине пролета получаем равенство инфлюэнтных значений $A^r_{in} = A^l_{in}$, что дает возможность получить для этого случая следующие выражения для фиктивного момента (G') и фиктивной перерезывающей силы (Q'), так как уравнение в этом случае решается весьма просто:

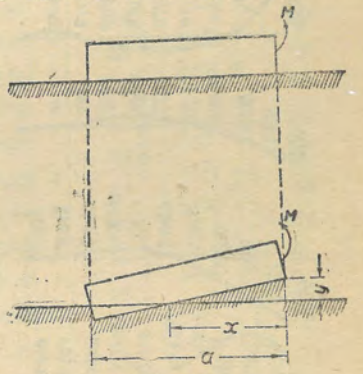
$$\begin{aligned} G' &= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{A_{d2}}{A_{d1}} P + M\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{S}{2}\cdot\frac{\rho_2}{\rho_1} - M\right), \\ Q' &= \tfrac{1}{2}\left(P + \frac{A_{q1}}{A_{q2}} M\right) = \tfrac{1}{2}\left(P - \frac{M}{S}\frac{\rho_2}{\rho_3}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Б. Жесткие балки.

В жестких балках приведенная длина $\lambda < \frac{\pi}{4}$. Как жесткие балки на упругом основании могут рассматриваться устои мостов и сооружений фундаменты подпорных стенок и другие массивные части сооружений



Черт. 159.



Черт. 160.

подверженные эксцентричной нагрузке. Для абсолютно-жесткой балки при $EI = \infty$, упругие осадки y и напряжения $k \cdot y$ зависят исключительно от перемещения концевых сечений балок (см. черт. 159 и 160). На основании прямолинейной деформации грунта легко вывести инфлюэнтные значения для абсолютной жесткой балки при длине ее „a“:

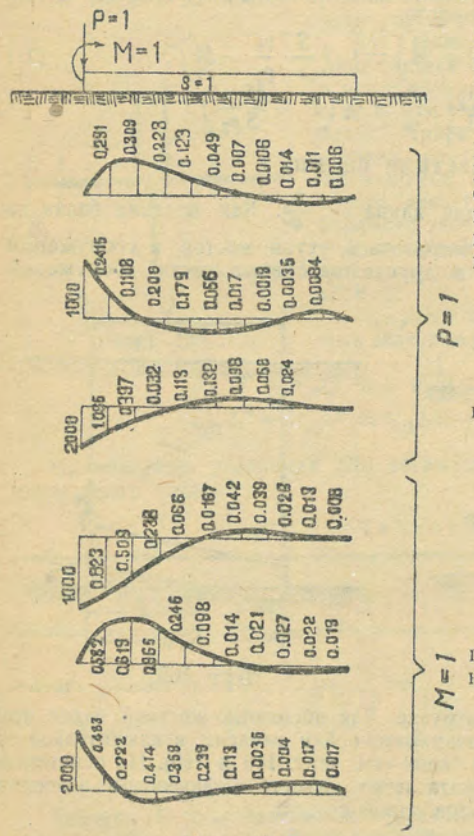
$$\begin{aligned} A''_{d1} &= -\frac{12}{a^3}; \quad A''_{d2} = \frac{6}{a^2}; \\ A''_{q1} &= -\frac{6}{a^2}; \quad A''_{q2} = \frac{4}{a}. \end{aligned} \tag{22}$$

При расчетах абсолютно жестких балок значения моментов и перерезывающих сил в балках не представляют интереса. Наибольшее внимание должны привлекать упругие перемещения концов и в связи с этим напряжения грунта. Общие выражения для углов поворота и напряжений грунта получаются:

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{2} d &= A''_{d1} \cdot M + A''_{d2} \cdot P; \\ \frac{S^3}{2} q &= A''_{q1} \cdot M + A''_{q2} \cdot P. \end{aligned} \tag{23}$$

В. Длинные балки.

Расчет длинных балок на упругом основании широко применяется в инженерных конструкциях, особенно при расчете железнодорожных шпал и легких железобетонных конструкций. Расчет длинных балок подробно разобран инж. Циммерманом в применении к расчету шпал.



Черт. 161.

Для $\lambda = \infty$, а практически уже для $\lambda > \pi$ дифференциальные уравнения (7) решаются единственно исключением G, Q, q и d, что возможно сделать только в том случае, если имеют место равенства:

$$D_1 = C_1 = -C_3;$$
$$D_2 = C_2 = -C_4.$$

Тогда общие уравнения принимают вид:

$$G = D_1\eta_1 - D_2\eta_2;$$
$$QS = -D_1\eta_3 - D_2\eta_4;$$
$$\frac{S^2}{2}q = D_1\eta_2 + D_2\eta_1;$$
$$\frac{S^3}{2}d = D_1\eta_4 - D_2\eta_3, \quad (24)$$

где приняты следующие обозначения

$$\eta_1 = e^{-\varphi}\cos\varphi;$$
$$\eta_2 = e^{-\varphi}\sin\varphi$$
$$\eta_3 = e^{-\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi);$$
$$\eta_4 = e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

В расчетах длинных балок можно рассматривать два случая.

1-й случай – загрузка одного конца длинной балки моментом M и силой P.

2-й случай — загрузка длинной балки в пролете моментом M и силой P'.

1-й случай

При рассмотрении длинных балок начало координат выбирается в отличие от случаев коротких балок в нагруженном конце, т. е. в точке A (см. черт. 161), тогда интегральные постоянные выражаются при концевой нагрузке, а именно:

$$D_1 = M \quad \text{и} \quad D_2 = M - PS.$$

Таблица 6

Для расчета длинных балок

φ	η_{11}	Разн.	η_{12}	Разн.	η_{13}	Разн.	η_{14}	Разн.
0,0	1,0000		0,000 0		1,000 0		1,000 0	
		0,0996		0,0903		0,0093		0,1900
0,1	0,9004		0,090 3		0,990 7		0,810 0	
		980		724		256		1702
0,2	0,8024		0,162 7		0,965 1		0,639 8	
		946		562		384		1510
0,3	0,7078		0,218 9		0,926 7		0,488 8	
		904		421		483		1324
0,4	0,6174		0,261 0		0,878 4		0,356 4	
		851		298		553		1149
0,5	0,5323		0,290 8		0,823 1		0,241 5	
		793		191		603		984
0,6	0,4530		0,309 9		0,762 8		0,143 1	
		732		100		631		832
0,7	0,3798		0,319 9		0,699 7		0,059 9	
		668		24		643		692
0,8	0,3130		0,322 3		0,635 4		0,009 3	
		602		38		642		564
0,9	0,2528		0,318 5		0,571 2		0,065 7	
		540		89		629		451
1,0	0,1988		0,309 6		0,508 3		0,110 8	
		478		129		607		349
1,1	0,1510		0,296 7		0,447 6		0,145 7	
		418		160		577		259
1,2	0,1092		0,280 7		0,389 9		0,171 6	
		363		181		544		181
1,3	0,0729		0 262 6		0,335 5		0,189 7	
		310		196		506		114
1,4	0,0419		0,243 0		0,284 9		0,201 1	
		261		204		465		57
1,5	0,0158		0,222 6		0,238 4		0 206 8	
		217		203		425		9
1,6	— 0,0059		0,201 8		0,195 9		0,207 7	
		177		206		383		30
1,7	— 0,0236		0,181 2		0,157 6		0,204 7	
		140		202		342		62
1,8	— 0,0376		0,161 0		0,123 4		0,198 5	
		108		195		302		86
1,9	— 0,0484		0,141 5		0,093 2		0,189 9	
		80		184		265		105
2,0	— 0,0564		0,123 1		0,066 7		0 179 4	
		54		174		228		119
2,1	— 0,0618		0,105 7		0,043 9		0,167 5	
		34		161		195		127
2,2	— 0,0652		0,089 6		0,024 4		0,154 8	
		16		148		164		132
2,3	— 0,0668		0,074 8		0,008 0		0,141 6	
		1		135		136		134
2,4	— 0,066 9		0,061 3		— 0,005 6		— 0,128 2	
		11		122		110		133
2,5	— 0,065 8		0,049 1		— 0,016 6		— 0,114 9	
		22		108		88		130
2,6	— 0,063 6		0,038 3		— 0,025 4		— 0,101 9	
		28		96		66		124
2,7	— 0,060 8		0,028 7		— 0,032 0		— 0,089 5	
		35		83		49		118
2,8	— 0,057 3		0,020 4		— 0,036 9		— 0,077 7	
		38		71		34		111
2,9	— 0,053 5		0,013 30		— 0,040 3		— 0,066 6	
		42		93		20		103

Таблица 6 (продолжение)

φ	η_1	Разн.	η_2	Разн.	η_3	Разн.	η_4	Разн.
3,0	— 0,049 3		0,007 03		— 0,042 26		— 0,056 3	
3,1	— 0,045 0		0,001 87		— 0,043 14		— 0,046 88	
3,2	— 0,040 7		— 0,002 38		— 0,043 07		— 0,038 31	
3,3	— 0,036 4		— 0,005 82		— 0,042 24		— 0,030 60	
3,4	— 0,032 2		— 0,008 53		— 0,040 79		— 0,023 74	
3,5	— 0,028 3		— 0,010 59		— 0,038 87		— 0,017 69	
3,6	— 0,024 5		— 0,012 09		— 0,036 59		— 0,012 41	
3,7	— 0,021 0		— 0,013 10		— 0,034 07		— 0,007 87	
3,8	— 0,017 7		— 0,013 69		— 0,031 38		— 0,004 01	
3,9	— 0,014 7		— 0,013 92		— 0,028 62		— 0,000 77	
4,0	— 0,011 97		— 0,013 86		— 0,025 63		— 0,001 80	
4,1	— 0,009 55		— 0,013 56		— 0,023 09		0,004 03	
4,2	— 0,007 35		— 0,013 07		— 0,020 42		0,005 72	
4,3	— 0,005 45		— 0,012 43		— 0,017 87		0,006 99	
4,4	— 0,003 80		— 0,011 68		— 0,015 46		0,007 91	
4,5	— 0,002 35		— 0,010 86		— 0,013 20		0,008 52	
4,6	— 0,001 10		— 0,009 99		— 0,011 12		0,008 86	
4,7	— 0,000 2		— 0,009 09		— 0,009 21		0,008 98	
4,8	0,000 7		— 0,008 20		— 0,007 48		0,008 92	
4,9	0,000 9		— 0,007 32		— 0,005 93		0,008 70	
5,0	0,002 0		— 0,006 46		— 0,004 55		0,008 37	
5,1	0,002 35		— 0,005 61		— 0,003 34		0,007 95	
5,2	0,002 60		— 0,004 87		— 0,002 29		0,007 46	
5,3	0,002 75		— 0,004 15		— 0,001 39		0,006 92	
5,4	0,002 90		— 0,003 49		— 0,000 63		0,006 36	
5,5	0,002 9		— 0,002 88		0,000 01		0,005 78	
5,6	0,002 9		— 0,002 33		0,000 53		0,005 20	
5,7	0,002 8		— 0,001 84		0,000 95		0 004 64	
5,8	0,002 7		— 0,001 41		0,001 27		0,004 09	
5,9	0,002 55		— 0,001 02		0,001 52		0,003 56	
6,0	0,002 4		— 0,000 69		0,001 69		0.003 07	
6,1	0,002 2		— 0,000 41		0,001 80		0,002 61	
6,2	0,002 0		— 0,000 17		0,001 85		0,002 19	
6,3	0,001 85		0,000 03		0,001 87		0.001 81	
6,4	0,001 65		0,000 19		0,001 84		0,001 46	
6,5	0,001 50		0,000 32		0,001 79		0,001 15	
6,6	0,001 3		0,000 42		0,001 72		0,000 87	
6,7	0,001 2		0,000 50		0,001 62		0,000 63	
6,8	0,000 95		0,000 55		0,001 52		0,000 42	
6,9	0,000 8		0,000 58		0,001 41		0,000 24	
7,0	0,000 7		0,000 60		0,001 29		0,000 09	

В соответствии с этим легко находятся инфлюэнтные значения для длинной балки, загруженной в одном конце.

$$b_{d_1} = -\frac{4}{S^3}; \quad b_{d_2} = +\frac{2}{S^2}; \quad b_{q_1} = -\frac{2}{S^2}; \quad b_{q_2} = \frac{2}{S}. \tag{25}$$

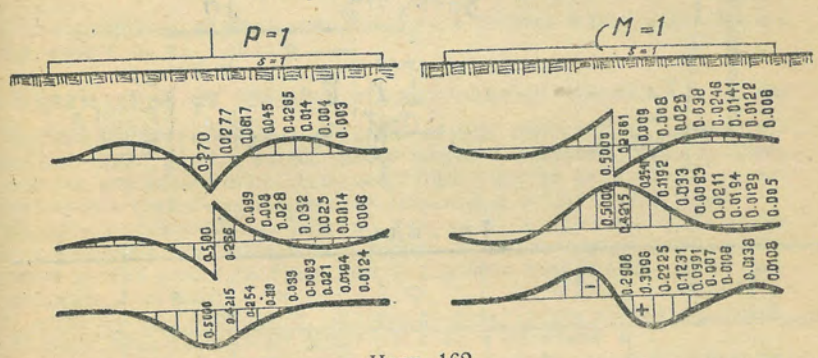
Общие выражения для углов поворота и напряжения грунта получают вид:

$$d_\lambda = b_{d_1} \cdot M + b_{d_2} P; \quad q_0 = b_{q_1} \cdot M + b_{q_2} P. \tag{26}$$

2-й случай

Загрузка длинной балки в пролете моментом M и силой P рассматривается в аспекте бесконечной длины, загруженной в центре. Тогда, пользуясь уравнением 21, из раздела коротких балок, аналогично загруженных, при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$ получаем фиктивный изгибающий момент G' и фиктивную перерезывающую силу Q' в разрезе непосредственно влево от загруженной точки:

$$G' = \frac{PS}{4} - \frac{M}{2} \quad \text{и} \quad Q' = \frac{P}{2} - \frac{M}{2S}. \tag{27}$$



Черт. 162.

Для левой части балки на основании уравнения 27 имеем значение интегральных постоянных:

$$D_1 = \frac{P \cdot S}{4} - \frac{M}{2}; \quad D_2 = -\frac{PS}{4}. \tag{28}$$

Инфлюэнтные значения получают вид:

$$b'_{d1} = -\frac{1}{S^3}; \quad b'_{d2} = b'_{q1} = 0; \quad b'_{q2} = \frac{1}{2S}. \tag{29}$$

Общие уравнения для углов поворота и напряжения грунта получают вид:

$$q_0 = b'_{q2} P \quad \text{и} \quad d_0 = -b'_{d1} M, \tag{30}$$

Перерезывающие силы и моменты находятся по общим уравнениям 24, пользуясь таблицей составленной инж. Циммерманом для значений η, которая приведена выше (см. таблицу 6).

В качестве примеров эпюр загрузки длинных балок приведен чертеж 162.

Г. Комбинированный случай.

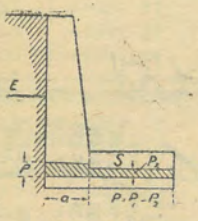
Для частного случая гидротехнических конструкций, рассчитываемых как балки на упругих основаниях, рассмотрим вывод основных формул для расчетов Флютбета (см. черт. 163), состоящего из средней пролетной части

флютбета короткой балки и незасыпанной еще подпорной стенки или устоя, представляющего жесткую балку.

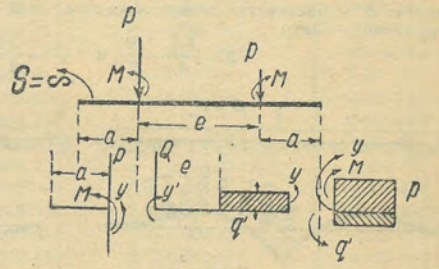
В данном случае имеем расчет комбинированной балки, состоящей из двух жестких балок и одной короткой, загруженных в точках изменения жесткости балки вертикальными силами P и моментами M.

В целях приведения полученной системы балок с пролетной загрузкой к балкам с концевыми загрузками необходимо произвести сечение балок под точками загрузки согласно черт. 164.

Подставляя необходимые значения в общие уравнения, получаем систему уравнений, сведенных в таблицу 7, в которой сумма произведений выписанных коэфициентов на силы G', Q', M и P должна равняться 0.



Черт. 163.



Черт. 164.

Таблица 7

Равенство	G'	Q'	M	P
Углов поворота	$\frac{12}{a^3}+\frac{4}{S^2}\rho_1'$	$\frac{6}{a^2}-\frac{2}{S^2}\rho_2'$	$-\frac{12}{a^3}$	0
Напряжения грунта	$\frac{6}{a^2}-\frac{2}{S^2}\rho_2'$	$\frac{4}{a}+\frac{2}{S}\rho_3'$	$-\frac{6}{a^2}$	$\frac{1}{\alpha}\oplus$

Приведенная таблица легко может быть преобразована в таблицу следующего вида, производя умножение всех членов на $\frac{S^3}{2}$ и обозначая через $k=\frac{S}{a}$; тогда получаем:

Таблица 8

Равенство	G'	Q'	M	P
Углов поворота	$2(3k^3+\rho_1')$	$S(3k^2-\rho_2')$	$-6k^3$	0
Напряжения грунта	$S(3k^2-\rho_2')$	$S^2(2k+\rho_3')$	$-3Sk^2$	$+\frac{S^2k}{2}$

$\oplus$ Принятая равномерная нагрузка на пог. метр жесткой балки $p=p_1-p_2$ заменена сосредоточенной силой p следующим образом:

$$p=\frac{p\cdot a}{a}=\frac{1}{a}\cdot P. \tag{31}$$

Решая приведенное уравнение в таблице 8 для частного случая, обычного в гидротехнических конструкциях $\rho_1'=\rho_2'=\rho_3'=1$ при $\lambda=2{,}5$, легко находим:

$$G'=-\alpha M+\beta SkP$$
$$Q'=-\gamma\frac{M}{S}+\delta kP, \tag{32}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\alpha=\frac{3k^2(k+1)}{3k(k^2+k+1)+1};\qquad \beta=\frac{3k^2-1}{2(k+1)\cdot[3k(k^2+k+1)+1]};$$
$$\gamma=\frac{6k^2}{3k(k^2+k+1)+1};\qquad \delta=\frac{3k^2+1}{(k+1)[3k(k^2+k+1)+1]}. \tag{33}$$

Для упрощения расчетов ниже приложена таблица 9 значений α, β, γ и δ в зависимости от k.

Д. Исключение из расчета отрицательных реакций грунта.

Исключение отрицательных реакций грунта при расчете балок на упругом основании ведет к согласованию теории с фактическими свойствами грунта, так как единственно правдоподобные упругие деформации сжатия обыкновенных грунтов одновременно являются и остающимися.

Появление отрицательных реакций грунта в гидротехнических сооружениях возможно при включении в расчет давления земли, вызывающего поднятие концов флютбета. Практически в работе сооружений могут рассматриваться 2 случая:

1) когда призмы обрушения скользят по поверхности свободных стенок, что соответствует свободному поднятию концов флютбета, и

2) когда флютбеты абсолютно зажаты и не могут получить перемещения концов.

Практические явления при работе сооружений будут находиться где-то в этих пределах.

Проверка наличия отрицательных реакций грунта делается по уравнению:

$$M\leqslant PS\frac{Ch2\lambda+\cos 2\lambda}{Sh2\lambda-\sin 2\lambda}. \tag{34}$$

Когда приведенное неравенство не соблюдено, в грунте появляются отрицательные реакции. В практических расчетах приведенное уравнение не всегда возможно удовлетворить, так как влияние вертикальных сил слишком незначительно по сравнению с влиянием моментов.

Исключение отрицательных реакций грунта (см. черт. 165) производится с таким расчетом, чтобы определить новую длину балки l_1, на которой балка работает только при положительных реакциях грунта, тогда концы балок x_p являются свободными консольными частями балки. Следовательно основным вопросом при исключении отрицательных реакций является определение точек C и D и тем самым определение длины балки l_1. Момент и перерезывающая сила в точках C и D, как для обычных консольных балок, получается.

Изгибающий момент:

$$M_1=M-P\cdot x_p-\frac{q_g x_p^2}{2}.$$

Таблица 9

Флютбеты на упругом основании

k	α	β	γ	δ	k	α	β	γ	δ
0,1	0,0248	0,3307	0,0450	0,6840	2,6	0,8924	0,0328	0,4958	0,1824
0,2	0,0826	0,2102	0,1376	0,4892	2,7	0,8980	0,0314	0,4859	0,1803
0,3	0,1559	0,1247	0,2398	0,3693	2,8	0,9048	0,0300	0,4762	0,1782
0,4	0,2340	0,1646	0,3343	0,2965	2,9	0,9103	0,0287	0,4668	0,1760
0,5	0,3104	0,0230	0,4138	0,2528	3,0	0,9153	0,0275	0,4576	0,1738
0,6	0,3816	0,0055	0,4770	0,2275	3,1	0,9198	0,0264	0,4487	0,1715
0,7	0,4463	0,0247	0,5251	0,2131	3,2	0,9241	0,0253	0,4100	0,1693
0,8	0,5041	0,0372	0,5601	0,2055	3,3	0,9280	0,0243	0,4316	0,1672
0,9	0,5551	0,0152	0,5843	0,2017	3,4	0,9316	0,0233	0,4235	0,1650
1,0	0,6000	0,0500	0,6000	0,2000	3,5	0,9350	0,0224	0,4155	0,1628
1,1	0,6387	0,0522	0,6083	0,1997	3,6	0,9381	0,0216	0,4079	0,1607
1,2	0,6740	0,0535	0,6127	0,1994	3,7	0,9410	0 0208	0,4004	0,1587
1,3	0,7041	0,0533	0,6123	0,1992	3.8	0,9437	0,0200	0,3932	0,1566
1,4	0,7307	0,0526	0,6089	0,1092	3,9	0,9462	0,0193	0,3862	0,1546
1,5	0,7542	0,0514	0,6033	0,1989	4,0	0,9486	0,0186	0,3794	0,1526
1,6	0,7749	0,0498	0,5961	0,1983	4,1	0,9508	0,0179	0,3728	0,1506
1,7	0,7933	0,0481	0,5876	0,1976	4,2	0,9530	0,0173	0,3665	0,1487
1,8	0,8096	0,0463	0,5783	0,1966	4,3	0,9548	0,0167	0,3603	0,1468
1,9	0,8242	0,0445	0,5682	0.1954	4,4	0,9567	0,0161	0,3543	0,1449
2,0	0,8372	0,0426	0,5581	0,1938	4,5	0,9585	0,0156	0,3485	0,1431
2,1	0,8489	0,0408	0,5477	0,1922	4,6	0,9600	0,0151	0,3428	0,1413
2,2	0,8594	0,0391	0,5372	0,1904	4,7	0,9616	0 0146	0,3374	0,1395
2,3	0,8689	0,0373	0,5266	0,1885	4,8	0,9630	0,0141	0,3321	0,1379
2,4	0,8776	0,0357	0,5162	0,1866	4,9	0,9641	0,0137	0,3269	0,1361
2,5	0,8853	0,0342	0,5059	0,1845	5,0	0,9657	0,0133	0,3219	0,1345

Перерезывающая сила:

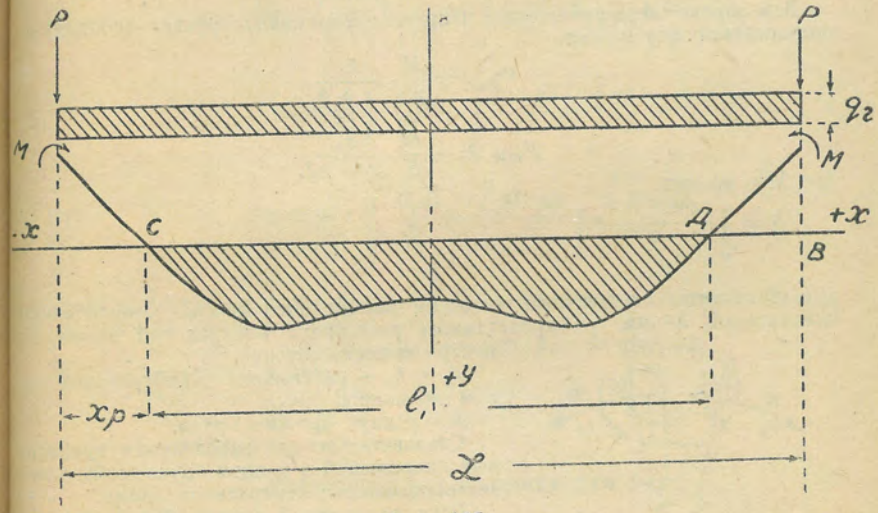
$$Q_1 = P + q_g x_p .$$

Пользуясь неравенством 34, составляем уравнение:

$$M_1 = Q_1 S \frac{Ch2\lambda + \cos 2\lambda}{Sh2\lambda - \sin 2\lambda} = Q_1 SA, \qquad (35)$$

где

$$A = \frac{Ch2\lambda + \cos 2\lambda}{Sh2\lambda - \sin 2\lambda}. \qquad (36)$$



Черт. 165.

Вводя значение M_1 и Q_1 и решая полученное уравнение относительно x_p получаем:

$$x_p = -\frac{1}{q_g}\left(P + ASq_g\right) + \sqrt{\frac{(P + ASq_g)^2}{q_g^2} - \frac{2}{q_g}\left(APS - M\right)}. \qquad (37)$$

Надо иметь в виду, что значение A очень близко к 1 при значениях $\lambda_r = \frac{l_1}{2S} \geqslant 1{,}5 - 2{,}5$.

Определение x_p производится подбором. Первоначально необходимо задаться для λ_p значением $\lambda = \frac{L}{2S}$.

Получив первое приближение для x_p, можно, пользуясь им, производить проверочное вычисление, уточнив это значение искомой величиной x_p.

Пример: для одного из вариантов Бурджарского перепада имеем $M = 60$ т/м, $P = 20$ т; $L = 8{,}60$ м и $S = 1{,}23$ и соответственно вес флютбета с учетом воды на нем $q_g = 4{,}5$ т/м²; находим по уравнению (36) при $2\lambda_p =$

$= 2\lambda = 7$, значение $A =$ примерно 1. Значение x_p получается в этом случае около 1,25 м. После этого проверяем значение A при новой длине балки $l_1 = 6{,}1$ м, когда $2\lambda_p = 4{,}97$, что дает значение A опять-таки близкое к 1. После определения длины балки l_1, на которой балка работает только с упругими сжатиями грунта, можно производить расчет этой балки, как лежащей на упругом основании, обычными методами.

VII. КРИВЫЕ БРУСЬЯ (ОБЩИЕ ДАННЫЕ)[1]

1. Общие формулы

Для определения предельных напряжений в кривых брусьях необходимо пользоваться формулами:

$$P_{\max} = \frac{M}{S} \cdot \frac{h_1}{r + h_1}$$

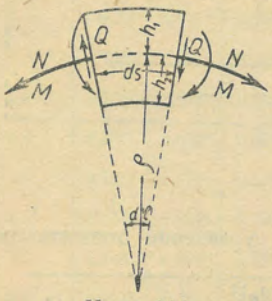
и

$$P_{\min} = -\frac{M}{S} \cdot \frac{h_2}{r - h_2}, \tag{1}$$

где M — момент;

$$S = \int_F \frac{z^2 dF}{r + z} = F\gamma,$$

т. е. S является статическим моментом поперечного сечения относительно нейтральной линии, γ — представляет расстояние нейтральной линии от центра тяжести сечения.



Черт. 166.

h_1 и h_2 — расстояние от нейтральной линии до концов бруса.

z — радиус кривого бруса.

Следовательно для определения предельных напряжений в кривом брусе необходимо знать положение нейтральной линии.

Если поперечный размер бруса мал по сравнению с радиусом кривизны, то нейтральная линия пройдет через центр тяжести, и тогда напряжения в кривом брусе могут быть вычислены точно так же как и для обычного бруса.

2. Деформация кривого бруса

Общее выражение для потенциальной энергии всего бруса представляется формулой:

$$V = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2ES_\rho} + \frac{N^2}{2EF} + \frac{MN}{EF_\rho} + \frac{\varkappa Q^2}{2FG} \right) ds, \tag{2}$$

где обозначения известны по чертежу 166 и формуле (1).

Для брусьев меньшей кривизны, которые чаще всего встречаются в практических расчетах, общая формула потенциальной энергии обращается

[1] Расчет арок под радиальной нагрузкой рассмотрен в разделе арочных плотин (см. том III).

в следующую:

$$V = \int_0^s \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{EF} \right) ds. \tag{3}$$

Пользуясь теоремой Кастилияно деформации кривого бруса для точки с координатами (x_0, y_0) и наклонной касательной к горизонтали φ_0 получаются:

$$\delta\varphi_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial M_0} \right)_{M_0 = 0} = \int_0^s \left(\frac{M}{ES_\rho} + \frac{N}{EF_\rho} \right) ds$$

$$\delta x_0 = y_0 \int_0^s \frac{M\,ds}{EI} - \int_0^s \frac{M v\,ds}{EI} + \int_0^{x_0} \frac{N\,dx}{EF} \tag{4}$$

$$\delta y_0 = -x_0 \int_0^s \frac{M\,ds}{EI} + \int_0^s \frac{Mx\,ds}{EI} + \int_0^s \frac{N\,dy}{EF}.$$

В приведенных выше формулах (2) и (4) приняты кроме известных по чертежу следующие обозначения:

$\varkappa$ — коэфициент распределения касательных напряжений,

δ — радиус кривизны,

Q — перерезывающая или скалывающая сила,

G — модуль упругости при скалывании.

3. Возможные перемещения для ферм

Расчет деформации основан на работе внутренних сил, происходящей при возрастании нагрузки от нуля до какого-нибудь конечного значения. Эта работа для плоской системы выражается в виде:

$$A_i = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV + \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{E\varepsilon_x^2}{2} dV + \int \frac{G\gamma_{xy}^2}{2} dV. \tag{5}$$

Начало возможных перемещений дает:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{\overline{N}N}{EF} ds + \int \frac{\overline{M}M}{EJ} ds + \int \frac{\varkappa \overline{Q}Q}{GF} ds + \int \overline{N} a_t t_s ds + \int \frac{a_t \Delta t}{n} \overline{M} ds = \\ = \sum \overline{P}_m \delta_m + \sum \overline{C} \delta_c. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

а для шарнирной фермы

$$\sum \overline{S}_{ik} \Delta s_{ik} = \sum P_m \delta_m + \sum \overline{C} \delta_c = \sum S_{ik} \left(\frac{S_{ik} s}{EF} + a_t t s \right). \tag{7}$$

Помощью этих уравнений выражение деформации может быть найдено непосредственно, если в фиктивном состоянии принять единичную нагрузку: точки, пары точек, прямой и двух прямых. Тогда:

$$1\cdot\delta_m=\int\frac{\overline{N}N}{EF}ds+\int\frac{\overline{M}M}{EJ}ds+\int\frac{\varkappa\overline{Q}Q}{GF}ds+\int\overline{N}a_t t_s ds+\int\overline{M}\frac{a_t\Delta t}{h}ds-\sum\overline{C}\delta_c, \tag{8}$$

настолько мало, что им обычно пренебрегают. Это предположение применимо точно также в ряде случаев и по отношению к нормальной силе. Отсюда выражение для деформации стержневой системы, под влиянием нагрузки и смещений опор, получает вид:

$$1\cdot\delta_m=\int\frac{\overline{M}M}{EJ}-\sum\overline{C}\delta_c, \tag{9}$$

под влиянием изменения температуры:

$$1\cdot\delta_m=\int\overline{N}a_t t_s ds+\int\overline{M}a_t\frac{\Delta t}{h}ds. \tag{10}$$

4. Работа деформации и теорема Кастилиано

Работа деформаций конструкции при постоянной температуре может быть представлена как функция внутренних сил и внешней нагрузки. Если δ_m — действительные перемещения системы, то:

$$A_i=\sum\frac{P_m\delta_m}{2}=\int\frac{\sigma_x^2}{2E}dV+\int\frac{\tau_x^2}{2G}dV, \tag{11}$$

для плоской системы:

$$A_i=\int\frac{N^2}{2EF}ds+\int\frac{M^2}{2EJ}ds+\int\frac{\varkappa Q^2}{2GF}ds, \tag{12}$$

для шарнирной фермы: $A_i=\sum\frac{S_s^2}{2EF}$.

Если предпосылка изотермических условий деформации и отсутствия смещения опор не выполнена, то можно составить выражение работы A_i', аналогичное A_i:

$$A_i'=A_i+\int N a_t t_s ds=\int M a_t\frac{\Delta}{h}ds-\sum C\delta_c,$$

а для фермы:

$$A_i'=A_i+\sum S a_t ts-\sum C\delta_c. \tag{13}$$

На основании закона независимости действия сил,

$$\delta_m=P_1\delta_{m1}+P_2\delta_{m2}+\ldots,$$

откуда $\frac{\partial A_i}{\partial P_m}=\delta_m$ — перемещение точки m по направлению силы P_m, действующей в точке m; $\frac{\partial A_i}{\partial M_m}=\tau_m$ — угол поворота прямой в точке m, в которой приложен момент M_m. В соответственных случаях вместо A_i входит A_i'.

$$\delta_m=\int N\frac{\partial N}{\partial P_m}\frac{ds}{EF}+\int M\frac{\partial M}{\partial P_m}\frac{ds}{EJ}+\int Q\frac{\partial Q}{\partial P_m}\frac{\varkappa ds}{GF}. \tag{14}$$

На основании закона независимости действия сил:

$$M=M_1P_1+\ldots+M_kP_k+\ldots,$$
$$N=N_1P_1+\ldots$$

и т. д., откуда

$$\delta_k=\int\frac{NN_k}{EF}ds+\int\frac{MM_k}{EJ}ds+\int\frac{\varkappa QQ_k}{GF}ds, \tag{15}$$

а для фермы

$$\delta_k=\frac{\partial A_i}{\partial P_k}\sum S\frac{\partial S}{\partial P_k}\frac{s}{EF}=\sum\frac{SS_k}{EF}s. \tag{16}$$

Исследованием работы деформаций по напряжению легко доказать, что последняя по завершении деформаций делается минимальной, так что для статически неопределимой стержневой системы или фермы производные по лишним неизвестным равны нулю.

5. Взаимность деформаций

Выражение наименьшей работы внутренних сил, представленное по уравнению (2) в виде:

$$\int\frac{N_aN_b}{EF}ds+\int\frac{M_aM_b}{EJ}ds+\int\frac{\varkappa Q_aQ_b}{GF}ds, \tag{17}$$

представляет работу группы внешних сил $\sum P_a$ на перемещениях δ_{ab}, вызванных другой группой сил $\sum P_b$. Так как (по теореме Бетти) N_a и N_b можно взаимно переставить, то

$$\sum P_a\cdot\delta_{ab}=\sum P_b\cdot\delta_{ba}. \tag{18}$$

Для двух сил, величиной в 1 m каждая, это равенство переходит в такое:

$$\delta_{ab}=\delta_{ba}, \tag{19}$$

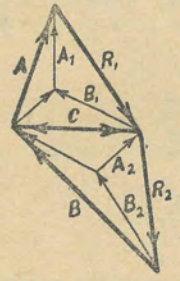
называемое теоремой Максвелла. Перемещение точки a по направлению силы P_a, действующей в точке a от действия силы $P_b=1$ m в точке b, равно перемещению точки b по направлению силы P_b от действия силы $P_a=1$ m. Вместо сил можно взять моменты; тогда вместо поступательных перемещений и войдут и углы поворота.

Этот вывод лежит в основе построения инфлюэнтных линий деформаций как кривых прогиба. Если обозначить точку приложения силы P через m, то инфлюэнтная линия деформации определится величиной δ_{am}; по

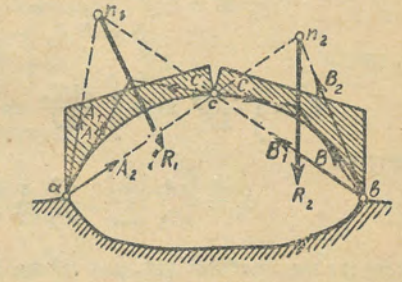
Максвеллу (19) $\delta_{am} = \delta_{ma}$, так что инфлюэнтная линия деформации может быть найдена как кривая прогибов нагружаемого пояса от единичной нагрузки, соответствующей этой деформации.

6. Трехшарнирная арка

Система статически определима. Опорные реакции и внутренние усилия для неподвижной нагрузки определяются графически с помощью веревочного многоугольника равнодействующих (кривой давления), однозначно

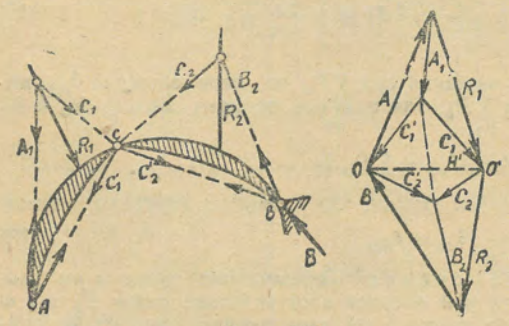


Черт. 167.



Черт. 168.

определяемого положением трех шарниров. Для построения этого многоугольника внешняя нагрузка разделяется на две части, действующая каждая на одну половину арки. Для каждой из этих нагрузок отдельно находят опорные реакции, которые затем складывают графическим путем, пользуясь принципом независимости действия сил (черт. 167). Опорные реакции могут также определяться из того условия, что равнодействующая всех нагрузок одной половины разлагается на две составляющие, которые должны обязательно пройти через шарниры данной половины арки. Тогда опорные реакции от этих составляющих определяются графически (черт. 169). Построенный многоугольник равнодействующих позволяет легко находить усилие в любом сечении арки.

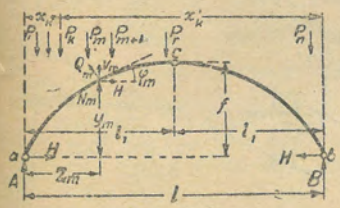


Черт. 169.

Опорные реакции и внутренние усилия от группы вертикальных сосредоточенных сил для трехшарнирной арки с опорами, лежащими на одном уровне (черт. 170).

$$A = \frac{1}{l}\sum_1^n P_k x'_k; \quad B = \frac{1}{l}\sum_1^n P_k x_k,$$

$$H = \frac{1}{f}\left[Al_1 - \sum_1^r P_k (l_1 - x_k)\right] = \frac{M_{0c}}{f}. \qquad (20)$$



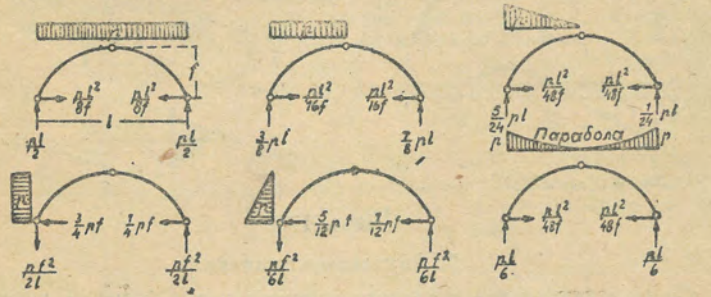
Черт. 170.

$$M_m = Az_m - \sum_1^m P_k (z_m - x_k) - Hy_m = M_{0m} - Hy_m;$$

$$V_m = A - \sum_1^m P_k = Q_{0m}; \quad H_m = H. \qquad (21)$$

$$Q_m = Q_{0m}\cos\varphi_m - H\sin\varphi_m; \quad -N_m = Q_{0m}\sin\varphi_m + H\cos\varphi_m.$$

Опорные реакции трехшарнирной арки при различной при загрузке получают значения по черт. 171.



Черт. 171.

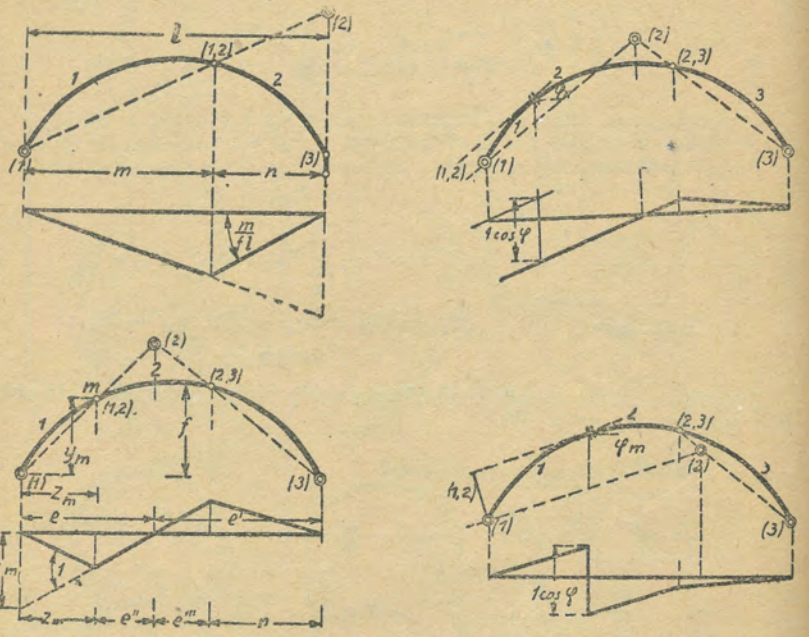
Обозначения M_{0c}, M_{0m}, Q_{0m} соответствуют усилиям в сечениях c или m соответственной прямой свободно опертой балки пролетом l.

Формулы (21) дают ординаты инфлюэнтных линий; поэтому инфлюэнтная линия распора арки H идентична с инфлюэнтной линией момента M_{0c} соответственной простой балки, ординаты которой разделены на стрелку арки f. Инфлюэнтные линии M_m и Q_m определяются инфлюэнтными линиями M_{0m} и $Q_{0m}\cos\varphi_m$ и нулевыми точками, удовлетворяющими условиям $M_m = 0$, $Q_m = 0$. $M_m = 0$ определяет $A : H = y_m : z_m$, а $Q_m = 0$ точно так же определяет отношение $A : H = \operatorname{tg}\varphi_m$. На черт. 172 эти инфлюэнтные линии построены в виде линий деформаций кинематических цепей, получаемых после устранения связей и закреплений, вызывающих соответственные усилия в сечениях. Абсциссы нулевых точек:

$$e = \frac{1}{\frac{n}{f}\cdot\frac{y_m}{z_m} + 1}; \quad e'' = e - z_m; \quad e''' = m - e. \qquad (22)$$

Предельные значения для равномерной нагрузки будут:

$$\max M_m = p\frac{z_m e''}{2};\quad \min M_m = -p\frac{y_m}{f}\frac{ne'''}{2}. \tag{23}$$



Черт. 172.

7. Двухшарнирная арка

Система однократно статически неопределима. Обычно за лишнюю неизвестную принимают горизонтальную составляющую H_b правой опорной реакции (черт. 173). Ее величина вычисляется согласно уравнению (стр. 595)

$$H_b = X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}. \tag{24}$$

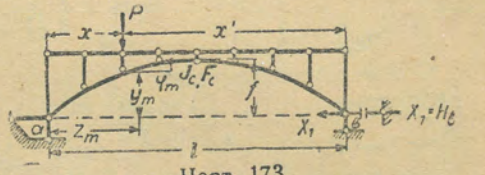
Для сравнительного расчета берут сечение (F_c, J_c) в ключе:

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{J_c}{F_c}\int_a^b \cos^2\varphi\,\frac{F_c}{F}\,ds + \int_a^b y^2\,\frac{J_c}{J}\,ds \approx i_c^2 l + \int_a^b y^2\,\frac{J_c}{J}\,ds = \\ &= \int_a^b y^2\,\frac{J_c}{J}\,ds\left[1 + \frac{i_c^2 l}{\int y^2\frac{J_c}{J}\,ds}\right] = (1+\nu)\int_a^b y^2\,\frac{J_c}{J}\,ds.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\delta_{1t} = EJ_c\alpha_t tl$$
$$\delta_{1s} = -EJ_c\Delta l$$

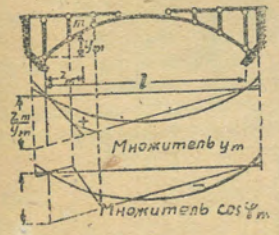
принятые обозначения ясны по черт. 173, t — изменение температуры; αt — коэфициент линейного удлинения.

Вычисление интегралов производится введением $\frac{J_c}{J}ds = \frac{J_c}{J\cos\varphi}dx$ по формуле суммирования Симпсона. Инфлюэнтная линия δ_{1m} для X_1 строится как линия прогибов δ_{m1} для простой кривой балки на двух опорах от нагрузки $-X_1 = 1$, причем $\frac{1}{\delta_{11}}$ является множителем. Она может быть построена как веревочный многоугольник для упругих сил W_k аналитическим или графическим путем. Величина последних в данном случае определится по формулам при c_k толщине свода в швах:



Черт. 173.

$$W_k = \frac{1}{6}\left[(y_{k-1}+2y_k)\frac{J_c}{J_k\cos\varphi_k}c_k + (2y_k+y_{k+1})\frac{J_k}{J_{k+1}\cos\varphi_{k+1}}c_{k+1}\right], \tag{26}$$
$$\delta_{11} = (1+\nu)\sum y_k W_k.$$



Черт. 174.

Ординаты δ_{1m} являются моментами упругих сил W_k. После деления их на δ_{11} получим искомые ординаты инфлюэнтной линии X_1. При графическом построении веревочного многоугольника x_1 за полюсное расстояние выбирают

$$H_w = \delta_{11} W.$$

Инфлюэнтные линии внутренних усилий находятся следующим образом: момент относительно центра тяжести сечения арки или точки ядра сечения (черт. 174):

$$M_m = M_{0m} - X_1 y_m = y_m\left(\frac{M_{0m}}{y_m} - X_1\right); \tag{27}$$

поперечная сила:

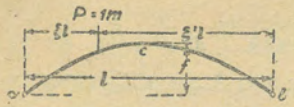
$$Q_m = Q_{0m}\cos\varphi_m - X_1\sin\varphi_m = \sin\varphi_m\,(Q_{0m}\operatorname{ctg}\varphi_m - X_1). \tag{28}$$

Для определения напряжений в крайних волокнах вычисляют ядровые моменты или строят их инфлюэнтные линии.

Опорные реакции и внутренние усилия двухшарнирной арки, ось которой имеет форму параболы и сечения которой удовлетворяют равенству:

$$\left.\begin{aligned}\frac{J_c}{J\cos\varphi} &= 1:\\ \delta_{11} &= \frac{8}{15}f^2 l(1+\nu),\\ \nu &= \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{f^2}\cdot\frac{J_c}{F_c}.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

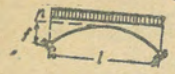
Уравнения инфлюэнтных линий (см. черт. 175)



$$X_1 = \frac{5}{8}\frac{l}{f}\frac{1}{1+\nu}(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$$
$$M_c = -\frac{l}{8}(\xi - 10\xi^3 + 5\xi^4) \text{ для } \nu \approx 0. \qquad (30)$$

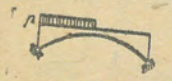
Черт. 175.

Особые случаи нагрузки:



Черт. 176.

$$H_{a\atop b} = \frac{pl^2}{8f(1+\nu)}, \quad A = B = \frac{pl}{2}, \quad M_c = \frac{pl^2}{8}\frac{\nu}{1+\nu}. \qquad (31)$$



Черт. 177.

$$H_{a\atop b} = \frac{pl^2}{16f(1+\nu)}, \quad A = \frac{3}{8}pl, \quad B = \frac{1}{8}pl, \quad M_c = \frac{pl^2}{16}\frac{\nu}{1+\nu}. \qquad (32)$$



Черт. 178.

$$H_{a\atop b} = \frac{pl^2}{16f(1+\nu)}\beta^2(2\beta^3 - 5\beta^2 + 5), \quad A = \frac{pl}{2}\beta(2-\beta), \quad B = \frac{pl}{2}\beta^2. \qquad (33)$$



Черт. 179.

$$H_{a\atop b} = 0{,}02279\frac{pl^2}{f(1+\nu)}, \quad A = \frac{5}{24}pl, \quad B = \frac{1}{24}pl. \qquad (34)$$



Черт. 180.

$$H_{a\atop b} = 0{,}01061\frac{pl^2}{f(1+\nu)}, \quad A = B = \frac{pl}{6}. \qquad (35)$$



Черт. 181.

$$H_{a\atop b} = -\frac{P}{2}\left[\pm 1 + \frac{1}{4}\left(4 + \frac{h}{f}\right)\left(1 - \frac{h}{f}\right)^{\frac{3}{2}}\right], \quad A = -B = -\frac{Ph}{l} \qquad (36)$$

$$M_c = -\frac{Pf}{2}\left(1 - \frac{h}{f}\right)\left[1 - \frac{1}{4}\left(4 + \frac{h}{f}\right)\sqrt{1 - \frac{h}{f}}\right].$$



Черт. 182.

$$H_a = -0{,}7143pf, \quad H_b = +0{,}2857pf, \quad A = -B = -\frac{pf^2}{2l}, \quad M_c = -0{,}0357pf^2. \qquad (37)$$



Черт. 183.

$$H_a = -0{,}4008pf, \quad H_b = +0{,}0992pf, \quad A = -B = -\frac{pf^2}{6l}, \quad M_c = -0{,}01587pf^2. \qquad (38)$$



Черт. 184.

$$H_{a\atop b} = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{M}{f}, \quad A = -B = -\frac{M}{l}, \quad M_c = -\frac{1}{8}M. \qquad (39)$$

Изменение температуры t и смещение опор Δl:

$$H_{a\atop b} = \frac{15EJ_c(\alpha_t t l - \Delta l)}{8f^2 l(1+\nu)}, \quad A = B = 0; \quad M_c = -Hf. \qquad (40)$$

8. Арка с заделанными пятами

Как правило, арки, заделанные двумя концами, конструируют только со сплошной стенкой, решетчатые арки с заделанными пятами применяются редко.

Арка или рама с заделанными концами трижды статически неопределима. Ниже в выводах пренебрегается влиянием продольных сил N. В пологих арках этого делать нельзя. За основную систему принимают простую разрезную балку, при этом в статически неопределимые величины вводятся опорные моменты M_A, M_B и распор H. Их определение производится по аналогии с уравнением 19. Уравнения упругости дают следующую таблицу определителей:

	X_1	X_2	X_3	
1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	$X_1 = H$
2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	$X_2 = M_A$
3	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	$X_3 = M_B$

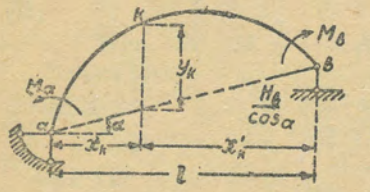
(41)

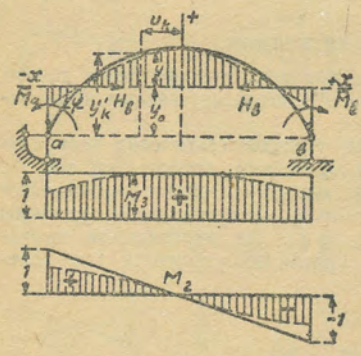
Величина деформаций, умноженных на EJ_c, будет (см. черт. 185 и 186) частично без учета действия продольных сил при обозначениях, показанных на черт. 185:

$$\delta_{11} = \int_a^b y^2\frac{J_c}{J}ds + \frac{J_c}{F_c}\int_a^b \cos^2\varphi\frac{F_c}{F}ds, \quad \delta_{22} = \int_a^b\left(\frac{x'}{l}\right)^2\frac{J_c}{J}ds, \qquad (42)$$

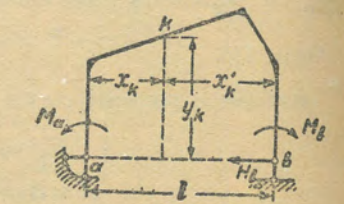
$$\delta_{33} = \int_a^b\left(\frac{x}{l}\right)^2\frac{J_c}{J}ds, \quad \delta_{12} = \int_a^b\frac{x'}{l}y\frac{J_c}{J}ds, \quad \delta_{13} = \int_a^b\frac{x}{l}y\frac{J_c}{J}ds,$$
$$\delta_{23} = \int_a^b\frac{xx'}{l^2}\frac{J_c}{J}ds. \qquad (43)$$

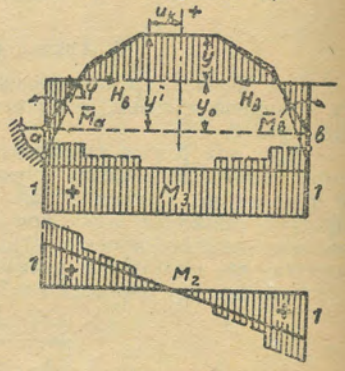
Исходными данными служат линии прогибов δ_{m_1}, δ_{m_2}, δ_{m_3} балки, под действием сил $-X_1=1$; $-X_2=1$; $-X_3=1$; как правило арка или рама бывает симметрична. Тогда для нахождения их независимо друг от друга лишние неизвестные определяются как группы статически неопределимых параметров $\overline{M_A}$, $\overline{M_B}$, H_B, связанных с упругим центром.





Черт. 185.





Черт. 186.

При $H=0$, $\overline{M_A'}$ и M_B' являются опорными моментами заделанной с обоих концов балки. Параллельное смещение уравновешенной группы сил H_b на величину y_0 дает тогда выражения моментов защемления арки с заделанными концами:

$$M_A=\overline{M_A'}-Hy_0;\quad M_B=\overline{M_B'}-Hy_0, \tag{44}$$

где y_0 расстояние от линии пят до упругого центра, определяемое по уравнению (30), а M_A и M_B — опорные моменты. Тогда лишние неизвестные будут на расстоянии y_s от прямой, соединяющей точки a и b:

$$X_1=H$$

$$X_2=\frac{\overline{M_A'}-\overline{M_B'}}{2},\quad X_3=\frac{\overline{M_A'}+\overline{M_B'}}{2}. \tag{45}$$

В этом случае значения δ_{12} и δ_{23} равны нулю, так как $-X_2=1$ вызывает несимметричную картину усилий, а $-X_1=1$ и $-X_3=1$ симметричную,

поэтому получаем:

$$\delta_{13}=\int_a^b (y'-y_0)\frac{J_c}{J}ds=0;\qquad +y_0=\frac{\int_a^b y'\frac{J_c}{J}ds}{\int_a^b \frac{J_c}{J}ds}, \tag{46}$$

где y' расстояние от линии пят до рассматриваемого сечения.

При наличии нагрузки получим формулы, где y считается от упругого центра до рассматриваемого сечения, а „u“ от оси симметрии до рассматриваемого сечения (см. черт. 173).

$$H=X_1=\frac{\delta_{m_1}}{\delta_{11}}=\frac{\frac{J_c}{F_c}\int_a^b N_0\cos\varphi\frac{F_c}{F}ds+\int_a^b M_0 y\frac{J_c}{J}ds}{\frac{J_c}{F_c}\int_a^b \cos^2\varphi\frac{F_c}{F}ds+\int_a^b y^2\frac{J_c}{J}ds}, \tag{47}$$

$$M_A'=X_2=\frac{\delta_{m_2}}{\delta_{22}}=-\frac{\frac{J_c}{F_c}\int_a^b N_0\sin\varphi\frac{F_c}{F}ds+\int_a^b M_0 u\frac{J_c}{J}ds}{\frac{J_c}{F_c}\int_a^b \sin^2\varphi\frac{F_c}{F}ds+\int_a^b u^2\frac{J_c}{J}ds}, \tag{48}$$

$$M_B'=X_3=\frac{\delta_{m_3}}{\delta_{33}}=\frac{\int_a^b M_0\frac{J_c}{J}ds}{\int_a^b \frac{J_c}{J}ds}. \tag{49}$$

Действие температуры t° и смещение опор на Δl даст:

$$X_1=\frac{EJ_c(\alpha_t tl-\Delta l)}{\frac{J_c}{F_c}\int_a^b \cos^2\varphi\frac{F_c}{F}ds+\int_a^b y^2\frac{J_c}{J}ds};\quad X_2=X_3=0. \tag{50}$$

Момент относительно центра тяжести сечения или точка ядра сечения (x_k, y_k) определяется по уравнениям (см. черт. 185):

$$\begin{aligned} M_k&=M_{k0}-X_1y_k+X_2u_k-X_3,\\ M_A&=X_1y_0-x_2\frac{J}{2}-X_3,\\ M_B&=X_1y_0+X_2\frac{J}{2}-X_3. \end{aligned} \tag{51}$$

Поперечная сила в сечении k, если Q_{k0} — поперечная сила основной статически определимой балки $(a-b)$:

$$Q_k = \left(Q_{k0} + \frac{X_2}{l}\right)\cos\varphi - X_1 \sin\varphi. \tag{52}$$

Нормальная сила в сечении k:

$$-N_k = \left(Q_{k0} + \frac{X_2}{l}\right)\sin\varphi + X_1\cos\varphi. \tag{53}$$

Вертикальные опорные реакции:

$$V_B = A_0 + \frac{X_2}{l}; \quad V_B = B_0 - \frac{X_2}{l}. \tag{54}$$

Инфлюэнтные линии лишних неизвестных находятся как линии прогибов δ_{m1}, δ_{m2}, δ_{m3} от нагрузок $-X_1 = 1, -X_2 = 1, -X_3 = 1$. Эти линии дают моменты, умноженные на отношение $J_c : J\cos\varphi$, дают уменьшенные выражения:

$$y\frac{J_c}{J\cos\varphi}, \quad -\frac{2u}{l}\frac{J_c}{J\cos\varphi}, \quad \frac{J_c}{J\cos\varphi}.$$

Кривые прогибов строятся в виде веревочных многоугольников упругих грузов. Величина последних:

$$\left.\begin{aligned} 6W_{k1} &= c_k \frac{J_c}{J_k\cos\varphi_k}(y_{k-1} + 2y_k) + c_{k+1}\frac{J_c}{J_{k+1}\cos\varphi_{k+1}}(2y_k + y_{k+1}),\\ 6W_{k2} &= -\frac{2c_k}{l}\frac{J_c}{J_k\cos\varphi_k}(u_{k-1} + 2u_k) + \frac{2c_{k+1}}{l}\frac{J_c}{J_{k+1}\cos\varphi_{k+1}}(2u_k + u_{k+1}).\\ 6W_{k3} &= 3c_k\frac{J_c}{J_k\cos\varphi_k} + 3c_{k+1}\frac{J_c}{J_{k+1}\cos\varphi_{k+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Инфлюэнтные линии опорных реакций и усилий определяются на основании закона независимости действия сил сложением отдельных ординат.

В этих выводах пренебрегают влиянием продольных сил. При пологих арках надо учитывать это влияние.

Арка с параболической осью

Уравнение оси $y' = 4f\zeta\zeta'$ при $\zeta = \frac{z}{l}$, $\zeta' = \frac{z'}{l}$,

где Z и Z' расстояния до опорных точек.

Отношение моментов инерции:

$$\frac{J_c}{J\cos\varphi} = 1.$$

$$y_0 = \frac{2}{3}f, \quad \nu = \frac{45}{4}\cdot\frac{1}{f^2}\cdot\frac{J_c}{F_c}.$$

Уравнение инфлюэнтных линий:

$$X_1 = \frac{15}{4}\frac{l}{f}\frac{1}{1+\nu}(\xi - \xi^2)^2; \quad X_2 = \frac{l}{2}(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3); \quad X_3 = \frac{l}{2}(\xi - \xi^2). \tag{56}$$

$$\left.\begin{aligned} M_a &= l\xi\xi'^2\left[\frac{5}{2(1+\nu)}\xi - 1\right]; \quad M_b = l\xi'\xi^2\left[\frac{5}{2(1+\nu)}\xi' - 1\right],\\ M_c &= \frac{l}{2}\xi^2\left[1 - \frac{5}{2(1+\nu)}\xi'^2\right] \text{ для } \xi < 0{,}5. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Частные случаи для нагрузок, изображенных на черт. 187, 188, 189.

$$\left.\begin{aligned} A = B &= \frac{pl}{2}, \quad H = \frac{pl}{8}\cdot\frac{l}{f}\cdot\frac{1}{1+\nu}\\ N_a = M_b &= -\frac{pl^2}{12}\frac{\nu}{1+\nu},\\ M_c &= +\frac{pl^2}{24}\frac{\nu}{1+\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned} A = B &= \frac{pl}{6}, \quad H = \frac{pl^2}{56}\cdot\frac{l}{f}\cdot\frac{1}{1+\nu}.\\ M_a = M_b &= -\frac{pl^2}{420}\frac{7\nu+2}{1+\nu},\\ M_c &= -\frac{pl^2}{1680}\frac{3-7\nu}{1+\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$



Черт. 187.



Черт. 188.



Черт. 189.

$\max M_m = +\frac{pl^2}{509}$ при $\nu = 1$ для $x = x' = 0{,}233l$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{13}{32}pl, \quad B = \frac{3}{32}pl,\\ H &= \frac{pl}{16}\cdot\frac{l}{f}\cdot\frac{1}{1+\nu},\\ M_a &= -\frac{pl^2}{192}\frac{3+11\nu}{1+\nu}, \quad M_b = \frac{pl^2}{192}\cdot\frac{3-5\nu}{1+\nu},\\ M_c &= \frac{pl^2}{48}\frac{\nu}{1+\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Равномерное изменение температуры $t°$ по всему сечению и смещение опор Δl:

$$\left.\begin{aligned} X_{1t} &= \frac{45EJ_c\alpha_t t l}{4f^2(1+\nu)}; \quad X_{1s} = -\frac{45EJ_c\Delta l}{4f^2(1+\nu)},\\ M_a &= M_b = +\frac{2}{3}X_1; \quad M_c = -\frac{1}{3}X_1. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Усилия в арке или арочной ферме с заделанными концами могут быть найдены следующим приемом — деформации, δ_{11}, δ_{12}, ... умножаются

на EF_c и находятся на основании

$$\delta_{11}=\sum S_1^2\frac{F_c}{F}s,\quad \delta_{22}=\sum S_2^2\frac{F_c}{F}s,\quad \delta_{33}=\sum S_3^2\frac{S_c}{F}s,$$
$$\delta_{10}=\sum S_1S_0\frac{F_c}{F}s,\quad \delta_{20}=\sum S_2S_0\frac{F_c}{F}s,\quad \delta_{30}=\sum S_3S_0\frac{F_c}{F}s, \qquad (61)$$

где S_0, S_1, S_2, S_3 — усилия в статически определимой главной системе, вызванные действием заданной нагрузки и нагрузок $-X_1=1$, $-X_2=1$, $-X_3=1$.

При построении инфлюэнтных линий лишних неизвестных вместо линий прогибов оси арки берутся линии прогибов нагруженного пояса фермы.

9. Очертание сводов

Арочные мосты конструируют либо в виде цилиндрических сводов или же из ряда арок, соединенных поперечными балками. Проезжая часть опирается на эту несущую конструкцию сверху или же ее делают подвешенной.



Черт. 190.

При расчете предполагают равномерность нагрузки поперек арки, вследствие чего напряжения в сечениях, перпендикулярных оси арки, равны нулю. Вследствие линейного изменения напряжений арки расчет ведут для ширины, равной 1 *м*. Таким образом расчет свода приведен к определению усилий в кривом брусе, у которого высота сечения мала по сравнению с радиусом кривизны его оси. Напряжения определяются по величинам H, M, Q как в простых балках. При широких несущих конструкциях силы, действующие перпендикулярно плоскости оси свода (сила ветра и центробежная сила), по сравнению с вертикальными силами не имеют значения при определении напряжений.

Часть свода, или ребро арки, вводимая в основу расчета в виде кривого бруса, может быть либо заделана на концах, либо снабжена одним, двумя или тремя шарнирами (черт. 190), таким образом степень статической неопределимости, которая для арки с заделанными концами равна 3, в конце концов сводится к нулю, и расчет опор и усилий становится статически определимым, причем однако наперед должны быть известны размеры сечения и очертание оси свода. В каждом отдельном случае необходимо задаваться очертанием оси свода и его сечений, которые и кладутся в основу расчета, наивозможно приближаясь к идеальной форме. Удачный выбор очертания, кривой оси определяется взаимным положением оси свода с веревочной кривой действующих грузов. При этом нужно учитывать два положения:



Черт. 191.

1) напряжения в крайних волокнах сечения равны друг другу;

2) ось свода определяется как веревочная кривая от нагрузки, состоящей из собственного веса и равномерной внешней нагрузки. Форма кривой давления определяется кроме того статически неопределимыми величинами, определяемыми заданной нагрузкой (зависимость от формы кривой и поперечного сечения) и размерами и формой кривой.

Первоначальное построение оси свода.

Условия подбора поперечных сечений свода в ключе и у опор.

а) По Шварцу:

$$c=0{,}2+\frac{1}{21\,000}\cdot\frac{G}{\sigma}\cdot\frac{l}{f}\ \text{(черт. 191)}, \qquad (62)$$

где c — высота сечения в ключе, G — собственный вес половины свода шириной 1 м в кг и σ — допускаемое напряжение материала в кг/см².

По Гейнцерлингу:

для тесовой кладки: $c=0{,}40+0{,}025\cdot r$;

для кирпичной кладки: $c=0{,}43+0{,}028\cdot r$;

для бутовой кладки: $c=0{,}48+0{,}031\cdot r$;

c высота сечения в ключе, r — радиус внутреннего очертания свода в м. Величину c в большинстве случаев можно уменьшить на 10 — 15%.

По Гуселлю:

для свода из трамбованного бетона: $c=0{,}20{,}0+0{,}022\cdot r$.

б) По Риттеру величина напряжений в ключе свода с заделанными пятами (черт. 191) имеет следующие значения:

От собственного веса и температуры

$$\sigma=\sigma_0\pm\frac{2c}{f}(\sigma_0-E\alpha_t t), \qquad (63)$$

$$\sigma_0=\frac{H}{F},\quad H=\frac{5g_s+g_k}{48f}l_2. \qquad (64)$$

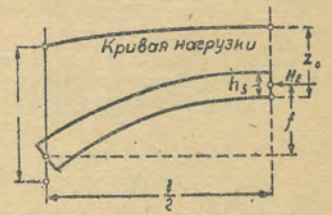
Далее, вес половины свода:

$$G=\frac{l}{6}(2g_s+g_k).$$

От подвижной нагрузки в положении, невыгодном для усилия в ключе

$$H=\frac{pl^2}{168\cdot f},\quad M_s=\pm\frac{pl^2}{186}. \qquad (65)$$

Конечно только путем ряда последовательных попыток удается подобрать по формулам (63, 64) и (65) достаточную толщину свода ключа; следует обращать внимание, чтобы σ, σ_0 и E были выражены в одинаковых измерениях точно так же как и p, g_s и g_k F — площадь поперечного сечения в ключе H — распор; M — изгибающий момент в ключе арки.



Черт. 192.

в) Для подбора сечения свода с заделанными пятами могут служить следующие довольно точные и удобные формулы.

1. Постоянная нагрузка (черт. 192).

Распор в m на 1 м ширины свода:

$$H_E=e\frac{l^2}{f}\cdot z\cdot\delta. \qquad (66)$$

δ — вес 1 м³ материала свода в m, e — коэфициент, согласно приведенной ниже таблице 1.

Таблица 1

$\varphi=$	0,1	0,2	0.3	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$e=$	0,0339	0,0639	0,0562	0,0490	0,0401	0,0337	0,0295	0,0267

Напряжения в ключе свода от постоянной нагрузки:

$$\sigma_0 = \frac{H_E}{F_s}\left(1 \pm \Delta \cdot \frac{h_s}{j}\right); \qquad (67)$$

F_s — площадь поперечного сечения в ключе, величина коэфициента Δ находится из табл. 2; $+$ для верхнего, — для нижнего волокна.

Таблица 2

Отношение (подъем)	1/4	1/5	1/6	1/8	1/10	1/12
$\Delta=$	2,37	2,20	2,10	1,99	1,95	1,92

2) Изменения температуры на $t°$C (от 15° и максимум до 20°C) вызывают в ключе напряжение:



Черт. 193.

$$\sigma_t = \pm \Delta \frac{h_s}{f} \cdot E\alpha_t t; \qquad (68)$$

E — модуль упругости, α_t — коэфициенты температурного расширения материала.

3. Подвижные нагрузки.

Если ось свода построена по кривой давления от собственного веса, то наибольшие изгибающие моменты по отношению к середине сечения ключа свода:

Подвижная нагрузка p_1 l_1 на участке (черт. 193):

$$\max M = f_1 \cdot p_1. \qquad (69)$$

Подвижная нагрузка p_2 на обоих участках l_2 (черт. 193):

$$\max M = -2f_2 \cdot p_2.$$

Если ось свода построена по кривой давления от собственного веса $+\frac{1}{2}$ подвижной нагрузки $\left(g + \frac{1}{2}p\right)$, то моменты соответственно равны:

$$\begin{aligned} \max M &= +f_1 \cdot p_1 - (f_1 - 2f_2) \cdot p/2, \\ \min M &= -2f_2 \cdot p_2 - (f_1 - 2f_2) \cdot p/2. \end{aligned} \qquad (70)$$

Значения f_1 и $2f_2$ представлены в таблице 3; положительные моменты вызывают на внутренней стороне свода растяжение, на внешней — сжатие.

Таблица 3

Площади инфлюэнтной линии моментов для середины сечения в ключе

Подъем	$\varphi=$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0		1,2
1/4	$f_1=$	4,87	5,51	6,03	6,47	6,80	7,08	$7,33 \cdot l^2$	1 000
	$2f_2=$	4.51	3.97	3.57	3,29	3,09	2,93	$2,\!0 \cdot l^2$	1 000
1/5	$f_1=$	5,18	5,80	6,30	6,75	7,13	7 50 l^2:1 000		
	$2f_2=$	4.63	4,11	3.71	3,42	3,19	3,03 l^2 1 000		
1/6	$f_1=$	5,38	5,96	6,49	6,98	7,4.8 l^2:1 000			
	$2f_2=$	4,75	4,23	3,83	3,52	3.2.8 l^2:1 000			
1/8	$f_1=$	5,60	6,11	6.69	7,33 l^2:1 000	—			
	$2f_2=$	4.88	4,35	3 94	3,52 l^2:1 000	—			
1/10	$f_1=$	5,75	6,19	6,88 l^2:1 000					
	$2f_2=$	4,95	4,42	4,00 l^2:1 000					
1/12	$f_1=$	5,85	6,28	7,01 l^2:1 000					
	$2f_2=$	4,98	4,45	4,03 l^2:1 000					

Так как в таблице даны моменты для середины сечения в ключе свода, то для нахождения напряжений надо еще знать соответственную нормальную силу в рассматриваемом сечении, т. е. распор для невыгодного положения нагрузки; ее величина для

$$\left.\begin{aligned} \max M&: N_1 = F_1 \cdot p_1, \\ \min M&: N_2 = 2F_2 \cdot p_2. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Значения N_1 и $2N_2$ приведены в таблице 4.

Таблица 4

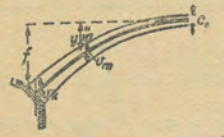
Площадь эпюры распора

Подъем	$\varphi=$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
1/4	$2F_2=$	0,0650	0,0595	0,0581	0,0573	0,0560	$0,0555 \cdot l^2/f$
	$F_1=$	0,0643	0,0730	0,0770	0,0802	0,0834	$0,0859 \cdot l^2/f$
1,5	$2F_2=$	0,0647	0,0595	0,0581	0,0573	0 0560 l^2/f	—
	$F_1=$	0,0643	0,0725	0,0762	0,0791	0,0622 l^2/f	—
1/6	$2F_2=$	0,0640	0,0595	0,0581	0,0573 $l^2 \cdot f$	—	—
	$F_1=$	0,0644	0,0721	0,0758	$0,0783 \cdot l^2 \cdot f$	—	—
1/8	$2F_2=$	0 0623	0,0595	0,0581	l^4/f	—	—
	$F_1=$	0,0657	0,0715	0,0749	l^2/f	—	—
1/10	$2F_2=$	0,0623	$0\,0595 \cdot l^2/f$		—	—	—
	$F_1=$	0,0661	$0,0712 \cdot l^2/f$		—	—	—
1/12	$2F_2=$	0,0622	$0\,0595 \cdot l^2/f$		—	—	—
	$F_1=$	0,0660	$0,0711 \cdot l^2/f$		—	—	—

г) При определении размеров трехшарнирного свода можно свободно пользоваться приведенными формулами для определения величины сечения c в ключе арки. Распор от сплошной равномерной нагрузки p будет

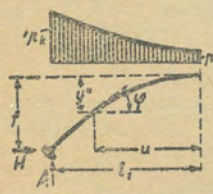
$$H_v = \frac{pl^2}{8f}. \qquad (72)$$

Для определения толщины свода σ в опасном сечении $\left(\frac{l}{4}\right)$ Толкмит дает следующие формулы:



$$\sigma \geqslant 0{,}094\,\frac{pl^2}{H}\cdot\cos\varphi, \tag{73}$$

$$s^2 - \frac{H\cdot s}{\sigma_0\cdot\cos\varphi} = 0{,}094\,\frac{pl^2}{\sigma_0}, \tag{74}$$



Черт. 194.

первая для случая, когда кривая давления не должна выходить из ядра (напряжение в крайнем волокне до $2\sigma_0$), вторая формула — для случая, когда в опасном сечении возникает то же напряжение, что и в ключе и в пятах (σ_0). (Верхний предел для σ) φ — угол наклона касательной оси свода к горизонту.

В своде с заделанными пятами величина остальных сечений часто определяется по $\frac{c}{\cos\varphi}$, так что сечения свода постепенно равномерно увеличиваются. При заданных или принятых сечениях в ключе и у пят постепенное изменение сечений достигается также по формуле:

$$v_m = c_0 + (v_k - c_0)\,\frac{y''_m}{f}. \tag{75}$$

Подбор сечений по формуле $\frac{c}{\cos\varphi} = c_0$ будет тем более уместным, чем более преобладает в напряжениях крайних волокон влияние нормальной силы по сравнению с влиянием моментов. В противовес этому неблагоприятное влияние температуры на напряжение пологих сводов приводит к необходимости как можно меньше увеличивать сечения свода.

В трехшарнирном своде размеры сечений постепенно убывают к его ключу и пятам. Подобно формуле (74) может быть найдена закономерность этого постепенного сокращения. Такого неблагоприятного в эстетическом отношении очертания можно избежать соответствующим армированием свода.



Черт. 195.

Из подобных же соображений выбирают сечения одно- и двухшарнирного свода.

Очертания трехшарнирной арки находятся постепенным приближением к форме, дающей наилучшее использование сечения. Для этого должны быть соблюдены следующие условия:

а) Крайние отрицательные значения напряжений в крайних волокнах σ_0, σ_u должны быть равны друг другу.

б) Крайние отрицательные значения достигают намеченного предела.

в) Крайние положительные значения достигают намеченного предела.

Пусть дан свод с осью, построенной в виде веревочной кривой от собственного веса, или от собственного веса и какой-либо части нагрузки.

Толщина его известна ординаты центра тяжести и ядра равны соответственно y, y_0, y_u. Веревочная кривая от собственного веса определена распором H_g и ординатами y', характеризующими расстояния η_0, η_u точек

ядра сечения от веревочной кривой. Невыгоднейшие нагрузки вызывают в своде ядровые моменты:

$$\frac{\max}{\min}\,M_{k0}, \quad \frac{\max}{\min}\,M_{ku}.$$

При смещении сечения на величину e:

$$\left.\begin{aligned} -\sigma_o W_o &= \frac{H_g}{\cos\varphi}\,(\eta_u + e) + M_{ku}, \\ +\sigma_u W_u &= -\frac{H_g}{\cos\varphi}\,(\eta_0 - e) + M_{ko}, \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Условия $\min\sigma_u = \min\sigma_o$ и $\min\sigma = -\sigma_{доп}$ дают:

$$e_1 = -\frac{\max M_{ku} + \min M_{ko}}{2H_g/\cos\varphi} + \frac{\eta_o - \eta_u}{2}, \tag{77}$$

$$\left.\begin{aligned} -\sigma_{доп}\,(W_{o_1} + W_{u_1}) &= \frac{H_g}{\cos\varphi}\,(\eta_{o_1} + \eta_{u_1}) - (\max M_{ko} - \min M_{ku}), \\ \text{а для}\quad W_o = W_u\,\frac{h_1^2 b}{6} &: -\sigma_{доп}\,\frac{b}{3}\,h_1^2\,\frac{H_g h_1}{3\cos\varphi} - (\max M_{ko} - \min M_{ku}); \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

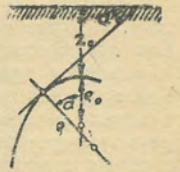
откуда определяется величина h_1.

Второй группой дополнительных условий могут служить условия $\sigma_u = \min\sigma_0$ и $\max\sigma_0 = +\sigma_{доп}\,(=0)$ или $\max\sigma_u = +\sigma_{доп}\,(=0)$, откуда $e_2 = e_1$ и

$$+\sigma_{доп}\,W_{o_2} = -\frac{H_g}{\cos\varphi}\,(\eta_{u_2} + e_2) - \min M_{ku}, \tag{79}$$

$$+\sigma_{доп}\,W_{u_2} = -\frac{H_g}{\cos\varphi}\,(\eta_{o_2} - e_2) + \max M_{ko}. \tag{80}$$

Тем самым новая ось свода и три сечения определены величинами e, из которых нужно брать наибольшую величину; ей отвечает наибольшее напряжение крайних волокон σ_m; при повторении расчета по уравнениям (76) и (78) эту величину следует вводить для остальных сечений в виде $\sigma_{доп}$.



Черт. 196.

Форма сводов под высокими насыпями, на которые вследствие большой разности высот действует значительное горизонтальное давление земли, определяется по формуле, данной Шведлером:

$$\rho = z_0\cdot\frac{a}{\beta^2\cos^3\alpha\sqrt{\beta^2 + 8a\beta\,(\beta - 1)}} = z_0\cdot\mu, \tag{81}$$

где согласно черт. 196: ρ_0 — радиус кривизны, z_0 — высота засыпки в ключе.

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad a = \rho_0 : z_0.$$

В таблице приведены значения μ в зависимости от a и α.

Таблица 5.

α	$a=3$	$a=1$	$a=0,5$	$a=0,3$	$a=0,1$
0	3,00	1,00	0,50	0,30	0,100
10	2,99	1,02	0,51	0,31	0,103
20	2,90	1,07	0,55	0,34	0,113
30	2,94	1,19	0,64	0,39	0,134
40	3,04	1,34	0,75	0,47	0,168
50	3,40	1,62	0,95	0,61	0,225
60	4,00	2,00	1,25	0,83	0,317
90	4,80	2,70	1,80	1,30	0,600

VIII. УЧЕТ СЕЙСМИЧЕСКИХ СИЛ

РАЗДЕЛ 1. ХАРАКТЕР И ВЕЛИЧИНА СЕЙСМИЧЕСКИХ СИЛ

Всякое землетрясение в физической своей основе представляет упругие колебания земной коры.

1. Период колебаний. Упругие колебания характеризуются периодом T и ускорением τ. Ускорение же, как вектор, требует для своего определения знания величины и направления. В вопросе периода колебаний большинство авторитетов сходится на величине в одну секунду, каковая и кладется в основу дальнейших расчетов.

2. Величина ускорения. Величина ускорения зависит от сейсмичности данного района, которая в свою очередь определяется общей геологией и тектоникой края, также „малой геологией" места постройки сооружения.

Поэтому необходимо для каждого района принимать свою величину ускорения в зависимости от интенсивности землетрясения в данном районе.

Однако на сегодняшний день нет достаточных материалов по геологии Союза, его тектонике и нет и не было густой сети сейсмических постов, которые дали бы инструментально определенные величины ускорений бывших землетрясений.

Поэтому приходится обратиться к менее точному, более примитивному, более субъективному, но тем не менее широко распространенному и практически приемлемому методу определения вероятной силы землетрясения на основании только статистики прошлых землетрясений, интенсивность которых в подавляющем большинстве случаев определяется по шкале.

Шкала оценивает интенсивность землетрясения на основании наличия ряда признаков, характерных для данного землетрясения. Все признаки можно разделить на четыре группы.

Первая группа — признаки психические. Эти признаки определяют, как на данное явление реагировало население, и отсюда устанавливается интенсивность выявившихся сил путем оценки их баллом шкалы.

Вторая группа — признаки, устанавливающие, как на землетрясение реагировали постройки различных типов и домашняя утварь.

Третья группа — признаки геологические, отмечающие остаточные деформации, имевшие место при землетрясении.

Четвертым признаком является величина ускорения, служащая механической мерой интенсивности балла. В СССР для оценки землетрясения установлена шкала ОСТ, имеющая недостатки. До пересмотра ОСТ приводится ниже без изменений.

ШКАЛА БАЛЛОВ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ ОСТ

Балл	Признаки, определяющие балльность
I	Незаметное (максимальное ускорение 2,5 *мм/сек²*.) микросейсмическое, сотрясение почвы, отмечаемое только сейсмическими приборами.
II	Чрезвычайно слабое (2,5 — 5 *мм/сек²*); чрезвычайно слабое сотрясение, отмечаемое сейсмическими приборами; ощущается немногими, нервными или очень чуткими лицами, находящимися в состоянии полного покоя, особенно в верхних этажах домов.
III	Слабое (5 — 10 *мм/сек²*); даже в густо населенной местности ощущается лишь небольшой частью населения в форме сотрясения, как от быстро проехавшего экипажа. Иногда может быть определена продолжительность, а также направление движения. Многими лишь из последующего обмена впечатлений уясняется, что колебание было вызвано землетрясением.
IV	Умеренное (10 — 25 *мм/сек²*); под открытым небом ощущается немногими. Внутри зданий распознается многими, но не всеми, по дрожанию или легкому колебанию предметов обстановки, вследствие чего плотно поставленные стаканы и посуда производят слабый звон, как при проезде грузовика по трясской мостовой; звон оконных стекол, скрип дверей, балок, полов, треск потолков, легкое колебание жидкости в открытых сосудах; отдельные случаи пробуждения спящих.
V	Довольно сильное (25 — 50 *мм/сек²*), на улице или вообще под открытым небом отмечается весьма многими (даже при полном разгаре дневной работы). Внутри домов ощущается всеми вследствие общего сотрясения здания; впечатление, как от падения в доме тяжелого предмета (мешка, мебели). Колебательное движение свободно висящих предметов, как-то: занавески, висячие лампы, не слишком тяжелые люстры колеблются, маятники часов или останавливаются или описывают большую дугу в зависимости от направления толчка перпендикулярно к плоскости колебания маятника или же в той же плоскости. В последнем случае остановившиеся часы с маятником могут вновь притти в движение. Звон часовых пружин. Электрический свет мигает или гаснет вследствие соединения проводов. Картины ударяются о стены и сдвигаются с места. Выплескивание небольшой части жидкости из наполненных открытых сосудов. Возможно падение стоящих рамок, а также прислоненных к стене предметов; более легкие предметы могут сдвигаться с места. Скрип мебели. Двери и оконные ставни раскрываются или захлопываются. Трещины в оконных стеклах. Пробуждение спящих. Некоторые жители выбегают на улицу.
VI	Сильное (50—100 *мм/сек²*), ощущается всеми в испуге; очень многие выбегают на улицу. Сильное колебание жидкости. Падение картин со стен, книг с полок, кроме стоящих у стен, идущих в направлении толчка. Довольно устойчивые домашние вещи, даже предметы обстановки, сдвигаются с места или опрокидываются. Бой башенных часов. На некоторых домах, даже солидной постройки, штукатурка дает тонкие трещины. Кое-где с потолка и стен откалываются небольшие куски штукатурки. У домов плохой постройки повреждения сильнее, но не опасного характера.
VII	Очень сильное (100—250 *мм/сек²*), значительное повреждение предметов квартирной обстановки вследствие опрокидывания и ломки даже больших предметов. На реках, прудах и озерах развивается волнение, вода мутнеет из-за взмученного ила. Отдельные случаи оползней песчаных и галечных берегов. Изменение уровня воды в колодцах. Умеренные повреждения в домах даже солидной европейской постройки, легкие трещины в стенах, откалывание значительных кусков штукатурки и лепных украшений, кирпичей, отделение и падение черепицы, повреждение дымовых труб вследствие трещин, падение плит и выпадение кирпичей. Неисправные трубы обваливаются на крышу. Падение с башен и высоких зданий плохо укрепленных украшений. В фахверковых постройках повреждения штукатурки и заполнение рам еще сильнее. Серьезные повреждения у многих ветхих или плохо построенных зданий, преимущественно из булыжной и кирпичной кладки на глиняном или известковом растворе без перевязи, при кладке стен способом „Мидис", при которой кладутся лишь облицовочные камни к наружной и внутренней поверхностям стены, а промежуток между ними защебенивается и бутится; иногда наблюдается отслаивание облицовки. Дощатые изгороди, навесы, старые каменные ограды, в особенности возведенные из отдельных камней без цемента, хижины, церкви, минареты у мечетей и т. п. сельские постройки могут подвергаться значительным повреждениям.

Антисейсмические постройки, а также деревянные и плетневые постройки остаются невредимыми.

VIII Разрушительное (250—500 *мм/сек²*), легкие трещины на крутых склонах и на сырой почве. Местами выступает в небольшом количестве вода с примесью песка и ила.

Целые стволы деревьев, особенно у пальм, быстро раскачиваются или даже ломаются.

Даже тяжелые предметы обстановки далеко сдвигаются с места и частью опрокидываются. Статуи, памятники и т. п., близкие от поверхности земли, т. е. на кладбищах, бульварах и т. д., поворачиваются на постаментах или опрокидываются. Прочные каменные ограды разваливаются и опрокидываются. Выпадение большей части заполнения у фахверковых построек. Дома европейской постройки, даже солидной конструкции, сильно повреждаются вследствие больших трещин в стенах. Некоторые здания частично обваливаются. Большинство дымовых труб падает. Падение церковных башен и фабричных труб причиняет соседним домам большее повреждение, чем само землетрясение. Особенно хорошо построенные фабричные трубы ломаются лишь в верхней части и дают сдвиг.

IX Опустошительное (500—1 000 *мм/сек²*), сильные повреждения каменных домов солидной европейской постройки, многие из них становятся непригодными для жилья. Некоторые совершенно или в большей части обваливаются. Фахверковые постройки сдвигаются с каменного фундамента, оседают, скрепления рам ломаются, что вызывает еще большее повреждение. Штукатурка на деревянных домах дает трещины и щели. Старые деревянные дома несколько деформируются.

X Уничтожающее (1 000—2 500 *мм/сек²*), рыхлая и особенно влажная почва дает трещины до нескольких дециметров ширины. Вдоль берегов рек появляются трещины до метра шириной. Наблюдаются не только оползни рыхлой почвы со скалистых склонов, но и обвалы частей скал. У берегов рек и на крутом морском побережье обваливаются значительные участки, на пологом побережье наблюдаются скользящие сдвиги песчаных и илистых масс, что вызывает иногда значительное изменение рельефа, частое изменение уровня воды в колодцах, выплескивание на берег воды рек, каналов, озер.

Большинство каменных и фахверковых построек разрушается вместе с фундаментом, даже прочные кирпичные стены дают опасные трещины. Сильное повреждение даже хорошо построенных деревянных домов и мостов, некоторые даже разрушаются. Более или менее значительное повреждение насыпей и плотин. Легкое искривление железнодорожных рельсов. Трубопроводы, заложенные в почве (газовые, водопроводные, канализационные) разрываются или закупориваются. Каменная и асфальтовая мостовые дают трещины и волнообразные складки вследствие выпучиваний.

XI Катастрофа (2 500—5 000 *мм/сек²*); многочисленные и значительные изменения в поверхностных слоях земли, определяемые характером почвы. Образуются широкие трещины (особенно в рыхлой и сырой почве, в горизонтальном и вертикальном направлении). Выступает вода с песком и илом, с характерным для этого разнообразием форм. Многочисленные оползни и обвалы.

От каменных построек всех родов почти ничего не остается. Даже прочные деревянные и гибкие плетневые постройки, особенно близ линии сбросов, могут уцелеть лишь частично. Из мостовых сооружений даже большие, прочные мосты разрушаются вследствие разрушения каменных устоев или искривления металлических ферм. Иногда бывают разрушения у более упругих деревянных мостов. Полный разрыв, часто даже на значительном протяжении, насыпей и плотин. Сильное искривление и выпучивание железнодорожных рельсов. Решающее значение для рода и степени повреждения у путей сообщения играет характер грунта. Трубопроводы под землей совершенно разрываются и приходят в негодность.

XII Сильная катастрофа (5 000 *мм/сек²*); изменения в почве достигают громадных размеров. Даже в покрытой растительностью скалистой почве образуются сбросовые трещины с значительной величиной смещения, а также горизонтальные сдвиги и разрывы. Многочисленные обвалы скал, оползни, осыпи берегов на значительном протяжении. Различные изменения в подземных и надземных водоемах: водопады, озера, отклоняется течение рек и т. д.

Ни одно сооружение не выдерживает.

Под ускорением в шкале ОСТ и в дальнейшем разумеется величина ускорения колебательного движения земной коры при землетрясении, определяемая по формуле

$$\tau = \frac{4\pi^2 a}{T_0},$$

где a — амплитуда колебаний, а T_0 — его период.

3. Районирование по силе землетрясения. Однако для строительных целей нет необходимости столь значительного подразделения шкалы на баллы и вытекающего отсюда районирования. Практически более удобно соединить баллы в группы. По строительному признаку вся шкала делится на четыре группы.

Группа I определяет районы безопасные в сейсмическом отношении: здесь не требуется учитывать сейсмические силы. По шкале эта группа определяется балльностью от 1 до 6 включительно, при максимальной величине ускорения — 100 *мм сек²*.

Группа II, требующая учета воздействия сейсмических сил, но для которой еще не приходится прибегать к существенным усилениям конструкций, к особому подбору материала для обычных типов сооружений. Балльность этой группы 7—8. Максимальная величина ускорения 500 *мм/сек²*.

Группа III сейсмоопасная, требующая проверки расчетом всех видов сооружений. В результате этих расчетов возникает потребность применения для большинства сооружений антисейсмических конструкций. Балльность этой группы 9, максимальная величина ускорения 1 000 *мм/сек²*.

Группа IV. Большая балльность (X, XI, XII балл) определяет собой местности, в которых землетрясение вызывает ряд остаточных деформаций земной коры в виде трещин, сбросов и т. п. Такая интенсивность сейсмических сил требует значительного усиления конструкций, а в некоторых районах, в непосредственной близости от мест остаточных деформаций земной коры, и для высшей балльности — строительство вовсе невозможно.

Таким образом на основании данных статистики для рассматриваемого района необходимо определить максимальную интенсивность прошлых землетрясений, т. е. максимальную балльность. Эту интенсивность принять как вероятную в будущем и отнести местность к одной из перечисленных групп. Тем самым определится сумма дополнительных требований, необходимых для антисейсмичности сооружения, вытекающих из изложенных ниже требований. Эти требования разработаны применительно к предложенному делению интенсивности сейсмических сил на три группы.

Предлагаемые ниже технические правила проектирования и возведения сооружений разработаны для местностей с интенсивностью сейсмических сил до 9 баллов, т. е. относятся к районам первых трех групп. Этим охватывается почти полностью вся территория СССР.

4. Расчетное направление ускорения. Как показали теоретические выкладки и примеры расчетов проф. Завриева, с достаточной для практики точностью можно принять при расчете на сейсмостойкость ускорение направленным горизонтально. Этим значительно облегчается расчет при соблюдении достаточных пределов точности решения задачи. Некоторые нормы учитывают наряду с горизонтальными ускорениями, так же и вертикальные в том или другом размере. Однако подробный анализ данного положения показал ненужность введения вертикальных инерционных сил, так как они меняют силу веса на величину, примерно, порядка точности определения последней даже при максимальной балльности, характеризующей интенсивность сейсмических сил данной местности.

Поэтому с достаточной степенью точности ускорение принимается направленным горизонтально и в сторону, невыгоднейшую для прочности или устойчивости сооружения. Следовательно статистика должна дать интенсивность сейсмических сил, оцененную баллом, в механическом отношении балл определяет величину ускорения упругих колебаний землетрясения. Направление ускорения принимается в расчете

горизонтальное, и направленное в сторону, невыгоднейшую для прочности или устойчивости рассчитываемого элемента.

5. Выбор месторасположения сооружения. Данные о наблюденных землетрясениях, подробные отчеты о них с показанием изосейст все сходятся на одном — крайней прихотливости и кажущейся незакономерности, с которой распределяются изосейсты. Зачастую среди сравнительно спокойной области отмечается район большой интенсивности сейсмических сил и наоборот, в районах большой интенсивности выявляются отдельные спокойные острова. Причина такой незакономерности — геологическое строение местности. Большая и малая геология района определяют собою сейсмичность в отдельных его пунктах.

Оценкой баллом землетрясений для рассматриваемого населенного пункта в скрытой форме оцениваются условия грунтов и общей геологии этой местности с равнением на худшие, но не исключительно плохие. Отсюда вытекает необходимость в будущем строительстве сооружений обеспечить условия грунта и геологии во всяком случае не хуже тех, при которых дана оценка вероятной силы землетрясения на основе статистических данных.

При расположении сооружений следует руководствоваться такими общими указаниями и требованиями:

а) Особенно опасны участки с насыпными грунтами.

б) Сооружения предпочтительно располагать на плотных однородных грунтах, а лишь в исключительных случаях на рыхлых и насыпных грунтах при мощности последних не менее 3—4 метров ниже основания сооружения.

в) Расположение сооружений на косогорах, образованных насыпными грунтами или же склонных к оползневым явлениям, не обеспечивает ни при каких условиях сейсмостойкости.

г) Не рекомендуется, а в районах группы III — запрещается постройка сооружений на грунтах со значительным увлажнением.

д) Запрещается возведение сооружений на грунтах болотистых.

е) В случае скалистых косогоров возможно расположение на них сооружений, с подготовкой их под основание сооружения путем обработки уступами.

ж) Особо следует избегать постройки сооружений в районах, угрожаемых при землетрясении обвалами, оползнями и другими видами остаточных деформаций.

з) Не следует строить сооружения на линии смены одних геологических образований другими, что часто имеет место при переходе от склонов к долине или равнине.

и) Не следует располагать сооружения у сбросов или же у их подножья, где легче всего сотрясение переходит в разрыв и наблюдаются обвалы отдельных глыб.

к) Следует учесть при выборе места поселений и отдельных сооружений расположение сейсмотектонических линий, если таковые установлены или могут быть установлены на основании имеющихся данных о предшествующих землетрясениях.

л) В случае скалистых грунтов глубина заложения фундаментов определяется в зависимости от толщины верхнего выветрившегося слоя, который должен быть снят на всю глубину выветривания. Следует стремиться к тому, чтобы фундаменты сооружений по всей высоте находились в среде одинаковой плотности и упругости.

6. Инженерно-геологические исследования места постройки. Общие геологические данные должны осветить вопрос о геологическом строении местности и установить связь геологических факторов с проявлением сейсмических сил.

Сооружения внеклассовые, I, II и III классов, возводимые в сейсмических районах групп II и III, требуют производства геологического обследования строения и характера верхних напластований, которые должны служить основанием возводимого сооружения. Одновременно необходимо собирать все сведения о режиме грунтовых вод.

Объем геологического обследования и испытания свойств грунта, места непосредственно служащего основанием сооружения, зависит:

а) От важности и серьезности сооружения, в частности от величины расчетного давления на единицу площади основания и от конструкции сооружения.

б) От рода грунта и физической его особенности.

Для сооружений легких, например одноэтажных, каменных, двухэтажных деревянных или облегченной конструкции зданий, и им подобных, достаточно произвести осмотр местности и зондировку грунта. В сомнительных случаях следует отрывать шурфы.

Для всех прочих сооружений III класса необходимо производить осмотр местности и шурфование или бурение. В сомнительных случаях для сооружений III класса необходимо ставить полевые испытания несущей способности грунта и лабораторные исследования.

Для сооружений II и I классов необходимо произвести осмотр местности, шурфование или бурение, также полевые испытания прочности грунта, в сомнительных случаях лабораторное исследование образцов грунта.

Во всех случаях геологическое обследование должно сопровождаться осмотром существующих сооружений.

РАЗДЕЛ II. РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ НА СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ

1. Какие сооружения и при какой силе рассчитываются на сейсмостойкость. Только владея рабочей расчетной гипотезой, построив расчетную схему работы сооружения на случай воздействия сейсмических сил, а с другой стороны, скрестив расчет с анализом последствий землетрясений, проектировщик может дать экономически правильное и технически целесообразное решение задачи конструирования антисейсмического сооружения.

I группа. В местностях I группы обязательна проверка только сооружений башенного типа на резонанс. Резонанс представляет собою тот случай упругих вынужденных колебаний сооружения, когда частота вынуждающей причины близка к частоте собственных колебаний системы. Как известно, в этих обстоятельствах даже незначительное по величине воздействие вынуждающей причины может привести к значительным последствиям. Поэтому и в местностях I группы, т. е. мало сейсмичных, все же остается требование поверки сооружений на резонанс.

II группа. В сейсмических местностях II группы разрешается не рассчитывать на сейсмостойкость сооружения металлические, деревянные, железобетонные, а также гражданские сооружения из каменной и бетонной кладки высотой не более двух этажей при условии соблюдения для них требований в отношении материала, конструкций и производства работ, как для сейсмичных районов.

В местностях II группы обязательно должны рассчитываться на сейсмостойкость:

а) Все искусственные каменные и бетонные сооружения (плотины, подпорные стены, акведуки, мосты, трубы и пр.).

б) Гражданские сооружения, не удовлетворяющие условиям, изложенным выше.

в) Отдельно стоящие стены, столбы, башни, дымовые трубы.

г) Металлические, деревянные и железобетонные сооружения необычных конструкций и размеров, в отношении сейсмостойкости которых возникают особые сомнения.

III группа. В сейсмических местностях III группы разрешается не рассчитывать на сейсмостойкость сооружения металлические и деревянные, обязательному расчету на сейсмостойкость подлежат независимо от рода прочего материала:

а) Все искусственные сооружения (плотины, подпорные стены, акведуки, мосты, трубы и пр.)

б) Гражданские сооружения.

в) Отдельно стоящие стены, столбы, башни, дымовые трубы и им подобные сооружения.

2. Принципиальные установки расчета. Всякое землетрясение в физической основе представляет собою упругие колебания земной коры, определяемые периодом и ускорением. Ускорение же определяется как вектор направлением и величиной.

Упругие колебания передаются непосредственно основанию сооружения и отсюда приводят все сооружение в сложное колебательное движение. Динамика сооружения повлечет за собой появление инерционных сил, каковые и явятся дополнительной нагрузкой сооружения при землетрясении.

Предполагается в запас расчета, что фундаменты сооружения совершают колебания, в точности повторяющие упругие колебания среды их окружающей — земной коры.

Рассчитать сооружения на сейсмостойкость — это значит найти величины направления и точки приложения указанных инерционных сил и проверить в случае их действия прочность и устойчивость сооружения, задавшись нормами допускаемых напряжений и коэфициентов устойчивости.

При расчете сооружения на действие сейсмических сил нужно учитывать собственные и вынужденные колебания сооружения.

Во всех случаях сопротивление среды не учитывается, так как в начальные периоды колебаний оно не оказывает существенного влияния.

В работе сооружений при действии сейсмических сил согласно предложению проф. Завриева считают, что вынужденные колебания возрастают в первый же момент времени, когда собственные колебания еще не успели существенно затухнуть; в результате суммируется воздействие вынужденных и собственных колебаний, и тем самым создаются невыгоднейшие условия для работы сооружения в первый момент воздействия землетрясения. Данные опыта подтверждают высказанное положение. Здания разрушаются в подавляющем большинстве в первый момент. Исключение составляют некоторые существенно гибкие сооружения, но здесь уже имеет место особый случай воздействия упругих колебаний, а именно явление резонанса.

3. Инерционные силы, возникающие при землетрясении в сооружении. Для нереального случая абсолютно жесткого сооружения инерционные силы определятся по формуле:

$$P_\tau = mQ,$$

где

$$m = \frac{\tau}{g}, \qquad (1)$$

P_τ — инерционная сила, возникающая при землетрясении.
τ — ускорение колебаний землетрясения.
g — ускорение силы тяжести.
Q — вес сооружения.

Для случая упругого сооружения:

$$P_\tau = \mu m Q, \qquad (2)$$

где: μ — коэфициент, учитывающий упругие свойства сооружения и определяемый различно для той или другой схемы сооружения на основе изложенного выше представления о работе сооружения с учетом воздействия вынужденных и собственных колебаний сооружения.

Силы инерции прикладываются к центрам тяжести грузов и принимаются горизонтальными.

Сооружения условно разбиваются на жесткие и гибкие.

Жесткими называются такие, для которых $T^2 \leqslant 0{,}05$ *сек*^{2}. Сооружения считаются гибкими при $T^2 > 0{,}05$ *сек*^{2}, где T — период собственных колебаний сооружения.

Для жестких сооружений коэфициент $\mu = 2$.

Для гибких сооружений (при $T^2 \geqslant 0{,}05$), если схема их приводится к стойке постоянного сечения, жестко заделанной в основании и нагруженной системой грузов Q_i; силы инерции последних определяются по формуле (2) при

$$\mu = 2\,(1 + n\delta_i), \qquad (3)$$

где

$$n = \frac{\frac{Q'}{Q_0}}{1 - T^2}\,T^2, \qquad (4)$$

Q_0 — заменяющий груз (определение его дано ниже).
Q' — заменяющий груз в *кг*, величина которого определяется:

а. — для сосредоточенного груза Q, приложенного на расстоянии a_i от заделанного конца:

$$Q' = \delta Q, \qquad (5)$$

где δ определяется по таблице 1.

б. — для сплошной нагрузки, равномерно распределенной по всей высоте бруса при интенсивности q:

$$Q' = 0{,}375Q, \quad \text{где } Q = ql. \qquad (6)$$

в. — при совместном действии нескольких сосредоточенных грузов и равномерной нагрузки — Q' определится как сумма приведенных грузов, подсчитанных для каждого сосредоточенного груза и для равномерной нагрузки в отдельности, согласно пп. „а“ и „б“ настоящего параграфа.

Таблица 1

$\frac{a_i}{l}$	0,25	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,10
δ_i	0,09	0,31	0,43	0,57	0,71	0,85	1,00

Для гибких сооружений, схема которых сводится к стойке постоянного сечения, жестко заделанной в основании и несущей постоянную равномерную нагрузку интенсивностью q, силы инерции рассчитываются следующим образом:

1. Закон распределения сил инерции по высоте бруса при сплошной равномерной нагрузке выражается зависимостью

$$p_x = \mu_x mql, \tag{7}$$

где p_x — интенсивность сил инерции для точки, расположенной в расстоянии x от заделки бруса, μ_x — коэфициент, определяемый для различных $\frac{x}{l}$ по таблице 2.

2. Перерезывающая сила в расстоянии X от заделки бруса вычисляется по формуле:

$$P_x = \alpha_x mql, \tag{8}$$

α_x — коэфициент, определяемый для различных $\frac{x}{l}$ по таблице 3.

Таблица 2

T^2 \ $\frac{x}{l}$	0	0,25	0,50	0,75	1,00
0,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
0,10	2,00	2,03	2,11	2,25	2,35
0,20	2,00	2,07	2,25	2,51	2,80
0,30	2,00	2,13	2,43	2,87	3,36
0,40	2,00	2,18	2,66	3,35	4,12

Таблица 3

T^2 \ $\frac{x}{l}$	0	0,25	0,50	0,75	1,00
0,00	2,00	1,50	1,00	0,50	0,00
0,10	2,13	1,63	1,11	0,57	0,00
0,20	2,30	1,79	1,26	0,66	0,00
0,30	2,51	2,00	1,44	0,78	0,00
0,40	2,80	2,28	1,68	0,93	0,00

В случае, когда значение T^2 выходит за пределы таблицы 3, α_x вычисляются по следующей формуле:

$$\alpha_x = 2\left\{1 - \frac{x}{l} + \frac{0{,}398T^2}{1-T^2}\left[1{,}5 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 0{,}5\left(\frac{x}{l}\right)^4\right]\right\}. \tag{9}$$

3. Изгибающий момент в расстоянии x от заделки бруса вычисляется по формуле:

$$M_x = \gamma_x mql^2, \tag{10}$$

где γ_x — коэфициент, определяемый по таблице 4.

Таблица 4

T^2 \ $\frac{x}{l}$	0	0,25	0,50	0,75	1,00
0,00	1,00	0,56	0,25	0,06	0
0,10	1,10	0,63	0,29	0,07	0
0,20	1,22	0,71	0,35	0,08	0
0,30	1,33	0,81	0,41	0,10	0
0,40	1,58	0,95	0,45	0,12	0

В случае, когда T^2 выходит за пределы таблицы 4, γ_x — вычисляется по следующей формуле:

$$\gamma_x = 1 - 2\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{0{,}795T^2}{1-T^2}\left[1{,}1 - 1{,}5\left(\frac{x}{l}\right) + 0{,}5\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 0{,}1\left(\frac{x}{l}\right)^5\right]. \tag{11}$$

Период собственных колебаний T для сооружений схема которых приводится к стойке жестко заделанной в основании, определится при различных случаях нагрузки по формуле:

$$T^2 = 0{,}04 \cdot \frac{Q_0^3 l^3}{3EI}, \tag{12}$$

где l — высота бруса в *см*.

EI — жесткость в *кгсм*^{2}.

Q_0 — приведенный груз в *кг*, величина которого определяется:

а — для сосредоточенного груза Q, приложенного на расстоянии a_i — от заделанного конца:

$$Q_0 = \beta Q, \tag{13}$$

где β определится по таблице 5 (см. ниже).

б. — для сплошной нагрузки, равномерно распределенной по всей высоте бруса при интенсивности q.

$$Q_0 = 0{,}235Q, \tag{14}$$

где $Q = ql$.

в. — при совместном действии нескольких сосредоточенных грузов и, равномерной нагрузки Q_0 определится, как сумма приведенных грузов, подсчитанных для каждого сосредоточенного груза и для равномерной нагрузки в отдельности, согласно пп. „а“ и „б“.

Таблица 5

$\frac{a_i}{l}$	0,25	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
β	0,01	0,10	0,19	0,32	0,50	0,72	1,00

Наличие собственных и вынужденных колебаний заставляет обеспечить сооружение от возможности резонанса. Как известно, резонанс будет иметь место при равенстве част т собственных и вынужденных колебаний, или, что то же, при равенстве периодов тех же колебаний. При этом силы и ерции достигнут значительных размеров и приведут сооруж ние к разрушению. Равенство частот или периодов допустить нельзя, равно как и бли кие их значения. **Сооружение считается обеспеченным от резонанса, если период его собственных колебаний T удовлетворяет одному из следующих условий:**

а) Для каменных и железобетонных

$$T^2 \leqslant 0{,}25; \quad T^2 \geqslant 4. \tag{15}$$

б) Для деревянных

$$T^2 \leqslant 0{,}4; \quad T^2 \geqslant 2{,}5. \tag{16}$$

Подпорные стенки, устои мостов, трубы, гравитационные плотины и им подобные массивные сооружения, жесткость которых очевидна, на резонанс не поверяются, как заведомо удовлетворяющие поставленным выше условиям.

Главным образом эта проверка необходима для дымовых труб, маяков и прочих им подобных гибких сооружений башенного типа.

Здесь же необходимо отметить некоторую особенность поверки сооружения на резонанс. Резонанс опасен для сооружения и при малой величине сейсмических сил, почему на резонанс необходимо сооружения проверять и для районов с небольшой балльностью, которая вообще говоря исключает прочие виды расчета сооружений на действие сейсмических сил.

При определении сил инерции, сооружение, схема которого может быть сведена к отдельно стоящему брусу переменного сечения, приводится к случаю той же схемы сооружения с постоянным сечением, равным среднему сечению рассчитываемого сооружения.

Для надземных частей и фундаментов подпорных стенок, устоев мостов и им подобных массивных сооружений, подверженных действию активного давления земляной засыпки, μ принимается равным 2.

4. Сейсмостойкость акведуков и мостов. Согласно общим положениям, изложенным в разделе II, п. 2, расчетам на сейсмостойкость подлежат для районов III группы опоры железобетонные, бетонные и каменные; для районов II группы от поверки на сейсмостойкость освобождаются железобетонные конструкции.

При расчете на сейсмостойкость устоев и промежуточных опор, возведенных из перечисленных материалов для них, как для соружений заведемо жестких, коэфициент μ в формуле (2) принимается равным 2. Далее расчет ведется во всем согласно обычным приемам с учетом наряду с прочими силами и инерционных сейсмических сил, прикладываемых к центрам тяжести соответствующих элементов сооружений.

В работе береговых устоев при землетрясении кроме того изменяется состояние земляной засыпки, а следовательно и величина активного давления земли на устой. Это изменение давления должно быть особо учитываемо при проверке береговых устоев на действие сейсмических сил, согласно данным ниже указаниям в специальном разделе о давлении земляной засыпки на сооружение при землетрясении.

Действие сейсма в пролетном строении приведет к инерционным силам, приложенным к массам сооружения. Эти силы опять-таки благодаря заведомой жесткости конструкции, вычисляются по формуле (2) при коэфициенте $\mu = 2{,}0$ и прикладываются к центрам тяжести каждого элемента сооружения. При этом следует различать два возможных случая направления сейсмического удара:

1-й направленный вдоль моста и

2-й — направленный поперек моста.

При балочном пролетном строении и направлении инерционных сил как вдоль, так и поперек моста требуется проверить устойчивость и прочность пролетного строения на опорах. Проверка устойчивости производится не только для случаев возведения пролетного строения из железобетона и камня, но и для района II группы и для деревянных и металлических пролетных строений.

При инерционных силах, действующих поперек моста, в железобетонном пролетном строении в районах III группы, кроме того проверяются связи ферм и портальные рамы по методике, принятой для расчета тех же элементов на действие ветровой нагрузки.

При арочном пролетном строении (бетон, камень, железобетон) дополнительные напряжения, возникающие при землетрясении в своде от инерционных сил, направленных вдоль моста, определяются путем расчета свода по обычным формулам строительной механики на горизонтальную нагрузку от сил инерции, приложенных в центрах тяжести масс. Для упрощения, учитывая ассиметричность нагрузки, возможно полусвод рассматривать как кривой брус, жестко и наглухо заделанный в пяте и шарнирно опертый в ключе. Шарнир принимается посередине ключевого сечения. При этом, как показали расчеты, наибольшие изгибающие моменты получаются несколько выше пяты, примерно в $^1/_3$ пролета от опор, что полностью согласуется с данными наблюденных деформаций и разрушений.

Во втором случае работы арочного пролетного строения, т. е. при действии инерционных сил поперек моста, в невыгоднейшем положении оказывается пятовое сечение. Аналогичность данного типа нагрузки с ветровой, позволяет для него принять метод, предложенный техническими условиями НКПС проектирования и возведения каменных арочных мостов для ветровой нагрузки. В этом случае силы инерции распределяются по всему сооружению, включая и надсводное строение и принимаются равномерно распределенными по всей длине пролета.

Напряжение от действия сил инерции, вызванных землетрясением, рассчитывается лишь для пятового сечения следующим приближенным способом, как сумма напряжений, определенных для двух случаев:

а — для горизонтальной балки с заделанными концами, пролетом, равным длине развернутой оси свода, равномерно нагруженной силами инерции по всему пролету.

б — для вертикальной балки, заделанной нижним концом, пролетом, равным вертикальной проекции полусвода, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой — силами инерции от действия землетрясения на половину пролетного строения и сосредоточенной силой на конце от действия сил инерции на половину подвижной нагрузки.

Для массивных, арочных акведуков, на раздельных арках каменных, бетонных и железобетонных, распределение сил инерции между отдельными арками устанавливаются в зависимости от конструкции сооружения.

Инж. Назаров предложил следующий легкий способ расчета, пригодный для расчета арочных пролетных строений на ветровую и на сейсмическую нагрузку.

Проверку необходимо произвести для пятового сечения, причем величина изгибающего момента равна моменту инерционной силы, действующей на полупролет моста, относительно радиуса кривизны проходящего через пяту. Инерционная сила прикладывается в центре тяжести всей массы полупролета свода.

Примеры применения данных методов расчетов арочных пролетных строений показывают, что для мостов под обыкновенную дорогу, обычно широких, невыгоднейшим оказывается воздействие сейсмических сил вдоль моста, для железнодорожных мостов и акведуков невыгоднейшим может оказаться как воздействие сейсмических сил поперек моста, так и вдоль в зависимости от соотношения размеров сооружения. Действие сейсмических сил поперек моста может оказаться в особенности невыгодным в тех мостах и акведуках, у которых необходимая ширина отчасти обеспечивается за счет выпуска консолей при сравнительно узком своде.

Мероприятия, которые рекомендуются проектировщику для увеличения сейсмостойкости каменного арочного строения, сводятся к следующему. Первое, что напрашивается, это увеличение толщины свода – мера, дающая существенное улучшение работы при действии сейсмических сил вдоль моста. Для случая же действия сейсма поперек моста эта мера мало эффективна, так как в подсчет момента сопротивления толщины свода войдут в первой степени. Кроме того увеличение размеров свода создает и некоторое ухудшение работы конструкции благодаря возрастанию веса сооружения, а следовательно и инерционных сил, возникающих при землетрясении.

Более экономичным и эффективным следует признать иной метод повышения сейсмостойкости, заключающийся в придании своду предварительных напряжений, применением метода раскружаливания Фрейсинэ. Эти предварительные напряжения должны быть такой величины, чтобы с учетом и сейсмических сил в сумме со всеми прочими напряжениями не получилось бы превышение установленных норм допускаемых напряжений. В случае рамных акведуков и мостов (железобетон), расчет ведется согласно указаниям п. 5.

5. Рамные конструкции. Рамные конструкции рассчитываются обычными методами строительной механики с учетом наряду с прочими и сейсмической нагрузки, при определении последней коэфициент μ принимается равным 2.

6. Промышленные и жилые здания. Расчету подлежат каменные, бетонные и железобетонные здания. Различаем два случая конструктивного оформления здания: первый, когда здание образуется массивными стенами, являющимися рабочим элементом конструкции, воспринимающим нагрузку; второй – здания каркасные. Каркас несет и имеет стеновые облегченные заполнения. При обычной этажности, применяемой в практике нашего строительства, здание представляет собой сооружение со значительной поперечной жесткостью, т. е. относится к сооружениям заведомо жестким, отсюда при определении инерционных сил, возникающих при землетрясении, коэфициент μ принимается равным 2.

А. Здания некаркасного типа.

а) Направление инерционных сил перпендикулярно к несущим стенам. Несущие стены рассчитываются как разрезные балки на двух опорах, нагруженные горизонтальными инерционными силами от собственной массы, а также скрепленных со стеною грузов если таковые имеются. Силы инерции прикладываются к центрам тяжести. Опорами служат междуэтажные перекрытия, которые воспринимают инерционные силы от несущей стены, выпадающей наружу, и передают эти силы на поперечные стены, создающие жесткое сопротивление инерционным силам при выбранном направлении сейсмической нагрузки. Далее следовало бы рассчитать и поперечные стены, воспринимающие инерционные силы от собственных масс, инерционные силы от междуэтажных перекрытий, кровли здания и продольных стен. Для такого расчета поперечных стен разработана схема и произведены примерные расчеты. Однако положенная в основу рабочая гипотеза требует поверки экспериментом и данными новых наблюдений над разрушениями от землетрясений, почему пока в справочном материале не приводится.

Взамен расчета поперечных стен при рассматриваемом направлении действия сейсмической нагрузки в помещаемом ниже разделе о конструктивном оформлении антисейсмических сооружений ставятся требования в отношении допустимого расстояния между поперечными стенами и предельной допустимой этажности. Оба условия оформления здания связаны между собой. Чем больше этажность, тем при прочих равных условиях требуется чаще расставлять поперечные стены; чем чаще поперечные стены, тем меньше приходящаяся на каждую стену сейсмическая нагрузка. Требования в отношении этажности и расстановки поперечных стен даны на основании проработки отчетных материалов бывших землетрясений и технических условий наших и заграничных, концентрирующих в аналогичных требованиях богатый опыт, на котором они базируются.

К торцевым стенам, в отношении характера их работы при рассматриваемом направлении сейсмических сил, целиком относится все сказанное о промежуточных поперечных стенах.

б) Направление инерционных сил параллельно несущим стенам. В этом случае торцевая стена рассчитывается на изгиб в вертикальной плоскости как разрезная балка на двух опорах от инерционных сил массы самой стены и скрепленных с нею грузов, если таковые имеются. Междуэтажное перекрытие может быть принято за опору только в том случае, если оно скреплено с несущей стеной специальными конструкциями, в противном случае междуэтажное перекрытие не является опорой для торцевой стены. Если проложен железобетонный пояс, то последний и принимается за промежуточную опору. Элемент железобетонного пояса в торцевой стене, если нет скрепления стены с междуэтажным перекрытием, рассчитывается на изгиб в горизонтальной плоскости, как разрезная балка на двух опорах (соседних углах, наружных или внутренних железобетонного пояса), нагруженная частью сил инерции стен, передающейся железобетонному поясу как опоре. Если же близ пояса стена, рассекаемая им, связана прочно с междуэтажным перекрытием, то это скрепление и является опорой для стен при сопротивлении последних инерционными нагрузкам; в этом случае железобетонный пояс является мерой лишь конструктивной и особому расчету не подлежит. Взамен этого рассчитывается прочность скрепления стен с перекрытием. Это скрепление осуществляется специальными конструкциями, соединяющими крайнюю балку перекрытия, укладываемую вдоль торцевой стены с последней.

В случае „а“ и „б“ расчет скрепления стен с балками перекрытий рассчитывается на вырывающее усилие, определяемое как реактивное для прилегающих участков. При действии сейсмических сил параллельно несущим стенам инерционные силы от перекрытий и поперечных стен передаются на продольные, которые и являются основным элементом, сопро-

тивляющимся нагрузке. При рассматриваемом направлении нагрузки продольные стены обладают существенной жесткостью. Однако ослабление этих стен оконными и дверными проемами, также значительная этажность здания могут создать весьма тяжелые условия для работы этого элемента корпуса. Поэтому для таких случаев следовало бы и продольные стены подвергнуть расчету. Последний расчет не приводится и заменяется конструктивными требованиями в отношении этажности, минимальной величины простенков и расстановки проемов стен.

Б. Здания каркасные.

Здания каркасные при сейсмических силах, действующих вдоль одного или другого направления стен рассчитываются, согласно нижеследующих указаний:

а) Силы инерции каркасного остова и заполнения определяются по формуле (2), при $\mu = 2$.

б) Каркасный остов должен сопротивляться действующим на все здание силам; заполнение же должно передавать приходящиеся на него усилия каркасу.

в) Каркас рассчитывается обычными методами строительной механики с дополнительным учетом объемных сил инерции.

г) Заполнение стен рассчитывается на действие объемных сил собственной массы, как плита, опертая на каркас.

Особые случаи конструктивного оформления одноэтажного здания, встречающиеся в практике:

1) Здание одноэтажное имеет поперечные стены, но не имеет чердачного перекрытия.

2) Здание одноэтажное не имеет поперечных стен и чердачного перекрытия.

В первом случае поверху стен прокладываются железобетонные пояса. Железобетонные пояса являются упругой верхней опорой для стен; нижним же своим концом по расчетной схеме стены жестко заделаны в грунт. Таким образом стена рассчитывается, как балка упруго опертая поверху и жестко заделанная в грунт. Пояс рассчитывается как разрезная балка, опертая на поперечные стены. Для обеспечения прочности поперечных стен, последние на основании опыта предыдущих землетрясений должны возводиться на взаимном расстоянии не более 12 *м*.

Второй случай отличается от рассмотренного только тем, что роль опор для железобетонного пояса играют не поперечные стены, а пилястры, которые и придают всему корпусу здания необходимую поперечную жесткость. К расчету стен и железобетонного пояса в этом случае прибавляется расчет пилястр, как балки жестко заделанной в грунте и свободной в верхнем конце.

7. Сооружения, подверженные действию земляной засыпки. К таким сооружениям относятся главным образом подпорные стенки и устои мостов или акведуков. Действие землетрясения для них сказывается в двух направлениях: с одной стороны, земляная засыпка от ускорений землетрясения становится менее устойчивой и требующей, следовательно, большей прочности и устойчивости от поддерживающего ее сооружения, а с другой стороны, землетрясение вызывает инерционные силы в теле сооружения, ухудшая тем самым условия его работы. Оба воздействия суммируясь создают окончательный эффект воздействия землетрясения на сооружение. Инерционные силы, возникающие в теле подпорной стенки или устоя следует рассчитывать по общей формуле (2).

$$P_\tau = \mu m Q$$

при $\mu = 2$ как для сооружений заведомо жестких.

Изменение условий равновесия земляной засыпки и проистекающие отсюда изменения активного и пассивного давления земляной засыпки на сооружение определяются на основании следующих положений:

а) Грунт принимается как идеальное сыпучее тело, т. е. не учитываются силы сцепления, и равновесие его определяется действием сил трения по теории Кулона.

б) Призма обрушения рассматривается в состоянии предельного равновесия под влиянием взаимно уравновешивающихся сил собственного веса, реактивной силы подпорной стенки и реактивной силы остающегося в покое земляного массива; при этом учитываются сейсмические силы от действия землетрясения.

в) Действие землетрясения создает в грунте силы, вызываемые сейсмическим ускорением и приложенные к каждой частице грунта, кроме ускорения силы тяжести.

Сейсмические силы, приложенные к грунту, определяют по формуле:

$$P_\tau = \frac{\tau}{g} \cdot Q, \tag{17}$$

где P_τ — сейсмическая сила,
τ — ускорение землетрясения,
g — ускорение силы тяжести,
Q — вес грунта.

Таким образом к каждой частице оказывается приложенной некоторая равнодействующая C'_τ сил тяжести и сейсмических, определяемая по уравнению

$$C'_\tau = \frac{C_\tau}{\cos\psi}, \tag{18}$$

где C'_τ — равнодействующая,
C_τ — сила тяжести,
ψ — угол отклонения маятника при землетрясении, определяемый из соотношения

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\tau_0}{g} = \operatorname{arc\,tg} K.$$

Отношение $\frac{\tau_0}{g} = K$ — степень сотрясения, характеризующая сейсмичность данного района.

Сущность явления воздействия землетрясения на грунт в схематическом представлении сводится к следующим положениям:

1) Горизонт как бы поворачивается на сейсмический угол ψ.

2) Изменяется интенсивность действующей объемной силы.

Если объемный вес до действия сейсмического ускорения равнялся γ, то после учета действия сейсмического ускорения результирующая объемная сила γ_1 определится по формуле:

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{\cos\psi}. \tag{19}$$

При этом угол естественного откоса изменится и будет составлять с горизонтальной плоскостью новый угол φ_τ, определяемый через угол φ естественного откоса в обычных условиях следующей зависимостью:

$$\varphi_\tau = \varphi \pm \psi. \tag{20}$$

Отсюда тангенс угла φ_τ естественного откоса при действии сейсмических сил определится следующей формулой:

$$\operatorname{tg}\varphi_\tau = \operatorname{tg}(\varphi \pm \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi \pm \operatorname{tg}\psi}{1 \mp \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}; \quad \operatorname{tg}\varphi = f = \text{коэфициенту трения.}$$

Окончательно получается:

$$\operatorname{tg}\varphi_\tau = f_\tau = \frac{f \pm K}{1 \mp fK}. \tag{21}$$

Знак выбирается в зависимости от направления сейсмического ускорения.

Применение изложенных основных положений позволяет на основе произведенных выкладок установить следующие окончательные расчетные формулы и положения.

Активное и пассивное давление земли (распор и отпор) для случая горизонтальной засыпки определяется по формулам инж. Ломизе:

$$R = \gamma\lambda_1 H^2 \text{ (распор)}, \tag{22}$$

$$Q = \gamma\lambda_2 H^2 \text{ (отпор)}, \tag{23}$$

где γ — объемный вес засыпки,

λ_1 и λ_2 определяются по таблицам, в зависимости от значений φ, φ и угла β наклона задней грани стены к вертикали. Положительное направление для β соответствует отсчету угла от вертикали против часовой стрелки при расположении стены слева от засыпки.

Для случаев, выходящих за пределы таблицы, коэфициенты λ_1 и λ_2 определяются по формулам:

$$\lambda_1 = {}^1/_2 \cdot \frac{\cos(\varphi - \beta)}{\cos\varphi \cos^2(\varphi - \beta)} \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi \mp \varphi)\sin\varphi}{\cos(\varphi - \beta)\cos\beta}}\right]^2, \tag{24}$$

$$\lambda_2 = {}^1/_2 \cdot \frac{\cos(\varphi + \beta)}{\cos\varphi \cos^2(\varphi + \beta)} \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi \mp \varphi)\sin\varphi}{\cos(\varphi + \beta)\cos\beta}}\right]^2. \tag{25}$$

Знак в выражении аргумента синуса выбирается в зависимости от направления сил инерции. Когда ускорение направлено от земляной засыпки в сторону задней грани подпорной стенки, принимается знак —, в обратном случае +.

Активное и пассивное давление земли для случая горизонтальной засыпки при наличии приведенной к засыпке нагрузки, расположенной на призме обрушения, определяется по обычным формулам строительной механики, с заменой тригонометрической части их соответственно на коэфициенты λ_1 и λ_2.

Для более сложных случаев очертания профиля засыпки давление засыпки на сооружение определяется обычными графическими методами, при этом:

а) угол естественного откоса определяется для случая действия сейсмических сил по формуле (20).

б) объемный вес принимается измененным от сил инерции и подсчитывается по формуле (19).

Распределение давления земляной засыпки по высоте сооружения и точка приложения равнодействующей определяются обычными способами, принятыми в строительной механике.

Динамичность воздействия землетрясения заставляет предполагать уменьшение сил трения.

Поэтому во всех случаях расчета сооружений, подверженных давлению засыпки при проверке сооружения на сейсмичность, сила трения засыпки по стенке принимается равной нулю, т. е. $\varphi_0 = 0$.

Сравнительная значительность величины пассивного давления позволяет заведомо быть уверенным в прочности подпорной стенки при действии сейсмических сил в сторону засыпки, почему в этом случае специальной проверки сооружения на сейсмостойкость не производится.

При расчете подпорной стены, подверженной одновременному давлению засыпки по одной и давлению воды по другой грани силы инерции земляной засыпки и тела стенки следует направить от засыпки. Дополнительное же давление воды, определяемое, согласно данным ниже уравнениям, уменьшит обычное гидростатическое давление воды.

Коэфициент λ_1 для распора земляной засыпки при силе землетрясения 7, 8, 9 баллов

Ускорение направлено в сторону стенки

φ \ tg β	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
7 баллов (tg ψ=0,025; ψ=1° 25′)								
25°	0,211	0,201	0,192	0,184	0,176	0,169	0,162	0,156
30°	0,174	0,165	0,166	0,146	0,138	0,131	0,123	0,116
35°	0,142	0,133	0,124	0,115	0,117	0,099	0,091	0,086
40°	0,114	0,105	0,097	0,089	0,081	0,073	0,065	0,057
45°	0,096	0,087	0,078	0,070	0,063	0,067	0,047	0,041
8 баллов (tg ψ=0,05; ψ=2°55′)								
25°	0,220	0,211	0,202	0,194	0,185	0,173	0,171	0,164
30°	0,182	0,173	0,164	0,156	0,146	0,139	0,131	0 124
35°	0,150	0,140	0,132	0,123	0,114	0,105	0,099	0,092
40°	0,121	0,112	0,104	0,096	0,088	0,080	0,072	0,063
45°	0,098	0,089	0,081	0,074	0,066	0,059	0,052	0,045
9 баллов (tg ψ=0,10; ψ=5°50′)								
25°	0,249	0,239	0,231	0,222	0,214	0,207	0,200	0,193
30°	0,199	0,190	0,181	0,172	0,164	0,157	0,149	0,141
35°	0,165	0,156	0,146	0,137	0,129	0,121	0,113	0,105
40°	0,135	0,125	0,116	0,108	0,099	0,092	0,085	0,077
45°	0,109	0,099	0,091	0,083	0,075	0,068	0,061	0,055

8. Откосы насыпей, выемок и земляных плотин. Представление о земле как об идеальном сыпучем теле, к каждой частице которого при действии землетрясения, кроме силы тяжести, оказывается приложенной инерционная сила, приводит теоретически к изменению угла естественного откоса на сейсмический угол ψ.

Поэтому теоретически следовало бы на ту же величину сейсмического угла изменить откосы насыпей и выемок на случай действия землетрясения, чем создать их сейсмостойкость. Однако, опыты с моделями насыпей, ис-

пытанными на специальной платформе для Турксиба, показали несколько иные результаты. Опыт позволил при ускорении порядка 1000 *мм/сек*² оставить обычные полуторные откосы при возведении насыпей из однородного грунта, что привело к существенной экономии земляных работ. Объясняется это:

1) Недостаточным учетом — теоретической схемой всех свойств грунта; грунт рассматривается как идеальное сыпучее тело.

2) Упрощенным предста лением воздействия землетрясения на массу грунта, образующую и сыпь (или выемку).

3) Теми запасами, которые берутся практикой при назначении откосов насыпей и выемок в обычных условиях их работы (без воздействия землетрясения).

Установив такое различие опыта с теорией, опыт с другой стороны не дал необходимого экспериментального материала для выбора откосов насыпей и выемок при действии землетрясения той или другой интенсивности. Поэтому скрещивание данных эксперимента и теории позволяет остановиться на следующем положении.

Неукрепленные откосы насыпей и выемок для районов, подверженных землетрясениям, следует осуществлять положе обычно принятых для данного грунта на величину сейсмического угла.

Коэфициент $+)_2$ для отпора земляной засыпки при силе землетрясения в 7, 8 и 9 баллов

Ускорение направлено в сторону засыпки

φ \ tg β	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
7 баллов ($tg\,\psi=0{,}025$; $\psi=1°25'$)								
25°	1,21	1,26	1,33	1,40	1,51	1,62	1,75	1,90
30°	1,48	1,55	1,65	1,77	1,88	2,03	2,82	2,53
35°	1,82	1,95	2,12	2,32	2,54	2,82	3,15	3,52
40°	2,27	2,46	2,72	3,00	3,36	3,82	4,37	5,04
45°	2,88	3,18	3,59	4,04	4,65	5,41	6,34	7,60
8 баллов ($tg\,\psi=0{,}05$; $\psi=2°55'$)								
25°	1,19	1,25	1,32	1,40	1,49	1,59	1,70	1,85
30°	1,45	1,53	1,64	1,77	1,90	2,07	2,27	2,49
35°	1,79	1,92	2,08	2,27	2,50	2,76	3,08	3,54
40°	2,25	2,45	2,71	3,00	3,33	3,75	4,29	4,97
45°	2,84	3,17	3,56	4,04	4,62	5,35	6,28	7,60
9 баллов ($tg\,\psi=0{,}10$; $\psi=5°50'$)								
25°	1,15	1,20	1,26	1,33	1,42	1,51	1,63	1,78
30°	1,41	1,47	1,57	1,71	1,85	1,99	2,14	2,31
35°	1,75	1,87	2,01	2,20	2,42	2,65	2,93	3,23
40°	2,18	2,38	2,62	2,91	3,85	3,63	4,12	4,77
45°	2,80	3,09	3,44	3,90	4,45	5,15	6,08	7,31

Примечания: 1) β — уклон задней грани стенки к вертикали.
2) φ — угол е те таенного откоса засыпки.
3) ψ — сейсмический угол.

Во избежание излишних затрат при значительной кубатуре земляных работ необходимо поставить специальное экспериментирование. Последнее может итти по двум путям. По первому, более точному пути ответ на поставленную задачу дает эксперимент, поставленный на специальной сейсмической платформе, совершающей колебания, аналогичные упругим колебаниям землетрясения, что определяет непосредственно величину угла естественного откоса для данного грунта при действии сейсмических сил. По второму пути уточняется значение естественного откоса в нормальных условиях. Здесь эксперимент, поставленный обычным методом, уточняет значение угла φ естественного откоса в нормальных условиях, применительно к свойствам данного грунта. Выбор пути зависит от кубатуры земляных работ. Там, где экономически выгодно ставить более сложные эксперименты на подвижной площадке, следует остановиться на первом пути, как более точном и прямом.

Для повышения сейсмостойкости земляных плотин следует на основании тех же положений увеличить их откосы на величину сейсмического угла.

9. Расчет сооружений, подверженных действию воды. Гидротехника дает различные случаи действия воды на сооружение: водоподъемные и водоудержательные плотины, подпорные стенки, ограждающие водоемы, акведуки, дюккера, трубопроводы и т. д. Все эти конструкции по воздействию на них воды при землетрясении следует разбить на две группы.

К первой группе относятся гидротехнические сооружения, представляющие собой закрытые резервуары, например водонапорные башни, уравнительные башни, трубопроводы, дюккера, сифоны.

В сооружениях этой группы вода оказывается замкнутой, и ее масса является как бы неотъемлемой частью резервуара, ее ограничивающего. Поэтому инерционные силы массы воды, так же как и инерционные силы самого сооружения воспринимаются последним. Инерционные силы массы воды определяются по формуле (2), где μ — коэфициент, учитывающий влияние упругих колебаний системы, принимается равным 1, если сооружение зарыто в грунт, и μ-2 для резервуаров, расположенных над поверхностью земли.

Ко второй группе относятся все гидротехнические сооружения, ограничивающие значительные водоемы — искусственные или естественные, также сооружения на реках, например плотины, берегоукрепительные и регуляционные дамбы и пр.

Здесь явление оказывается более сложным и приводит к необходимости специального теоретического исследования в области колебаний воды, вызванных землетрясением. Подобное исследование было произведено Вестергартом и проф. Скрыльниковым.

Проф. Скрыльников предлагает при расчете гравитационных плотин учитывать инерционные силы от массы воды, заключенной между задней гранью плотины и биссектрисой угла, образованного задней гранью плотины и дном верхнего бьефа. Введение в рассмотрение воздействия на плотину инерционных сил таким образом определенной массы исчерпывает по Скрыльникову дополнительное воздействие воды на плотину. Обоснований своих положений проф. Скрыльников не дал.

Теоретический анализ, данный Вестегартом, приводит его прежде всего к выводу, что влияние динамического воздействия воды „не слишком велико, но и не так мало, чтобы им можно было пренебречь". Поэтому его следует вводить в расчет сооружений на действие сейсмических сил.

Для открытых бассейнов, средняя ширина которых превышает 0,9 затопленной высоты, дополнительное давление воды учитывается по следующим формулам:

а) при высоте $h \leqslant 50$ *м*.

$$P_y = 0{,}9\, m \sqrt{hy}\ . \tag{26}$$

б) при высоте $h > 50$ *м*.

$$P_y = \frac{0{,}9\, m \sqrt{hy}}{1 - 3{,}38 \left(\frac{h}{1\,000}\right)^2}\ , \tag{27}$$

где P_y — давление в тоннах на кв. метр, на глубине „y",
m — степень сотрясения,
h — высота уровня воды над дном в метр.

Перерезывающая сила в T и изгибающий момент в т. м. для сечения, расположенного на глубине „y" под уровнем воды, и приходящиеся на 1 пог. *м* ограждающего водоем сооружения, определяются по формулам:

$$Q_y = \frac{2}{3}\,(yp - h_1 p_1)\,, \tag{28}$$

$$M_y = \frac{4}{15}\,(y^2 p - h_1^2 P_1)\,, \tag{29}$$

где h_1 — глубина в метрах погружения верха сооружения под уровень,
p и p_1 — давление, определяемое по формулам (26) и (27) при y и $y = h_1$.

Анализ возможности появления резонанса в воде при действии сейсмических сил приводит к заключению, что в плотинах, высотою до 200 метров, такого явления не может быть при положенном в основу расчетов периоде землетрясения $T = 1$ ск.

Дополнительные напряжения, возникающие в камерных массивных плотинах во время землетрясения, вызываются двумя причинами: во-первых, ускорениями, возникающими непосредственно в массе плотины, во-вторых, изменением давления воды, происшедшим благодаря воздействию сейсма. Второе обстоятельство было только что подробно рассмотрено и приведены формулы, с помощью которых нетрудно определить дополнительное давление воды, возникающее при землетрясении. Плотину следует уподобить сооружениям заведомо жестким, и в них определять инерционные силы по формуле (2) при $\mu = 2$.

Силы инерции прикладываются в центрах тяжестей каждого элемента сооружения и принимаются направленными горизонтально.

Только что изложенные общие указания о дополнительном давлении воды в равной мере распространены на подпорные стенки и на прочие виды гидротехнических сооружений.

10. Допускаемые напряжения, коэфициенты устойчивости и трения, нормы временной нагрузки. Землетрясение создает дополнительные инерционные силы. Эти силы действуют на сооружение кратковременно и через значительные промежутки времени. Поэтому было бы экономически невыгодным, а следовательно технически нецелесообразно для расчета сооружения на действие сейсма оставлять те же коэфициенты прочности, что и для обычных расчетов. Они должны быть существенно снижены до минимальных размеров, обеспечивающих еще сопротивляемость сооружения нагрузкам при кратковременном воздействии сейсмических сил, но при меньших запасах прочности.

Как показала практика землетрясения, причиной многих случаев разрушения является недостаточная прочность оснований сооружений. С другой стороны, больший запас прочности основания сооружений при сравнительно незначительном удорожании сооружения существенно повышает его прочность для случая воздействия сейсмических сил. Поэтому меньшее повышение норм допускаемых напряжений на грунт следует признать мерой необходимой, страхующей сооружение от повреждений при воздействии сейсма.

Анализ существующих коэфициентов прочности, сопоставление допускаемых напряжений и временных сопротивлений, принятых в обычной проектной практике, и наконец просмотр существующих решений по данному вопросу в наших и иностранных нормах позволили установить следующие положения.

1. При расчетах на совместное действие землетрясения с остальными видами нагрузки, при невыгоднейшей их комбинации, допускаемые напряжения повышаются на 50% против основных, установленных для соответствующего класса сооружений, кроме норм растяжения и среза каменной и бетонной кладки.

2. Допускаемые же напряжения на растяжение и срез каменной и бетонной кладки принимаются такими же, как при совместном действии нагрузки и температуры для каменной кладки и при совместном действии нагрузки, температуры и усадки для бетонной кладки.

3. Допускаемое давление на грунт повышается, в случае учета воздействия на сооружения сейсмических сил, на 25% при плотных грунтах (для которых нормальное допускаемое давление — не менее 2 *кг/см*²). Для всех остальных грунтов допускаемые давления против обычных норм не повышаются.

4. Раскрытие шва по подошве фундамента не должно превосходить $^1/_4$ высоты сечения.

5. Предельная допускаемая нагрузка сваи, забитой в грунт под основание до надлежащего отказа, рассчитанная по нагрузке без учета сейсмических сил, повышается для случая действия сейсмических сил на 25% против обычных норм.

6. На основании тех же соображений кратковременности сейсмических сил и их повторяемости через значительные промежутки времени, коэфициенты устойчивости принимаются сниженными до минимальной величины. Коэфициенты устойчивости на опрокидывание и скольжение при расчетах на сейсмостойкость допускаются не менее 1,10.

7. Временная нагрузка, не действуя постоянно, определяет собою временное состояние работы сооружения. За исключением отдельных случаев, работа сооружения при действии максимальной величины временной нагрузки составляет незначительную долю общего амортизационного срока службы сооружения, поэтому установлены следующие принципиальные положения расчетных норм временной нагрузки:

1. Нормы снеговой и ветровой нагрузки при расчете на действие сейсмических сил снижаются на 50% против обычных, устанавливаемых техническими условиями и нормами для данного вида сооружения.

2. Нормы временной нагрузки мостов под обыкновенную и железную дорогу снижаются на 50% против обычных.

3. Нормы временной нагрузки для промышленных и гражданских сооружений снижаются на 50% против обычных норм при расчете на

сейсмостойкость, за исключением складских помещений, зрительных зал и других видов помещений, в которых состояние максимальной нагрузки сооружения временной нагрузкой является длительным в работе сооружения.

4. Давление воды на водоподъемные плотины определяется с учетом дополнительного давления воды от действия сейсма, но не для катастрофического паводкового горизонта, а для такового, который отвечает расходу реки повторяемостью 1 раз в год.

5. Давление воды на подпорные стенки гидротехнических сооружений определяется для горизонтов воды, наличие каковых вероятно при действии сейсмических сил.

Так например катастрофическое наполнение деривационных каналов и магистральных каналов оросительных систем часто имеет место (при излишнем заборе воды в головных сооружениях). Поэтому здесь в расчете на сейсмостойкость следует учитывать дополнительное давление воды от сейсма при катастрофическом горизонте.

6. Давление воды в водохранилищных плотинах следует брать для наивысшего горизонта при расчете плотины на действие сейсма и для этого горизонта определять дополнительное давление от действия землетрясения.

7. Акведуки рассчитываются при максимальном заполнении водою.

8. Силы трения играют весьма существенную роль в отношении сейсмоустойчивости сооружения. Сооружение будет тем устойчивей и прочней, чем жестче связаны его элементы в единое пространственное целое.

Сила трения в подавляющем большинстве случаев определяется работой сил тяжести. По соображениям, изложенным выше, вертикальные инерционные силы не вводятся в расчет, что обеспечивает достаточную точность расчета на сейсмостойкость. Поэтому можно считать, что силы тяжести от действия землетрясения не изменяются, а вследствие этого вытекают следующие выводы.

а) Коэфициенты трения в расчетах на сейсмостойкость принимаются те же, что и для обычных расчетов, причем величины их берутся для состояния покоя.

б) При определении трения силы тяжести принимаются такими же, как и для нормальной работы сооружения.

Расчет на сейсмостойкость является наиболее молодым разделом строительной механики. Поэтому в вопросах сейсмостойкого строительства большое значение имеют чисто конструктивные требования, разработанные на основе практики прошлых землетрясений. Эти конструктивные требования являются продолжением и дополнением расчета, которые приведены в III томе справочника.

ГЛАВНЕЙШИЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
168	1 снизу	$X-X_c=r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma}(Y-Y_c)$	$X-X_c=r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-Y_c)$
216		на чертеже 11б даны обозначения g и d_n	G и d_h
218	графа 2	δ	β
218	6 снизу (форм. 34)	g	G
219	11 и 15 снизу	g	G
220	8 и 9 снизу	g	G
227	6 сверху	$V=u^2+v^2+w^2$	$V^2=u^2+v^2+w^2$
228	4 сверху	$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$	$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dz}{\zeta}$
252	3 снизу	производится	приводится
252	17 снизу	направления	напора
300	черт. 64а и 64б	обозначения F	ω
301	табл. 43	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{d}$
303	табл. 48	$\frac{a}{D}$	$\frac{d}{D}$
304	5 сверху	δ	ζ
312	12 и 23 сверху	$\frac{C\sqrt{R_i}}{\sqrt[3]{\frac{\alpha C_{0i_0}^2}{g}}}$	$\frac{C\sqrt{Ri}}{\sqrt[3]{\frac{\alpha C_0^2 i_0}{g}}}$
334	форм: 153		
336	9 и 10 сверху	$A\,\vert\,h<h_{kp}\,\vert\,K<K_0\,\vert\,N>N_{kp}\,\vert\,-\,\vert\,-\,\vert$	$A\,\vert\,h>h_{kp}\,\vert\,K>K_0\,\vert\,N>N_{kp}\,\vert\,+\,\vert\,+\,\vert$
		$Б\,\vert\,h>h_{kp}\,\vert\,K<K_0\,\vert\,N<N_{kp}\,\vert\,+\,\vert\,+\,\vert$	$Б\,\vert\,h<h_{kp}\,\vert\,K<K_0\,\vert\,N<N_{kp}\,\vert\,-\,\vert\,-\,\vert$
339	8 снизу	$Б(\eta_i)=\eta_i+\frac{\eta x+1}{x+1}+\frac{\eta^{2x}+1}{2x+1}+\frac{\eta^{3x}+1}{3x+1}+\ldots+\text{const}$	$Б(\eta_i)=\eta_i+\frac{\eta^{x+1}}{x+1}+\frac{\eta^{2x+1}}{2x+1}+\frac{\eta^{3x+1}}{3x+1}+\ldots+\text{const}$

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Следует читать*
341	1 снизу	$B^0(\xi)=\frac{1}{x+1}\zeta x+1+$ + const	$B^0(\xi)=\frac{1}{x+1}\zeta x+1+$ + const
384	табл. 106 граф. 11 и 12	$\overline{Sl \mid \varsigma;}$	$\overline{\delta b \mid \delta S}$
428	табл. 113 граф. 7	0,0025	$<0{,}0025$
433	8 сверху	σ_α	σ_0
433	форм. 9	$H=6\frac{p}{1-p}\frac{\sigma}{\rho g d_w}$ *см*	$H=6\frac{1-p}{p}\frac{\sigma}{\rho g d_w}$ *см*
445	1 сверху	в таблицах:	в таблице:
445	черт. 128	Водопроницаемое дно	Водопроницаемое дно
455	18 снизу	3	120
456	11 сверху	4—8	1—2
481	форм. 7	$\varepsilon=\alpha_0\sigma_n$	$\varepsilon=\alpha_0 c n$
514	форм. 50	$N\frac{\max}{\min}=1\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$	$N\frac{\max}{\min}=\frac{1}{2}\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$
515	форм. 51	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x+\sigma_y)^2+4\tau^2}$	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau^2}$
586	30 сверху	по таблице 33 (см. стр. 591)	по таблице 19 (см. стр. 586)
652	11 снизу	с черт. 141	с черт. 142
653		черт. 141 исключить	
676	черт. 158	обозначения Q и G	Q' и G'
682	черт. 164	Q	Q'
	» »	y y'	G'. В чертеже пропущены стрелки, указывающие силы Q
713	форм. 3	δ_i	δ
»	в табл. 1	$\frac{a^i}{l}$	$\frac{a_i}{l}$

1) Текст со стр. 393 „Теория прыжка“ до стр. 414, раздел VII, считать самостоятельным разделом.

2) Текст со стр. 419 „Вихревое движение жидкости“ до стр. 425, раздел IX, считать самостоятельным разделом.