621
КК-389

В. А. КИКТЕНКО
Б. Б. БАИШЕВ

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА

АЛМА-АТА
1980

МИНИСТЕРСТВО ЭНЕРГЕТИКИ И ЭЛЕКТРИФИКАЦИИ СССР
Казахский научно-исследовательский институт энергетики

В. А. КИКТЕНКО, Б. Б. БАЙШЕВ

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА

Издательство «НАУКА» Казахской ССР
АЛМА-АТА · 1980

621.22+К
КК-389
92

УДК 621.22

Киктенко В. А., Баишев Б. Б. **Аналитический метод расчета регулирования стока.** Алма-Ата: «Наука» КазССР, 1980. — 200 с., ил.

Аналитические методы расчетов являются логическим развитием обобщенной теории многолетнего регулирования стока, разработанной известными учеными. Достоинство их заключается в теоретической строгости математических построений алгоритмов и возможности непосредственно получать искомые результаты.

В монографии рассмотрена численная интерпретация аналитических методов, которая может применяться при конкретном водохозяйственном проектировании, так как их алгоритмы отличаются однообразием и легко реализуются на ЭВМ.

Подробно описаны расчетные алгоритмы для ряда характерных схем с иллюстрацией их конкретными примерами: при постоянной отдаче водохранилища (схемы неглубокого и глубокого многолетнего регулирования стока), при отдаче, зависящей от наполнения водохранилища, при наличии двух разнообеспеченных водопотребителей с учетом потерь воды из водохранилища, т. е. на отдачу нетто, а также водохранилищ, работающих на случайную, переменную по годам отдачу, что характерно для условий поливного земледелия в зоне неустойчивого естественного увлажнения. Описан способ учета корреляционной связи между стоками смежных лет и некоторые другие.

Книга рассчитана на широкий круг инженеров, занимающихся проектированием и эксплуатацией водохранилищ, а также на научных работников и аспирантов, специализирующихся в области теории и методов расчета многолетнего регулирования стока.

Ответственный редактор
академик АН КазССР Ш. Ч. ЧОКИН

353971
Республиканск. научная сельскохозяйственная библиотека КазССР

К $\frac{30314—103}{407(07)—80}$ 95.80.3301010000

© Издательство «Наука» Казахской ССР, 1980 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Монография посвящена аналитическим методам теории регулирования речного стока и в основном является обобщением многолетнего труда доктора технических наук В. А. Кикенко, внесшего большой вклад в развитие гидроэнергетики и водохозяйственных расчетов.

Развитие водного хозяйства страны сопровождается строительством крупных водохозяйственных объектов, в том числе водохранилищ, обеспечивающих глубокое многолетнее регулирование речного стока. Определение их проектных и режимных параметров остается задачей, требующей исчерпывающего решения. В связи с этим методы расчетов регулирования стока, разработанные авторами, несомненно, восполняют данный пробел в области водохозяйственных расчетов.

Предложенные в работе аналитические методы основаны на концепциях вероятностного характера процесса стока, для описания которого, как известно, используется математический аппарат теории случайных процессов и теории стохастических дифференциальных уравнений. Существенно развита теория аналитического метода неглубокого и глубокого многолетнего регулирования стока, в результате которого получены интегральные уравнения, позволяющие по заданным вероятностным характеристикам стока и правилам регулирования построить обобщенные вероятностные характеристики зарегулированных отдач, наполнений водохранилища и других переменных режима его работы.

Имеющиеся исследования в основном касаются неглубокого регулирования стока, т. е. когда многолетняя составляющая емкости меньше или равна годовому объему отдачи α. Это практически исключает возможность использования их при расчетах, если β в несколько раз превышает α, что характерно

для районов с высокой вариацией годового стока (Центральный, Северный и Западный Казахстан, а также ряд районов РСФСР).

В монографии описаны расчетные алгоритмы для различных водохозяйственных схем при постоянных и переменных по годам объемах отдачи водохранилища и на отдачу нетто (с учетом объема потерь воды на испарение и фильтрацию).

Упрощенные способы аналитического метода построения водохозяйственной характеристики при глубоком и неглубоком регулировании стока, а также с учетом коэффициента корреляции между водностью смежных лет, основанные на теореме о средних в интегральном исчислении, являются менее трудоемкими и отличаются высокой точностью (погрешности вычислений наблюдаются на третьем знаке после запятой по сравнению с результатами точных методов). Они могут быть использованы на стадии предварительного проектирования.

Обобщенные методы расчетов на переменные по годам объемы отдачи из водохранилища, зависящие от его наполнений в конце года, а также при наличии двух разнообеспеченных потребителей, несомненно, заслуживают высокой оценки. Расчетные алгоритмы доведены до инженерного приложения и составлены номограммы.

Следует отметить, что методы расчетов регулирования стока, приведенные в монографии, позволяют определить лишь многолетнюю составляющую емкости проектируемого водохранилища. В частности, если реки имеют снеговое питание, то этими методами может быть вычислена полная полезная емкость гидроузла, так как почти весь годовой объем воды проходит в короткий срок половодья, т. е. на таких реках почти отсутствует внутригодовая неравномерность стока.

Раздельное определение полной полезной емкости водохранилища вносит в строгие методы расчетов элементы субъективизма, так как сезонная составляющая емкости устанавливается способами, далекими от вероятностного представления о процессе стока.

По существу, отдача водохранилища внутри года и в многолетии является переменной величиной. Более ярко она выражена в зоне неустойчивого естественного увлажнения, где преимущественно строятся водохранилища энерго-ирригационного назначения. Годовые объемы подачи воды на орошение массивов зависят от водности года, достигая максимума в особо засушливые годы, а минимума — в многоводные. Таким образом, отдача, принимая из года в год тот или иной объем (заключенный между минимумом и максимумом), образует некоторую последовательность. Численные значения ее членов определяются гидрологическими, агрометеорологическими ус-

ловиями и климатом региона, имеющими вероятностный характер, т. е. годовые объемы отдачи водохранилища следует рассматривать как случайные величины, а режимы их колебания — как вероятностный процесс. Следовательно, водохозяйственные расчеты должны быть основаны на этой концепции. В монографии получены интегральные уравнения регулирования стока. Разработки авторов представляют научный и практический интерес, хотя носят и методический характер.

Следует отметить, что предложенные авторами приемы расчетов отличаются подробностью разработанных алгоритмов. Даны инженерные способы их реализации при конкретном проектировании. При этом заслуживает внимания численная интерпретация аналитического метода расчетов регулирования речного стока.

Академик АН КазССР
Ш. Ч. Чокин

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие народного хозяйства и культуры предопределяет непрерывно возрастающую потребность в воде со стороны многих отраслей, заключающуюся не только в увеличении общего уровня водопотребления, но и в обеспечении жесткого режима водоподачи. В решениях XXV съезда КПСС указано, что водное хозяйство страны будет развиваться в направлении дальнейшего сооружения крупных гидроузлов, в том числе водохранилищ, обеспечивающих глубокое многолетнее регулирование стока.

Эти мероприятия необходимы для засушливых районов страны, в частности равнинного Казахстана. Общая ограниченность водных ресурсов рек и высокая вариация стока, с одной стороны, и жесткие требования в отношении надежности обеспечения и режима водоподачи, с другой, диктуют необходимость строительства водохранилищ большой емкости, значительно превышающей многолетнюю норму стока, потому что почти весь объем годового стока большинства рек снегового питания проходит в короткий срок половодья и имеет значительную величину коэффициента вариации (табл. 1).

Существенную роль в режиме работы водохранилища играет сезонная составляющая его емкости. Многолетняя же, как известно, определяется в предположении равномерного внутригодового распределения стока. Если принять, что и отдача из него распределена равномерно на протяжении года, то вообще отпадает необходимость в сезонной составляющей емкости (рис. 1, *а*).

В реальных условиях внутригодовые распределения как отдачи, так и речного стока являются неравномерными, что необходимо учитывать в расчетных алгоритмах. Роль сезонной составляющей емкости водохранилища существенно отличает-

ся от функции емкости сезонного регулирования. Так, емкость водохранилища сезонного регулирования служит единственной возможностью для полного или частичного покрытия дефицита стока в маловодные годы. При многолетнем же регулировании стока эту функцию выполняют одновременно как многолетняя, так и сезонная составляющие емкости, которые в расчетах лишь условно отделяются друг от друга. При этом, как отмечают С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель, «...сезонная со-

Таблица 1

Весенний сток рек Казахстана

Река	Пункт наблюдений	Среднемноголетний сток, мм		Весенний сток, % от годового	Коэффициент вариации
		весенний	годовой		
Нура	с. Сергиопольское	15	16,4	91,4	0,97
Нура	с. Романовское	11	13,1	84,0	1,0
Ишим	г. Акмолинск	26	29,6	87,9	0,88
Ишим	г. Петропавловск	13	16	81,3	1,01
Сары-Су	ур. Каражар	3	3,5	85,8	1,45
Кенгир	с. Кенгир	8	8,8	90,9	1,01
Тобол	г. Кустанай	14	16,4	85,3	1,09
Илек	с. Актюбинское	38	50	76,1	0,76

ставляющая емкости должна быть подобрана таким образом, чтобы вероятность опорожнения всего водохранилища как единого целого отвечала требуемой обеспеченности» [59]. В расчетных методах раздельного определения полезной емкости водохранилища данное условие может быть выполнено, если сезонную составляющую емкости устанавливать по водности расчетной межени, изменяющейся в зависимости от степени и глубины регулирования стока.

Следует отметить, что неравномерность распределения отдачи внутри года влияет только на сезонную составляющую емкости водохранилища, т. е. она совершенно не отражается на величине его многолетней емкости.

Сезонную составляющую емкости водохранилища обычно определяют путем сопоставления интегральных кривых стока расчетной межени и отдачи. Например, сток меженного периода рек снегового питания, в частности рек Центрального Казахстана, близок к нулю (см. табл. 1), т. е. максимальная ордината интегральной кривой водопотребления за указанный период будет определять искомую емкость. Если продолжительность половодья также стремится к нулю, то сезонная со-

ставляющая емкости будет равна годовому объему отдачи водохранилища, т. е. $\beta_{сез} = \alpha$ (рис. 1, *б*).

Таким образом, сезонная составляющая емкости теоретически может изменяться в пределах от нуля (при равномерных внутри года режимах стока и отдачи) до значения, равного годовому объему обеспеченной отдачи (в предположении, что весь годовой объем стока проходит в предельно короткий период половодья $t_п \rightrightarrows 0$). Следовательно, многолетняя составляющая емкости при наличии сезонной составляющей и в ее

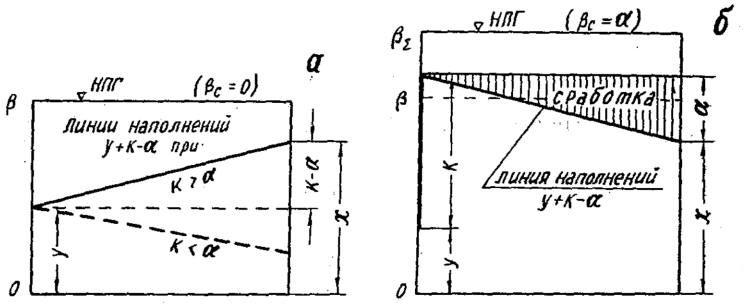

Рис. 1. Построения к учету сезонной составляющей емкости водохранилища многолетнего регулирования стока: *а* — годовой сток и отдача равномерно распределены на протяжении года; *б* — годовой сток сосредоточен на протяжении короткого сезона половодья; отдача внутри года распределена равномерно

отсутствие может устанавливаться по единому алгоритму, основой которого является годовой баланс водохранилища. Применительно к стокам рек снегового питания приведенные здесь расчетные схемы позволяют по существу автоматически определять всю полезную емкость водохранилища как единое целое. При этом во всех выражениях и формулах под параметром многолетней емкости β следует иметь в виду его тождественное значение $\beta_п - \alpha$.

Теория и инженерная практика расчетов регулирования речного стока значительно обогатились благодаря трудам С. Н. Крицкого, М. Ф. Менкеля, Ш. Ч. Чокина, Н. А. Картвелишвили, Г. Г. Сванидзе, Я. Ф. Плешкова и др.

Наибольшее внимание уделяется разработкам обобщенных методов и приемов расчетов, основанных на новых представлениях о режиме колебаний речного стока как о вероятностном процессе.

Анализ современного состояния теории расчетов многолетнего регулирования стока показывает, что аналитическая интерпретация этой теории имеет большие перспективы дальнейшего развития. Отличаясь теоретической строгостью и давая непрерывные решения, они совершенно исключают промежу-

точные итерационные вычисления, присущие многим приближенным способам расчетов. Алгоритмы аналитических методов отличаются большим однообразием и относительно легко программируются и реализуются на электронных вычислительных машинах.

Интегральные уравнения регулирования речного стока могут быть выведены на основе метода С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля, а также самостоятельно с использованием формулы полной вероятности, уравнения годового баланса водохранилища и математического аппарата теории обобщенных функций.

Монография имеет общее методическое значение для способов раздельного определения многолетней составляющей емкости водохранилища и связанных с ней параметров регулирования, т. е. основные методические построения, а также уравнения и расчетные формулы могут применяться для различных гидрологических районов. Определение полной полезной емкости водохранилища как единого параметра ограничивается территорией засушливых областей, для которых практически годовой сток сосредоточен в весьма короткий сезон половодья.

В первой части книги предлагаются аналитические методы расчетов при постоянном объеме отдачи из водохранилища при неглубоком и глубоком регулировании стока. На их основе сделано обобщение для любой емкости водохранилища.

Обобщенный способ расчета многолетнего регулирования стока с учетом потери воды из водохранилища на испарение и фильтрацию позволяет выполнять расчеты при заданном объеме отдачи нетто. При этом определяется обеспеченность отдачи, реально получаемой потребителем, а не фиктивной отдачи брутто. Объемы отдачи нетто могут быть как постоянными, так и переменными.

Поскольку весьма сложно учитывать в расчетно-методических построениях корреляционную связь между стоками в смежные годы в работе предлагается упрощенный способ определения обобщенной водохозяйственной характеристики водохранилища, который позволяет довольно просто, причем с любой заданной точностью, определять все искомые характеристики многолетнего режима работы водохранилища.

Во второй части рассмотрены расчетные схемы неглубокого и глубокого регулирования стока. Предложенные аналитические методы расчетов при переменном по годам объеме отдачи, зависящей от наполнения водохранилища в начале и в конце года, позволяют значительно повысить объемы зарегулированной отдачи. Расчетные алгоритмы доведены до инженерного их приложения. Построены расчетные номограммы.

Методика расчетов многолетнего регулирования стока для двух разнообеспеченных водопотребителей весьма перспективна при проектировании и эксплуатации водохранилищ двухцелевого назначения. Она позволяет увеличить суммарную отдачу водохранилища до 20÷25% по сравнению с расчетным вариантом на одну ступень с повышенной обеспеченностью отдачи. Расчетные алгоритмы номограммированы.

Значительный теоретический интерес представляет методика расчетов регулирования речного стока на переменную отдачу, годовые объемы которых рассматриваются как случайные величины, а режимы их колебания как вероятностные процессы. За исключением последнего, все методические построения иллюстрированы конкретными расчетными примерами. Даны способы приведения интегральных уравнений регулирования стока к системе линейных алгебраических уравнений, решение которых на современных ЭВМ не представляет каких-либо трудностей. Разработаны также алгоритмы численной интерпретации аналитического метода расчетов.

Отдельные методические построения разработаны совместно с Э. Н. Ошировым, а именно: построение кривой обеспеченности дефицитов отдачи и холостых сбросов многолетнего регулирования стока.

Учет в расчетах водохранилища корреляционной связи между водностью смежных лет, построение номограмм на переменную отдачу разработаны совместно с И. М. Мальковским.

Авторы выражают глубокую благодарность кандидату технических наук И. В. Бусалаеву за просмотр рукописи и ценные замечания.

В оформлении монографии приняли участие А. Ж. Акатова, А. Г. Абулхасанова, З. С. Таянова, С. Султангалиева, которым авторы весьма признательны.

Особую благодарность выражаем академику АН КазССР Ш. Ч. Чокину, взявшему на себя большой труд по редактированию данной работы и за полезные советы при ее написании.

ЧАСТЬ I

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА ПРИ ПОСТОЯННОМ ОБЪЕМЕ ОТДАЧИ ИЗ ВОДОХРАНИЛИЩА

Глава 1.1

СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА И ТЕНДЕНЦИИ ИХ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ

1. Основные положения

Методы расчетов многолетнего регулирования стока развивались согласно нашему представлению о закономерностях формирования годовых (месячных, декадных и т. д.) объемов расхода воды.

Первоначально годовые объемы воды рассматривались как случайные величины. Согласно этому, теория их регулирования разрабатывалась на уровне случайных событий, затем случайных последовательностей. При этом коррелятивная связь между членами ряда (последовательности), как правило, не учитывалась.

Следующий этап, соответствующий современному уровню изученности режима колебаний речного стока, основан на принципах теории случайных стохастических процессов. Концепции теории вероятностных процессов возникали в гидрологии и раньше. Однако эти концепции сводились к вероятностным представлениям о последовательностях характерных гидрологических величин, в частности годовых объемов стока [40].

Отметим, что речной сток — непрерывный нестационарный случайный процесс. Математическим аппаратом для его описания является теория случайных функций. В силу более слабой разработанности теории нестационарных процессов их приводят к стационарным (с непрерывным и дискретным временем) с помощью тех или иных способов (метод скользящей средней, приемы теории множества, T — преобразования и др.). В обобщенных методах регулирования используются статистические характеристики стока и кривая его вероятных значений (кривая обеспеченности).

Существует ряд гипотез о распределениях вероятностей годовых объемов стока. Они подробно рассмотрены в работах

Д. Я. Ратковича [78, 79], Н. А. Картвелишвили [42], Г. Г. Сванидзе [89], И. О. Сарманова [87]. В данной работе имеется в виду естественный сток, не искаженный хозяйственной деятельностью человека.

Режимы колебания годовых объемов расходов воды принимаем как эргодический гармонизируемый процесс с периодом в один год, точнее, как стационарный случайный процесс с дискретным временем, которому присуще важное свойство — свойство эргодичности, т. е. среднее по реализациям процесса совпадает со средним по времени для одной реализации. При этом появляется возможность использовать аппарат марковского процесса, имеющего большое приложение в водохозяйственных расчетах. В частности, при марковости процесса стока разработанные нами методы расчетов многолетнего регулирования позволяют определить всю полезную емкость (как единого параметра) водохранилищ, расположенных на реках снегового питания (без учета и с учетом коррелятивных связей между водностью смежных лет).

Рассмотрим существующие методы расчетов регулирования стока одиночным водохранилищем, уделив при этом внимание показу общего замысла (идеи) построения отдельных методических предложений и тенденции дальнейшего их усовершенствования.

В зависимости от подхода авторов к использованию исходной гидрологической информации методы расчетов могут быть подразделены на методы, использующие естественную модель о режиме колебаний объемов стока и приемы расчетов, основанные на математической (вероятностной) модели процесса стока. В обоих направлениях с успехом применяются строгие методы теории вероятности и математической статистики, а также матфизики.

2. Расчетные приемы, основанные на естественной модели речного стока

Сущность всех расчетных приемов регулирования речного стока заключается в сопоставлении графиков притока и потреблений воды. Такое сопоставление производится способом интегральных кривых в табличной и графической модификации [59, 64, 69—71]. В зависимости от степени детализации расчеты могут быть выполнены по данным годовых, месячных или декадных значений объемов стока.

Метод интегральных кривых позволяет учесть все особенности в ходе гидрографов притока и потребления во времени, в частности внутригодовую и многолетнюю изменчивость речного стока, а также внутрирядные коррелятивные связи.

Основной его недостаток — необоснованность переноса на

будущее режима стока, выявленного по наблюденному ряду прошлых лет. Такое перенесение не соответствует реальной картине, ибо гидрологические процессы по своей природе являются неповторимыми. Действительно, «...расчеты по имеющимся фактическим рядам стока, без контроля по обобщенному методу нельзя считать надежными, так как ни один из имеющихся рядов (даже из числа наиболее длительных) не может охватить все возможные комбинации последовательности величин стока» [74].

Справедливость этих замечаний подтверждают и другие авторы [40, 42, 79]. В частности, Н. А. Картвелишвили и А. Ф. Тороиджадзе [89] отмечают, что эти приемы являются вариантом сугубо статистического метода Монте-Карло, причем очень несовершенным, так как гидрограф стока, полученный по данным наблюдений, необоснованно принимается за реализацию случайного процесса.

Другой лодход — статистический, который служит для получения обобщенной характеристики режима колебаний расходов воды по искусственным их реализациям на основе фактически наступившего (имеющегося) процесса стока. Искомая цель достигается методом Монте-Карло.

Способы моделирования изложены в специальной литературе [14, 31 и др.], гидрологического ряда [1] (реализация процесса стока) — в работах Г. Г. Сванидзе [88—90], А. Ш. Резниковского [81] и др.

Известно, что моделирование любой продолжительной искусственной реализации процесса стока не уточняет параметры исходного (обычно ограниченного) ряда, хотя более полно отражает многообразие группировок периодов различной водности.

3. Расчетные приемы, основанные на математической модели стока

Впервые методы вероятности и математической статистики в расчетах регулирования применены А. Хазеном [106].

Ошибку, допущенную А. Хазеном (неограниченная емкость), что вела к неправильному подсчету обеспеченности отдачи, исправил Ч. Садлер [118]. Однако примитивный способ моделирования, не обеспечивающий независимость членов выборки, помешал его широкому распространению. Методы

[1] Впервые гидрологические ряды способом случайной выборки пытался моделировать Ч. Садлер [118]. Известны также работы С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля, И. Ф. Бурлая, В. П. Захарова и В. Я. Кима, П. Морана и др., в которых режимы колебаний стока представлены как простой марковский процесс [61, 74, 101, 113 и др.].

расчетов многолетнего регулирования стока получили дальнейшее развитие в Советском Союзе.

Устранив ошибки А. Хазена, Г. П. Иванов [37] составил графики и кривые для расчетов многолетней составляющей емкости водохранилища по материалам статистической обработки стока по 18 рекам с общей продолжительностью наблюденных данных 1000 лет.

Отметим, что аналогичные более усовершенствованные графики в 60-х гг. построены Д. М. Маматкановым и И. П. Дружининым [67]. Они использовали данные по 27 рекам с общей продолжительностью ряда около 1800 лет.

В отличие от указанных исследований С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель [64] решали ту же задачу на более высокой теоретической основе. Первый (1932 г.) способ использовался в расчетах водоснабжения Донбасса и др., но оказался менее удовлетворительным. Несмотря на недостаточную теоретическую строгость, он сыграл положительную роль в развитии теории регулирования, вызвав появление большого числа новых расчетно-методических приемов и предложений [27, 32, 85 и др.]. Заслуживает внимание работа П. А. Ефимовича [32] по учету коррелятивной связи между водностью смежных лет и номограммы С. И. Рыбкина, которые, однако, не устранили погрешности метода.

Эти работы относятся к начальному этапу развития теории регулирования стока в СССР, отличающегося двумя важными моментами: расчеты регулирования стока основаны непосредственно на анализе распределения его вероятностей, а также создана обобщенная методика определения одной из важных режимных характеристик водохранилища — обеспеченность бесперебойной его работы, ставшей основой для разработки более совершенных расчетных приемов многолетнего регулирования стока.

В 1935 г. С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель [59] предложили новый прием, названный «...методом отбора характерных групп наполнений водохранилища». Наполнение водохранилища в какой-либо момент времени t_2 при заданном объеме водопотребления α может быть рассчитано, если известны наполнение емкости в некоторый предшествующий момент времени t_1 и сток за отрезок времени $t_2—t_1$.

Математический прием заключается в построении кривой обеспеченности сумм (наполнений в момент времени t_2) по заданным кривым обеспеченностей слагаемых, т. е. стока за отрезок времени $t_2—t_1$ и наполнений водохранилища в момент времени t_1. Расчеты заканчиваются при достижении стабилизации искомой функции обеспеченности наполнений гидроузла.

Дальнейшее развитие метод получил в трудах Я. Ф. Плешкова [74], А. Д. Саваренского [86], С. И. Рыбкина [85], в которых рассмотрены не только перебои водопотребления, но и наполнения и сбросы, что является новым в вопросах регулирования стока этого периода.

Менее чем за 10 лет (1932—1940 гг.) расчеты параметров водохранилища из частных задач (определение обеспеченности бесперебойной его работы, т. е. опорожненного состояния емкости) переросли в самостоятельную теорию — теорию регулирования речного стока. Эти разработки позволили определить не только обеспеченность бесперебойных лет работы водохранилища, но и других режимных характеристик — наполнений, сбросов и дефицитов отдачи, т. е. построить обобщенную водохозяйственную его характеристику. Тем не менее вопросы учета коррелятивной связи между водностью смежных лет, определение полной полезной емкости водохранилища как единого параметра в указанных работах не рассматривались.

В начале 50-х гг. отмечается новый этап в развитии энергетической науки. В работах этого периода развивались методы С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля (1935 г.), А. Д. Саваренского и С. И. Рыбкина. Они посвящены в основном решению двух задач: созданию приемов расчетов, определяющих полную полезную емкость водохранилища без искусственного ее деления на многолетнюю и сезонную составляющие; учету в алгоритмах коррелятивной связи между водностью смежных лет.

В. П. Захаровым и Ш. Ч. Чокиным [34] построены безусловные кривые обеспеченности наполнений, сбросов и дефицитов отдачи методом численного интегрирования. Вместо обычных относительных характеристик, выраженных в долях нормы стока, авторы предлагают пользоваться характеристиками, измеренными в долях стандарта отклонений. Такой подход оправдан тем, что между коэффициентами асимметрии (для определения которого требуется ряд значительной продолжительности) и вариации не существует жесткой зависимости, как у Я. Ф. Плешкова и И. В. Гуглия [26, 74]. На этой основе составлены номограммы, позволяющие легко и быстро определить искомые параметры рассчитываемого водохранилища.

Среди работ, учитывающих стохастическую связь между водностью смежных лет, отметим метод С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля [63]. И. В. Гуглием [25, 26] к нему построены номограммы, когда $r=0{,}30$. В этом направлении продолжаются исследования авторов [53, 89, 90, 96, 97 и др.], так как некоторые вопросы все еще остаются не решенными. Кроме того, имеется ряд противоречивых суждений. Считают [119], что учет коррелятивной связи между стоком смежных лет никакого уточнения не вносит. Наоборот, советские ученые пришли к

выводу о том, что неучет указанной связи может привести к ошибочным результатам, в особенности при больших значениях коэффициента корреляции и высоких степенях глубины регулирования [89, 90].

Определение полной полезной емкости водохранилища как единого параметра до 1950 г. производилось методами, основанными на естественной модели стока. В обобщенных же приемах все еще продолжались исследования по раздельному способу определения емкости водохранилища, не соответствующей реальной действительности, так как процесс наполнения и сработки водохранилища является единым физическим процессом, не подлежащим делению.

Более обоснованы методы, в которых учтены многолетние и внутригодовые неравномерности в режиме колебаний речного стока. В этом направлении существенные результаты получены А. Д. Саваренским, С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем, Ш. Ч. Чокиным, Г. Г. Сванидзе.

Приемы А. Д. Саваренского [86], С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля [58—60] требуют многочисленного вспомогательного расчета и значительных затрат труда. Новизной в чисто методическом отношении является деление года на отдельные фазы, что позволяет учитывать корреляционную связь между водностью смежных фаз. Однако внутри каждой фазы распределение стока принимается по типовому гидрографу, несмотря на возражения многих специалистов.

Недостатки указанных работ выправлены Ш. Ч. Чокиным [93—97]. Как и в работе [34], автор за начало счета принимает норму годовых объемов стока, а за единицу измерения — стандарт отклонений. Постоянство автора в избранной им единице измерения характеристик стока и регулирования продиктовано, как нам кажется, сущностью самих водохозяйственных расчетов. Действительно, величины $\overline{W}$ (норма) и σ_r (стандарт) могут быть с удовлетворительной степенью достоверности определены по малой выборке генеральной совокупности. Кроме того, отпадает необходимость в жестком закреплении значения коэффициента вариации C_v годовых объемов стока, так как результаты расчетов будут справедливы для любого C_v, следовательно, для любого соотношения между C_v и C_s. Регулирование стока есть не что иное, как сопоставление годовых (месячных, декадных и т. д.) объемов притока и потребления в створе рассчитываемого водохранилища. В результате имеем ряд знакопеременных величин, функции распределения которых явно не будут соответствовать кривым обеспеченности (ограниченных и не ограниченных) положительных величин, применяемых в водохозяйственных расчетах. Поэтому более целесообразно принять за начало счета норму стока (так

как «0» теряет всякий смысл). Логическую завершенность и математическую строгость комбинированная методика Ш. Ч. Чокина получила в 70-е гг. [97]. В ней рассмотрен многотактный режим работы водохранилища. Авторы отказались от классического понятия года (календарный, водохозяйственный) и перешли к понятию периода «циклы регулирования», продолжительность которых определяется: начало — точкой пересечения ветвей подъема паводковой волны с линией водопотребления α, конец — аналогичной точкой следующего по времени паводка. Продолжительность «цикла регулирования» t_i получается переменной, случайной величиной.

Методические построения выполнены с использованием двухмодальных кривых распределения «гидролого-водохозяйственных характеристик» и с учетом стохастической связи между объемами смежных циклов.

Переменный режим водопотребления, характерный комплексному использованию речного стока, учтен через математическое ожидание величины α—var. Составлена универсальная номограмма, позволяющая быстро определить обеспеченность бесперебойной работы водохранилища, математическое ожидание недодач воды и холостых сбросов, а также полный полезный объем емкости гидроузла как единого параметра.

Анализ перечисленных и других приемов расчетов показывает, что в развитии обобщенных методов четко выделился аналитический путь построения расчетных алгоритмов [24, 40, 68, 101—105, 113—116 и др.].

В водохозяйственных расчетах интегральное уравнение регулирования стока впервые появилось в работах [113, 114]. Вместо функции распределения вероятностей аргумента наполнений получена кривая распределения сумм наполнений и стока, соответствующая неограниченной емкости водохранилища. На основе метода С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля (1935 г.) Н. А. Картвелишвили вывел интегральное уравнение регулирования стока, которое для функции обеспеченности наполнений имеет вид

$$\Phi(x)=F[\alpha(0)+x]+\int_0^{\beta}\Phi(y)\cdot[1-\alpha'(y)]\times$$

$$\times q[x-y+\alpha(y)]\,dy. \qquad (1.1.1)$$

Уравнение (1.1.1) позволяет получить непосредственно искомую безусловную функцию обеспеченности наполнений при любом законе изменения отдачи, в частности при $\alpha=\alpha(y)$.

Н. А. Картвелишвили вывел также интегральное уравнение для функции обеспеченности наполнений с учетом корре-

353974
Республиканск. научная сельскохозяйственная библиотека КазССР

лятивной связи между стоком смежных лет [40]. Отметим, что уравнение (1.1.1) и уравнение, учитывающее указанную корелятивную связь, ограничены условием $\beta \leqslant \alpha$. Это практически исключает возможность применения их для расчетов глубокого многолетнего регулирования стока, характерного для районов с высокой вариацией годового стока (Центральный, Северный и Западный Казахстан, а также ряд районов РСФСР).

Н. А. Картвелишвили [41] показал основные аспекты приложения формулы полной вероятности как общей теоретической базы расчетно-методических построений при многолетнем регулировании стока.

Оптимизации режимов, вопросам сезонно-годового регулирования и т. д., основанных также на вероятностных концепциях, посвящены исследования Е. В. Цветкова [92], В. П. Захарова, В. Я. Ким [35], А. Л. Великанова [18], Л. Д. Гильденблат, В. Р. Козак [21], С. Н. Никитина [71, 72], И. М. Панасенко [73], Д. Л. Соколовского [91] и др.

В [107—111] предложены эмпирические формулы определения емкости водохранилища, которые не могут иметь успеха в практике проектирования водохозяйственных объектов, так как они не содержат информацию о режиме наполнений водохранилища и его сработках. В работе [99] рассмотрены вопросы определения емкости ирригационно-энергетического водохранилища по данным фактического наблюдения, о недостатках которого (календарного метода) сказано выше.

Здесь анализированы не все методы расчетов многолетнего регулирования стока одиночным водохранилищем, так как цель такая, во-первых, не ставилась, во-вторых, многие из них являются дальнейшим развитием изложенных выше основных методических построений. Нами сделана попытка проследить основные пути развития методов и приемов расчетов, применяющихся при проектировании гидроузлов или находящихся на стадии использования.

4. Основные тенденции развития методов расчетов многолетнего регулирования стока

Анализ существующих методов и приемов расчетов многолетнего регулирования стока позволяет установить тенденции дальнейшего развития основ указанных методических построений.

В теории регулирования речного стока при использовании естественной и математической (вероятностной) модели достигнуты большие успехи. Эти направления перспективны и разрабатываются параллельно, дополняя друг друга. Достижения одной области используются в другой.

Имеются значительные успехи в исследованиях о степени влияния ближних и дальних связей объемов стока на искомые параметры гидроузла. Разработаны методы расчетов одиночного водохранилища с учетом связей между водностью смежных лет (смежных циклов регулирования), позволяющие определить полную полезную его емкость как единого параметра без искусственного ее деления на многолетнюю и сезонную составляющие.

Новый способ получения статистических характеристик стока и регулирования (изменение начала счета и единицы измерения) открывает широкие возможности для обобщения результатов расчетов и сопоставления водохозяйственных показателей по всем проектируемым и существующим гидроузлам, расположенным не только на разных створах одной и той же реки, но и по разным источникам, имеющим различный генезис питания.

Наряду с успехами, достигнутыми в области водохозяйственных расчетов, отметим некоторые наиболее существенные недостатки. Во-первых, большинство имеющихся разработок выполнено для случая $\beta \leqslant \alpha$, что исключает их применение для расчетов глубокого многолетнего регулирования стока. Во-вторых, все методы и приемы расчетов (как первой, так и второй групп) разработаны в предположении отсутствия каких-либо нарушений в режиме колебаний расходов воды рек. Многие реки нашей страны, например Волга, Днепр, Днестр, Иртыш, Или и др., стали водными артериями, управляемыми человеком. В перспективе следует ожидать полного вырождения естественного режима всех рек и водотоков. В третьих, суммарная отдача из водохранилища комплексного регулирования является переменной величиной. Она, по существу, есть случайная величина, а режим ее колебания — вероятностный процесс. Примером может служить отдача из водохранилища ирригационно-энергетического назначения. Однако данный фактор не учитывается в имеющихся разработках, за исключением [2, 65].

Указанные моменты тесно связаны между собой, например, второй и третий существенно влияют на искомые параметры проектируемого водохранилища. Эти недоработки, очевидно, определяют задачу дальнейших исследований в области водохозяйственных расчетов.

Глава 1.2

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ НЕГЛУБОКОГО МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА

Аналитические методы расчетов регулирования стока являются точными и математически строгими. Они позволяют получить непрерывное решение задачи, что совершенно исключено в приемах расчетов, связанных с неизбежностью выполнения громоздких вспомогательных графических построений.

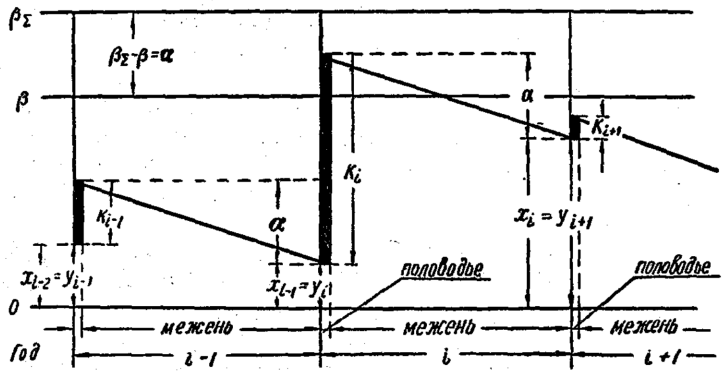

Рис. 1.2.1. Схема начальных (y) и конечных (x) наполнений водохранилища для ряда последовательных лет регулирования стока (применительно к рекам Казахстана)

Интегральные уравнения регулирования стока могут быть выведены как на основе метода С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля (1935 г.) (если сделать соответствующий предельный переход), так и самостоятельно, используя формулу полной вероятности и уравнения годового баланса водохранилища. Такие уравнения выведены нами с применением аппарата обобщенных функций, при котором отпадает необходимость

перехода от интеграла Стилтьеса к обычному интегралу Римана-Коши.

В наших расчетно-методических построениях принята единая гидрологическая рассечка: начало года — конец межени (начало половодья) (рис. 1.2.1). На рисунке показана также схема наполнений водохранилища в смежные годы регулирования (например, наполнение в конце i — 1-го года равно наполнению в начале i-го года и т. д.).

1. Безусловная функция обеспеченности наполнений

Рассмотрим уравнение годового водного баланса водохранилища

$$k = x - y + \alpha_v + x_c - x_\partial, \qquad (1.2.1)$$

где k — модульные коэффициенты, измеренные (так же, как и все члены уравнения) в единицах нормы стока в створе рассчитываемого водохранилища; x, y — наполнение водохранилища в конце i-го и i — 1-го годов регулирования ($0 \leqslant x \leqslant \beta$) и ($0 \leqslant y \leqslant \beta$); α_v — переменная из года в год отдача; x_c — годовой объем холостых сбросов ($0 \leqslant x_c < \infty$); x_∂ — то же, дефицитов отдачи ($0 \leqslant x_\partial \leqslant \alpha$); β — многолетняя составляющая емкости.

Безусловная кривая обеспеченности наполнений водохранилища строится при наложении следующих ограничивающих условий: холостые сбросы и дефициты отдачи отсутствуют (что вообще неверно) или же объемы холостых сбросов и дефициты отдачи — соизмеримые величины, т. е. равны между собой (сугубо частный случай). Указанные ограничения присущи всем существующим методам регулирования стока, что не соответствует самой сущности явления наполнений водохранилища как единого физического процесса. Они обязаны своим появлением наличию разрывов функции обеспеченности наполнений водохранилища в точках 0 и β (рис. 1.2.2). Преодоление этих разрывов в графических и в аналитических интерпретациях методов является трудно реализуемой (на практике) задачей, так как предвидеть, будут ли иметь общую точку соприкосновения (или нет) кривые холостых сбросов (в точке β) дефицитов отдачи (в точке 0) с кривой обеспеченно-

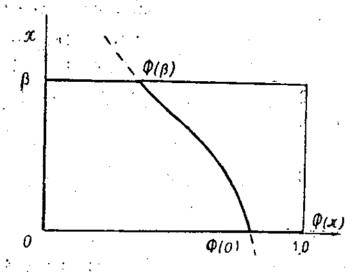

Рис. 1.2.2. Функция обеспеченности наполнений водохранилища

сти наполнений заранее (до окончания расчетов) почти невозможно. С учетом этого ограничения уравнение водного баланса водохранилища для зоны его наполнений перепишется в следующем виде:

$$k=x-y+\alpha_v. \qquad (1.2.2)$$

Практически процесс стока всегда можно считать марковским [10, 11, 40, 41, 58, 89, 97] с дискретным временем, т. е. процесс изменения средне-интервальных (годовых) величин стока исчерпывающе описывается функцией распределения вероятностей $\Theta(k)$. Если аргумент k заменить его значением из (1.2.2), то функцию $\Theta(k=x-y+\alpha_v)$ можно рассматривать как условную функцию распределения вероятностей $\Theta(x/y)$ наполнений водохранилища в i-м году при условии, что в $i-1$-м году наполнение было равно y:

$$\Theta(x-y+\alpha_v)=\Theta(x/y). \qquad (1.2.3)$$

В этих условиях формулу полной вероятности с учетом пределов изменения аргумента $y[0, \beta]$ можно представить в виде

$$\Theta(x)=\int_0^{\beta}\Theta(x/y)\,d\Theta(y). \qquad (1.2.4)$$

Здесь интеграл понимается в смысле Стилтьеса (s). Функция распределения вероятностей наполнений $\Theta(y)$ является кусочно-дифференцируемой функцией, имеющей разрывы первого рода в точках 0 и β (см. рис. 1.2.2). С учетом точек разрывов кривая $\Theta(y)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\Theta_1(y)=\Theta(0)\cdot U(y-0)+\Theta(y)+[1-\Theta(\beta)]\cdot U(y-\beta), \qquad (1.2.5)$$

где $\Theta(0)U(y-0)$ и $[1-\Theta(\beta)]U(y-\beta)$ — значения функции $\Theta(y)$ в точках разрыва $[0, \beta]$.

С учетом единичной ступенчатой функции $U(y-0)$ и $U(y-\beta)$ кривая $\Theta(y)$ дифференцируется во всем диапазоне изменения аргумента. Подставляя $\Theta_1(y)$ в (1.2.4) и интегрируя, имеем

$$\Theta(x)=\int_0^{\beta}\Theta(x/y)\,d\Theta(y)+\Theta(0)\cdot\Theta(x/0)+[1-\Theta(\beta)]\cdot\Theta(x/\beta) \qquad (1.2.6)$$

или, вычисляя интеграл Стилтьеса

$$(s)\int_0^{\beta}\Theta(x/y)\,d\Theta(y)=\Theta(x/\beta)\cdot\Theta(\beta)-\Theta(x/0)\Theta(0)-$$

$$-\int_0^{\beta}\Theta(y)\Theta'(x/y)\,dy$$

и переходя от функции распределения вероятностей наполнений к функции обеспеченности, после элементарных преобразований получим

$$\Phi(x)=\Phi(x/0)-\int_0^{\beta}\Phi(y)\cdot\Phi'(x/y)\,dy, \qquad (1.2.7)$$

где $\Phi(x)=1-\Theta(x)$.

Согласно (1.2.3), функция $\Phi(x/y)$ в (1.2.7) есть обеспеченность расчетного стока: $\Phi(x/y)=F(x-y+\alpha_v)$. Тогда соотношение (1.2.7) перепишется в следующем виде:

$$\Phi(x)=F(x+\alpha_v)-\int_0^{\beta}\Phi(y)\cdot(1-\alpha_v')\cdot q(x-y+\alpha_v)dy, \qquad (1.2.8)$$

где $\alpha_v'=\frac{d\alpha_v}{dy}$ и $q(x-y+\alpha_v)$ — плотность вероятности расчетного стока k.

Таким образом, безусловная функция обеспеченности наполнений водохранилища многолетнего регулирования речного стока (в случае $\beta\leqslant\alpha$) определяется интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

При постоянном режиме отдачи ($\alpha=\text{const}$) уравнение (1.2.8) имеет более простой вид:

$$\Phi(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy. \qquad (1.2.9)$$

В инженерно-гидрологических и водохозяйственных расчетах распространена кривая распределения Пирсона III типа (при $C_s=2C_v$):

$$\Theta(k)=\frac{\gamma^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}\int_0^{k}k^{\gamma-1}\cdot e^{-\gamma k}dk. \qquad (1.2.10)$$

Функция обеспеченности годовых объемов стока определяется как разность:

$$F(k)=1-\Theta(k), \tag{1.2.11}$$

где $\gamma=\frac{1}{C_v^2}>0$; $\Gamma(\gamma)=\int_0^\infty k^{\gamma-1}e^{-\gamma k}dk$ — интеграл Эйлера второго рода или так называемая гамма-функция.

Соответственно плотностью вероятностей будет

$$q(k)=\frac{\gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\cdot k^{\gamma-1}\cdot e^{-\gamma k}. \tag{1.2.12}$$

Для рек равнинного Казахстана указанный тип кривых также согласуется с фактическими данными гидрологических наблюдений. Уравнения (1.2.8), (1.2.9) относительно (1.2.10), (1.2.12) аналитически разрешимы при всех целых значениях параметра γ. При нецелых γ указанные уравнения не поддаются интегрированию в элементарных функциях. Они могут быть сведены к системе линейных алгебраических уравнений, если интегралы заменить суммой по формулам приближенных квадратур. Имеется и другой путь, а именно численная интерпретация аналитического метода, предлагаемая ниже (п. 3).

Точное решение интегрального уравнения (1.2.9) покажем при двух значениях $C_v=1{,}0$ и 0,71.

а) Коэффициент вариации $C_v=1{,}0$ ($\gamma=1{,}0$). Уравнение (1.2.9) с учетом (1.2.10)—(1.2.12) при значении параметра $\gamma=1$ имеет вид

$$\Phi(x)=e^{-(\alpha+x)}+\int_0^\beta \Phi(y)\,e^{-(\alpha-y+x)}dy. \tag{1.2.13}$$

Основные методы решения интегрального уравнения Фредгольма второго ряда сводятся к методам определителей Фредгольма, последовательных приближений, отыскания характеристических чисел и имеется ряд приближенных способов (замена ядра вырожденными, метод Бубнова—Галеркина, методы отыскания характеристических чисел Ритца, Келлога и др.).

Решение уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\beta k(x,\,t)\cdot\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{1.2.14}$$

дано формулой

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,\ t;\ \lambda)\cdot f(t)\,dt, \tag{1.2.15}$$

где функция $R(x, t; \lambda)$, называемая резольвентой Фредгольма уравнения (1.2.14), определяется равенством

$$R(x, t; \lambda)=\frac{D(x,\ t;\ \lambda)}{D(\lambda)} \tag{1.2.16}$$

при условии, что $D(\lambda)\neq 0$. Здесь $D(x, t; \lambda)$ и $D(\lambda)$ — степенные ряды по λ:

$$\left.\begin{aligned} D(x, t; \lambda)&=K(x, t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot B_n(x, t)\cdot\lambda^n,\\ D(\lambda)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot C_n\cdot\lambda^n. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.17}$$

Коэффициенты $B_n(x, t)$, C_n (в 1.2.17) определяются по формулам

$$B_n(x, t)=\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & \ldots & K(x, t_n)\\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \ldots & K(t_1, t_n)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \ldots & K(t_n, t_n)\end{vmatrix} dt_1\ldots dt_n; \tag{1.2.18}$$

$$C_n=\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \ldots & K(t_1, t_n)\\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \ldots & K(t_2, t_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \ldots & K(t_n, t_n)\end{vmatrix} dt_1\ldots dt_n. \tag{1.2.19}$$

Рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned} B_n(x, t)&=C_n\cdot K(x, t)-n\int_a^b K(x, s)\cdot B_{n-1}(s, t)\,ds;\\ C_n&=\int_a^b B_{n-1}(s, s)\,ds,\quad (n=1, 2,\ldots);\\ C_0&=1;\ B_0(x, t)=K(x, t). \end{aligned}\right\} \tag{1.2.20}$$

Функция $D(x, t, \lambda)$ называется минором Фредгольма, а $D(\lambda)$ — определителем Фредгольма. В случае, когда $K(x, t)$ ограничено или же интеграл $\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\,dx\,dt$ имеет конечное значение, ряды (1.2.17) сходятся для всех значений λ.

Отметим, что $\varphi(x)$ в (1.2.14) — неизвестная, а $K(x, t)$ и $f(x)$ — известные функции; x и t — действительные переменные, изменяющиеся в интервале (a, b); λ — численный множитель.

Функция $K(x, t)$ называется ядром интегрального уравнения (1. 2.14). Предполагается, что ядро $K(x, t)$ определено в квадрате $w\{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$ на плоскости (x, t) и непрерывно в w, либо его разрывы таковы, что двойной интеграл $\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx\,dt$ имеет конечное значение.

Решение уравнения (1. 2. 13) методом определителей Фредгольма осуществляется в следующем порядке.

Из (1.2.20) имеем $C_0 = 1{,}0$; $B_0(x, y) = K(x, y) = e^{-(\alpha - y + x)}$ и $C_1 = \int_0^\beta B_0(x, x)\,dx = \beta e^{-\alpha}$ и $B_1(x, y) = 0$.

Очевидно, $C_2 = 0$, так как $B_1(x, y) = 0$, также и последующие значения C_n и $B_n(x, y)$.

При $n = 1$, $B_1(x, y) = 0$. Поэтому из (1.2.17) будем иметь $D(x, y; \alpha) = e^{-(\alpha - y + x)}$ и $D(\lambda) = 1 - \beta e^{-\alpha}$. Тогда

$$R(x, y; \alpha) = \frac{e^{-(\alpha - y + x)}}{1 - \beta e^{-\alpha}}. \qquad (1.2.21)$$

Таким образом, согласно (1.2.15), решение уравнения (1.2.13) будет

$$\Phi(x) = e^{-(\alpha + x)} + \int_0^\beta \frac{e^{-(\alpha - y + x)}}{1 - \beta e^{-\alpha}} \cdot e^{-(\alpha + y)} dy$$

или

$$\Phi(x) = \frac{e^{-x}}{e^{\alpha} - \beta}. \qquad (1.2.22)$$

Заметим, что для опорожненного состояния водохранилища ($x = 0$) методом суммирования рядов сходная формула получена С. И. Рыбкиным [85]:

$$\Phi(0)=\frac{1}{e^{\alpha}-\beta}.$$

Формула (1.2.22) имеет более общий характер, так как она справедлива для любых значений наполнения водохранилища $0\leqslant x\leqslant\beta$. Она может быть распространена и на зону холостых сбросов.

б) Коэффициент вариации $C_v=0{,}71$ ($\gamma=2$).

При $\gamma=2$ уравнение (1.2.9) с учетом (1.2.10)—(1.2.12) будет иметь вид

$$\Phi(x)=(2x+2\alpha+1)e^{-2(x+\alpha)}+4\int_0^{\beta}\Phi(y)\cdot(x-y+\alpha)e^{-2(x-y+\alpha)}dy. \tag{1.2.23}$$

Метод определителей Фредгольма дает следующее решение уравнения (1.2.23):

$$\Phi(x)=\frac{[3(2x+2\alpha+1)-2\beta e^{-2\alpha}(4\beta^2-6x\beta+3\beta-6x)]}{3-12\alpha\beta e^{-2\alpha}+4\beta^4e^{-4\alpha}}\cdot e^{-2(x+\alpha)}. \tag{1.2.24}$$

В водохозяйственных расчетах интерес представляет расчетная обеспеченность работы водохранилища. Из (1.2.24) при $x=0$ имеем

$$\Phi(0)=\frac{[3(2\alpha+1)-2\beta e^{-2\alpha}(4\beta^2+3\beta)]e^{-2\alpha}}{3-12\alpha\beta e^{-2\alpha}+4\beta^4e^{-4\alpha}}. \tag{1.2.25}$$

Результаты вычисления по формуле (1.2.24) и по В. И. Грузинову [24] для параметров регулирования $\alpha=0{,}6$, $\beta=0{,}4$ приведены в табл. 1.2.1.

Отклонение результатов расчета объясняется приближенностью решения, полученного В. И. Грузиновым путем сведения исходного уравнения к системе линейных алгебраических уравнений (шаг $h=0{,}2$).

Решение уравнения (1.2.9) при любом γ может быть получено путем приведения его к системе линейных алгебраических уравнений. Для этого промежуток наполнения водохранилища ($0\leqslant x\leqslant\beta$) разобьем на n равных частей с шагом $h=\frac{\beta}{n}$. Тогда, полагая в (1.2.9) аргумент $x=x_i=h\cdot i$, будем иметь

$$\Phi(x_i)=F(\alpha+x_i)+\int_0^{\beta}\Phi(y)\cdot q(\alpha-y+x_i)dy \tag{1.2.26}$$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Заменяя интегралы (в каждом уравнении системы (1.2.26)) по какой-либо формуле приближенных квадратур, например по формуле трапеции, имеем

$$\Phi(x_i)=F(\alpha+x_i)+h\Big[0{,}5\Phi(y_0)q(\alpha-y_0+x_i)+\sum_{j=1}^{n-1}\Phi(y_j)q(\alpha-y_j+x_i)+0{,}5\Phi(y_n)q(\alpha-y_n+x_i)\Big] \quad (1.2.27)$$

$(j=1, 2, \ldots, n)$, $(i=0, 1, \ldots, n)$.

В результате получаем систему, состоящую из $n+1$ линейных алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными.

Таблица 1.2.1

Значения $\Phi(x)$

x	По формуле (1.2.24)	По В. И. Грузинову	Погрешность $\pm\Delta$ в %
0	0,8658	0,87	+0,42
0,1	0,8012	—	—
0,2	0,7316	0,73	−0,16
0,3	0,6609	—	—
0,4	0,5917	0,58	−0,117

В случае небольших n решение системы (1.2.27) не представляет трудности, при больших же n данную систему целесообразно решать на ЭВМ, тем более для многих типов машин имеются готовые стандартные программы.

2. Интегральные соотношения для функции обеспеченности дефицитов отдачи и холостых сбросов

Соотношения (1.2.8) и (1.2.9) позволяют установить вид кривой обеспеченности холостых сбросов и дефицитов (или отдачи), если x рассматривать как сумму объема воды в водохранилище к концу i-го года и воды, сброшенной вхолостую за этот год (когда $x>\beta$), или как тот объем воды $|x|$, которой нужно было бы добавить к годовому стоку k, чтобы покрыть отдачу α без перебоя.

Уравнения годового водного баланса водохранилища для зоны дефицитов отдачи и избыточного притока (холостых сбросов) соответственно имеют вид

$$k=\alpha-y-x_\partial,\ (0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha) \quad (1.2.28)$$

и

$$k=\beta-y+\alpha+x_c,\ (0\leqslant x_c<\infty). \quad (1.2.29)$$

Анализ показывает, что кривая обеспеченности дефицитов отдачи $f(x_\partial)$ в точке $x_\partial=\alpha-\beta$ претерпевает изменение кривизны. Действительно, если k из (1.2.28) в промежутке

$x_д[0, \alpha—\beta]$ имеет значения всегда больше нуля (область *1*), то в пределах $x_д[\alpha—\beta, \alpha]$ его значения могут быть как больше нуля (область *2*), так и равными нулю (область *3*) с $F(k=0)=1$ и $q(k=0)=0$ (рис. 1.2.3). Следовательно, искомую кривую обеспеченности дефицитов отдачи необходимо рассматривать отдельно в промежутках изменения аргумента $x_д[0, \alpha—\beta]$ и $x_д[\alpha—\beta, \alpha]$. С учетом указанных особенностей уравнение (1.2.8) может быть распространено в режимные зоны водохранилища дефицитов отдачи и холостых сбросов.

В общем случае для зоны дефицитов отдачи имеем

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_д) &= F(\alpha—x_д)+\int_0^{\beta}\Phi(y)\cdot(1-\alpha'_v)\cdot q(\alpha—y—x_д)dy, \\ &\quad (0\leqslant x_д\leqslant\alpha—\beta); \\ f_2(x_д) &= F(\alpha—x_д)+\int_0^{\alpha—x_д}\Phi(y)\cdot(1—\alpha'_v)\,q(\alpha—y—x_д)dy, \\ &\quad (\alpha—\beta\leqslant x_д\leqslant\alpha). \end{aligned}\right\} \quad (1.2.30)$$

При постоянном значении годовых объемов отдачи $\alpha=\text{const}$ система (1.2.30) в расчетном отношении более удобна:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_д) &= F(\alpha—x_д)+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,q(\alpha—y—x_д)\,dy, \ (0\leqslant x_д\leqslant\alpha—\beta); \\ f_2(x_д) &= F(\alpha—x_д)+\int_0^{\alpha—x_д}\Phi(y)\,q(\alpha—y—x_д)\,dy, \ (\alpha—\beta\leqslant x_д\leqslant\alpha). \end{aligned}\right\} \quad (1.2.31)$$

Утверждение В. И. Грузинова [24], что кривая обеспеченности дефицита описывается только одним уравнением справедливо лишь для промежутка $(0\leqslant x_д\leqslant\alpha—\beta)$.

Соответственно для зоны холостых сбросов получим

$$\psi(x_c)=F(x_c+\beta+\alpha)+\int_0^{\beta}\Phi(y)\cdot(1—\alpha'_v)\cdot q(x_c+\beta—y+\alpha)\,dy \quad (0\leqslant x_c<\infty) \quad (1.2.32)$$

или при $\alpha=\text{const}$

$$\psi(x_c)=F(x_c+\beta+\alpha)+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,q(x_c+\beta-y+\alpha)\,dy$$

$$(0\leqslant x_c<\infty). \qquad (1.2.33)$$

Правильность построения безусловной функции обеспеченности наполнения, а также кривых дефицитов и холостых сбросов проверяется критериальным соотношением

$$\bar{k}=\alpha+E(x_c)-E(x_\partial), \qquad (1.2.34)$$

где $\bar{k}$ — норма стока; $E(x_c)$, $E(x_\partial)$ — математическое ожидание объемов соответственно холостых сбросов и дефицитов отдачи:

$$E(x_c)=\int_0^{\infty}\psi(x_c)dx_c \text{ и } E(x_\partial)=\alpha-\left[\int_0^{\alpha-\beta}f_1(x_\partial)dx_\partial+\right.$$

$$\left.+\int_{\alpha-\beta}^{\alpha}f_2(x_\partial)dx_\partial\right].$$

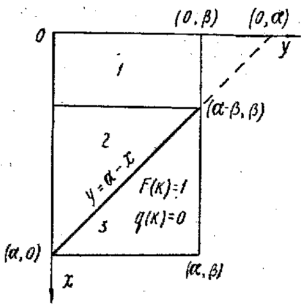

Рис. 1.2.3. Схема разбиения области интегрирования (α, β) на частные

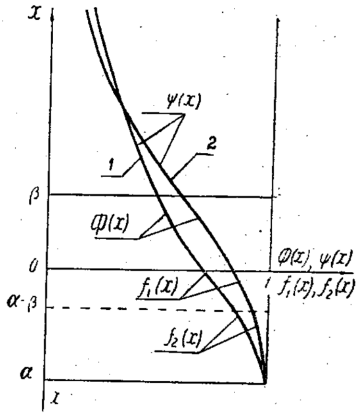

Рис. 1.2.4. Обобщенная водохозяйственная характеристика водохранилища ($\beta=0{,}4$; $\alpha=0{,}6$), при C_v: *1* — 1,0; *2* — $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Интегральные уравнения (1.2.31)—(1.2.33) являются обычными, так как за функцию $\Phi(y)$ принимается решение уравнения (1.2.9) или системы (1.2.27) с заменой в них аргумента x на y.

Расчетные формулы при $\gamma=1{,}0$. Для зоны дефицитов отдачи, согласно (1.2.10)—(1.2.12) и (1.2.22), имеем

$$q(\alpha-y-x_\partial)=e^{-(\alpha-y-x_\partial)};\ F(\alpha-x_\partial)=e^{-(\alpha-x_\partial)}\ \text{ и }\ \Phi(y)=\frac{e^{-y}}{e^{\alpha}-\beta}. \tag{1.2.35}$$

Подставив их в (1.2.30), после интегрирования получим

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_\partial)&=\frac{e^{x_\partial}}{e^{\alpha}-\beta},\ (0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha-\beta);\\ f_2(x_\partial)&=e^{-(\alpha-x_\partial)}+\frac{(\alpha-x_\partial)e^{-(\alpha-x_\partial)}}{e^{\alpha}-\beta},\ (\alpha-\beta\leqslant x_\partial\leqslant\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{1.2.36}$$

Решением интегрального уравнения (1.2.33) будет

$$\psi(x_c)=\frac{e^{-(x_c+\beta)}}{e^{\alpha}-\beta}\ (0\leqslant x_c<\infty). \tag{1.2.37}$$

Расчетные формулы при $\gamma=2$. Используя (1.2.10)—(1.2.12) и (1.2.22), получим решения уравнений (1.2.30) и (1.2.33)

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_\partial)&=\frac{[3(2\alpha-2x_\partial+1)-2\beta e^{-2\alpha}(4\beta^2-3\beta+6\beta x_\partial+6x_\partial)]}{A}\cdot e^{-2(\alpha-x_\partial)}\\ &\qquad(0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha-\beta);\\ f_2(x_\partial)&=\left[(2\alpha-2x_\partial+1)+\frac{4e^{-2\alpha}}{A}(B(x_\partial)+2C(x_\partial)\cdot\beta e^{-2\alpha})\right]e^{-2(\alpha-x_\partial)}\\ &\qquad(\alpha-\beta\leqslant x_\partial\leqslant\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{1.2.38}$$

где $A=3-12\alpha\beta e^{-2\alpha}+4\beta^4e^{-4\alpha}$; $B(x_\partial)=\dfrac{(12\alpha+3)(\alpha^2+x_\partial^2)-4\alpha^2}{2}-x_\partial^3-$

$-(3\alpha+1)\cdot3\alpha x_\partial$; $C(x_\partial)=\dfrac{\alpha^2}{2}[2\alpha-4\beta^2+(2\alpha-3)\beta]-(\beta-1)x_\partial^3+$

$+[3\alpha-2\beta^2+3(\alpha-0{,}5)\beta]x_\partial^2+[\alpha\beta(4\beta+3)-\alpha^2(3\beta+3)]x_\partial$;

$$\psi(x_c)=\frac{[3(2\alpha+2\beta+2x_c+1)+2\beta e^{-2\alpha}(2\beta^2+3\beta+6\beta x_c+6x_c)]}{A}\cdot e^{-2(\alpha+\beta+x_c)}$$

$$(0\leqslant x_c<\infty). \tag{1.2.39}$$

На основе интегральных соотношений (1.2.22), (1.2.38) и

(1.2.39) могут быть вычислены абсциссы обобщенной водохозяйственной характеристики водохранилища для любых фиксированных значений параметров регулирования при $C_v=1$ и $C_v=0{,}71$. При параметрах $\alpha=0{,}6$ и $\beta=0{,}4$ такая кривая построена на рис. 1.2.4.

3. Численная интерпретация аналитического метода регулирования стока

Определение безусловной кривой наполнений. Обобщенная водохозяйственная характеристика водохранилища многолетнего регулирования стока строится по уравнению его годового водного баланса (1.2.1), (1.2.2), (1.2.28), (1.2.29) на основе формулы полной вероятности, которая в конечных разностях имеет вид

$$\Phi(x) \simeq \sum_{i=1}^{n} F(k_i) \cdot \Delta\Phi(y_i), \qquad (1.2.40)$$

где $F(k)$ — функция обеспеченности расчетного стока k.

Численный способ построения безусловной (стабилизированной) кривой обеспеченности наполнений водохранилища многолетнего регулирования стока реализуется в следующем порядке.

Наполнения y и x представим в прямоугольной системе координат. Промежутки $(0 \leqslant y \leqslant \beta)$ и $(0 \leqslant x \leqslant \beta)$ разобьем на n равных частей с шагом $h=\frac{\beta}{n}$. Далее по уравнению годового водного баланса водохранилища определяются значения расчетного стока k_{ji}:

$$k_{ij}=x_i-y_j+\alpha, \qquad (1.2.41)$$

где $x_i=hi$ и $y_j=hj$ $(i, j=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Заметим, что по физическому смыслу величина k_{ij} всегда $\geqslant 0$. Обеспеченности расчетного стока $F_{ij}(k)$ вычисляются как разность

$$F_{ij}(k)=1-P_{ij}(k) \qquad (1.2.42)$$

и записываются в виде матрицы (таблицы постоянных множителей):

$$\begin{vmatrix} F_{00} & F_{01} \ldots F_{0n} \\ F_{10} & F_{11} \ldots F_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ F_{n0} & F_{n1} \ldots F_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.2.43)$$

Здесь $P_{ij}(k)$ — вероятности расчетного стока k_{ij}, определяемые по формуле (1.2.10). Отметим, что при $k<0$ его обеспеченность принимается равной $F(k)=1$. Кривая обеспеченности наполнений на конец первого года регулирования определяется по формуле

$$\Phi_1(x_i)=F(x_i+\alpha)=1-P(x_i+\alpha). \qquad (1.2.44)$$

Для первого (начального) года регулирования значения $\Phi_1(x_i)$ могут приниматься по любой функции, поскольку исходное состояние наполнения водохранилища не влияет на безусловную кривую обеспеченности наполнений. Кривая наполнений (1.2.44) является исходной (начальной) для второго года регулирования, т. е.

$$\Phi_2(y_i)=\Phi_1(x_i). \qquad (1.2.45)$$

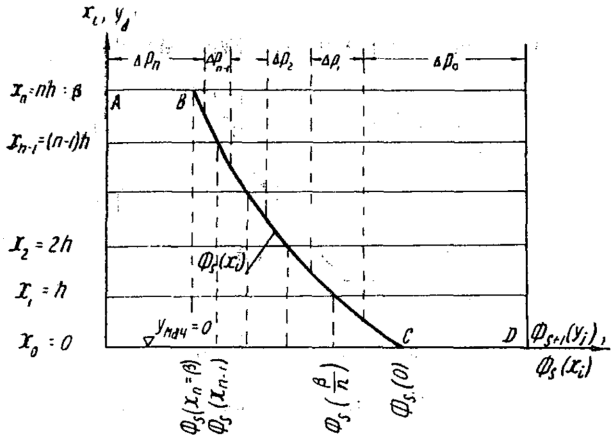

Рис. 1.2.5. Определение частных вероятностей наполнений $\Delta P_{s+1}(y_j)$ на начало $s+1$-го года

Допустим, на рис. 1. 2. 5, имеющем общее значение, линия $ABCD$ есть кривая обеспеченности наполнений в конце первого — начале второго года регулирования. Тогда частные вероятности для отдельных интервалов наполнений на начало второго года Δp_{2j} определим по следующей системе простых формул:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta p_{20}=1-0{,}5[\Phi_1(0)+\Phi_1(h)];\\
&\Delta p_{21}=0{,}5[\Phi_1(0)-\Phi_1(2h)];\\
&\cdots\qquad\qquad\cdots\\
&\Delta p_{2n}=0{,}5[\Phi_1(\beta)+\Phi_1(n-1)h].
\end{aligned}\right\}$$

Очевидно $\sum_{j=0}^{n}\Delta p_{2j}=1$.

Значения обеспеченности наполнений на конец второго года $\Phi_2(x_i)$ при этом определятся как суммы произведений частных вероятностей наполнений на вероятности превышения расчетного стока: $\Phi_2(x_i)=\sum_{j=1}^{n}F_{ij}(k)\Delta p_{2j}$.

Для всех последующих лет регулирования функции обеспеченности наполнений $\Phi_{s+1}(x_i)$ определяются по итерационной формуле

$$\Phi_{s+1}(x_i)=\sum_{j=0}^{n}F_{ij}(k)\Delta p_s(y_j)\quad(s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1.2.46}$$

Здесь $\Delta p_s(y_j)$ — частные вероятности наполнений y_j на конец s-го, или, что то же самое, на начало $s+1$-го года регулирования, рассчитываемые по следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta p_{s+1}(y_0)=1-\frac{\Phi_s(x_0)+\Phi_s(x_1)}{2};\\
&\Delta p_{s+1}(y_m)=\frac{\Phi_s(x_{m-1})-\Phi_s(x_{m+1})}{2};\\
&\Delta p_{s+1}(y_n)=\frac{\Phi_s(x_{n-1})+\Phi_s(x_{n=\beta})}{2}\\
&(i=j=0,\ 1,\ \ldots,\ m,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}\right\} \tag{1.2.47}$$

Процесс вычислений по системе итерационных формул (1.2.47) должен продолжаться до тех пор, пока не будет достигнута стабилизация значений функции $\Phi_s(x_i)$, т. е. до соблюдения условия

$$|\Phi_s(x_i)-\Phi_{s-1}(x_i)|\leqslant\varepsilon. \tag{1.2.48}$$

где ε — заданная точность вычисления.

Рассмотрим конкретный пример расчета при $\beta=0{,}4$ и $\alpha=0{,}6$. Пусть коэффициент вариации годового стока будет $C_v=0{,}71$. Тогда, согласно (1.2.11), будем иметь

$$F(k)=e^{-2k}(2k+1). \tag{1.2.49}$$

Зададим точность вычисления абсцисс безусловной кривой обеспеченности наполнений $\varepsilon=\pm0{,}0001$. Выберем интервал наполнений $h=0{,}1$, т. е. $n=4$. Тогда $x_i=0{,}1i$ и $y_j=0{,}1_j$ $(i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

Значения рассчетного стока k_{ij} находим по формуле (1.2.41), а соответствующие им обеспеченности F_{ij} по (1.2.42) и (1.2.49). Полученные значения F_{ij} запишем в виде матрицы (таблицы постоянных множителей).

Таблица 1.2.2

Значения функции $F(k_{ij})$

x_i	y_j				
	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0	0.6626	.7358	.8087	.8781	.9384
0,1	.5918	.6626	.7358	.8087	.8781
0,2	.5249	.5918	.6626	.7358	.8087
0,3	.4628	.5249	.5918	.6626	.7358
0,4	.4059	.4628	.5249	.5918	.6626

Примечание. Значения F_{ij} могут быть получены также по специальным таблицам, например [33].

Заметим, что в табл. 1.2.2 все значения $F_{ij}<1$, что характерно неглубокому многолетнему регулированию стока ($\beta\leqslant\alpha$).

Согласно (1.2.44), определяем обеспеченности наполнений на конец первого года регулирования $\Phi_1(x_i)$:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$\Phi_1(x_i)$	0,6626	.5918	.5249	.4626	.4059

Как видно, значения $\Phi_1(x_i)$ тождественны элементам первой колонки матрицы, соответствующей $y_j=0$.

В системе формул (1.2.47) примем индекс $s=1$ и вычислим значения Δp_{2j}:

j	0	1	2	3	4	Контроль
Δp_{2j}	0,3728	.0688	.0645	.0595	.4344	$\Sigma\Delta p_{2j}=1,0$

Значения обеспеченности наполнений на конец второго года $\Phi_2(x_i)$ при $s=1$ (второй год регулирования) приведены в табл. 1.2.3.

Вычисления значений обеспеченности наполнений для всех последующих годов регулирования $\Phi_{s+1}(x_i)$ выполняются аналогично второму году. Опуская промежуточные итерации, приведем результаты вычислений для восьмого года регулирования, которые удовлетворяют заданной точности $\varepsilon=\pm0{,}0001$ (табл. 1.2.4).

Отметим, что практически при схемах неглубокого многолетнего регулирования стока число последовательных итераций, обеспечивающее заданную точность вычислений, относи-

тельно невелико и обычно не превышает десяти. В таких случаях расчет целесообразно выполнять при одном начальном наполнении, например при $y_{нач}=0$.

Таблица 1.2.3

Значения функции $\Phi_2(x_i)$

x_i	y_j					$\Phi_2(x_i)$
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	
Δp_{2j}	0.3728	.0688	.0645	.0595	.4344	
0	.2470	.0506	.0522	.0522	.4076	0.8152
0,1	.2206	.0456	.0475	.0481	.3814	.7432
0,2	.1957	.0407	.0427	.0438	.3513	.6742
0,3	.1725	.0361	.0381	.0394	.3196	.6058
0,4	.1513	.0318	.0339	.0352	.2878	.5400

Как видно, расчетные алгоритмы численного способа более простые и их реализация на практике не представляет каких-либо трудностей.

Таблица 1.2.4

Значения функции $\Phi(x)$

x_i	y_j					$\Phi_3(x_i)$
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	
Δp_{3j}	0.1667	.0670	.0701	.0698	.6264	
0	0.1104	.0493	.0567	.0613	.5878	0.8655
0,1	.0986	.0444	.0516	.0564	.5500	.8010
0,2	.0875	.0336	.0464	.0514	.5066	.7315
0,3	.0771	.0352	.0415	.0462	.4609	.6609
0,4	.0677	.0310	.0368	.0413	.4150	.5918

Результаты вычисления, выполненного по аналитическому методу (см. табл. 1.2.1) и численной его интерпретации при параметрах регулирования и стока $\alpha=0{,}6$, $\beta=0{,}4$ и $c_v\simeq 0{,}71$, отличаются между собой лишь на четвертом знаке (табл. 1.2.5).

Построение кривой обеспеченности холостых сбросов. Если известна безусловная кривая обеспеченности наполнений, то построение кривой сбросов не представляет каких-либо трудностей и может быть выполнено путем численного интегрирования произведений вероятностей расчетного стока на частные вероятности наполнений.

Значения расчетного стока в годы, дающие сброс, определяются по формуле

$$k_{ij}=\beta+x_{ci}-y_j+\alpha, \qquad (1.2.50)$$

где $x_{ci}=h\cdot i$, $(i=0, 1, 2, \ldots, m)$ и $y_j=h\cdot j$, $(j=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Входящие в уравнение (1.2.50) аргументы ($0 \leqslant y \leqslant \beta$) и ($0 \leqslant x \leqslant A$) ($A$ — некоторые максимальные значения объема холостого сброса) разбиты соответственно на n и m частей с шагом $h = \frac{\beta}{n} = \frac{A}{m}$.

Таблица 1.2.5

Значения функции $\Phi(x)$

x	$\Phi(x)$		$\pm\Delta$
	по аналитическому методу	по численному способу	
0	0.8658	0.8655	+0,0003
0,1	.8012	.8010	+0,0002
0,2	.7316	.7315	+0,0001
0,3	.6609	.6609	0,0
0,4	.5917	0.5918	−0,0001

Обеспеченности расчетного стока k_{ij} устанавливаются по соотношению

$$F(k_{ij}) = 1 - P(\beta + x_{ci} - y_j + \alpha) \qquad (1.2.51)$$

и записываются в виде матрицы, аналогичной (1.2.43).

Искомые значения абсцисс кривой обеспеченности холостых сбросов вычисляются по формуле

$$\psi(x_{ci}) = \sum_{j=0}^{n} F(k_{ij}) \cdot \Delta p(y_j), \qquad (1.2.52)$$

в которой величины Δp_j принимаются, согласно системе итерационных формул (1.2.47) для года регулирования, отвечающего стабилизации кривой обеспеченности наполнений.

Практическую реализацию изложенного алгоритма покажем на рассмотренном выше примере ($\beta = 0{,}4$; $\alpha = 0{,}60$; $C_v \simeq 0{,}71$; $C_s \simeq 1{,}42$). Пусть $A = 1{,}0$; $n = 4$; $m = 10$ и $h = 0{,}1$.

Таблица 1.2.6

Значения функции F_{ij}

i	j				
	0	1	2	3	4
0	.4059	.4628	.5249	.5918	.6626
1	.3546	.4059	.4628	.5249	.5918
...	.....	....	....	....	....
9	.1074	.1257	.1469	.1712	.1992
10	.0916	.1074	.1257	.1469	.1712

Пользуясь формулами (1.2.50) и (1.2.51), определяем значения обеспеченности расчетного стока F_{ij} и, согласно (1.2.43), запишем их в табл. 1.2.6.

Частные вероятности наполнений Δp_j, согласно выполненному выше расчету при $s=7$, будут

j	0	1	2	3	4
Δp_j	.1667	.0670	.0701	.0698	.6264

Далее путем суммирования произведений $F_{ij} \cdot \Delta p_j$ по всем интервалам наполнений j получаем искомые значения абсцисс кривой $\psi(x_{ci})$ (табл. 1, 2, 7).

Таблица 1.2.7

Абсциссы кривой обеспеченности холостых сбросов

i	j					$\psi(x_{ci})$
	0	1	2	3	4	
0	.0676	.0310	.0368	.0414	.4150	.5918
1	.0590	.0272	.0325	.0367	.3706	.5260
..	...	...	...	...	...	...
9	.0179	.0084	.0103	.0120	.1248	.1734
10	.0153	.0072	.0088	.0103	.1072	.1488

Построение кривой обеспеченности дефицитов отдачи. Кривая обеспеченности дефицитов отдачи строится также на основе безусловной кривой наполнений водохранилища. Уравнение годового водного баланса водохранилища в случае наличия дефицита отдачи имеет вид

$$k_{ij} = \alpha - x_{\partial i} - y_j. \qquad (1.2.53)$$

Промежутки $(0 \leqslant x_{\partial i} \leqslant \alpha)$ и $(0 \leqslant y_j \leqslant \beta)$ разбиваем соответственно на m и n равных частей с шагом $h=\frac{\alpha}{m}=\frac{\beta}{n}$. Обеспеченности расчетного стока k_{ij} определяем по формуле

$$F_{ij}(k) = 1 - P(\alpha - x_{\partial i} - y_j), \qquad (1.2.54)$$

которые записываются в виде матрицы (таблицы множителей) (1.2.43). Значения обеспеченности дефицитов отдачи $f(x_{\partial i})$ устанавливаются путем суммирования произведений $F_{ij}\ \Delta p_j$:

$$f(x_{\partial i}) = \sum_{j=0}^{n} F(k_{ij}) \cdot \Delta p(y_j), \qquad (1.2.55)$$

где Δp_j имеют те же значения, что и для наполнений (в условиях стабилизации их кривой обеспеченности) (табл. 1.2.4).

В условиях нашего примера при шаге $h=0{,}1$ имеем: $m=6$ и $n=4$. По формуле (1.2.54) получим следующие значения обеспеченности расчетного стока F_{ij} (табл. 1.2.8).

Как видно, в некоторой части таблицы значения обеспеченности расчетного стока $F_{ij}=1$, соответствующие $k=0$. Дальнейший расчет сводится к определению значений обеспеченности дефицитов отдачи (табл. 1.2.9) для конкретных значений $x_{\partial i}$ по формуле (1.2.55).

Таблица 1.2.8

Значения функции $F(k_{ij})$

i	j				
	0	1	2	3	4
0	.6626	.7358	.8087	.8781	.9384
1	.7358	.8087	.8781	.9384	.9824
2	.8087	.8781	.9384	.9824	1,0000
3	.8781	.9384	.9824	1,0000	1,0000
4	.9384	.9824	1,0000	1,0000	1,0000
5	.9824	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Правильность построения обобщенной характеристики по численному способу проверяется с помощью критериального тождества баланса водохранилища за многолетие

Таблица 1.2.9

Абсциссы кривой обеспеченности дефицитов отдачи

i	j					$f(x_{\partial i})$
	0	1	2	3	4	
Δpj	.1667	.0670	.0701	.0698	.6264	
0	.1103	.0494	.0568	.0614	.5877	.8656
1	.1225	.0543	.0616	.0656	.6153	.9193
2	.1346	.0599	.0659	.0687	.6264	.9344
3	.1462	.0630	.0690	.0698	.6264	.9744
4	.1562	.0659	.0701	.0698	.6264	.9885
5	.1633	.0670	.0701	.0698	.6264	.9968
6	.1667	.0670	.0701	.0698	.6264	1,0000

$$\alpha+E_c-E_\partial=1,$$

где E_c и E_∂ — математические ожидания объемов сброса и дефицита отдачи.

Численный способ проще, чем расчеты по приближенным формулам квадратур. Если учесть, что программы счета более простые, то численная интерпретация имеет большую перспективу внедрения в практику проектирования водохозяйственных объектов.

Глава 1.3

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТОВ ГЛУБОКОГО МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА

Существующие способы построения обобщенной водохозяйственной характеристики многолетнего режима работы водохранилища (кривые обеспеченности наполнений, дефицитов отдачи и холостых сбросов) в большинстве ограничиваются рассмотрением расчетных схем неглубокого регулирования стока.

Нередко в силу высокой вариации стока рек возникает необходимость в более глубоком многолетнем регулировании. Это реки равнинного Казахстана и других районов, сходных по гидрологическим условиям. Рассмотрим расчетный случай, когда $\alpha \leqslant \beta \leqslant 2\alpha$.

1. Функция обеспеченности наполнений

При глубоком многолетнем регулировании расчетный сток

$$k = x - y + \alpha \qquad (1.3.1)$$

будет иметь значение как больше нуля, так и равное нулю. Соответственно функции обеспеченности $F(k)$ и плотность вероятностей $q(k)$ бывают равными $F(k) = 1$ и $q(k) \geqslant 0$. Поэтому следует установить границу изменения расчетного

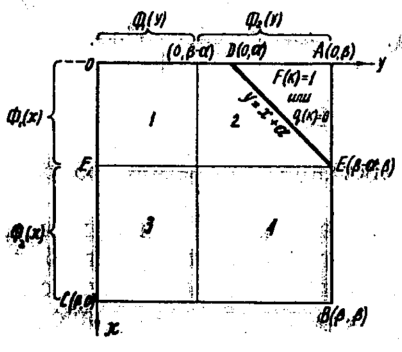

Рис. 1.3.1. Разбиение квадрата наполнений [β, β] на частные области интегрирования

стока. При $k=0$ из (1.3.1) имеем $y=x+\alpha$, т. е. уравнение прямой линии, которая на квадрате наполнений (β, β) дает частные области интегрирования (рис. 1.3.1). Согласно им, функция обеспеченности наполнений должна состоять из двух уравнений $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_1(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy+\\
&+\int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha}\Phi_2(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant\beta-\alpha);\\
&\Phi_2(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_1(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy+\\
&+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\Phi_2(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy,\quad (\beta-\alpha\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\}\qquad (1.3.2)$$

Система интегральных уравнений (1.3.2) может быть решена различными способами [56, 57]. Например, в методе последовательных приближений за пробное их решение принимаем

$$\Phi_{10}(x)=\Phi_{20},\quad (x)=F(x+\alpha)$$

и вычисляем последовательные приближения

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{1,n+1}(x)=F_1(x+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_{1,n}(y)\,q(k)\,dy+\\
&+\int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha}\Phi_{1,n}(y)\,q(k)\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant\beta-\alpha);\\
&\Phi_{2,n+1}(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_{2,n}(y)\,q(k)\,dy+\\
&+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\Phi_{2,n}(y)\,q(k)\,dy,\quad (\beta-\alpha\leqslant x\leqslant\beta);\\
&q(k)=q(x-y+\alpha),\quad (n=0, 1, \ldots)
\end{aligned}\right\}\qquad (1.3.3)$$

искомых функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$. Уравнения (1.3.3) можно рассматривать как частичные суммы бесконечного ряда

$$F(x+\alpha)+\int_V F(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy+\int_V F(y)\,q_2(x-y+\alpha)\,dy+\cdots\equiv$$

$$\equiv[1+q(x-y+\alpha)+q^2(x-y+\alpha)+\cdots]F(x+\alpha),\quad (y\in V) \tag{1.3.4}$$

называемого рядом Неймана.

При значении параметра γ в (1.2.10), равном единице, из (1.3.2) будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=e^{-(x+\alpha)}+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_1(y)\,e^{-(x-y+\alpha)}\,dy+\\
&+\int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha}\Phi_2(y)\,e^{-(x-y+\alpha)}\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant\beta-\alpha);\\
&\Phi_2(x)=e^{-(x+\alpha)}+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_1(y)\,e^{-(x-y+\alpha)}\,dy+\\
&+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\Phi_2(y)\,e^{-(x-y+\alpha)}\,dy,\quad (\beta-\alpha\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.5}$$

Метод последовательных приближений дает следующее решение уравнения (1.3.5).

Пусть пробным решением будет

$$\Phi_{10}(x)=\Phi_{20}(x)=e^{-(x+\alpha)}. \tag{1.3.6}$$

Заменив в $\Phi(x)$ аргумент x на y и, подставив в (1.3.5), после интегрирования, например для следующего (первого) приближения, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{11}(x)=\Phi_{10}(x)+(x+\alpha)\,e^{-(x+2\alpha)},\ (0\leqslant x\leqslant\beta-\alpha);\\
&\Phi_{21}(x)=\Phi_{20}(x)+\beta e^{-(x+2\alpha)},\ (\beta-\alpha\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.7}$$

Аналогично определяются расчетные формулы для второго, третьего и т. д. приближений.

Итерационный процесс заканчивается при достижении заданной точности вычисления (обычно не превышает 5—7 итераций).

Пример 1. При значениях параметров стока и регулирования $C_v=1$, $\beta=1{,}2$ и $\alpha=0{,}6$ имеем

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x)&=0{,}9301+0{,}7613xe^{-x},\ (0\leqslant x\leqslant 0{,}6);\\ \Phi_2(x)&=1{,}3871e^{-x},\ (0{,}6\leqslant x\leqslant 1{,}2).\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.8)$$

Результаты вычислений аналитическим методом и численной его интерпретацией приведены в табл. 1.3.1.

Таблица 1.3.1.

Абсциссы безусловных кривых обеспеченности наполнений $\Phi(x)$

Наполнения x	$\beta=1.2$	$\alpha=0{,}6$	$\beta=0{,}9$	$\alpha=0{,}6$
	Аналитический метод	Численный способ	Аналитический метод	Численный способ
0	0,9301	0,9302	0,8823	0,8834
0,1	0,9104	0,9107	0,8507	0,8519
0,2	0,8863	0,8863	0,8174	0,8184
0,3	0,8582	0,8584	0,7844	0,7857
0,4	0,8278	0,8277	0,7080	0,7105
0,5	0,7952	0,7951	0,6406	0,6415
0,6	0,7613	0,7612	0,5796	0,5804
0,7	0,6886	0,6889	0,5253	0,5251
0,8	0,6232	0,6233	0,4745	0,4753
0,9	0,5640	0,5639	0,4295	0,4301
1,0	0,5103	0,5102		
1,1	0,4618	0,4618		
1,2	0,4178	0,4177		

Значения обеспеченности, подсчитанные по численному способу при достаточно большом числе интервалов наполнений (в данном случае 12 и 9), практически совпадают с их значениями, полученными по формулам (1.3.8).

При нецелых значениях параметра γ в (1.2.10) интегральные уравнения регулирования стока могут быть решены сведением их к системе $n+1$ алгебраических уравнений.

Всякая формула приближенного интегрирования имеет вид [56]

$$\int_a^b \psi(y)\,dy=\sum_{s=1}^{n} A_s\cdot\psi(y_s)+\Delta,\qquad(1.3.9)$$

где Δ — погрешность; A_s и y_s — постоянные в промежутке s. Например, для формулы трапеций $y_0=a$; $y_1=a+\frac{b-a}{n-1}$; ···;

$y_{n+1}=b\cdot A_0=A_{n+1}=\frac{b-a}{2n-2}$; $A_2=A_3=\cdots=A_n=\frac{b-a}{n-1}$. То же, для формулы Гаусса: $y_s=a+(b-a)\cdot y_s^{n+1}$, $A_s=(b-a)A_s^{n+1}$, где y_s^n — корни полинома Лежандра; A_s^{n+1} — коэффициенты Гаусса, составленные для интервала 0,1; 0,2 ...

Полагая в (1.3.2) аргумент $x=x_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, m, \ldots, n)$, а также учитывая, что $x_m=\beta-\alpha$ и $x_n=\beta$, получим

$$\Phi_1(x_0)=F(x_0+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_1(y)\,q(x_0-y+\alpha)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha}^{x_0+\alpha}\Phi_2(y)\,q(x_0-y+\alpha)\,dy;$$

$$\Phi_1(x_1)=F(x_1+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_1(y)\,q(x_1-y+\alpha)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha}^{x_1+\alpha}\Phi_2(y)\,q(x_1-y+\alpha)\,dy;$$

. . . . . .

$$\Phi_1(x_m)=F(x_m+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_1(y)q(x_m-y+\alpha)dy+ \qquad (1.3.10)$$

$$+\int_{\beta-\alpha}^{x_m+\alpha}\Phi_2(y)\,q(x_m-y+\alpha)\,dy;$$

$$\Phi_2(x_{m+1})=F(x_{m+1}+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_1(y)q(x_{m+1}-y+\alpha)dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha}^{x_{m+1}+\alpha}\Phi_2(y)\,q(x_{m+1}-y+\alpha)\,dy;$$

. . . . . .

$$\Phi_2(x_n)=F(x_n+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_1(y)\,q(x_n-y+\alpha)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\Phi_2(y)\,q(x_n-y+\alpha)\,dy.\Bigg]$$

При замене интегралов в уравнениях (1.3.10) по формуле (1.3.9) имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x_0)=F(x_0+\alpha)+\sum_{s=0}^{m}\Phi_1(y_s)\,q(x_0-y_s+\alpha)+\\
&+\sum_{s=m+1}^{\omega}\Phi_2(y_s)\,q(x_0-y_s+\alpha);\\
&\Phi_1(x_1)=F(x_1+\alpha)+\sum_{s=0}^{m}\Phi_1(y_s)\,q(x_1-y_s+\alpha)+\\
&+\sum_{s=m+1}^{\omega}\Phi_2(y_s)\,q(x_1-y_s+\alpha);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_1(x_m)=F(x_m+\alpha)+\sum_{s=0}^{m}\Phi_1(y_s)\,q(x_m-y_s+\alpha)+\\
&+\sum_{s=m+1}^{\omega}\Phi_2(y_s)\,q(x_m-y_s+\alpha);\\
&\Phi_2(x_{m+1})=F(x_{m+1}+\alpha)+\sum_{s=0}^{m}\Phi_1(y_s)\,q(x_{m+1}-y_s+\alpha)+\\
&+\sum_{s=m+1}^{\omega}\Phi_2(y_s)\,q(x_{m+1}-y_s+\alpha);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_2(x_n)=F(x_n+\alpha)+\sum_{s=0}^{m}\Phi_1(y_s)\,q(x_n-y_s+\alpha)+\\
&+\sum_{s=m+1}^{\omega}\Phi_2(y_s)\,q(x_n-y_s+\alpha);\\
&\omega=\frac{(x_i+\alpha)n}{\beta},\ (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).
\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.11)$$

Решая систему (1.3.11) относительно $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$, получим искомые значения безусловной функции обеспеченности наполнений водохранилища. Пусть, например, $\beta=2\alpha$ и $n=4$. Тогда, обозначив в (1.2.10)—(1.2.12) через $M=\frac{\gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma)}$, $N(x)=$

$=e^{-\gamma(x+\alpha)}\cdot(x+\alpha)^{\gamma-1}$ и $S(y,\alpha)=(\alpha-y)^{\gamma-1}e^{-\gamma(\alpha-y)}$, из (1.3.11) имеем пять следующих уравнений:

$$
\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(0)=M\cdot\left[\int_0^{\infty}N(x)\,dx+\int_0^{\alpha}\Phi_1(y)\cdot S(y,\alpha)\,dy\right];\\
&\Phi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)=M\left[\int_{\alpha/2}^{\infty}N(x)\,dx+\int_0^{\alpha}\Phi_1(y)S\left(y,\frac{3\alpha}{2}\right)dy+\right.\\
&\left.+\int_{\alpha}^{3\alpha/2}\Phi_2(y)\cdot S\left(y,\frac{3\alpha}{2}\right)dy\right];\\
&\Phi_1(\alpha)=M\left[\int_{\alpha}^{\infty}N(x)\,dx+\int_0^{\alpha}\Phi_1(y)\cdot S(y,2\alpha)\,dy+\right.\\
&\left.+\int_{\alpha}^{2\alpha}\Phi_2(y)\cdot S(y,2\alpha)\,dy\right];\\
&\Phi_2\left(\frac{3\alpha}{2}\right)=M\left[\int_{3\alpha/2}^{\infty}N(x)\,dx+\int_0^{\alpha}\Phi_1(y)\cdot S\left(y,\frac{5\alpha}{2}\right)dy+\right.\\
&\left.+\int_{\alpha}^{2\alpha}\Phi_2(y)\cdot S\left(y,\frac{5\alpha}{2}\right)dy\right];\\
&\Phi_2(2\alpha)=M\left[\int_{2\alpha}^{\infty}N(x)\,dx+\int_0^{\alpha}\Phi_1(y)\cdot S(y,3\alpha)\,dy+\right.\\
&\left.+\int_{\alpha}^{2\alpha}\Phi_2(y)\cdot S(y,3\alpha)\,dy\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.12)
$$

Для сокращения записи обозначим

$$
\left.\begin{aligned}
A&=M\int_0^{\infty}e^{-\gamma(x+\alpha)}(x+\alpha)^{\gamma-1}dx;\\
B&=M\int_{\alpha/2}^{\infty}e^{-\gamma(x+\alpha)}\cdot(x+\alpha)^{\gamma-1}dx;
\end{aligned}\right\}
$$

$$\left.\begin{aligned} C&=M\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\gamma(x+\alpha)}\cdot(x+\alpha)^{\gamma-1}dx;\\ D&=M\int_{3\alpha/2}^{\infty} e^{-\gamma(x+\alpha)}\cdot(x+\alpha)^{\gamma-1}dx;\\ E&=M\int_{2\alpha}^{\infty} e^{-\gamma(x+\alpha)}\cdot(x+\alpha)^{\gamma-1}dx. \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.13)$$

Заменяя остальные интегралы в (1.3.12) по формулам приближенных квадратур (трапеций), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}\Phi_1(0)+a_{12}\Phi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-A;\\ &a_{21}\Phi_1(0)+a_{22}\Phi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)+a_{23}\Phi_1(\alpha)=-B;\\ &a_{31}\Phi_1(0)+a_{32}\Phi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)+a_{33}\Phi_1(\alpha)+a_{34}\Phi_2\left(\frac{3\alpha}{2}\right)=-C;\\ &a_{41}\Phi_1(0)+a_{42}\Phi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)+a_{43}\Phi_1(\alpha)+a_{44}\Phi_2\left(\frac{3\alpha}{2}\right)+\\ &+a_{45}\Phi_2(2\alpha)=-D;\\ &a_{51}\Phi_1(0)+a_{52}\Phi_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)+a_{53}\Phi_1(\alpha)+a_{54}\Phi_2\left(\frac{3\alpha}{2}\right)+\\ &+a_{55}\Phi_2(2\alpha)=-E. \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.12')$$

Определитель R системы (1.3.12′) имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}, \qquad (1.3.14)$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
&a_{11}=a_{55}=0{,}25M\alpha^{\gamma}e^{-\alpha\gamma}-1;\ a_{12}=a_{23}=a_{34}=\\
&=2^{-\gamma}M\alpha^{\gamma}e^{-\frac{\alpha\gamma}{2}};\\
&a_{13}=a_{14}=a_{15}=a_{24}=a_{25}=a_{35}=0;\ a_{31}=\\
&=2^{\gamma-3}\alpha^{\gamma}Me^{-2\alpha\gamma};\\
&a_{22}=a_{33}=a_{44}=0{,}5M\alpha^{\gamma}e^{-\alpha\gamma}-1;\ a_{41}=\\
&=2^{-(\gamma+1)}\cdot 5^{\gamma-1}M\alpha^{\gamma}e^{-\frac{5\alpha\gamma}{2}};\\
&a_{32}=a_{43}=a_{54}=2^{-\gamma}\cdot 3^{\gamma-1}M\alpha^{\gamma}e^{-\frac{3\alpha\gamma}{2}};\\
&a_{51}=0{,}25\cdot 3^{\gamma-1}M\alpha^{\gamma}e^{-3\alpha\gamma};\\
&a_{42}=a_{53}=2^{\gamma-2}\cdot M\alpha^{\gamma}e^{-2\alpha\gamma};\\
&a_{52}=2^{-\gamma}\,5^{\gamma-1}M\alpha^{\gamma}e^{-\frac{5\alpha\gamma}{2}};\\
&a_{45}=2^{-(\gamma+1)}\cdot M\alpha^{\gamma}e^{-\frac{\alpha\gamma}{2}};\\
&a_{21}=2^{-(\gamma+1)}3^{\gamma+1}M\alpha^{\gamma}e^{-\frac{3\alpha\gamma}{2}}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (1.3.15)
$$

Решая систему (1.3.12′) относительно $\Phi_1(0)$, имеем

$$\Phi_1(0)=\frac{R_1}{R}, \qquad (1.3.16)$$

где

$$R_1=\begin{vmatrix} -A & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ -B & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ -C & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ -D & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\\ -E & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Аналогично определяются обеспеченности наполнений для всех остальных выделенных значений x_i по правилу Крамера [56]. Так, в рассматриваемом примере для наполнения $x=\beta$ будем иметь $\Phi_2(\beta)=\frac{R_2}{R}$,

где

$$R_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & -A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & -B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & -C \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & =-D \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & =-E \end{vmatrix}.$$

Пример 2. Пусть $\beta=1{,}6$; $\alpha=0{,}8$; $C_v=0{,}50$; $\gamma=4$. С учетом (1.3.13) имеем

$$M=\frac{4^4}{\Gamma(4)}=42;\quad A=\left(\frac{32\alpha^3}{3}+8\alpha^2+4\alpha+1\right)e^{-4\alpha}=0{,}6025;$$

$$B=(36\alpha^3+18\alpha^2+6\alpha+1)\,e^{-6\alpha}=0{,}2942;$$

$$C=\left(\frac{256}{3}\alpha^3+32\alpha^2+8\alpha+1\right)e^{-8\alpha}=0{,}1190;$$

$$D=\left(\frac{500}{3}\alpha^3+50\alpha^2+10\alpha+1\right)e^{-10\alpha}=0{,}0423;$$

$$E=(288\alpha^3+72\alpha^2+12\alpha+1)\,e^{-12\alpha}=0{,}0139.$$

Элементы определителя системы алгебраических уравнений (1.3.12′), согласно (1.3.15), будут иметь вид:

$$a_{11}=a_{55}=-0{,}8219;\ a_{12}=a_{23}=a_{34}=0{,}2205;$$
$$a_{13}=a_{14}=a_{15}=a_{24}=a_{25}=a_{35}=0;\ a_{21}=0{,}1214;$$
$$a_{22}=a_{33}=a_{44}=-0{,}6438;\ a_{31}=0{,}0581;$$
$$a_{32}=a_{43}=a_{54}=0{,}2427;\ a_{41}=0{,}0279;$$
$$a_{42}=a_{53}=0{,}1162;\ a_{45}=0{,}1103;$$
$$a_{51}=0{,}0080;\ a_{52}=0{,}0557.$$

В результате имеем $\Phi_1(0)=0{,}9841$; $\Phi_1(0{,}4)=0{,}9357$; $\Phi_1(0{,}8)=0{,}8559$; $\Phi_2(1{,}2)=0{,}6703$ и $\Phi_2(1{,}6)=0{,}4118$.

2. Функция обеспеченности дефицитов отдачи

Искомая кривая обеспеченности дефицитов отдачи, так же как и в случае неглубокого многолетнего регулирования стока, описывается двумя уравнениями $f_1(x_э)$ и $f_2(x_э)$ (см. рис. 1.3.2).

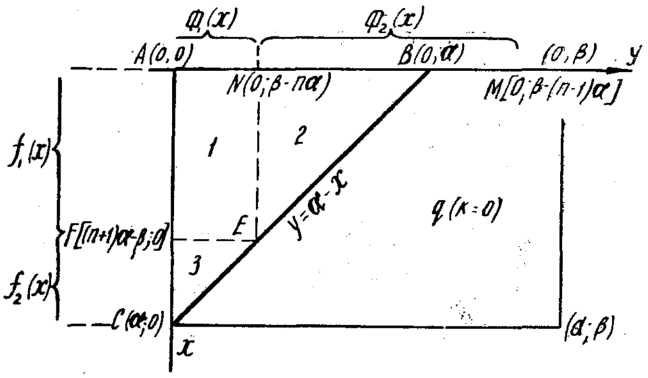

Рис. 1.3.2. Схема разбиения области интегрирования на частные

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_\partial) &= F(\alpha - x_\partial) + \int_0^{\beta-\alpha} \Phi_1(y)\, q(\alpha - y - x_\partial)\, dy + \\ &+ \int_{\beta-\alpha}^{\alpha-x_\partial} \Phi_2(y)\, q(\alpha - y - x_\partial)\, dy, \quad (0 \leqslant x_\partial \leqslant 2\alpha - \beta); \\ f_2(x_\partial) &= F(\alpha - x_\partial) + \int_0^{\alpha-x_\partial} \Phi_1(y)\, q(\alpha - y - x_\partial)\, dy \\ &\qquad (2\alpha - \beta \leqslant x_\partial \leqslant \alpha). \end{aligned}\right\} \quad (1.3.17)$$

При параметрах регулирования $\beta = 1{,}2$ и $\alpha = 0{,}6$ из (1.3.17) имеем

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_\partial) &= (0{,}9302 - 0{,}7613 x_\partial) e^{x_\partial}, \qquad (x_\partial = 0); \\ f_2(x_\partial) &= (0{,}9302 - 0{,}7611 x_\partial + 0{,}2089 x_\partial^2) e^{x_\partial}, \quad (0 \leqslant x_\partial \leqslant 0{,}6). \end{aligned}\right\} \quad (1.3.18)$$

В условиях примера 2, т. е. $\beta = 1{,}6$ $\alpha = 0{,}8$ и $C_v = 0{,}5$.

Согласно выполненному выше расчету, при указанных параметрах имеем $\Phi_1(0) = 0{,}9841$; $\Phi_1(0{,}4) = 0{,}9357$; $\Phi_1(0{,}8) = 0{,}8559$; $\Phi_2(1{,}2) = 0{,}6703$ и $\Phi_2(1{,}6) = 0{,}4118$.

Полагая во втором уравнении (1.3.17) значение $x_\partial = 0$; 0,4; 0,8, получим

$$f(0) = F(0{,}8) + \int_0^{0{,}8} \Phi_1(y)\, q(0{,}8 - y)\, dy;$$

$$f(0{,}4)=F(0{,}4)+\int_0^{0{,}4}\Phi_1(y)\,q(0{,}4-y)\,dy;$$

$$f(0{,}8)=F(0)+\int_0^{0}\Phi_1(y)\,q(-y)\,dy.$$

По формуле приближенных квадратур (трапеций) при $F(0{,}8)=0{,}6025$ и $F(0{,}4)=0{,}4212$ (снятые с кривой Пирсона III типа при $\gamma=4$) будем иметь

$$f(0)=0{,}6025+0{,}4\left[\frac{\Phi(0)\cdot q(0{,}8)}{2}+\Phi(0{,}4)\,q(0{,}4)+\frac{\Phi(0{,}8)q(0)}{2}\right]=$$

$$=0{,}9840;$$

$$f(0{,}4)=0{,}9212+0{,}1\left[\frac{\Phi(0)q(0{,}4)}{2}+\Phi(0{,}1)\,q(0{,}3)+\Phi(0{,}2)\,q(0{,}2)+\right.$$

$$\left.+\Phi(0{,}3)\,q(0{,}1)+\frac{\Phi(0{,}4)q(0)}{2}\right]=0{,}9990\approx 1{,}0.$$

При $f(0{,}4)$ значения функции $\Phi(0{,}1)$; $\Phi(0{,}2)$ и $\Phi(0{,}3)$ получены путем интерполяции.

3. Функции обеспеченности холостых сбросов

В отличие от (1.2.33) кривая обеспеченности холостых сбросов описывается уравнением вида

$$\psi(x_c)=F(\beta+\alpha+x_c)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_1(y)\,q(\beta-y+\alpha+x_c)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\Phi_2(y)\,q(\beta-y+\alpha+x_c)\,dy,\qquad (0\leqslant x<\infty).\qquad (1.3.19)$$

В условиях примера 1 ($\beta=1{,}2$; $\alpha=0{,}6$; $c_v=1{,}0$) из (1.3.19) имеем

$$\psi(x_c)=e^{-x_c-1{,}8}+\int_0^{0{,}6}(0{,}9301e^{-y}+0{,}7613ye^{-y})e^{-x_c+y-1{,}8}\,dy+\ldots$$

$$+\int_{0,6}^{1,2} 1{,}3871e^{-y}\cdot e^{-x_c+y-1{,}8}dy, \quad (0\leqslant x_c<\infty),$$

т. е. $\psi(x_c)=0{,}4178e^{-x_c}$.

Если подынтегральные выражения в (1.3.19) не интегрируются в элементарных функциях, то значения обеспеченности холостых сбросов могут быть найдены путем замены интегралов приближенными формулами или же численным способом.

Проверка по критериальному соотношению (1.2.56)

$$\alpha+E_c-E_\partial=0{,}6+\int_0^\infty 0{,}4178e^{-x_c}dx_c-\int_0^{0,6}(0{,}9301-0{,}7611x_\partial+$$

$$+0{,}2089x_\partial^2)e^{x_\partial}dx_\partial=0{,}99987\simeq 1{,}0$$

показывает, что выполненные методические построения правильны.

4. Особенности численной интерпретации аналитического метода

При глубоком многолетнем регулировании стока расчетный алгоритм по численному способу остается таким же, как это показано выше. Однако часть матрицы будет включать элементы с одинаковыми значениями постоянных множителей, а именно с $F_{ij}=1$, которые отвечают нулевым значениям расчетного стока $k_{ij}=0$, что иллюстрируется матрицей (табл. 1.3.2), составленной при следующих параметрах регулирования и стока: $\beta=1{,}6$; $\alpha=0{,}8$; $C_v=0{,}50$; $C_s=1{,}0$.

Таблица 1.3.2

Таблица постоянных множителей

x_i	y_j								
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
0	.6025	.7787	.9212	.9909	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	.4335	.6025	.7787	.9212	.9909	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,4	.2952	.4335	.6025	.7787	.9212	.9909	1,0000	1,0000	1,0000
0,6	.1906	.2942	.4335	.6025	.7787	.9212	.9909	1,0000	1,0000
0,8	.1189	.1906	.2942	.4335	.6025	.7787	.9212	.9909	1,0000
1,0	.0719	.1189	.1906	.2942	.4335	.6025	.7787	.9212	.9909
1,2	.0424	.0719	.1189	.1906	.2942	.4335	.6025	.7787	.9212
1,4	.0244	.0424	.0719	.1189	.1906	.2942	.4335	.6025	.7787
1,6	.0138	.0244	.0424	.0719	.1189	.1906	.2942	.4335	.6025

В расчетах по численному методу наличие в некоторой части квадрата наполнений $[\beta, \beta]$ нулевых значений расчетного стока с $F(k)=1$ не вызывает каких-либо нарушений алгорит-

ма, так как интегрирование выполняется путем суммирования произведений обеспеченности стока F_{ij} и частных вероятностей наполнений $\Delta p_{(s+1)j}$. Более того, поскольку в указанной части области $[\beta, \beta]$ все значения $F_{ij} = 1$, то само численное интегрирование даже несколько упрощается.

Для аналитических же методов построения безусловной функции обеспеченности наполнений нулевые значения расчетного стока в указанной части области интегрирования играют весьма существенную роль, как фактор, усложняющий расчетно-методические построения, обусловливая необходимость выделения из всей области $[\beta, \beta]$ участка с $q(k) = 0$, а также разбиения остальной ее части на частные области интегрирования.

Глава 1.4

ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА РАСЧЕТОВ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА

Логическим развитием двух рассмотренных выше расчетно-методических построений являются теоретические обобщения на случай любой емкости водохранилища

$$n\alpha \leqslant \beta \leqslant (n+1)\,\alpha, \qquad (1.4.1)$$

где n — любое целое число.

Условие (1.4.1) является наиболее общим. В частности, при $n=0$ неравенство сводится к условию $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, принятому при выводе интегрального уравнения (1.2.9), а при $n=1$ к $\alpha \leqslant \beta \leqslant 2\alpha$ (см. гл. 1.3).

1. Функция обеспеченности наполнений

Согласно уравнению годового водного баланса водохранилища, функция обеспеченности на конец первого года регулирования при начальном наполнении $y=0$ имеет вид

$$\Phi_{11}\ (x) = F(x+\alpha),\ (0 \leqslant x \leqslant \beta). \qquad (1.4.2)$$

Анализируя алгоритм построения кривой обеспеченности наполнений на конец второго и следующего годов, можно заметить, что вся область наполнений $x[0, \beta]$, $y[0, \beta]$ после нескольких первых лет регулирования разобьется на вполне определенное (устойчивое) число частных областей интегрирования. Например, интегральные соотношения на конец второго (или, что то же самое, на начало третьего) года состоят из двух уравнений (рис. 1.4.1, *а*, частные области *1* и *2*):

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{12}(x) &= F(x+\alpha) + \int_0^{x+\alpha} \Phi_{11}(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy, \quad (0 \leqslant x \leqslant \beta-\alpha);\\ \Phi_{22}(x) &= F(x+\alpha) + \int_0^{\beta} \Phi_{11}(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy, \quad (\beta-\alpha \leqslant x \leqslant \beta).\end{aligned}\right\} \tag{1.4.3}$$

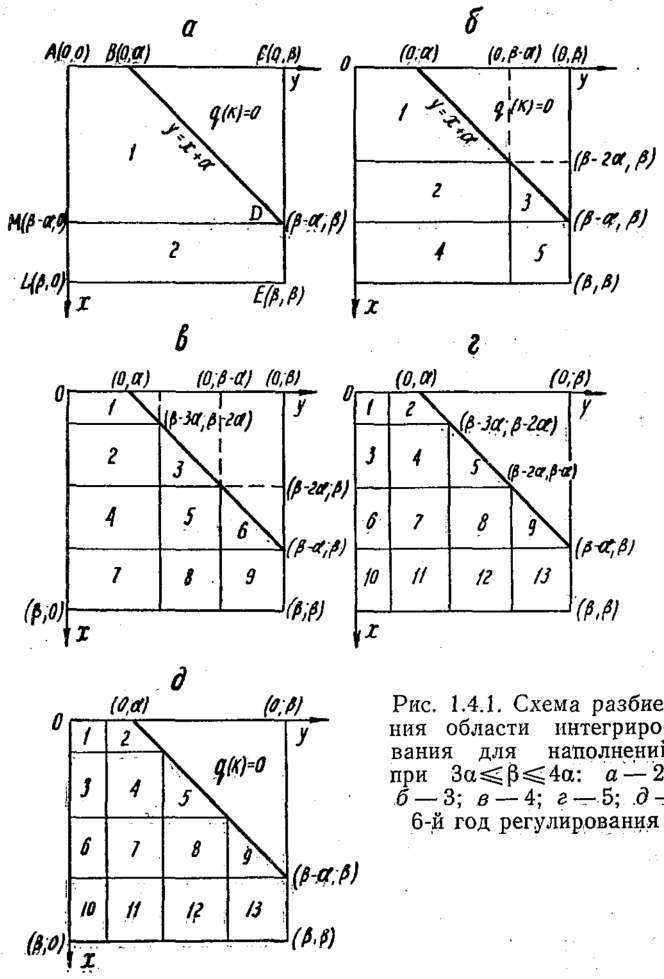

Рис. 1.4.1. Схема разбиения области интегрирования для наполнений при $3\alpha \leqslant \beta \leqslant 4\alpha$: *а* — 2; *б* — 3; *в* — 4; *г* — 5; *д* — 6-й год регулирования

Кривая обеспеченности наполнений на конец третьего года регулирования устанавливается путем разбиения области *ABDEL*. Для этого в уравнении прямой $y = x + \alpha$ принимаем

$y=\beta-\alpha$. Тогда $x=\beta-2\alpha$. Проведя на рис. 1.4.1, *б* прямые $x=\beta-2\alpha$ и $y=\beta-\alpha$, получим пять частных областей интегрирования: ($x=\beta-2\alpha$; $y=x+\alpha$; $x=0$; $y=0$), ($x=\beta-\alpha$; $y=\beta-\alpha$; $x=\beta-2\alpha$; $y=0$); ($x=\beta-\alpha$; $y=x+\alpha$; $y=\beta-\alpha$); ($x=\beta$; $y=\beta-\alpha$; $x=\beta-\alpha$; $y=0$), ($x=\beta$; $y=\beta$; $x=\beta-\alpha$; $y=\beta-\alpha$), согласно которым интегральные уравнения на конец третьего года в частных областях имеют вид:

в первом

$$\Phi_{13}(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{x+\alpha}\Phi_{12}(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy,\ (0\leqslant x\leqslant\beta-2\alpha);$$

во втором и третьем

$$\Phi_{23}(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_{12}(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha}\Phi_{22}(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy,\ (\beta-2\alpha\leqslant x\leqslant\beta-\alpha);$$

в четвертом и пятом

$$\Phi_{33}(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-\alpha}\Phi_{12}(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\Phi_{22}(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy,\ (\beta-\alpha\leqslant x\leqslant\beta).$$

(1.4.4)

Аналогично разбиваем область $x[0, \beta]$ и $y[0, \beta]$ на частные области интегрирования для четвертого (рис. 1.4.1, *в*) и всех последующих годов (рис. 1.4.1, *г*, *д*) до тех пор, пока линия $y=\beta-n\alpha$ не пересечет прямую $y=x+\alpha$. Отметим, что прямые пересекаются в году $i=n+2$. Например, при $n=3$ процесс разбиения завершится в пятом году регулирования, для которого частные области интегрирования такие же, как для шестого и всех последующих лет. При емкости водохранилища $n\alpha\leqslant\beta\leqslant(n+1)\alpha$ вся область разобьется на число $m=\frac{n(n+5)}{2}+1$ частных областей интегрирования.

Кривая обеспеченности наполнений при длительной

эксплуатации водохранилища ($i\to\infty$) не зависит от начальных условий, т. е. от выбора $\Phi_{11}(x)$. Тогда безусловная (стабилизированная) кривая обеспеченности наполнений водохранилища при любом значении его многолетней емкости $n\alpha\leqslant\beta\leqslant(n+1)\alpha$ будет определяться следующей системой интегральных уравнений:

$$
\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-n\alpha}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\\
&+\int_{\beta-n\alpha}^{x+\alpha}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy,\quad (0\leqslant x=\beta-n\alpha);\\
&\Phi_2(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-n\alpha}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\\
&+\int_{\beta-n\alpha}^{\beta-(n-1)\alpha}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy+\int_{\beta-(n-1)\alpha}^{x+\alpha}\Phi_3(y)\,q(k)\,dy\\
&\qquad(\beta-n\alpha\leqslant x\leqslant\beta-(n-1)\alpha);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_n(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-n\alpha}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\cdots+\\
&+\int_{\beta-2\alpha}^{\beta-\alpha}\Phi_n(y)\,q(k)\,dy+\int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha}\Phi_{n+1}(y)\,q(k)\,dy\\
&\qquad(\beta-2\alpha\leqslant x\leqslant\beta-\alpha);\\
&\Phi_{n+1}(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-n\alpha}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\cdots+\\
&+\int_{\beta-2\alpha}^{\beta-\alpha}\Phi_n(y)\,q(k)\,dy+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\Phi_{n+1}(y)\,q(k)\,dy\\
&\qquad(\beta-\alpha\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\}\qquad(1.4.5)
$$

Здесь $q(k)=q(x-y+\alpha)$.

Система имеет общий характер и справедлива для любых распределений вероятностей стока, удовлетворяющих условиям $F(k=0)=1$, $\lim\limits_{k\to\infty} F(k)=0$.

2. Функция обеспеченности дефицитов отдачи

Уравнение годового водного баланса водохранилища в перебойные годы $k=\alpha-y-x_\partial$ решим относительно величины y, полагая $k=0$:

$$y=\alpha-x_\partial. \tag{1.4.6}$$

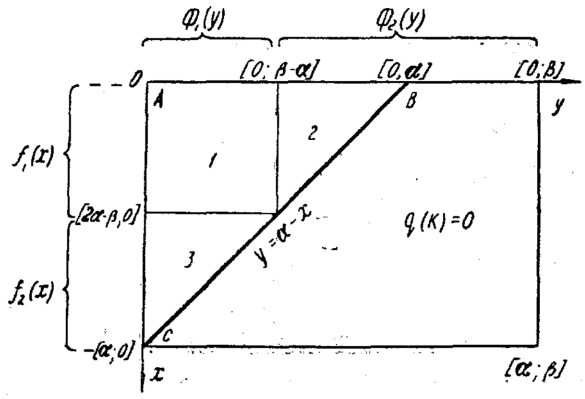

Рис. 1.4.2. Разбиение области интегрирования для дефицитов отдачи ABC на частные

Тогда в квадрате наполнений [β, β] областью интегрирования будет $x_\partial=0$, $y=\alpha-x_\partial$; $y=0$ (треугольник ABC на рис. 1.4.2, имеющий три частных области *1*, *2*, *3*), согласно которым имеем

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_\partial)&=F(\alpha-x_\partial)+\int_0^{\beta-n\alpha}\Phi_1(y)\,q(\alpha-y-x_\partial)\,dy+\\ &+\int_{\beta-n\alpha}^{\alpha-x_\partial}\Phi_2(y)\,q(\alpha-y-x_\partial)\,dy,\quad (0\leqslant x_\partial\leqslant(n+1)\alpha-\beta);\\ f_2(x_\partial)&=F(\alpha-x_\partial)+\int_0^{\alpha-x_\partial}\Phi_1(y)\,q(\alpha-y-x_\partial)\,dy\\ &\qquad[(n+1)\alpha-\beta\leqslant x_\partial\leqslant\alpha]. \end{aligned}\right\} \tag{1.4.7}$$

Если емкость водохранилища β кратна значению расчетной отдачи α, т. е. $\beta=(n+1)\alpha$, то система (1.4.7) выродится в одно соотношение:

$$f(x_\partial)=F(\alpha-x_\partial)+\int_0^{\alpha-x_\partial}\Phi_1(y)\,q(\alpha-y-x_\partial)\,dy,\quad (0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha). \tag{1.4.8}$$

3. Функция обеспеченности холостых сбросов

Уравнение годового водного баланса водохранилища в избыточные по стоку годы будет:

$$k=\beta-y+\alpha+x_c,\quad (0\leqslant x_c<\infty). \tag{1.4.9}$$

Область интегрирования — $(0\leqslant y\leqslant\beta)$. Интегральное соотношение для функции обеспеченности холостых сбросов $\psi(x_c)$ имеет вид

$$\psi(x_c)=F(\beta+\alpha+x_c)+\int_0^{\beta-n\alpha}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\cdots+$$

$$+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\Phi_{n+1}(y)\,q(k)\,dy,\quad (0\leqslant x_c<\infty). \tag{1.4.10}$$

Если для определения кривой обеспеченности дефицитов отдачи достаточно знать численные значения первых двух функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ системы (1.4.5), то для холостых сбросов необходимо иметь решение системы (1.4.5) в целом. Теоретические построения проиллюстрируем на простом методическом примере. Пусть $n=2$, т. е. многолетняя емкость водохранилища находится в пределах от двух до трех годовых объемов расчетной отдачи: $2\alpha\leqslant\beta\leqslant3\alpha$. Система (1.4.5) при этом сведется к системе интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x)&=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-2\alpha}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\\&+\int_{\beta-2\alpha}^{x+\alpha}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant\beta-2\alpha);\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_2(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-2\alpha}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\\
&+\int_{\beta-2\alpha}^{\beta-\alpha}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy+\int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha}\Phi_3(y)\,q(k)\,dy\\
&\qquad(\beta-2\alpha\leqslant x\leqslant\beta-\alpha);\\
&\Phi_3(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta-2\alpha}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\\
&+\int_{\beta-2\alpha}^{\beta-\alpha}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\Phi_3(y)\,q(k)\,dy\\
&\qquad(\beta-\alpha\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\}\qquad(1.4.11)$$

Не нарушая общности выводов, примем параметр кривой распределения Пирсона III типа $\gamma=1$. Тогда система (1.4.11) запишется так:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=e^{-(x+\alpha)}\left[1+\int_0^{\beta-2\alpha}\Phi_1(y)\,e^{y}dy+\right.\\
&\left.+\int_{\beta-2\alpha}^{x+\alpha}\Phi_2(y)\,e^{y}dy\right];\\
&\Phi_2(x)=e^{-(x+\alpha)}\left[1+\int_0^{\beta-2\alpha}\Phi_1(y)\,e^{y}\,dy+\right.\\
&\left.+\int_{\beta-2\alpha}^{\beta-\alpha}\Phi_2(y)\,e^{y}\,dy+\int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha}\Phi_3(y)\,e^{y}dy\right];\\
&\Phi_3(x)=e^{-(x+\alpha)}\left[1+\int_0^{\beta-2\alpha}\Phi_1(y)\,e^{y}dy+\right.\\
&\left.+\int_{\beta-2\alpha}^{\beta-\alpha}\Phi_2(y)\,e^{y}dy+\int_{\beta-\alpha}^{\beta}\Phi_3(y)\,e^{y}dy\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(1.4.12)$$

Содержимое квадратных скобок последнего уравнения системы (1.4.12) не зависит от аргумента x. Поэтому, обозначая через

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_0^{\beta-2\alpha} \Phi_1(y)\, e^y\, dy, \\ B &= \int_{\beta-2\alpha}^{\beta-\alpha} \Phi_2(y)\, e^y dy, \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.13)$$

последнее уравнение системы (1.4.12) запишем в виде

$$\Phi_3(x) = e^{-(x+\alpha)}\left[1+A+B+\int_{\beta-\alpha}^{\beta} \Phi_3(y)\, e^y dy\right], \qquad (1.4.14)$$

решением которого является

$$\Phi_3(x) = (1+A+B)\cdot\frac{e^x}{e^\alpha-\alpha}, \quad (\beta-\alpha\leqslant x\leqslant\beta). \qquad (1.4.15)$$

Второе уравнение системы (1.4.12) равно

$$\Phi_2(x) = e^{-(x+\alpha)}\left[1+A+B+\int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha} (1+A+B)\cdot\frac{1}{e^\alpha-\alpha}\cdot dy\right]$$

или после интегрирования

$$\Phi_2(x) = \frac{(1+A+B)(e^\alpha-\beta+\alpha+x)e^{-(x+\alpha)}}{e^\alpha-\alpha}. \qquad (1.4.16)$$

Аналогично первое уравнение системы (1.4.12) может быть представлено в виде

$$\Phi_1(x) = e^{-(x+\alpha)}\left[1+A+B+\int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha} \frac{(1+A+B)(e^\alpha-\beta+\alpha+y)e^{-\alpha}}{e^\alpha-\alpha} dy\right]$$

или после интегрирования

$$\Phi_1(x) = \frac{(1+A+B)[x-\beta+\alpha+e^\alpha+e^{-\alpha}(2x\alpha-x\beta+0{,}5x^2-2\alpha\beta+}{e^\alpha-\alpha}$$

$$\frac{+2\alpha^2+0{,}5\beta^2)]e^{-(x+\alpha)}}{e^{\alpha}-\alpha}. \qquad (1.4.17)$$

Из равенства (1.4.13), подставляя вместо $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(y)$ их значения по выражениям (1.4.17) и (1.4.16) с заменой x на y, нетрудно определить постоянные A и B. Подставляя же последние в выражения (1.4.15)—(1.4.17), получим

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=\frac{[x-\beta+\alpha+e^{\alpha}+e^{-\alpha}(2x\alpha-x\beta+0{,}5x^2-2\alpha\beta+2\alpha^2+0{,}5\beta^2)]e^{-(x+\alpha)}}{M}\\
&\qquad\qquad (0\leqslant x\leqslant \beta-2\alpha);\\
&\Phi_2(x)=\frac{(x+\alpha-\beta+e^{\alpha})e^{-(x+\alpha)}}{M},\ (\beta-2\alpha\leqslant x\leqslant\beta-\alpha);\\
&\Phi_3(x)=\frac{e^{-x}}{M},\ (\beta-\alpha\leqslant x\leqslant\beta),\\
&\text{где}\\
&M=\frac{6e^{\alpha}-6\beta+e^{-\alpha}(3\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2)+e^{-2\alpha}(8\alpha^3-\beta^3-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2)}{6}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4.18)$$

При $x=0$ (опорожненное состояние водохранилища) первое выражение (1.4.18), определяющее значение обеспеченности бесперебойной отдачи в объеме α, будет:

$$\Phi_1(0)=\frac{[e^{\alpha}+\alpha-\beta+e^{-\alpha}(2\alpha^2-2\alpha\beta+0{,}5\beta^2)]e^{-\alpha}}{M}. \qquad (1.4.19)$$

Из соотношений (1.4.7) и (1.4.11), используя (1.4.18), найдем функции обеспеченности дефицитов отдачи и холостых сбросов.

Для дефицитов отдачи

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(x_{\partial})=\frac{[x_{\partial}(\beta-2\alpha+0{,}5x_{\partial}-e^{-\alpha})+(\alpha-\beta)(2\alpha+e^{\alpha})+0{,}5\beta^2+e^{\alpha}]e^{x_{\partial}-2\alpha}}{M}\\
&\qquad\qquad (0\leqslant x_{\partial}\leqslant 3\alpha-\beta);\\
&f_2(x_{\partial})=e^{x_{\partial}+\alpha}+\\
&+\frac{[(\alpha-x_{\partial})^2+3(\alpha-x_{\partial})(2\alpha-\beta+e^{\alpha})+3(\beta-2\alpha)^2+6(\alpha-\beta+e^{\alpha})e^{\alpha}]}{6M}\times\\
&\times(\alpha-x_{\partial})e^{x_{\partial}-3\alpha},\ (3\alpha-\beta\leqslant x_{\partial}\leqslant\alpha).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4.20)$$

Для холостых сбросов

$$\psi(x_c)=\frac{e^{-(x_c+\beta)}}{M} \quad (\beta\leqslant x_c<\infty). \qquad (1.4.21)$$

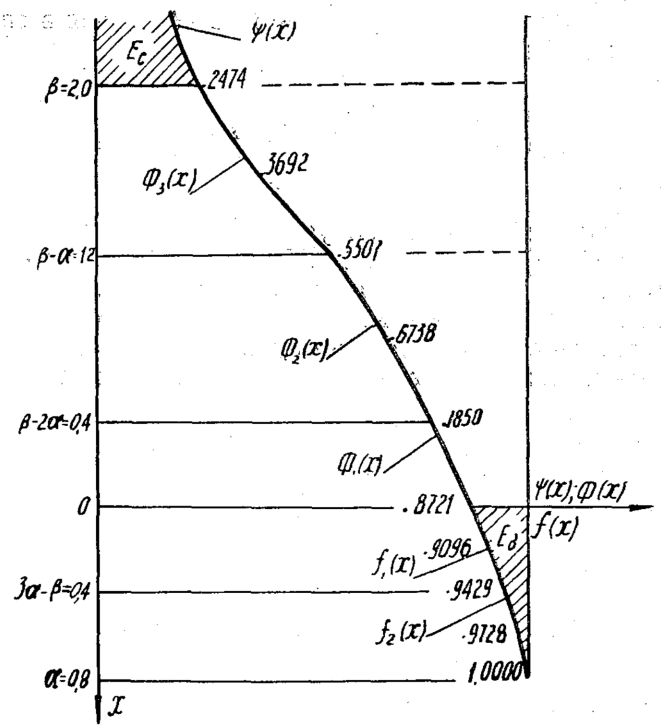

Рис. 1.4.3. Обобщенная водохозяйственная характеристика водохранилища

Пусть, например, $\beta=2{,}0$ и $\alpha=0{,}8$. Тогда система (1.4.19), (1.4.20) и уравнение (1.4.21) будут соответственно иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=(0{,}1850x^2+0{,}6739x+0{,}8721)\,e^{-x}, \quad (0\leqslant x\leqslant 0{,}4);\\
&\Phi_2(x)=(0{,}8215x+0{,}8425)\,e^{-x}, \quad (0{,}4\leqslant x\leqslant 1{,}2);\\
&\Phi_3(x)=1{,}8285e^{-x}, \quad (1{,}2\leqslant x\leqslant 2{,}0);\\
&f_1(x_\partial)=(0{,}1850x_\partial^2-0{,}6739x_\partial+0{,}8721)\,e^{x_\partial}, \quad (0\leqslant x_\partial\leqslant 0{,}4);\\
&f_2(x_\partial)=(-0{,}0276x_\partial^3+0{,}2177x_\partial^2-0{,}6872x_\partial+0{,}8738)\,e^{x_\partial}\\
&\qquad\qquad (0{,}4\leqslant x_\partial\leqslant 0{,}8);\\
&\psi(x_c)=0{,}2474e^{-x_c} \quad (0\leqslant x_c<\infty).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4.22)$$

Численные значения функций (1.4.22), вычисленные с точностью $\varepsilon = \pm 0{,}0001$, приведены на рис. 1.4.3.

Используя критериальное соотношение для многолетнего водного баланса водохранилища, можно убедиться в справедливости тождества

$$\int_0^{\infty} \psi(x_c)\,dx_c + \int_0^{3\alpha-\beta} f_1(x_\partial)\,dx_\partial + \int_{3\alpha-\beta}^{\alpha} f_2(x_\partial)\,dx_\partial = 1. \qquad (1.4.23)$$

Аналогично могут быть получены решения интегральных уравнений (1.4.5), (1.4.7) и (1.4.10) при других целых значениях параметра γ кривой Пирсона III типа и любом законе изменения отдачи. В остальных же случаях искомое решение достигается численной интерпретацией аналитического метода или сведением их к системе линейных алгебраических уравнений.

Глава 1.5

УЧЕТ КОРРЕЛЯТИВНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ СТОКОМ СМЕЖНЫХ ЛЕТ В РАСЧЕТАХ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА

1. Состояние вопроса

Обобщенные методы и приемы расчетов, полученные из предположения об отсутствии или незначительности стохастической связи между водностью в смежные годы, до недавнего времени были основными способами установления проектных параметров водохранилищ многолетнего регулирования стока.

Другой подход к решению задач проектирования водохранилищ комплексного назначения связан с новой трактовкой вопроса о природе и закономерностях колебаний стока. Режим последнего рассматривается как непрерывный стохастический процесс, который тем или иным способом приводится к стационарному случайному процессу с дискретным временем. При этом теснота связи стока в смежные отрезки времени (годы, сезоны и т. д.) принимается по уравнению линейной регрессии. Однако для некоторых рек районов с засушливым климатом связь между водностью смежных лет носит криволинейный характер. В подобных условиях учет в водохозяйственных расчетах уравнения линейной регрессии как меры тесноты связи между стоком в смежные отрезки времени недостаточно обоснован.

Изучение закономерностей режима речного стока является наиболее актуальной проблемой инженерной гидрологии, однако в имеющихся исследованиях отечественных и зарубежных ученых единого мнения о природе формирования процесса стока все еще нет. Не полностью выявлены связи стока с процессами атмосферной циркуляции и гелиоактивностью, в частности образования группировок маловодных и многоводных лет, и ряд других важных вопросов.

Независимо от имеющихся концепций и трактовок, бесспорно положение о том, что если в реальных условиях имеют место группировки маловодных и многоводных лет, то их необ-

ходимо учитывать в расчетах многолетнего регулирования стока.

Представляя режимы колебания годовых объемов стока простой цепью марковского процесса, в 1959 г. С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель предложили методику, учитывающую в расчетах связи между водностью смежных лет. Способ построения кривых обеспеченности сумм по заданным кривым слагаемых заменяется более простым приемом, а именно построением кривых обеспеченности биномиального типа по параметрам, что позволяет учесть корреляцию. Почти одновременно (1960 г.) Н. А. Картвелишвили предложил способ, требующий решения системы квадратных алгебраических уравнений. Последние получаются путем аппроксимации исходной функции распределения вероятностей наполнений водохранилища, которая в случае, например, неглубокого многолетнего регулирования имеет вид [40]

$$\Theta^*(x) = F[s(x, \beta)/t(\beta, \beta)] + \int_0^{\beta} \Theta^*(y) K_1(x, y)\, dy + \int_0^{\beta} \Theta^*(z)\, dz \times$$

$$\times \int_0^{\beta} \Theta^*(y) K_2(x, y, z)\, dy. \qquad (1.5.1)$$

Здесь $\Theta^*(x)$ — функция распределения вероятностей наполнений водохранилища с учетом связи между водностью смежных лет, причем $\Theta^*(x) = 1 - \Phi^*(x)$.

При этом Н. А. Картвелишвили использовал известный в теории вероятностей прием приведения любой асимметрической кривой к симметричной, т. е. к нормальному закону. Интегральное уравнение (1.5.1) может быть сведено к системе квадратных алгебраических уравнений

$$\Theta^*(x_i) = F(s/t) + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n} \Theta^*(y_j) \cdot K_1(x_i, y_j) +$$

$$+ \frac{h^2}{4} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \Theta^*(y_j) \Theta^*(z_k) \cdot K_2(x_i, y_j, z_k), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.5.2)$$

$h = \frac{\beta}{n}$ — шаг наполнений.

Решение системы (1.5.2) отличается трудоемкостью, так как требует вычисления $(n+1)^2$ значений ядра $K_1(x, y)$ и $(n+1)^3$ — ядра $K_2(x, y, z)$. Так, при $n = 5$ необходимо знать в

общей сложности 252 значения указанных ядер. В связи с этим возникает необходимость в разработке более простого расчетного приема.

2. Построение функции распределения вероятностей наполнений водохранилища при учете корреляционной связи

Прием расчета основан на предположении, что нам известно значение функции $\Phi^*(x)$ при наполнении $x=0$, т. е. опорожненном водохранилище до уровня метрового объема. Величина $\Phi^*(0)$ может быть определена, например, по графикам И. В. Гуглия [26], Г. Г. Сванидзе [89] или Ш. Ч. Чокина [97].

Далее, согласно теореме о среднем (в интегральном исчислении), из (1.5.1) имеем

$$\Theta^*(x)=F_1[s(x,\beta)/t(\beta,\beta)]+\Theta^*(c)\int_0^\beta K_1(x,y)\,dy+[\Theta^*(c)]^2\times$$

$$\times\int_0^\beta dz\int_0^\beta K_2(x,y,z)\,dy, \qquad (1.5.3)$$

где $F_1(s/t)$ — функция перехода; c — значение аргумента y, причем $0\leqslant c\leqslant\beta$.

Уравнение (1.5.3) при $x=0$ представляет собой квадратное алгебраическое уравнение с неизвестным $\Theta^*(c)$, значение которого может быть определено по формуле

$$\Theta^*(c)=-\frac{A}{2B}\pm\sqrt{\left(\frac{A}{2B}\right)^2-\frac{D}{B}}, \qquad (1.5.4)$$

где

$$A=\int_0^\beta K_1(0,\,y)\,dy, \qquad (1.5.5)$$

$$B=\int_0^\beta dz\int_0^\beta K_2(0,\,y,\,z)\,dy, \qquad (1.5.6)$$

$$D=F_1[s(0,\beta)/t(\beta,\beta)]+\Phi^*(0)-1. \qquad (1.5.7)$$

Таким образом, безусловная функция распределения вероятностей наполнения x с учетом корреляционной связи между

стоком в смежные годы определяется формулой (1.5.3). Полученное решение является приближенным, так как не учтена зависимость $C=C(x)$, которая в действительности имеет место.

Отметим, что точность вычисления абсцисс кривой $\Theta^*(x)$ не зависит от числа интервалов, на которое разбивается аргумент наполнений. Это позволяет, в частности, ограничиваться предельно-минимальным числом точек (2—3) для построения функции $\Theta^*(x)$.

Интегралы в формулах (1.5.5)—(1.5.7) в общем случае не решаются в элементарных функциях, поэтому их следует заменить формулами приближенных квадратур. Пусть $n=4$, тогда по формуле Симпсона получим

$$A=\frac{\beta}{6}\left[K(0,0)+4K_1\left(0,\frac{\beta}{4}\right)+2K_1\left(0,\frac{\beta}{2}\right)+4K_1\left(0,\frac{3\beta}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+K_1(0,\beta)\right]. \qquad (1.5.8)$$

Значения ядер $K_1(0, y)$ и $K_2(0, y, z)$ определяются по формулам, предложенным Н. А. Картвелишвили. Например, для $K_1(0, 0)$ при $\alpha=\text{const}$ имеем $K_1(0, 0)=\lambda[s(0, 0), t(0, \beta]+$ $+\mu[s(0, \beta), t(\beta, 0)]-\mu[s(0, 0), t(0, \beta)]$. Или, учитывая (1.5.1): $K_1(0, 0)=\lambda(\alpha, \alpha-\beta)+\mu(\alpha-\beta, \alpha+\beta)-\mu(\alpha, \alpha-\beta)$.

Значение λ вычисляется по формуле

$$\lambda(\alpha, \alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\cdot\frac{q(\alpha)}{g[f(\alpha)]}\cdot g\left[\frac{f(\alpha)-rf(\alpha-\beta)}{\sqrt{1-r^2}}\right].$$

Величина $q(\alpha)$ определяется по кривой Пирсона III типа, а g — по таблице нормированного нормального распределения вероятностей [30]. Функции $f(\alpha)$ и $f(\alpha-\beta)$ устанавливаются по графику (рис. 1.5.1).

Пусть, например $\alpha=0{,}8$; $\beta=0{,}65$; $C_v=0{,}50$ и $r=0{,}30$. Тогда

$$\lambda(0{,}8;\ 0{,}15)=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}3^2}}\cdot\frac{q(0{,}8)}{g(-0{,}26)}\cdot g\left[\frac{-0{,}26-(-2{,}6)}{\sqrt{1-0{,}3^2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{0{,}953}\cdot\frac{0{,}890}{0{,}3867}-0{,}3437=0{,}833.$$

Аналогично определяются и все остальные значения $\lambda(s, t)$, а также коэффициенты $\mu(s, t)$, B и D. Определив величины A, B и D, нетрудно найти значение $\Theta^*(c)$. Подставив последние в интегральное соотношение (1.5.3), получим искомое приближенное решение для функции $\Theta^*(x)$, учитывающей корреляционную связь стока смежных лет. Трудоемкость расчета по

предлагаемому способу в несколько раз сокращается по сравнению с решением исходного интегрального уравнения (1.5.1).

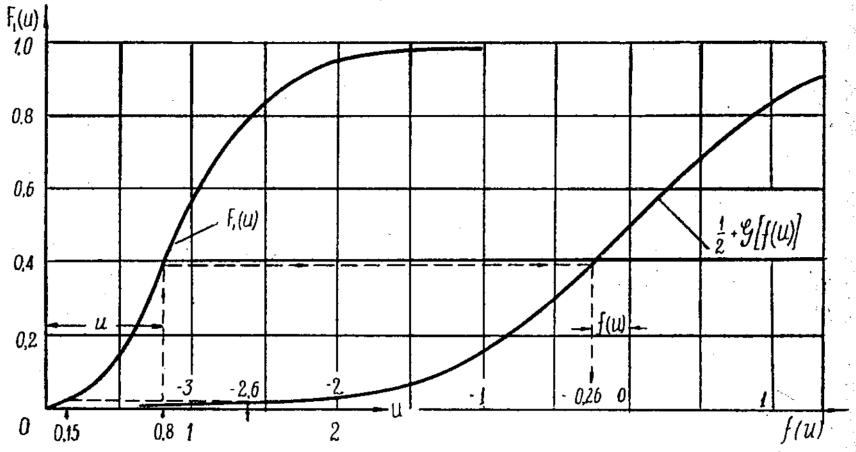

Рис. 1.5.1. Построение к графическому определению функции $f(u)$

Безусловная кривая обеспеченности наполнений $\Phi^*(x)$ может быть использована как основа построения также кривых обеспеченности дефицита отдачи $f^*(x_\partial)$ и холостых сбросов $\psi^*(x_e)$. Расчетные алгоритмы в случаях глубокого и неглубокого многолетнего регулирования стока отличаются простотой и легко могут быть реализованы на ЭВМ.

3. Построение обобщенной водохозяйственной характеристики водохранилища

Расчетная схема неглубокого многолетнего регулирования стока ($\beta \leqslant \alpha$). Предполагаем заданными безусловные функции обеспеченности наполнений, дефицитов отдачи и холостых сбросов, не учитывающие корреляционной связи между стоком смежных лет, соответственно $\Phi(x)$, $f(x_\partial)$ и $\psi(x_c)$ и математические ожидания дефицитов отдачи и холостых сбросов E_∂ и E_c, а также значение обеспеченности опорожненного состояния водохранилища с учетом указанной связи, т. е. $\Phi^*(0)$. Значение $\Phi^*(0)$, как отмечалось выше, может быть получено по графикам И. В. Гуглия, Г. Г. Сванидзе или Ш. Ч. Чокина, В. А. Григорьева, В. К. Редькина.

Для определения функции обеспеченности наполнения с учетом корреляционной связи $\Phi^*(x)$ примем допущение, логически и математически согласующееся с критериальным тождеством (балансом) водохранилища за многолетие, а именно, что между математическими ожиданиями объемов холостых

сбросов E_c^* и E_c, с одной стороны, и значениями функций обеспеченности $\Phi^*(\beta)$ и $\Phi(\beta)$ — с другой, имеет место приближенная связь

$$\frac{E_c^*}{E_c} \simeq \frac{\Phi^*(\beta)}{\Phi(\beta)}. \qquad (1.5.9)$$

Откуда

$$\Phi^*(\beta) = \frac{E_c^*}{E_c} \cdot \Phi(\beta). \qquad (1.5.10)$$

Здесь и ниже символы со звездочкой указывают на учет коррелятивной связи. Согласно уравнению водного баланса водохранилища за многолетие, имеем

$$E_c^* = 1 - \alpha + E_\partial^*. \qquad (1.5.11)$$

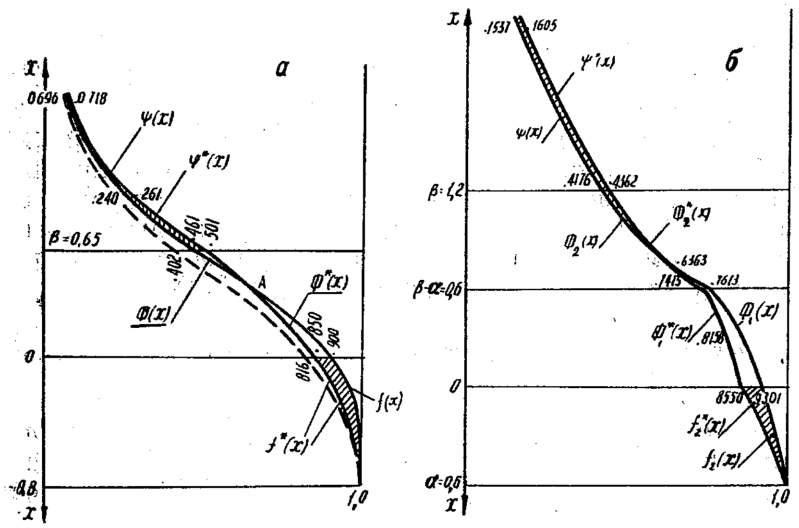

Рис. 1.5.2. Кривые обеспеченности наполнений, сбросов и дефицитов отдачи при $r=0$ и 0,3: *а* — неглубокого регулирования: $\beta=0{,}65$; $\alpha=0{,}80$; $C_v=0{,}71$; *б* — глубокого: $\beta=1{,}2$; $\alpha=0{,}60$; $C_v=1{,}0$

Величина E_∂^* в первом приближении (ей соответствует площадь (рис. 1.5.2, *а*), расположенная правее кривой $f^*(x_\partial)$ —точечный пунктир) может быть принята равной

$$E_{\partial 1}^* = \frac{1-f^*(0)}{1-f(0)}\, E_\partial = \frac{1-\Phi^*(0)}{1-\Phi(0)} E_\partial. \qquad (1.5.12)$$

Таким образом, если известно математическое ожидание

дефицитов отдачи $E^*_{\partial 1}$, то из (1.5.11) легко находится величина E^*_c, а по (1.5.10)'— значение функции $\Phi^*(\beta)$.

Условие (1.5.10) определяет также функцию холостых сбросов $\psi^*(x_c)$, а именно:

$$\psi^*(x_c)=\frac{E^*_c}{E_c}\cdot\psi(x_c),\quad (\beta\leqslant x_c<\infty). \tag{1.5.13}$$

Соответствующий анализ показывает, что достаточно точное и в то же время простое аналитическое описание безусловных кривых обеспеченности наполнений и дефицитов отдачи (с учетом корреляции) можно получить в виде эмпирической формулы, построенной по трем известным точкам: $f^*(-\alpha)$, $\Phi^*(0)$ и $\Phi^*(\beta)$. Указанную формулу запишем в виде

$$\Phi^*_1(x)=a_1x^2+b_1x+c,\quad (-\alpha\leqslant x\leqslant\beta). \tag{1.5.14}$$

Параметры a_1, b_1 и c определяются из следующих условий:

$$\left.\begin{aligned}\Phi^*_1(\beta)&=a_1\beta^2+b_1\beta+c,\\ \Phi^*(0)&=c,\\ \Phi^*(-\alpha)&=a_1\alpha^2-b_1\alpha+c=1.\end{aligned}\right\} \tag{1.5.15}$$

Или $a_1\beta+b_1=\frac{\Phi^*_1(\beta)-\Phi^*(0)}{\beta}$; $a_1\alpha-b_1=\frac{1-\Phi^*(0)}{\alpha}$. Откуда

$$\left.\begin{aligned}a_1&=\left[\frac{\Phi^*_1(\beta)-\Phi^*(0)}{\beta}+\frac{1-\Phi^*(0)}{\alpha}\right]\cdot\frac{1}{\alpha+\beta};\\ b_1&=\frac{\Phi^*_1(\beta)-\Phi^*(0)}{\beta}-\left[\frac{\Phi^*_1(\beta)-\Phi^*(0)}{\beta}+\frac{1-\Phi^*(0)}{\alpha}\right]\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta}.\end{aligned}\right\} \tag{1.5.16}$$

Функция (1.5.14) описывает кривую, соответствующую двум режимным зонам работы водохранилища, а именно, дефицитов отдачи и наполнений, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\Phi^*_1(x)&=a_1x^2+b_1x+c,\quad (0\leqslant x\leqslant\beta);\\ f^*(x_\partial)&=a_1x^2_\partial+b_1x_\partial+c,\quad (-\alpha\leqslant x_\partial\leqslant 0).\end{aligned}\right\} \tag{1.5.17}$$

Согласно (1.5.17), можно существенно уточнить определенное выше значение $\Phi^*_1(\beta)$. Вычисляется $E^*_{\partial 2}$ (второе приближение):

$$E^*_{\partial 2}=\alpha-\int_{-\alpha}^{0}f^*_1(x_\partial)\,dx_\partial. \tag{1.5.18}$$

Подставив $E^*_{\partial 2}$ в (1.5.11), определяем значение E^*_{c2}, а по формуле (1.5.10) уточненную величину $\Phi^*_2(\beta)$. В результате по трем точкам: $f^*(-\alpha)=1$, $\Phi^*(0)$ и $\Phi^*_2(\beta)$, из которых последняя изменялась, определяются уточненные значения функций $\Phi^*_2(x)$ и $f^*_2(x)$:

$$\left.\begin{aligned}\Phi^*_2(x_\partial)&=a_2x^2+b_2x+c;\\ f^*_2(x_\partial)&=a_2x^2_\partial+b_2x_\partial+c,\end{aligned}\right\} \qquad (1.5.19)$$

где a_2 и b_2 — параметры, определяемые по формулам (1.5.16) с учетом $\Phi^*_2(\beta)$.

Процесс уточнения исходной функции (1.5.14) по необходимости может быть продолжен. Однако в практических расчетах в этом нет необходимости (результаты третьего приближения незначительно отличаются от второго).

Проиллюстрируем данный упрощенный прием на конкретном примере расчета при следующих параметрах регулирования: $\beta=0{,}65$; $\alpha=0{,}80$; $\gamma=4\,(C_v\simeq 0{,}50)$; $r=0{,}30$ и $\Phi^*(0)=0{,}85$.

Функции $\Phi(x)$, $f(x_\partial)$ и $\psi(x_c)$, а также значения E_∂ и E_c, полученные на основе точного аналитического расчета при $r=0$, следующие:

$$\Phi(x)=(3{,}8522x^3+5{,}1075x^2+3{,}2302x+0{,}9)\,e^{-4x}$$
$$(0\leqslant x\leqslant 0{,}65); \qquad (1.5.20)$$

$f(x_\partial)=\Phi(-x)$, $(-0{,}8\leqslant x_\partial\leqslant 0)$; $\psi(x_c)=\Phi(x)$, $(0{,}65\leqslant x_c<\infty)$. Или $\Phi(0{,}65)=\psi(0{,}65)=0{,}461$; $\Phi(0)=f(0)=0{,}9$; $f(-0{,}8)=1$. Значения $E_\partial=0{,}020$ и $E_c=0{,}220$. Согласно (1.5.10), (1.5.12), имеем $E^*_{\partial 1}=\frac{0{,}15}{0{,}10}\cdot 0{,}02=0{,}03$; $E^*_{c1}=1-0{,}8+0{,}03=0{,}23$; $E^*_{c1}=1{,}0455\,E_c$; $\Phi^*(0{,}65)=0{,}461\cdot\frac{0{,}23}{0{,}22}=0{,}4825$. Далее по формулам (1.5.16) определим параметры $a_1=-0{,}2606$ и $b_1=-0{,}396$. Следовательно, уравнения (1.5.17) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}\Phi^*_1(x)&=0{,}2606x^2-0{,}396x+0{,}85\\ &\qquad(0\leqslant x\leqslant 0{,}65);\\ f^*_1(x_\partial)&=-0{,}2606x^2_\partial-0{,}396x_\partial+0{,}85\\ &\qquad(-0{,}8\leqslant x_\partial\leqslant 0).\end{aligned}\right\} \qquad (1.5.21)$$

Соответственно функция обеспеченности холостых сбросов, по (1.5.13) и (1.5.20), запишется:

$$\psi^*(x_c)=1{,}0455\psi(x_c)=(4{,}018x_c^3+5{,}34x_c^2+3{,}377x_c+0{,}941)\,e^{-4x_c}$$

$$(0{,}65\leqslant x_c<\infty). \qquad (1.5.22)$$

Из (1.5.21) и (1.5.22) получим $\Phi_1^*(0{,}65)=0{,}4825$; $\Phi_1^*(0{,}4)=0{,}650$; $\Phi_1^*(0)=f_1^*(0)=0{,}85$; $f_1^*(-0{,}30)=0{,}9454$ и $f_1^*(-0{,}80)=1$. Уточненное значение $E_{\partial 2}^*$, согласно (1.5.18), равно $E_{\partial 2}^*=0{,}8-\int\limits_{-0{,}8}^{0}(-0{,}2606x_\partial^2-0{,}496x_\partial+0{,}85)\,dx_\partial=0{,}0378$.

Учитывая существенное отличие величины $E_{\partial 2}^*$ от $E_{\partial 1}^*$ (на 0,0078 или 26%), произведем расчет по второму приближению при $E_{c2}^*=1-0{,}8+0{,}0378=0{,}2378$; $E_{c2}^*=1{,}082E_{c2}$ и $\Phi_2^*(\beta)=1{,}082\cdot 0{,}461\approx 0{,}500$. Значениями a_2 и b_2 при $\Phi_2^*(\beta)=0{,}500$ будут $a_2=-0{,}2420$ и $b_2=-0{,}3811$. Следовательно, уравнения (1.5.19) имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\Phi_2^*(x)&=-0{,}242x^2-0{,}3811x+0{,}85\\ &\qquad(0\leqslant x\leqslant 0{,}65);\\ f_2^*(x_\partial)&=-0{,}242x_\partial^2-0{,}3811x_\partial+0{,}85\\ &\qquad(-0{,}8\leqslant x_\partial\leqslant 0).\end{aligned}\right\} \qquad (1.5.23)$$

Или $\Phi_2^*(0{,}65)=0{,}500$ (что и должно быть); $\Phi_2^*(0{,}4)=0{,}6588$ (вместо 0,650 по первому приближению); $f_2^*(-0{,}3)=0{,}9425$ (вместо 0,9454).

Несколько видоизменится и функция холостых сбросов, а именно:

$$\psi_2^*(x_c)=1{,}082\psi(x_c)=(4{,}167x_c^3+5{,}53x_c^2+3{,}49x_c+0{,}974)\,e^{-4x_c}.$$

$$(0{,}65\leqslant x_c<\infty). \qquad (1.5.24)$$

Расчет по третьему приближению дает очень небольшое уточнение, а именно: $\Phi_3^*(\beta)=0{,}502$ (при $\Delta E_\partial^*=E_{\partial 3}^*-E_{\partial 2}^*=0{,}0016$, т. е. увеличение E_∂^* лишь на 4%) (рис. 1.5.2, *а*).

Безусловные кривые обеспеченности наполнений с учетом и без учета корреляционной связи пересекаются в точке $A(0\leqslant x\leqslant\beta)$ (рис. 1.5.2, *а*). Пересечение отражает условие $\Phi^*(\beta)=\Phi(\beta)$, непосредственно вытекающее из критериального тождества (многолетнего баланса водохранилища).

Учет корреляционной связи, уменьшая обеспеченность бесперебойной работы водохранилища, одновременно увеличивает обеспеченность наполненного состояния.

Отличаясь простотой и большими удобствами применения

в инженерных расчетах, рассмотренный прием в то же время обеспечивает вполне приемлемую для практики точность построения обобщенной водохозяйственной характеристики многолетнего режима работы водохранилища (средняя ошибка по обеспеченности $\varepsilon<0{,}01\div0{,}02$). При этом точность расчета тем выше, чем ближе коэффициент вариации годового стока к значению $C_v=1$. Поэтому при проектировании водохранилищ многолетнего регулирования стока на реках снегового питания для которых, как правило, значения $C_v=0{,}8\div1{,}2$, данный расчетный прием гарантирует получение почти такой же высокой точности, как и по теоретически более строгим, но весьма сложным методам.

Расчетная схема глубокого многолетнего регулирования стока ($\beta>\alpha$). Рассмотрим расчетную схему с многолетней емкостью водохранилища β, находящуюся в промежутке $\alpha\leqslant\beta\leqslant 2\alpha$. Будем считать известными функции $\Phi(x)$, $f(x_\partial)$ и $\psi(x_c)$, а также значение $\Phi^*(0)$.

Функцию обеспеченности дефицитов отдачи с учетом корелятивной связи $f^*(x_\partial)$ представим в виде системы приближенных формул

$$\left.\begin{aligned} f_1^*(x_\partial)&=1+d[f_1(x_\partial)-1],\ (0\leqslant x_\partial\leqslant 2\alpha-\beta);\\ f_2^*(x_\partial)&=1+d[f_2(x_\partial)-1],\ (2\alpha-\beta\leqslant x_\partial\leqslant\alpha),\end{aligned}\right\} \tag{1.5.25}$$

где $f_1(x_\partial)$ и $f_2(x_\partial)$ — безусловные функции обеспеченности дефицитов отдачи при $r=0$; $d=\frac{1-\Phi^*(0)}{1-\Phi(0)}$ — коэффициент пропорциональности.

Используя систему (1.5.25), определяем математическое ожидание дефицитов отдачи с учетом корелятивной связи:

$$E_\partial^*=\alpha-\left[\int_0^{2\alpha-\beta} f_1^*(x_\partial)\,dx_\partial+\int_{2\alpha-\beta}^{\alpha} f_2^*(x_\partial)\,dx_\partial\right]=d\cdot E_\partial. \tag{1.5.26}$$

Далее по приведенным выше формулам (1.5.11) и (1.5.10) находятся значения E_c^* и $\Phi_2^*(x)$, а по (1.5.13) — функции $\psi^*(x_c)$.

Безусловные функции обеспеченности наполнений с учетом корреляции $\Phi_1^*(x)$ и $\Phi_2^*(x)$ выражаются через известные функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^*(x)&=(ax+b)\Phi_1(x)=\left[ax+\frac{\Phi_1^*(x)}{\Phi_1(0)}\right]\cdot\Phi_1(x),\ (0\leqslant x\leqslant\beta-\alpha);\\ \Phi_2^*(x)&=(ax+b)\cdot\Phi_2(x)=\left[ax+\frac{\Phi_1^*(0)}{\Phi_1(0)}\right]\cdot\Phi_2(x),\ (\beta-\alpha\leqslant x\leqslant\beta).\end{aligned}\right\} \tag{1.5.27}$$

Из второго уравнения системы (1.5.27) определяется параметр a (при $x=\beta$):

$$a=\left[\frac{\Phi_2^*(\beta)}{\Phi_2(\beta)}-\frac{\Phi_1^*(0)}{\Phi_1(0)}\right]\cdot\frac{1}{\beta}.$$

Следовательно, система (1.5.27) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1^*(x)&=\left[\left(\frac{\Phi_2^*(\beta)}{\Phi_2(\beta)}-\frac{\Phi_1^*(0)}{\Phi_1(0)}\right)\cdot\frac{x}{\beta}+\frac{\Phi_1^*(0)}{\Phi_1(0)}\right]\cdot\Phi_1(x);\\ \Phi_2^*(x)&=\left[\left(\frac{\Phi_2^*(\beta)}{\Phi_2(\beta)}-\frac{\Phi_1^*(0)}{\Phi_1(0)}\right)\cdot\frac{x}{\beta}+\frac{\Phi_1^*(0)}{\Phi_1(0)}\right]\cdot\Phi_2(x).\end{aligned}\right\}\qquad(1.5.28)$$

Таким образом, обобщенная водохозяйственная характеристика многолетнего режима работы водохранилища глубокого регулирования стока (с учетом коррелятивной связи) описывается функциями (1.5.13), (1.5.25) и (1.5.28).

В общем случае, т. е. для расчетных схем с любой емкостью водохранилища ($na\leqslant\beta\leqslant(n+1)\alpha$), где $n=1, 2, 3, \ldots$, приведенный алгоритм и структура уравнений полностью сохраняются. Изменится лишь число уравнений, которое будет равно $n+1$.

Например, пусть $\beta=1{,}2$; $\alpha=0{,}6$; $\gamma=1$; $r=0{,}3$; $\Phi(0)=0{,}9301$ и $\Phi^*(0)=0{,}855$. Кроме того, известны функции $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $f_1(x_\partial)$, $f_2(x_\partial)$ и $\psi(x_c)$ (см. гл. 1.4); $\Phi_1(x)=(0{,}9301+0{,}7613)e^{-x}$, $(0\leqslant x\leqslant 0{,}6)$; $\Phi_2(x)=1{,}3871e^{-x}$, $(0{,}6\leqslant x\leqslant 1{,}2)$; $\psi(x)=\Phi_2(x)$, $(1{,}2\leqslant x<\infty)$; $f_1(x)=\Phi_1'(-x)$, $(x=0)$; $f_2(x)=(0{,}2089x^2-0{,}7613x+0{,}9301)e^x$, $(0\leqslant x\leqslant 0{,}6)$. При этом $E_c=\Phi_2(1{,}2)=0{,}4176$.

Согласно (1.5.25), при $d=2{,}0744$ определим функцию $f_2^*(x_\partial)$:

$$f_2^*(x_\partial)=(0{,}4333x_\partial^2-1{,}5792x_\partial+1{,}9294)e^{x_\partial}-1{,}0744.\qquad(1.5.29)$$

Из (1.5.26) математическое ожидание объема дефицитов отдачи равно $E_\partial^*=0{,}0362$, а по (1.5.11) — значение $E_c^*\approx\approx\Phi_2^*(1{,}2)=0{,}4362$.

Безусловная функция холостых сбросов

$$\psi^*(x_c)=\frac{0{,}4362}{0{,}4176}\cdot\psi(x_c)=1{,}4482e^{-x_c},\ (1{,}2\leqslant x_c<\infty).\qquad(1.5.30)$$

Безусловные функции обеспеченности наполнений $\Phi_1^*(x)$ и $\Phi_2^*(x)$, согласно (1.5.28), имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1^*(x) &= (0{,}0794x^2+0{,}7969x+0{,}855)\,e^{-x}\\ &\qquad (0\leqslant x\leqslant 0{,}6);\\ \Phi_2^*(x) &= (0{,}1447x+1{,}2752)\,e^{-x}\\ &\qquad (0{,}6\leqslant x\leqslant 1{,}2).\end{aligned}\right\} \qquad (1.5.31)$$

Из (1.5.30) имеем $E_c^*=\Phi_2^*(1{,}2)=0{,}4362$ (вместо 0,4364, полученных согласно критериальному тождеству); $\Phi_1^*(0{,}6)=\Phi_2^*(0{,}6)=0{,}7475$; $\Phi_1^*(0{,}3)=0{,}8158$; $\Phi_1^*(0)=0{,}855$.

Точка пересечения кривых $\Phi_2(x)$ и $\Phi_2^*(x)$ соответствует ординате $x=0{,}78$ и абсциссе $\Phi_2^*(0{,}78)=0{,}6363$ (рис. 1.5.2, *б*).

Глава 1.6

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА С УЧЕТОМ ПОТЕРЬ ВОДЫ ИЗ ВОДОХРАНИЛИЩА

1. Исходные положения и расчетная схема

Обобщенная теория расчетов многолетнего регулирования стока получила большое развитие и практическое использование. Однако в подавляющем большинстве теоретических работ в качестве одной из основ расчетно-методических построений принимается не действительная величина годового объема водопотребления для удовлетворения тех или иных хозяйственных нужд, а так называемая суммарная отдача брутто, в которую входят также и все виды годовых потерь воды из водохранилища (испарение, фильтрация, транспирация растительностью, льдообразование и т. д.). Исключив последние путем вычитания из отдачи брутто, устанавливают объем полезной отдачи водохранилища. При этом мы не только получаем приближенное значение отдачи нетто, но и, что существенно, приписываем ей обеспеченность, которая справедлива лишь для отдачи брутто. В результате тщательно выполняемое при проектировании водохранилищ обоснование расчетной обеспеченности плановой отдачи имеет формальный характер, так как не дает ответа на вопрос о фактической обеспеченности отдачи нетто, которая представляет практический интерес и имеет реальный смысл. Особое значение расшифровка обеспеченности плановой отдачи нетто имеет для засушливых районов Союза (Центральный, Северный и Западный Казахстан, Нижнее Поволжье и др.), где потери воды из водохранилищ соизмеримы с объемом полезной отдачи, а в отдельных случаях даже превышают его (например, Сары-Суйское водохранилище в Карагандинской области КазССР).

Из методических предложений, учитывающих потери воды на испарение и фильтрацию, следует отметить работы Ш. Ч. Чокина, В. А. Григорьева, В. К. Редькина [97], Н. А. Картвелишвили [40, 41] и др. Показано [97], что гисто-

граммы плотностей вероятности годового слоя испарения из водохранилища могут быть аппроксимированы известными в теории вероятности одномодальными кривыми распределения (нормальным, логнормальным, гамма-распределением и др.). Каждая из указанных кривых по критериям согласия не оказалась предпочтительной перед остальными. Авторами предложена комбинированная методика многолетнего регулирования стока с учетом вероятностного характера изменения годового слоя осадков и математического ожидания потерь на испарение и фильтрацию.

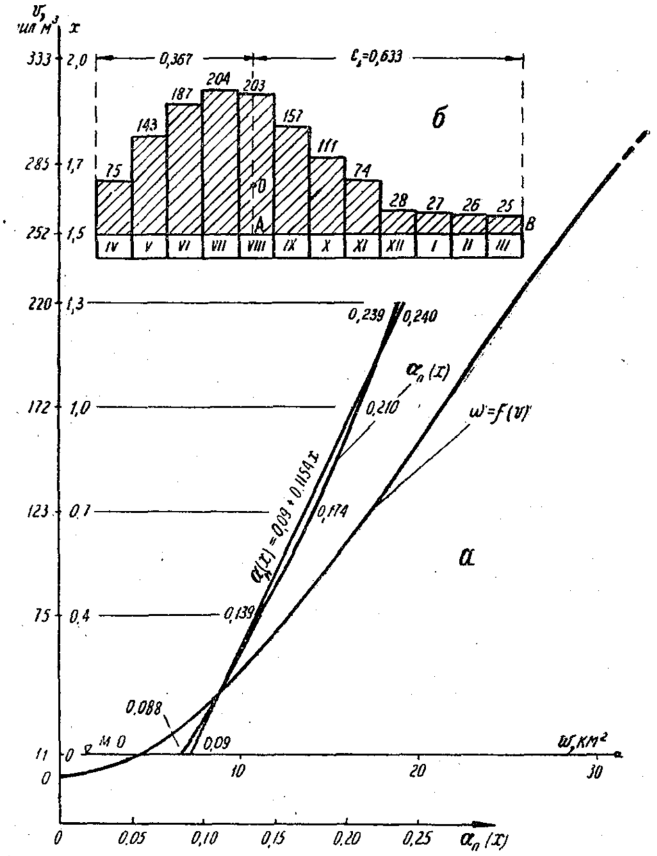

Рис. 1.6.1. График потерь воды из водохранилища в зависимости от его наполнений: *а* — $\omega=f(v)$ и $\alpha_п(x)$; *б* — график внутригодового распределения слоя потерь

Методика расчетов регулирования стока, учитывающая потери воды, становится более трудоемкой, так как функция потери $\alpha_п(x)$ зависит от параметров регулирования и стока,

морфологии чаши водохранилища, климатических условий и т. д., тем не менее она позволяет определить обеспеченность $\alpha_н$, а не фиктивной величины $\alpha_{бр}$.

Функция $\alpha_п(x)$ рассматривается нами как переменная величина, зависящая от наполнения водохранилища в конце года x. Вид кривой $\alpha_п(x)$ устанавливается конкретно для каждого объекта. Рассмотрим типичную для Центрального Казахстана чашу Кенгирского водохранилища. Воспользуемся кривой связи площади водного зеркала водохранилища w с его объемом v, построенной на основе обобщения данных литературных источников [2] и проектных материалов (см. рис. 1.6.1, *а*).

Суммарные годовые объемы потерь воды на испарение и фильтрацию, выраженные в единицах нормы стока (161 млн. м³/год — р. Кенгир), будем считать пропорциональными площади зеркала водохранилища:

$$\alpha_п(x) = \omega(x) E_Σ, \qquad (1.6.1)$$

где $E_Σ$ — годовой слой суммарных потерь воды, который, вообще говоря, должен приниматься с учетом внутригодовой неравномерности водопотребления.

Для принятой нами расчетной схемы многолетнего регулирования стока на отдачу нетто (с постоянным распределением ее внутри года) площадь водного зеркала может быть представлена в виде следующей функции:

$$\omega(x) = \omega(x + c_1\alpha_н + c_2\alpha_п(x)). \qquad (1.6.2)$$

Здесь x — наполнение водохранилища в конце года ($0 \leqslant x \leqslant x \leqslant \beta$); $c_1\alpha_н$ — независимая от наполнения часть годовой сработки водохранилища, а именно, доля полезной отдачи на момент времени, отвечающий положению центра тяжести графика потерь воды. Значение коэффициента c_1 определяется отрезком AB на рис. 1.6.1, *б* (для большинства водохранилищ засушливой зоны страны $c_1 \approx 0{,}6$—$0{,}7$); $c_2\alpha_п(x)$ — зависимая от наполнения водохранилища часть его годовой сработки, обусловленная наличием потерь воды на испарение и фильтрацию $\alpha_п(x)$. Среднее значение коэффициента $c_2 \simeq 0{,}5$.

Таким образом, суммарные потери воды $\alpha_п(x)$ могут быть представлены в виде

$$\alpha_п(x) = f(x + c_1\alpha_н + c_2\alpha_п(x)). \qquad (1.6.3)$$

Функция (1.6.3) для реальных чаш водохранилища являет-

[2] **Е. А. Ершов.** Регулирование стока р. Кенгир. Проблемы регулирования речного стока. Вып. 8. М., Изд-во АН СССР, 1959.

ся сходящейся, т. е. при любом x она имеет конечное значение. Численное значение коэффициента c_1 для условий Кенгирского водохранилища при суммарном слое годовых потерь 1260 мм равно $c_1=0{,}635$. Шкала наполнений x на рис. 1.6.1, *а* получена путем перевода физических объемов воды v в относительные единицы (в долях нормы стока) с учетом мертвого объема водохранилища 11 млн. м³. Задаваясь значениями аргумента $x=0$; 0,4; 0,7; 1,0; 1,3, можно определить функцию $\alpha_п(x)$ по выражению (1.6.3) способом последовательного приближения. В качестве первого принимается нуль.

Для рассматриваемого водохранилища оказалось достаточным выполнить три приближения (четвертое приближение дало то же значение $\alpha_п(x)$, что и третье). Результаты указан-

Таблица 1.6.1

Годовые потери воды из Кенгирского водохранилища на испарения и фильтрацию в зависимости от наполнения водохранилища

Наполнение, x	По формуле (1.6.3) млн. м³/год	В единицах нормы стока	
		по формуле (1.6.3)	по уравнению (1.6.4)
0	14,2	0,088	0,09
0,4	22,4	0,139	0,1362
0,7	28,0	0,174	0,1708
1,0	33,8	0,210	0,2054
1,3	38,5	0,239	0,24

ных вычислений сведены в табл. 1.6.1. В четвертой графе табл. 1.6.1 приведены значения годовых объемов потерь воды по уравнению

$$\alpha_п(x)=0{,}09+0{,}1154x, \qquad (1.6.4)$$

использованные для построения безусловной кривой обеспеченности наполнений водохранилища аналитическим приемом [3].

По данным табл. 1.6.1 построена кривая изменения потерь в зависимости от наполнения (рис. 1.6.1, *а*).

2. Аналитический метод расчета

Функция обеспеченности наполнений водохранилища. Уравнение годового баланса, согласно (1.6.3)

$$k=x-y+\alpha_п+\alpha_п(x), \qquad (1.6.5)$$

[3] Функция $\alpha_п(x)$ в общем случае может быть аппроксимирована и уравнением кривой.

при $k=0$ будет

$$y=x-\alpha_{н}+\alpha_{п}(x)=\eta(x). \qquad (1.6.6)$$

Здесь $x_i=h\cdot i$ и $y=h\cdot j$, $(i, j=0, 1, \ldots n)$.

Решив уравнение (1.6.6) относительно $x=0$ при $y=\beta$, определяем корень x_0:

$$y=\alpha_{н}+\alpha(0)=\eta(0). \qquad (1.6.7)$$

Если $x_0>\eta(0)$, то y приравняется x_0 и определяется следующий корень x_1. И если в этом случае окажется x_1 больше значения $\eta(0)$, то ищется такой корень уравнения (1.6.6), при

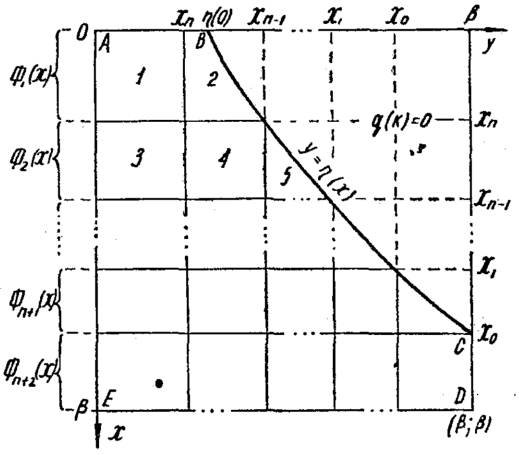

Рис. 1.6.2. Построение к системе интегральных уравнений (1.6.9)

котором x_i будет меньше или равно величине $\eta(0)$. В результате область *ABCDE*, согласно корням уравнения (1.6.6) $x_0, x_1, \ldots, x_n$, разобьется на некоторое конечное число частных областей интегрирования (рис. 1.6.2).

В практических расчетах регулирования стока зависимость потерь воды от наполнения водохранилища может быть аппроксимирована по линейному закону:

$$\alpha_{п}(x)=\alpha_{п}(0)+\xi\cdot x, \qquad (1.6.8)$$

где $\alpha_{п}(0)$ — потери воды с площади мертвого объема водохранилища; ξ — коэффициент, отражающий гипсометрическое строение чаши водохранилища.

Суммарная отдача водохранилища $\alpha(x)=\alpha_{н}+\alpha_{п}(x)$ при $\alpha=\text{const}$ также является функцией наполнения. Поэтому

вывод интегральных уравнений для функции обеспеченности наполнений в принципе аналогичен расчетной схеме регулирования стока на переменную отдачу $\alpha(x)$ (гл. 2.2). Система интегральных уравнений, соответствующая разбиению области *ABCDE*, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x)+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\,q(x,y)\,dy+\\
&+\int_{x_n}^{\eta(x)}\Phi_2(y)\,q(x,y)\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant x_n);\\
&\Phi_2(x)=F(x)+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\cdot q(x,y)\,dy+\\
&+\int_{x_n}^{x_{n-1}}\Phi_2(y)\,q(x,y)\,dy+\int_{x_{n-1}}^{\eta(x)}\Phi_3(y)q(x,y)dy\\
&\qquad\qquad (x_n\leqslant x\leqslant x_{n-1});\\
&\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_{n+1}(x)=F(x)+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\,q(x,y)\,dy+\\
&+\int_{x_n}^{x_{n-1}}\Phi_2(y)\,q(x,y)\,dy+\cdots+\\
&+\int_{x_1}^{x_0}\Phi_{n+1}(y)\,q(x,y)\,dy+\int_{x_0}^{\eta(x)}\Phi_{n+2}(y)q(x,y)dy\\
&\qquad\qquad (x_1\leqslant x\leqslant x_0);\\
&\Phi_{n+2}(x)=F(x)+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\,q(x,y)\,dy+
\end{aligned}\right\}\qquad (1.6.9)$$

$$+\int_{x_n}^{x_{n-1}}\Phi_2(y)\,q(x,y)\,dy+\cdots+$$

$$+\int_{x_1}^{x_0}\Phi_{n+1}(y)\,q(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_{n+2}(y)\,q(x,y)\,dy$$

$$(x_0\leqslant x\leqslant\beta).$$

Здесь $F(x)=F[x+\alpha_н+\alpha_п(x)]$ — обеспеченность стока в объеме $x+\alpha_н+\alpha_п(x)$; $q(x,\ y)=q[x-y+\alpha_н+\alpha_п(x)]$ — плотность распределения вероятностей стока в объеме $x-y+\alpha_н+\alpha_п(x)$.

Число функций обеспеченности наполнений $\Phi_i(x)$, при соблюдении условия $x_0\geqslant\eta(0)$ всегда будет равно $n+2$, т. е. на одно больше, чем число корней $d=n+1$ уравнения (1.6.6).

Пусть $x_0>\eta(0)$, но $x_1<\eta(0)$. В этом случае система (1.6.9) будет состоять из трех интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x)+\int_0^{x_1}\Phi_1(y)\,q(x,y)\,dy+\\
&+\int_{x_1}^{\eta(x)}\Phi_2(y)\,q(x,y)\,dy,\quad(0\leqslant x\leqslant x_1);\\
&\Phi_2(x)=F(x)+\int_0^{x_1}\Phi_1(y)\,q(x,y)\,dy+\\
&+\int_{x_1}^{x_0}\Phi_2(y)\,q(x,y)\,dy+\int_{x_0}^{\eta(x)}\Phi_3(y)\,q(x,y)\,dy\\
&\qquad(x_1\leqslant x\leqslant x_0);\\
&\Phi_3(x)=F(x)+\int_0^{x_1}\Phi_1(y)\,q(x,y)\,dy+
\end{aligned}\right\}\qquad(1.6.10)$$

$$+\int_{x_1}^{x_0}\Phi_2(y)\,q(x,\,y)\,dy+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_3(y)\,q(x,\,y)\,dy \qquad (x_0\leqslant x\leqslant\beta).$$

Если корень $x_0\leqslant\eta(0)$, то система (1.6.9) будет представлена лишь двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x)+\int_0^{x_0}\Phi_1(y)\,q(x,\,y)\,dy+\\
&+\int_{x_0}^{\eta(x)}\Phi_2(y)\,q(x,\,y)\,dy, \quad (0\leqslant x\leqslant x_0);\\
&\Phi_2(x)=F(x)+\int_0^{x_0}\Phi_1(y)\,q(x,\,y)\,dy+\\
&+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_2(y)\,q(x,\,y)\,dy, \quad (x_0\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.6.11)$$

Когда имеется условие $\beta\leqslant[x+\alpha_н+\alpha_п(x)]$ при любом значении аргумента x, система (1.6.9) вырождается в одно интегральное уравнение Фредгольма второго ряда:

$$\Phi(x)=F(x)+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,q(x,\,y)\,dy, \quad (0\leqslant x\leqslant\beta). \qquad (1.6.12)$$

Располагая безусловной кривой обеспеченности наполнений, нетрудно определить функции обеспеченности дефицитов отдачи водохранилища при $\alpha_н+\alpha_п(0)>\beta$

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(x)=F[\alpha_н+\alpha_п(0)-x]+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,q[\alpha_н+\alpha_п(0)-y-\\
&-x]\,dy, \quad [0\leqslant x\leqslant(\alpha_н+\alpha_п(0)-\beta)];\\
&f_2(x)=F[\alpha_н+\alpha_п(0)-x]+\int_0^{\alpha_н+\alpha_п(x)-x}\Phi(y)\cdot q[\alpha_н+
\end{aligned}\right\} \qquad (1.6.13)$$

$$+\alpha_{\text{п}}(0)-y-x]\,dy,\quad [\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-\beta)\leqslant x\leqslant(\alpha_{\text{н}}+$$
$$+\alpha_{\text{п}}(0))].$$

Здесь x — объем дефицита отдачи $[0\leqslant x\leqslant(\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0))]$ (рис. 1.6.3, *а*). Если соблюдается равенство $\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)=\beta$, то система (1.6.13) выродится в одно уравнение:

$$f_1(x)=F[\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-x]+\int_0^{\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-x}\Phi(y)\,q[\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-y-$$
$$-x)]\,dy,\quad [0\leqslant x\leqslant[\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0))] \qquad (1.6.14)$$

при $\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)<\beta$ (или $\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)>x_{\text{п}}$)

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(x)=F[\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-x]+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\,q[\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-y-\\
&-x]\,dy+\int_{x_n}^{\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-x}\Phi_2(y)\cdot q[\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-y-x]\,dy\\
&[0\leqslant x\leqslant\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-x_n];\\
&f_2(x)=F[\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-x]+\int_0^{\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-x}\Phi_1(y)\,q[\alpha_{\text{н}}+\\
&+\alpha_{\text{п}}(0)-y-x]\,dy,\quad [\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-x_n\leqslant\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)].
\end{aligned}\right\} \qquad (1.6.15)$$

При несоблюдении условий (рис. 1.6.3, *б*), т. е. если $\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)\leqslant x_n$, функция обеспеченности дефицитов отдачи описывается одним интегральным соотношением:

$$f(x)=F[\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-x]+\int_0^{\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-x}\Phi_1(y)\,q[\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)-y-$$
$$-x]\,dy,\quad [0\leqslant x\leqslant\alpha_{\text{н}}+\alpha_{\text{п}}(0)].$$

Функция обеспеченности холостых сбросов $\psi(x)$ будет иметь вид

$$\psi(x)=F(x)+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\,q(x,\,y)\,dy+\int_{x_n}^{x_{n-1}}\Phi_2(y)\,q(x,\,y)\,dy+\cdots$$

$$\cdots+\int_{x_1}^{x_0}\Phi_{n+1}(y)\,q(x,\,y)\,dy+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_{n+2}(y)\,q(x,\,y)\,dy, \quad (1.6.16)$$

где $F(x)=F[\alpha_н+\alpha_п(\beta)+\beta+x]$; $q(x,\,y)=q[\alpha_н+\alpha_п(\beta)+\beta-y+x]$; x — объем холостого сброса.

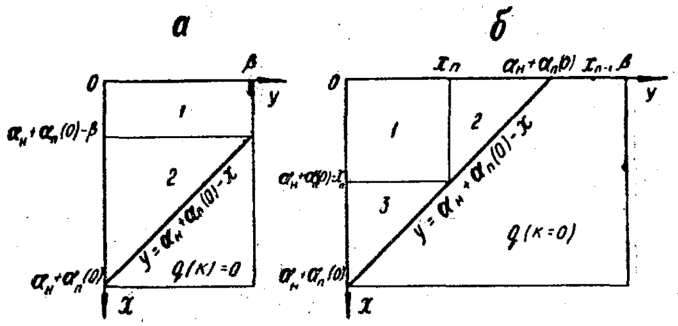

Рис. 1.6.3. Построение к системам интегральных соотношений (1.6.13) — (1.6.18): *а* — при $\alpha_н+\alpha_п(0)>\beta$; *б* — при $\alpha_н+\alpha_п(0)<\beta$

Построение функций обеспеченности наполнений, дефицитов и холостых сбросов покажем на параметрах регулирования и стока Кенгирского водохранилища: $\beta=1{,}3$; $\alpha_н=0{,}40$; $\alpha_п(x)=0{,}09+0{,}1154x$; $C_v=1{,}0$ и $C_s=2C_v$.

Из уравнения (1.6.6) получаем значения корня $x_0=0{,}7262$, а из (1.6.7) — корня $x_1=0{,}2118$. Найдем также значение $\eta(0)=0{,}49$ из (1.6.7). Так как корень $x_1<\eta(0)$, то система интегральных уравнений (1.6.9) сведется к системе (1.6.10) и запишется в следующем виде:

$$\Phi_1(x)=e^{-0{,}49-1{,}1154x}\left[1+\int_0^{0{,}2118}\Phi_1(y)\,e^{y}\,dy+\right.$$

$$\left.+\int_{0{,}2118}^{0{,}49+1{,}1154x}\Phi_2(y)\,e^{y}\,dy\right],\ (0\leqslant x\leqslant 0{,}2118);$$

$$\Phi_2(x)=e^{-0,49-1,1154x}\left[1+\int_0^{0,2118}\Phi_1(y)e^y dy+\right.$$

$$\left.+\int_{0,2118}^{0,7262}\Phi_2(y)e^y dy+\int_{0,7262}^{0,49+1,1154x}\Phi_3(y)e^y dy\right]$$

$$(0,2118\leqslant x\leqslant 0,7262);$$

$$\Phi_3(x)=e^{-0,49-1,1154x}\left[1+\int_0^{0,2118}\Phi_1(y)e^y dy+\right.$$

$$\left.+\int_{0,2118}^{0,7262}\Phi_2(y)e^y dy+\int_{0,7262}^{1,3}\Phi_3(y)e^y dy\right],$$

$$(0,7262\leqslant x\leqslant 1,3). \qquad (1.6.17)$$

Или

$$\Phi_1(x)=29,7887e^{-1,1154x}+19,2054e^{-1,3877x}-$$

$$-48,0271e^{-1,2442x},\quad (0\leqslant x\leqslant 0,2118);$$

$$\Phi_2(x)=(9,5738-8,6243e^{-0,1237x})\cdot e^{-1,1154x} \qquad (1.6.18)$$

$$(0,2118\leqslant x\leqslant 0,7262);$$

$$\Phi_3(x)=1,7190e^{-1,1154x},\quad (0,7262\leqslant x\leqslant 1,3).$$

При наполнениях $x=0;\ 0,1;\ 0,2;\ \ldots,1,3$ получаем следующие значения обеспеченности (табл. 1.6.2).

Имея функции безусловной кривой обеспеченности наполнений водохранилища, нетрудно получить функции обеспеченности дефицитов отдачи (в виде системы двух интегральных соотношений) и холостых сбросов (в виде одного интегрального соотношения).

Допустим, что многолетняя емкость Кенгирского водохранилища $\beta=0,8$. В этом случае решением системы (1.6.9) при $\alpha_н=0,4$, $\alpha_п(x)=0,09+0,1154x$ и значении корня $x_0=0,278$ будет

Таблица 1.6.2

Значения функции Ф (x)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0,967		
0,1	0,953	0,8	0,705
0,2	0,936	0,9	0,632
0,3	0,914	1,0	0,565
0,4	0,883	1,1	0,504
0,5	0,849	1,2	0,450
0,6	0,813	1,3	0,403
0,7	0,775		

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x) &= 6{,}5765e^{-1{,}1154x} - 5{,}6581e^{-1{,}2441x},\ (0 \leqslant x \leqslant 0{,}278);\\ \Phi_2(x) &= 1{,}1217e^{-1{,}1154x},\ (0{,}278 \leqslant x \leqslant 0{,}8).\end{aligned}\right\} \quad (1.6.19)$$

При $x=0$ из первой функции получаем обеспеченность $\Phi_1(x)=0{,}933$. В точке $x=x_0=0{,}278$ функции обеспеченностей $\Phi_1(0{,}278)$ и $\Phi_2(0{,}278)$ имеют одинаковые значения, а именно $\approx 0{,}831$. При $x=\beta$ из второй функции получаем $\Phi_2(0{,}8)=0{,}464$.

Предлагаемый метод позволяет производить расчеты многолетнего регулирования стока для отдачи нетто и определить значение ее расчетной обеспеченности.

3. Численная интерпретация аналитического метода

Аналогично, как и в гл. 1.2, аргументы наполнений водохранилища $y[0, \beta]$ и $x[0, \beta]$ в уравнении (1.6.5) разбиваются на n равных интервалов с шагом h.

Таблица 1.6.3

Абсциссы безусловной кривой обеспеченности наполнений для Кенгирского водохранилища

x_i	$\Phi(x_i)$		x_i	$\Phi(x_i)$	
	на $\alpha_н$	на $\alpha_{бр}$		на $\alpha_н$	на $\alpha_{бр}$
0	0,967	0,949	0,8	0,705	0,728
0,1	0,952	0,942	0,9	0,631	0,659
0,2	0,936	0,927	1,0	0,564	0,596
0,3	0,913	0,907	1,1	0,504	0,539
0,4	0,884	0,882	1,2	0,451	0,488
0,5	0,850	0,854	1,3	0,403	0,442
0,6	0,814	0,823			
0,7	0,775	0,790			

Примечание. Вычисления производились до 13-й итерации включительно, давшей практическую стабилизацию кривой обеспеченности наполнений.

Численные значения обеспеченности расчетного стока (1.6.5), отвечающие любому сочетанию интервалов наполнений x_i и y_j, устанавливаются по соотношению

$$F(k_{ij}) = 1 - P[x_i - y_j + \alpha_н + \alpha_п(x_i)]. \quad (1.6.20)$$

Функция обеспеченности наполнений на конец первого (начального) года регулирования имеет вид

$$\Phi_1(x_i) = F[x_i + \alpha_н + \alpha_п(x_i)]. \quad (1.6.21)$$

Остальные расчетные формулы такие же, как и (1.2.46) и (1.2.47).

Ниже приводятся результаты расчета обеспеченности по численной интерпретации для ряда значений наполнений x_i применительно к параметрам регулирования Кенгирского водохранилища ($\beta=1{,}3$ $\alpha_н=0{,}40$; $\alpha_п(x)=0{,}09+0{,}1154x$; $C_v=1{,}0$ и $C_s=2{,}0$).

Для сравнения в табл. 1.6.3 приведены также данные расчетов на отдачу — брутто ($\alpha_{бр}=\alpha_н+E(\alpha_п)=0{,}4+0{,}1685$). Здесь $E(\alpha_п)$ — математическое ожидание потерь воды из Кенгирского водохранилища (1.6.8). Как видно, расчеты на $\alpha_{бр}$ неоправданно увеличивают объемы дефицитов отдачи.

Имея безусловную кривую обеспеченности наполнений, нетрудно вычислить абсциссы кривых обеспеченности дефицитов отдачи и холостых сбросов по численному способу.

Сравнение результатов вычислений по аналитическому методу (см. табл. 1.6.2) показывает высокую точность численной его интерпретации.

Глава 1.7

УПРОЩЕННЫЙ СПОСОБ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ОПИСАНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОДОХРАНИЛИЩА

1. Постановка задачи

Наиболее трудоемкой операцией в расчетах многолетнего регулирования речного стока, выполняемых по обобщенным методам, как известно, является построение безусловной кривой обеспеченности наполнений водохранилища.

В случае аналитического способа расчета приходится решать интегральные уравнения или систему интегральных уравнений, которые описывают искомую функцию. Как отмечено, точные решения интегральных уравнений можно получить лишь при целых значениях параметра γ кривой распределения Пирсона III типа. При нецелых же значениях параметра γ решение может быть получено численной интерпретацией аналитического метода или путем сведения их к системе линейных алгебраических уравнений. Реализация последних на практике проектирования связана с повышенной трудоемкостью. Кроме того, они не позволяют получить непрерывное решение искомой безусловной функции обеспеченности наполнений, а дают лишь ее значение на отдельных точках соответственно заданным интервалам наполнений водохранилища.

В гл. 1.7 излагается способ упрощенного (непрерывного) решения для безусловной функции обеспеченности наполнений водохранилища при любых параметрах стока, в частности при любых значениях параметра γ, если известна хотя бы одна точка искомой функции.

Имеется довольно много способов непосредственного определения значения обеспеченности опорожненного состояния водохранилища (по числу бесперебойных лет — 37, 40, 59, 64, 74, 89 и др.). Кроме того, существует большое количество расчетных номограмм для многолетнего регулирования стока, дающих возможность быстро определять приближенные значения указанного параметра [26, 74, 89, 97 и др.]. Таким обра-

зом, определение безусловной функции обеспеченности наполнений при значении $x=0$, т. е. $\Phi(0)$, и любых параметрах отдачи и емкости водохранилища не представляет каких-либо технических трудностей. Для решения нашей задачи пусть будут заданы: α — годовой объем отдачи водохранилища; β — многолетняя емкость водохранилища; $F(k)$ — кривая обеспеченности стока; $q(k)$ — плотность распределения вероятностей стока; $\Phi(0)$ — обеспеченность опорожненного состояния водохранилища.

2. Расчетные алгоритмы при неглубоком многолетнем регулировании стока

Безусловная функция обеспеченности наполнений водохранилища описывается интегральным уравнением, выведенным ранее:

$$\Phi(x)=F(x+\alpha(0))+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,q(x-y+\alpha(y))\,[1-\alpha'(y)]\,dy. \tag{1.7.1}$$

При $\alpha=\text{const}$ из (1.7.1) имеем

$$\Phi(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,q(x-y+\alpha)\,dy. \tag{1.7.2}$$

Для решения уравнения (1.7.2) при указанных выше исходных параметрах воспользуемся известной теоремой о среднем значении определенного интеграла [56]:

$$\Phi(x)=F(x+\alpha)+\Phi(c)\int_0^{\beta}q(x-y+\alpha)\,dy. \tag{1.7.3}$$

Здесь c — некоторое вполне определенное значение аргумента наполнения, находящееся в промежутке $[0, \beta]$.

Определим значение $\Phi(c)$. Строго говоря функция $\Phi(c)$ не является постоянной величиной, а зависит в какой-то степени от аргумента наполнения x. Пренебрегая этой зависимостью, принимаем в (1.7.3) значение $x=0$. Тогда

$$\Phi(0)=F(\alpha)+\Phi(c)\int_0^{\beta}q(\alpha-y)\,dy,\quad (0\leqslant y\leqslant\beta). \tag{1.7.4}$$

Откуда

$$\Phi(c)=\frac{\Phi(0)-F(\alpha)}{\int_0^{\beta} q(\alpha-y)dy}. \qquad (1.7.5)$$

Подставляя в уравнение (1.7.3) значение $\Phi(c)$, имеем

$$\Phi(x)=F(x+\alpha)+\frac{\Phi(0)-F(\alpha)}{\int_0^{\beta} q(\alpha-y)dy}\int_0^{\beta} q(x-y+\alpha)\,dy. \qquad (1.7.6)$$

Формула (1.7.6) представляет собой приближенное решение исходного интегрального уравнения (1.7.2).

Ошибка определения абсцисс кривой $\Phi(x)$ относительно небольшая и, как показывают конкретные расчеты, находится в пределах третьего знака после запятой. Для повышения точности результатов решения значение $\Phi(x)$ из (1.7.6) подставим в исходное интегральное уравнение (1.7.2):

$$\Phi(x)=F(x+\alpha)+\int_0^{\beta}\left[F(y+\alpha)+\frac{\Phi(0)-F(\alpha)}{\int_0^{\beta} q(\alpha-t)dt}\int_0^{\beta} q(y-t+\alpha)\,dt\right]\times$$

$$\times q(x-y+\alpha)\,dy. \qquad (1.7.7)$$

Если окажется, что формула (1.7.7) не будет обеспечивать заданной точности, то необходимо продолжить процесс итерации.

В случае переменной отдачи $\alpha=\alpha(y)$ (см. гл. 2.1), применив ту же теорему о среднем значении определенного интеграла, получим для безусловной функции обеспеченности наполнений решение (первое приближение) в следующем виде:

$$\Phi(x)=F[x+\alpha(0)]+\frac{\{\Phi(0)-F[\alpha(0)]\}\cdot\int_0^{\beta}[1-\alpha'(y)]q[x-y+\alpha(y)]dy}{\int_0^{\beta}[1-\alpha'(y)]q[\alpha(y)-y]dy}. \qquad (1.7.8)$$

Практическая реализация формул (1.7.6)—(1.7.8) при фиксированных значениях параметра емкости и отдачи водохранилища не представляет каких-либо трудностей. Рассмотрим следующий пример. Допустим: $\beta=0{,}4$, $\alpha=0{,}6$, $\Phi(0)=0{,}8658$ и $C_v\simeq 0{,}70$ (при $C_s=2C_v$). Тогда

$$F(x+\alpha)=(0{,}6024x+0{,}6626)e^{-2x};$$

$$\frac{\Phi(0)-F(\alpha)}{\int\limits_0^{\beta} q(\alpha-y)dy}=\frac{0{,}8656-0{,}6626}{0{,}2758}=0{,}7366;$$

$$\int\limits_0^{\beta} q(x-y+\alpha)\,dy=(0{,}7382x+0{,}2758)e^{-2x}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (1.7.6), имеем

$$\Phi(x)=(1{,}1462x+0{,}8658)e^{-2x},\quad (0\leqslant x\leqslant 0{,}4). \qquad (1.7.9)$$

При тех же исходных данных (см. гл. 1.2) получено точное (аналитическое) решение в виде

$$\Phi(x)=\frac{[3(2x+2\alpha+1)-2\beta e^{-2x}(4\beta^2-6x\beta+3\beta-6x)]\cdot e^{-2(x+\alpha)}}{3-12\alpha\beta e^{-2x}+4\beta^4 e^{-4\alpha}}. \qquad (1.7.10)$$

Или

$$\Phi(x)=(1{,}1284x+0{,}8658)e^{-2x},\quad (0\leqslant x\leqslant 0{,}4). \qquad (1.7.11)$$

Сравнивая результаты вычисления по формулам (1.7.9) и (1.7.11), мы убеждаемся в незначительности их расхождений (табл. 1.7.1).

Таблица 1.7.1

Значения функции $\Phi(x)$

Наполнение x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
По формулам					
(1.7.11)	0,8658	0,8012	0,7316	0,6609	0,5917
(1.7.9)	0,8658	0,8026	0,7340	0,6638	0,5950
Погрешность	0	0,0014	0,0024	0,0029	0,0033

Так как наибольшая погрешность составляет $\varepsilon=0{,}0033$ (при $x=\beta=0{,}4$), то, используя (1.7.7), получим уточненное решение: $\Phi(x)=(1{,}1301x+0{,}8658)e^{-2x}$. Это решение вполне обеспечивает заданную точность расчета $\varepsilon=0{,}001$.

3. Расчетные алгоритмы при глубоком регулировании стока

Пусть емкость водохранилища будет в пределах $\alpha \leqslant \beta \leqslant 2\alpha$, для которой ранее была получена следующая система интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= F(x+\alpha) + \int_0^{\beta-\alpha} \Phi_1(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy + \\
&+ \int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha} \Phi_2(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy, \quad (0 \leqslant x \leqslant \beta-\alpha); \\
\Phi_2(x) &= F(x+\alpha) + \int_0^{\beta-\alpha} \Phi_1(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy + \\
&+ \int_{\beta-\alpha}^{\beta} \Phi_2(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy, \quad (\beta-\alpha \leqslant x \leqslant \beta).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.7.13)$$

Согласно теореме о среднем, второе уравнение системы (1.7.13) запишется в виде

$$\Phi_2(x) = F(x+\alpha) + \Phi_1(c_1) \int_0^{\beta-\alpha} q(x-y+\alpha)\, dy + \Phi_2(c_2) \times \\ \times \int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(x-y+\alpha)\, dy, \qquad (1.7.14)$$

где постоянные c_1 и c_2 находятся в пределах $(0 \leqslant c_1 \leqslant \beta-\alpha)$ и $(\beta-\alpha \leqslant c_2 \leqslant \beta)$.

Подставляя значение $\Phi_2(x)$ в первое уравнение системы (1.7.13), будем иметь

$$\Phi_1(x) = F(x+\alpha) + \int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha} F(y+\alpha)\, q(x-y+\alpha)\, dy + \Phi_1(c_1) \times \\ \times \left[\int_0^{\beta-\alpha} q(x-y+\alpha)\, dy + \int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha} dy \int_0^{\beta-\alpha} q(y-t+\alpha)\, q(x-y+\alpha)\, dt \right] +$$

$$+\Phi_2(c_2)\int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha} dy\int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(y-t+\alpha)q(x-y+\alpha)\,dt. \qquad (1.7.15)$$

Так как $\Phi_1(\beta-\alpha)=\Phi_2(\beta-\alpha)$, то из (1.7.14) и (1.7.15) после соответствующих преобразований получим

$$\Phi_1(c_1)\int_{\beta-\alpha}^{\beta} dy\int_{0}^{\beta-\alpha} q(y-t+\alpha)q(\beta-y)\,dt+\Phi_2(c_2)\left[\int_{\beta-\alpha}^{\beta} dy\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(y-t+\alpha)q(\beta-y)\,dt-\int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(\beta-y)\,dy\right]=-$$

$$-\int_{\beta-\alpha}^{\beta} F(y+\alpha)q(\beta-y)\,dy. \qquad (1.7.16)$$

Полагая в уравнении (1.7.15) артумент $x=0$ и выполнив преобразования, будем иметь

$$\Phi_1(c_1)\left[\int_{0}^{\beta-\alpha} q(\alpha-y)\,dy+\int_{\beta-\alpha}^{\alpha} dy\int_{0}^{\beta-\alpha} q(y-t+\alpha)q(\alpha-y)\,dt\right]+$$

$$+\Phi_2(c_2)\int_{\beta-\alpha}^{\alpha} dy\int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(y-t+\alpha)q(\alpha-y)\,dt=\Phi(0)-F(\alpha)-$$

$$-\int_{\beta-\alpha}^{\alpha} F(y+\alpha)q(\alpha-y)\,dy. \qquad (1.7.17)$$

Выражения (1.7.16) и (1.7.17) представляют систему алгебраических уравнений с двумя неизвестными $\Phi_1(c_1)$ и $\Phi_2(c_2)$.

Разрешая их относительно указанных неизвестных, получим

$$\Phi_1(c_1)=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad \Phi_2(c_2)=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}. \qquad (1.7.18)$$

Здесь

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11} &= \int_{\beta-\alpha}^{\beta} dy \int_{0}^{\beta-\alpha} q(y-t+\alpha)\, q(\beta-y)\, dt; \\
a_{12} &= \int_{\beta-\alpha}^{\beta} dy \int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(y-t+\alpha) q(\beta-y) dt - \int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(\beta-y) dy; \\
a_{21} &= \int_{0}^{\beta-\alpha} q(\alpha-y)\, dy + \int_{\beta-\alpha}^{\alpha} dy \int_{0}^{\beta-\alpha} q(y-t+\alpha)\, q(\alpha-y)\, dt; \\
a_{22} &= \int_{\beta-\alpha}^{\alpha} dy \int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(y-t+\alpha)\, q(\alpha-y)\, dt; \\
b_1 &= -\int_{\beta-\alpha}^{\beta} F(y+\alpha)\, q(\alpha-y)\, dy; \\
b_2 &= \Phi(0) - F(\alpha) - \int_{\beta-\alpha}^{\alpha} F(y+\alpha)\, q(\alpha-y)\, dy.
\end{aligned}
\right\} \quad (1.7.19)
$$

Таким образом, приближенным решением системы (1.7.3) будет

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Phi_1(x) = F(x+\alpha) + \int_{\beta-\alpha}^{x+\sigma} F(y+\alpha)\, q(x-y+\alpha)\, dy + \Phi_1(c_1) \times \\
&\times \left[\int_{0}^{\beta-\alpha} q(x-y+\alpha)\, dy + \int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha} dy \int_{0}^{\beta-\alpha} q(y-t+\alpha)\, q(x-y+\alpha) \times \right. \\
&\left. \times dt \right] + \Phi_2(c_2) \int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha} dy \int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(y-t+\alpha)\, q(x-y+\alpha)\, dt \\
&\qquad\qquad (0 \leqslant x \leqslant \beta-\alpha); \\
&\Phi_2(x) = F(x+\alpha) + \Phi_1(c_1) \int_{0}^{\beta-\alpha} q(x-y+\alpha)\, dy + \Phi_2(c_2) \times
\end{aligned}
\right\} \quad (1.7.20)
$$

$$\times \int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(x-y+\alpha)\,dy, \quad (\beta-\alpha \leqslant x \leqslant \beta). \Bigg\}$$

Расчет по формулам (1.7.20) целесообразно выполнять в следующем порядке: согласно (1.7.19), вычисляются коэффициенты a_{ij} и b_i $(i, j=1, 2)$; по формулам (1.7.18) подсчитываются значения величин $\Phi_1(c_1)$ и $\Phi_2(c_2)$; значения $\Phi_1(c_1)$ и $\Phi_2(c_2)$ подставляются в систему решений (1.7.20) и выполняется интегрирование при заданных параметрах емкости и отдачи водохранилища. Для уточнения решения могут быть произведены дополнительные итерации аналогично изложенному.

4. Построение кривых обеспеченности сбросов и дефицитов

Безусловная функция обеспеченности наполнений может быть принята в качестве исходной для построения безусловных функций обеспеченности холостых сбросов и дефицитов отдачи водохранилища. Так, в случае расчетной схемы $\alpha \leqslant \beta \leqslant 2\alpha$ функция обеспеченности холостых сбросов будет иметь вид

$$\psi(x_c) = F(\beta+\alpha+x_c) + \Phi_1(c_1) \int_0^{\beta-\alpha} q(\beta+\alpha-y+x_c)\,dy + \Phi_2(c_2) \times$$

$$\times \int_{\beta-\alpha}^{\beta} q(\beta+\alpha-y+x_c)\,dy. \qquad (1.7.21)$$

Кривая обеспеченности дефицитов отдачи описывается функциями $f_1(x_\partial)$ и $f_2(x_\partial)$. Причем результаты вычислений по $f_1(x_\partial)$ полностью совпадают с значениями $\Phi_1(x)$ из (1.7.20), т. е.

$$f_1(x_\partial) = \Phi_1(x), \quad (0 \leqslant x_\partial \leqslant 2\alpha-\beta). \qquad (1.7.22)$$

Уравнение для $f_2(x_\partial)$ имеет вид

$$f_2(x_\partial) = F(\alpha-x_\partial) + \int_0^{\alpha-x_\partial} \Phi_1(y)\,q(\alpha-y-x_\partial)\,dy, \quad (2\alpha-\beta \leqslant x_\partial \leqslant \alpha). \qquad (1.7.23)$$

Заметим, что интегралы от функций плотности, входящие в

решения (1.7.6)—(1.7.7), можно выразить через функции обеспеченности. Так,

$$\int_0^{\beta} q(x-y+\alpha)\,dy = F(x-\beta+\alpha)-F(x+\alpha).$$

Аналогично могут быть заменены и интегралы от функций плотности, входящие в систему решений (1.7.20). Изложенный способ приближенного построения безусловных функций обеспеченности наполнений, холостых сбросов и дефицитов отдачи в принципе применяется и для расчетных схем с более глубоким регулированием стока, т. е. при многолетней емкости водохранилища $\beta > 2\alpha$.

ЧАСТЬ II

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ РЕЧНОГО СТОКА НА ПЕРЕМЕННЫЕ ПО ГОДАМ ОБЪЕМЫ ОТДАЧИ ИЗ ВОДОХРАНИЛИЩА

Глава 2.1

ОБОБЩЕННЫЕ ПРИЕМЫ РАСЧЕТОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА ПРИ ОТДАЧЕ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ НАПОЛНЕНИЯ ВОДОХРАНИЛИЩА В НАЧАЛЕ ГОДА

Для водохранилищ, обслуживающих «гибкого» водопотребителя, целесообразна схема регулирования, ориентированная на повышенные объемы годовой отдачи при высоких наполнениях и сниженные отдачи при низких наполнениях. Такая схема может применяться только для группы потребителей, отличающихся степенью их «гибкости», например сочетающей правильное и лиманное орошение или промышленное водоснабжение с правильным и лиманным орошениями и т. д. Значительной «гибкостью» графика водопотребления отличаются также ГЭС, работающие в объединенной энергосистеме. Для водохранилища, обслуживающего работу изолированной ГЭС, неизбежна расчетная схема с отдачей, возрастающей по мере снижения наполнения (как способ компенсации теряемого напора) при необходимости поддержания постоянной мощности гидроэлектростанции [59].

В условиях регулирования стока рек, в частности равнинного Казахстана, наиболее приемлемой для практики является расчетная схема, предусматривающая сокращение годового объема водопотребления при уменьшении наполнения y (или, наоборот, увеличение объема отдачи с ростом величины y). Нижний предел отдачи $\alpha(0)$, отвечающий нулевому наполнению ($y=0$), определяется при этом нормальной потребностью в воде наиболее ответственного, т. е. наименее «гибкого» водопотребителя, характеризуемого высоким значением расчетной обеспеченности.

Во всех случаях функция переменной по годам отдачи водохранилища может быть различной, в частности в виде уравнений прямой линии.

Рассмотрим схемы многолетнего регулирования стока при отдачах, зависящих от состояния и наполнения водохрани-

ща в начале года y, т. е. при $\alpha(y)$ и в конце года x при $\alpha(x)$. Функции $\alpha(y)$ и $\alpha(x)$ в пределах изменения их аргумента $y[0, \beta]$ и $x[0, \beta]$ считаются непрерывно-дифференцируемыми. Расчетные алгоритмы выведены применительно для неглубокого и глубокого многолетнего регулирования. Сделаны обобщения на случай любой емкости водохранилища. Расчетные алгоритмы для случаев $\alpha(y)$ и $\alpha(x)$ рассматриваются раздельно, что обусловлено составом водопотребителей водохранилища, степенью их «гибкости» и условиями формирования притока воды в створе гидроузла.

1. Неглубокое многолетнее регулирование стока

Интегральное уравнение для функции наполнений. Интегральное уравнение безусловной функции обеспеченности наполнений в случае $\alpha(y)$ имеет вид

$$\Phi(x)=F[\alpha(0)+x]+\int_0^{\beta}\Phi(y)\cdot[1-\alpha'(y)]q[\alpha(y)-y+x]dy$$

$$(0\leqslant x\leqslant\beta). \qquad (2.1.1)$$

Схема решения (2.1.1) подробно рассмотрена в гл. 1.2. Точным решением уравнения (2.1.1) методом определителей Фредгольма, например при $\gamma=1$, будет

$$\Phi(x)=\exp(-x)\left\{\frac{a\cdot\exp[-\alpha(0)]}{a+(1-a)b\cdot\exp[-\alpha(0)]}\right\},$$

$$\text{где } a=\frac{\alpha(\beta)-\alpha(0)}{\beta};\quad b=\exp[-\alpha(0)-\alpha(\beta)]-1. \qquad (2.1.2)$$

Решение (2.1.2) получено в предположении, что отдача α зависит линейно от наполнения y, как это показано на рис. 2.1.3, *б*: $\alpha(y)=\frac{\alpha(\beta)-\alpha(0)}{\beta}\cdot y+\alpha(0)$, где $\alpha(\beta)$ и $\alpha(0)$ — отдача при наполненном и опорожненном состоянии водохранилища соответственно.

Если в (2.1.2) принять $\alpha(0)=\alpha(\beta)=\alpha$, то путем раскрытия неопределенности вида $\exp(-x)=\frac{0}{0}$, согласно правилу Бернулли — Лопиталя, убеждаемся в том, что (2.1.2) обратится в (1.2.22). Формула (2.1.2) справедлива при любых значе-

ниях $\alpha(0)$ и $\alpha(\beta)$. Например, при параметрах $\beta=0{,}5$ и $\alpha(y)=0{,}5-0{,}6y$; $\alpha(y)=0{,}8-0{,}6y$, т. е. соответственно $\alpha(0)=0{,}5$ и $0{,}8$; $\alpha(\beta)=0{,}8$ и $0{,}5$ функция $\Phi(x)$ принимает следующие значения:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\alpha(y)=0{,}5-0{,}6y$	0,6775	0,6130	0,5547	0,5019	0,4541	0,4109
$\alpha(y)=0{,}8-0{,}6y$	0,7736	0,7000	0,6334	0,5731	0,5185	0,4692

При $\alpha(0)>\alpha(\beta)$ значения функции $\Phi(x)$ более высокие по сравнению с $\alpha(0)<\alpha(\beta)$, что очень важно для качественной оценки числа бесперебойных лет режима работы проектируемого водохранилища. Конкретное значение последнего определено по (2.1.2) при $x=0$:

$$\Phi(0)=\frac{\frac{\alpha(\beta)-\alpha(0)}{\beta}\cdot e^{-\alpha(0)}}{\frac{\alpha(\beta)-\alpha(0)}{\beta}+\left[1+\frac{\alpha(0)-\alpha(\beta)}{\beta}\right]\cdot\left[e^{-\alpha(0)-\alpha(\beta)}-1\right]\cdot e^{-\alpha(0)}}. \qquad (2.1.2')$$

Кривая обеспеченности дефицитов отдачи может быть определена следующим образом.

Из уравнения (1.2.28) при $\alpha=\alpha(y)$ и $k=0$ имеем

$$x_\partial=\alpha(y)-y \qquad (2.1.3)$$

или

$$y=\mu(x_\partial). \qquad (2.1.4)$$

Действительным корнем λ_0 этого уравнения при $y=\beta$ будет

$$\lambda_0=\alpha(\beta)-\beta. \qquad (2.1.4')$$

В промежутке $0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(\beta)-\beta$ все значения расчетной водоносности k больше нуля, т. е. $F(k)<1$, а в $x_\partial\,[\alpha(\beta)-\beta,\ \alpha(0)]$ — $-k\geqslant 0$ с $F(k)\leqslant 1$ (рис. 2.1.1).

Поэтому соотношения, описывающие кривую обеспеченности дефицитов в указанных выше промежутках изменения аргумента, будут различными:

$$f_1(x_\partial)=F[\alpha(0)-x_\partial]+\int_0^\beta\Phi(y)[1-\alpha'(y)]q[\alpha(y)-y-x_\partial]dy,\quad [0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(\beta)-\beta];$$

$$f_2(x_\partial)=F[\alpha(0)-x_\partial]+\int_0^{\mu(x_\partial)}\Phi(y)[1-\alpha'(y)]q[\alpha(y)-y-x_\partial]dy,\quad [\alpha(\beta)-\beta\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(0)]. \tag{2.1.5}$$

Опуская все промежуточные действия, связанные с интегрированием и алгебраическими преобразованиями, получим следующие решения интеграль-

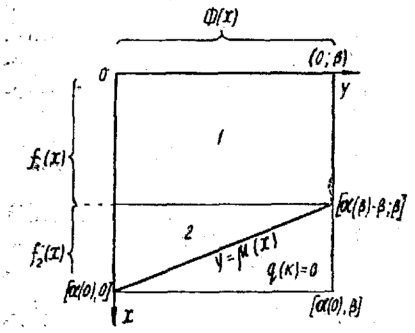

Рис. 2.1.1. К получению интегральных соотношений (2.1.5)

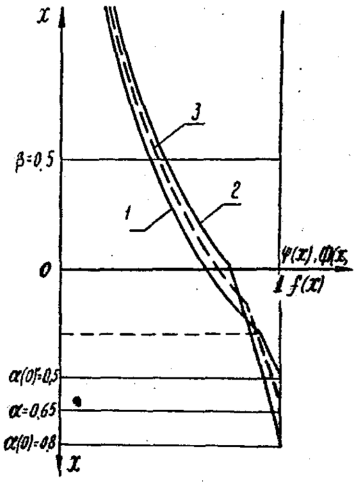

Рис. 2.1.2. Функции $\Phi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$: *1* — при $\alpha(0)=0{,}5$ и $\alpha(\beta)=0{,}8$; *2* — при $\alpha(0)=0{,}8$ и $\alpha(\beta)=0{,}5$; *3* — при $\alpha(0)=0{,}65$

ного соотношения (2.1.5) применительно к условиям и параметрам методического примера (табл. 2.1.1):

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_\partial)&=\Phi(0)e^{x_\partial},\ (0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(\beta)-\beta);\\ f_2(x_\partial)&=Be^{x_\partial},\ [\alpha(\beta)-\beta\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(0)],\end{aligned}\right\} \tag{2.1.5′}$$

где $\Phi(0)$ определяется согласно (2.1.2′);

$$B=e^{-\alpha(0)}\left[1+\Phi(0)\cdot\frac{\beta+\alpha(0)-\alpha(\beta)}{\alpha(0)-\alpha(\beta)}\left\{\exp\frac{[\alpha(0)-\alpha(\beta)][\alpha(0)-x_\partial]}{\beta+\alpha(0)-\alpha(\beta)}-1\right\}\right].$$

Кривая обеспеченности холостых сбросов $\psi(x_c)$, согласно уравнению (1.2.32), в случае $\alpha=\alpha(y)$ имеет вид

$$\psi(x_c)=F[\beta+\alpha(0)+x_c]+\int_0^{\beta}\Phi(y)[1-\alpha'(y)]q[\beta+\alpha(y)-y+$$

$$+x_c]dy, \quad (0 \leqslant x_c < \infty). \qquad (2.1.6)$$

Решением интегрального соотношения (2.1.6) для тех же условий и параметров методического примера будет

$$\psi(x_c) = \Phi(0) e^{-(x_c+\beta)}, \quad (0 \leqslant x_c < \infty). \qquad (2.1.6')$$

Таблица 2.1.1

Значения функций $f_1(x_\partial)$ и $f_2(x_\partial)$

x_∂	$f_1(x_\partial)$		$f_2(x_\partial)$	
	$\alpha(\beta) > \alpha(0)$	$\alpha(\beta) < \alpha(0)$	$\alpha(\beta) > \alpha(0)$	$\alpha(\beta) < \alpha(0)$
0	0,6775	0,7736	—	0,7736
0,1	0,7488	—	—	0,8042
0,2	0,8275	—	—	0,8345
0,3	0,9146	—	0,9146	0,8647
0,4	—	—	0,9617	0,9042
0,5	—	—	1,0	0,9231
0,6	—	—		0,9505
0,7	—	—		0,9765
0,8	—	—		1,0

Примечание. При $\alpha(\beta) = \beta$, согласно (2.1.4') функция $f_1(x_\partial)$ решается только в точке $x_\partial = 0$.

Численные значения для отдельных точек кривой обеспеченности холостых сбросов приведены в таблице 2.1.2.

Таблица 2.1.2

Значения функции $\psi(x_c)$

x_c		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\psi(x_c)$	$\alpha(\beta) > \alpha(0)$	0,4109	0,3718	0,3364	0,2492	0,0556	0,0028
	$\alpha(\beta) < \alpha(0)$	0,4692	0,4246	0,3842	0,2846	0,0635	0,0032

Формулы для наполнений, дефицитов и холостых сбросов удовлетворяют критериальному соотношению (тождеству), т. е. водному балансу водохранилища за многолетие. Применительно к переменной отдаче соотношение будет иметь вид

$$E_{\alpha(y)} + E_c - E_\partial \equiv 1. \qquad (2.1.7)$$

Нетрудно убедиться в том, что условию (2.1.7) удовлетворяют указанные выше параметры. Так, если $\beta = 0{,}5$; $\alpha(\beta) = 0{,}8$ и $\alpha(0) = 0{,}5$, то $E_{\alpha(y)} = \int_0^{0,5} 0{,}6775 e^{-y} \cdot 0{,}6 dy + 0{,}5 = 0{,}6600$; $E_c =$

$$= \int_0^{\infty} 0{,}6775 \cdot 0{,}6065 e^{-x_c} dx_c = 0{,}4109;\ E_\partial = 0{,}5 - [\int_0^{0{,}3} 0{,}6775 e^{y}\, dy +$$

$$+ \int_{0{,}3}^{0{,}5} (0{,}8804 e^{y} - 0{,}1294 e^{2{,}59y})\, dy = 0{,}0709.$$ Или $0{,}6600 + 0{,}4109 - 0{,}0709 = 1{,}0000$. Если же $\alpha(\beta) = 0{,}5$ и $\alpha(0) = 0{,}8$, то $E_{c(y)} = 0{,}6173$; $E_c = 0{,}4692$ и $E_\partial = 0{,}0865$, т. е. $0{,}6173 + 0{,}4692 - 0{,}0865 = 1$.

На рис. 2.1.2 показаны безусловные функции обеспеченности наполнений $\Phi(x)$, дефицитов отдачи $f_1(x_\partial)$ и $f_2(x_\partial)$, холостых сбросов $\psi(x_c)$, полученные для условий $\alpha(\beta) > \alpha(0)$ и $\alpha(\beta) < \alpha(0)$. В целях сравнения построены эти же функции для случая постоянной отдачи $\alpha = 0{,}65$.

2. Глубокое многолетнее регулирование стока

Интегральные уравнения для безусловной функции обеспеченности наполнений. Искомые уравнения могут быть получены на основе водного баланса водохранилища и формул (1.3.2).

Прежде всего следует определить область интегрирования в квадрате наполнений $[0 \leqslant x \leqslant \beta;\ 0 \leqslant y \leqslant \beta]$. Для этого в уравнении водного баланса $k = x - y + \alpha(y)$ принимается $k = 0$. Тогда

$$x - y + \alpha(y) = 0. \tag{2.1.8}$$

Или, решая относительно y:

$$y = \eta(x), \tag{2.1.9}$$

имеем область ABC на рис. 2.1.3, *а*, в которой при $k = 0$, $F(k) = 1$ и $q(k) = 0$. Ордината точки A равна $y = \eta(0)$, а абсцисса точки c, очевидно, есть корень уравнения

$$\beta = \eta(x). \tag{2.1.10}$$

Пусть наименьшим вещественным корнем уравнения (2.1.10) будет x_0, а из (2.1.9), используя (2.1.8), нетрудно определить также значение $\eta(0)$. Например, при $\alpha = \text{const}$ величина $x_0 = \beta - \alpha$, а $\eta(x) = x + \alpha$. При $x_0 \leqslant \eta(0)$, которое аналогично условию $\alpha \leqslant \beta \leqslant 2\alpha$ в случае $\alpha = \text{const}$, система интегральных уравнений (1.3.2) будет иметь вид

$$\Phi_1(x) = F[x + \alpha(0)] + \int_0^{x_0} \Phi_1(y)\,[1 - \alpha'(y)]\, q[x - y + \alpha(y)]\, dy +$$

$$+\int_{x_0}^{\eta(0)}\Phi_2(y)\,[1-\alpha'(y)]\,q[x-y+\alpha(y)]\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant x_0);$$

$$\Phi_2(x)=F[x+\alpha(0)]+\int_0^{x_0}\Phi_1(y)\,[1-\alpha'(y)]\,q[x-y+\alpha(y)]\,dy+$$

$$+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_2(y)\,[1-\alpha'(y)]\,q[x-y+\alpha(y)]\,dy,\quad (x_0\leqslant x\leqslant\beta). \qquad (2.1.11)$$

Очевидно, $\Phi_1(x_0)=\Phi_2(x_0)$.

Систему интегральных уравнений (2.1.11), как указывалось выше, можно решить различными способами, в частности путем сведения ее к системе линейных алгебраических уравнений. При этом промежуток $0\leqslant x\leqslant\beta$ следует разбить на n равных частей таким образом, чтобы соблюдалось условие $x_k=x_0$, т. е., чтобы наполнение для k-го интервала было равно значению корня уравнения (2.1.10).

Полагая в (2.1.11) вместо x ряд дискретных его значений x_i, где $i=0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, n$, и заменяя интегралы по формулам приближенных квадратур, получим систему из $n+1$ линейных алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными, решение которой может быть найдено, например, по методу последовательного исключения неизвестных.

Система (2.1.11) может быть решена и аналитически, в частности методом последовательных приближений (при целых значениях параметра γ). Пусть, например $\beta=0{,}8$, а отдача изменяется от $\alpha(\beta)=0{,}6$ до $\alpha(0)=0{,}4$ по закону прямой линии: $\alpha(y)=0{,}25y+0{,}4$. Тогда из (2.1.8) следует: $x-0{,}75y+0{,}4=0$. Согласно (2.1.9), $y=\eta(x)=\frac{4x+1{,}6}{3}$, корень которого $x_0=0{,}2$, а $\eta(0)=0{,}5(3)$, т. е. $x_0\leqslant\eta(0)$ (рис. 2.1.3, *а*).

Таким образом, из (2.1.11) имеем

$$\Phi_1(x)=e^{-(x+0{,}4)}\left[1+0{,}75\int_0^{0{,}2}\Phi_1(y)\,e^{0{,}75y}dy+0{,}75\times\right.$$

$$\left.\times\int_{0{,}2}^{1{,}3x+0{,}53}\Phi_2(y)\,e^{0{,}75y}dy\right],\quad (0\leqslant x\leqslant 0{,}2);$$

$$\Phi_2(x)=e^{-(x+0,4)}\left[1+\int_0^{0,2}\Phi_1(y)e^{0,75y}\,dy+0,75\int_{0,2}^{0,8}\Phi_2(y)\times\right.$$
$$\left.\times e^{0,75y}dy\right],\quad (0,2\leqslant x\leqslant 0,8);\qquad\qquad (2.1.12)$$

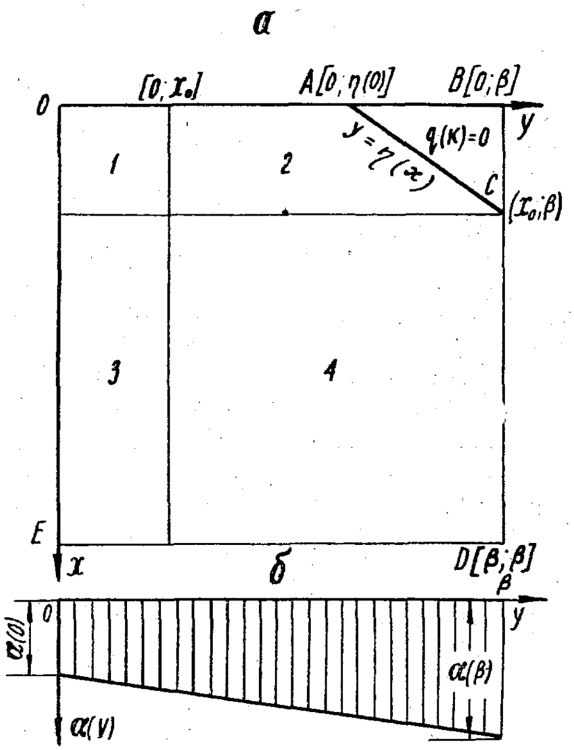

Рис. 2.1.3. Построение к системе интегральных уравнений (2.4.11): *а* — частные области интегрирования; *б* — зависимость отдачи α от наполнения y

Или

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_1(x)=2,7676e^{-x}-1,8406e^{-1,(3)x},\quad (0\leqslant x\leqslant 0,2);\\&\Phi_2(x)=1,0459e^{-x},\quad (0,2\leqslant x\leqslant 0,8).\end{aligned}\right\}\qquad (2.1.13)$$

Результаты вычислений (2.1.13) и сопоставление их с данными подсчетов, выполненных путем численного интегрирова-

ния (при разбивке емкости β на 8 интервалов), приведены в табл. 2.1.3:

Таблица 2.1.3

Значения функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$

x	Аналитический метод	Численная интерпретация	Отклонение $\pm\Delta$
0	0,9271	0,9266	−0,0005
0,1	0,8934	0,8931	−0,0003
0,2	0,8563	0,8563	0
0,3	0,7748	0,7748	0
0,4	0,7011	0,7011	0
0,5	0,6343	0,6345	+0,0002
0,6	0,5740	0,5740	0
0,7	0,5194	0,5193	−0,0001
0,8	0,4699	0,4701	+0,0002

Интегральные уравнения кривой обеспеченности дефицитов отдачи устанавливаются из уравнения годового водного баланса водохранилища для зоны дефицитов при $k=0$: $\alpha(y)-x_\partial-y=0$ или $y=\mu(x_\partial)$.

Полагая $y=x_0$, определяем корень следующего уравнения: $x_0=\mu(x_\partial)$.

Пусть значение корня будет $x=\lambda_0$, т. е. $x_0=\mu(\lambda_0)$. Тогда функции дефицитов отдачи будут описываться следующей системой интегральных соотношений (рис. 2.1.4):

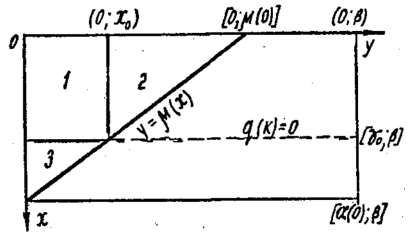

Рис 2.1.4. К выводу системы интегральных соотношений (2.1.14)

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_\partial) = F[\alpha(0)-x_\partial] + \int_0^{x_0} \Phi_1(y)\,[1-\alpha'(y)]\,q[\alpha(y)- \\ -y-x_\partial]\,dy + \int_{x_0}^{\mu(x_\partial)} \Phi_2(y)\,[1-\alpha'(y)]\,q[\alpha(y)-y-x_\partial]\,dy \\ (0\leqslant x_\partial \leqslant \lambda_0); \end{aligned}\right\} \quad (2.1.14)$$

$$f_2(x_\partial)=F[\alpha(0)-x_\partial]+\int_0^{\mu(x_\partial)}\Phi_1(y)\,[1-\alpha'(y)]\,q[\alpha(y)-$$

$$-y-x_\partial]\,dy,\quad (\lambda_0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(0)).$$

Применительно к параметрам рассмотренного выше примера $\beta=0{,}8$; $\alpha(\beta)=0{,}6$; $\alpha(0)=0{,}4$; $x_0=0{,}2$, т. е. при $\alpha(y)=0{,}25y+0{,}4$ имеем $1-\alpha'(y)=1-0{,}25=0{,}75$; $x_0=\mu(x)=\frac{0{,}4-x}{0{,}75}$ (при $y=x_0$), корнем которого является $x=\lambda_0=0{,}25$ (при $x_0=0{,}2$). Тогда

$$\left.\begin{aligned}
f_1(x_\partial)&=e^{-(0{,}4-x_\partial)}\left[1+0{,}75\int_0^{0{,}2}\Phi_1(y)\,e^{0{,}75y}dy+0{,}75\times\right.\\
&\left.\times\int_{0{,}2}^{\frac{0{,}4-x_\partial}{0{,}75}}\Phi_2(y)\,e^{0{,}75y}dy\right],\quad (0\leqslant x_\partial\leqslant 0{,}25);\\
f_2(x_\partial)&=e^{-(0{,}4-x_\partial)}\left[1+0{,}75\int_0^{\frac{0{,}4-x_\partial}{0{,}75}}\Phi_1(y)\,e^{0{,}75y}dy\right],\\
&(0{,}25\leqslant x_\partial\leqslant 0{,}4).
\end{aligned}\right\}\qquad (2.1.15)$$

Или после интегрирования и преобразований

$$\left.\begin{aligned}
f_1(x_\partial)&=2{,}7676e^{x_\partial}-1{,}8406e^{1{,}(3)x_\partial};\\
f_2(x_\partial)&=4{,}6488e^{x_\partial}-4{,}8709e^{1{,}(3)x_\partial}+1{,}1622e^{1{,}(7)x_\partial}.
\end{aligned}\right\}\qquad (2.1.16)$$

Интегральное соотношение для функции обеспеченности холостых сбросов получается использованием второго уравнения системы (2.1.11):

$$\psi(x_c)=F[\beta+\alpha(0)+x_c]+\int_0^{x_0}\Phi_1(y)\,[1-\alpha'(y)]\,q[\beta+\alpha(y)-y+$$

$$+x_c]\,dy+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_2(y)\,[1-\alpha'(y)]\times$$

$$\times q[\beta+\alpha(y)-y+x_c]dy, \quad (0\leqslant x_c<\infty). \qquad (2.1.17)$$

Рассмотрим пример расчета с теми же параметрами. Из (2.1.17), учитывая (2.1.13), имеем

$$\psi(x_c)=e^{-1,2-x_c}+\int_0^{0,2}(2,7676e^{-y}-1,8406e^{-1,(3)y})\times$$

$$\times 0,75e^{-1,2+0,75y-x_c}dy+\int_{0,2}^{0,8}1,0459e^{-y}\cdot 0,75e^{-1,2+0,75y-x_c}dy.$$

Или

$$\psi(x_c)=0,4700e^{-x_c}, \quad (0\leqslant x_c<\infty). \qquad (2.1.18)$$

Численные значения обеспеченности для некоторых точек кривой сбросов будут

x_c	0	0,1	0,2	0,3	1,0	2,2	4,2
$\psi(x_c)$	0,4700	0,4253	0,3848	0,3482	0,1730	0,0521	0,0071

Формулы (2.1.13), (2.1.16) и (2.1.18) должны удовлетворять критериальному соотношению, отражающему баланс водохранилища за многолетие. При $\alpha'(y)=0,25$ и $\alpha(0)=0,40$ в условиях рассмотренного примера имеем $E_{\alpha(y)}=0,5413$; $E_c=0,4700$ и $E_\partial=0,0116$.

Таким образом, $0,5413+0,4700-0,0116=0,9997\simeq 1$, т. е. тождество (2.1.7) соблюдается.

3. Обобщение расчетной схемы на случай любой емкости водохранилища

Система двух интегральных уравнений для безусловной функции обеспеченности наполнений (2.1.11) ограничивает глубину многолетнего регулирования стока условием $x_0\leqslant \leqslant\eta(0)$, которое в случае постоянной отдачи идентично с $\alpha\leqslant\beta\leqslant 2\alpha$.

В более же общем случае глубина регулирования может быть значительно выше, т. е. многолетняя емкость водохранилища может достигать 3—4 и более объемов годовой отдачи брутто. В этой связи даны расчетно-методические построения для случая любой емкости водохранилища.

Безусловная функция обеспеченности наполнений сводится к следующей системе интегральных уравнений:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x)+\int_0^{x_n}\Theta_1(x,y)\,dy+\int_{x_n}^{\eta(x)}\Theta_2(x,y)\,dy;\\
&\Phi_2(x)=F(x)+\int_0^{x_n}\Theta_1(x,y)\,dy+\int_{x_n}^{x_{n-1}}\Theta_2(x,y)\,dy+\\
&+\int_{x_{n-1}}^{\eta(x)}\Theta_3(x,y)\,dy;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi_{n+1}(x)=F(x)+\int_0^{x_n}\Theta_1(x,y)\,dy+\cdots+\int_{x_1}^{x_0}\Theta_{n+1}(x,y)\,dy+\\
&+\int_{x_0}^{\eta(x)}\Theta_{n+2}(x,y)\,dy;\\
&\Phi_{n+2}(x)=F(x)+\int_0^{x_n}\Theta_1(x,y)\,dy+\cdots+\int_{x_1}^{x_0}\Theta_{n+1}(x,y)\,dy+\\
&+\int_{x_0}^{\beta}\Theta_{n+2}(x,y)\,dy.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2.1.19)
$$

Здесь $F(x)=F[x+\alpha(0)]$, $\Theta_i(x,\ y)=\Phi_i\ (y)\cdot[1-\alpha'(y)]q[x-y+\alpha(y)]$, $(i=1, 2, \ldots, n+2)$, для которой также соблюдается условие:

$$\Phi_i(x_{n-i+1})=\Phi_{i+1}(x_{n-i+1}),\quad (i=1, 2, \ldots, n+1). \qquad (2.1.20)$$

Система (2.1.19) представлена в общем виде и учитывает любые практически возможные сочетания параметров регулирования и стока. В реальных условиях расчетов значения параметров регулирования обычно ограничены известными пределами. Так, параметр β даже в случае очень высокой вариации годового стока ($C_v=1{,}0\div1{,}2$) практически будет редко превышать 4—5 объемов годовой отдачи $\alpha(y)$. Поэтому число уравнений, как правило, будет не более четырех-пяти. Входящие в (2.1.19) значения $\eta(x)$ и x_i, где $i=0, 1, 2, \ldots, n$, опре-

деляются из уравнения годового водного баланса водохранилища при $k=0$:

$$x-y+\alpha(y)=0. \qquad (2.1.21)$$

Приняв значение $y=\beta$, находим корень x_0 этого уравнения, а именно. $x_0=\beta-\alpha(\beta)$. Считаем, что величина $\beta-\alpha(\beta)>0$.

Если x в уравнении (2.1.21) предположить равным нулю, то

$$\alpha(y)-y=0. \qquad (2.1.22)$$

Находим наименьший вещественный корень y_0 уравнения (2.1.22), значение которого не выходит за пределы промежутка $(0, \beta)$.

Разрешая уравнение (2.1.21) относительно аргумента y, будем иметь

$$y=\eta(x). \qquad (2.1.23)$$

Отметим, что в зависимости от принятого закона изменения отдачи $\alpha=\alpha(y)$, вообще говоря, может быть получено несколько функций вида (2.1.23), из которых выбирается та кривая, которая проходит через точку $(0, y_0)$. Считаем, что принятая кривая (2.1.21) непрерывна, причем любая прямая $x=\text{const}$ пересекает ее только в одной точке.

В практических расчетах многолетнего регулирования стока обычно принимаются преимущественно простые зависимости для переменной отдачи вида $\alpha(y)=ay+\alpha(0)$, где a — коэффициент, обычно меньший единицы, и $\alpha(0)$ — наименьшее значение расчетной отдачи при наполнении $y=0$.

Если окажется, что корень $x_0>\eta(0)$ уравнения (2.1.23), то определяется корень x_1 из $x_0=\eta(x)$. Если же и это значение x_1 будет больше $\eta(0)$, то корень x_2 уравнения $x_1=\eta(x)$ и т. д. до тех пор пока некоторый корень x_n не станет меньше значения $\eta(0)$. Принципиальная схема разбиения области интегрирования на частные области показана на рис. 2.1.5.

В частном случае, если кривая $y=\eta(x)$ не пересекает область $(0\leqslant x\leqslant\beta;\ 0\leqslant y\leqslant\beta)$, то система интегральных уравнений (2.1.19) выродится в одно интегральное соотношение вида (2.1.1).

Решение системы (2.1.19) покажем на конкретном примере. Пусть $\beta=2{,}4$; $\alpha(\beta)=0{,}9$; $\alpha(0)=0{,}3$; $\alpha(y)=0{,}25y+0{,}3$. Не нарушая общности методических построений, примем распределение вероятностей стока, согласно кривой Пирсона III типа при значении $\gamma=1$.

При указанных параметрах имеем

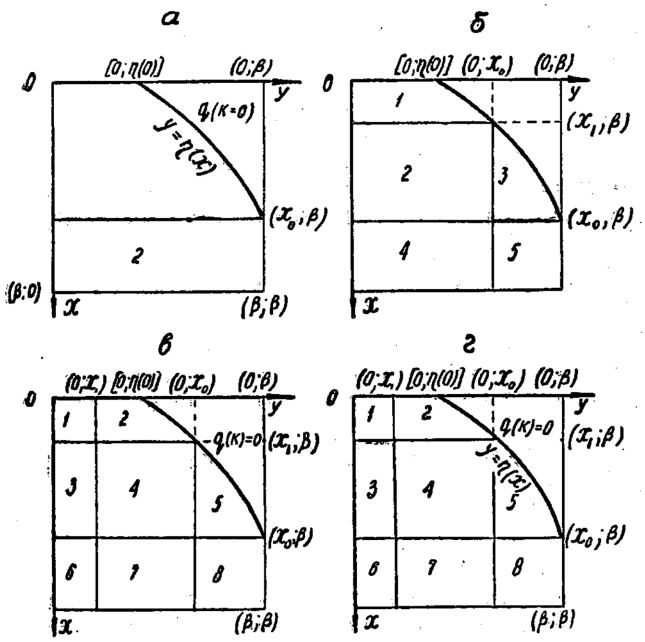

Рис. 2.1.5. Схема разбиения области интегрирования для наполнений при $\alpha=\alpha(y)$ и $x_0>\eta(0)$: *а* — 1; *б* — 2; *в* — 3; *г* — 4-й год регулирования

$$y=\eta(x)=\frac{4x+1{,}2}{3}, \qquad (2.1.23')$$

где $x_0=1{,}5$; $x_1=0{,}825$; $x_2=0{,}3188$; $\eta(0)=0{,}4$.

Так как $x_2<\eta(0)$, то условие $x_n\leqslant\eta(x)$ выполняется при $n=2$ и, следовательно, система (2.1.19) имеет вид

$$\Phi_1(x)=F(x)+\int_0^{0{,}3188}\Theta_1(x,y)\,dy+\int_{0{,}3188}^{\frac{4x+1{,}2}{3}}\Theta_2(x,y)\,dy;$$

$$\Phi_2(x)=F(x)+\int_0^{0{,}3188}\Theta_1(x,y)\,dy+\int_{0{,}3188}^{0{,}825}\Theta_2(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{0{,}825}^{\frac{4x+1{,}2}{3}}\Theta_3(x,y)\,dy;$$

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_3(x) &= F(x) + \int_0^{0,3188} \Theta_1(x, y)\,dy + \int_{0,3188}^{0,825} \Theta_2(x, y)\,dy + \\
&+ \int_{0,825}^{1,5} \Theta_3(x, y)dy + \int_{1,5}^{\frac{4x+1,2}{3}} \Theta_4(x, y)\,dy; \\
\Phi_4(x) &= F(x) + \int_0^{0,3188} \Theta_1(x, y)dy + \int_{0,3188}^{0,825} \Theta_2(x, y)dy + \\
&+ \int_{0,825}^{1,5} \Theta_3(x, y)dy + \int_{1,5}^{2,4} \Theta_4(x, y)dy.
\end{aligned}\right\} \quad (2.1.24)$$

Учитывая, что $[1-\alpha'(y)]=0,75$, имеем

$$\Theta_i(x, y) = \Phi_i(y)\cdot 0,75e^{-(x+0,3+0,75y)},\quad F(x) = e^{-(x+0,3)}$$

$$(i=1, 2, 3, 4).$$

Чтобы (2.1.24) свести, например, к системе восьми линейных алгебраических уравнений, полагаем, что в первом уравнении аргумент равен нулю; во втором — 0,3188 и 0,4; в третьем — 0,825 и 0,9 (3); в четвертом — 1,5; 1,6 (4) и 2,4. Восемь значений x приняты в целях удобства пользования формулами приближенных квадратур (вычислены, согласно (2.1.23′)). Тогда (2.1.24) сведется к системе, содержащей восемь уравнений (запись не приводится). Заменив интегралы этой системы по формуле приближенных квадратур (трапеций), а также подставляя вместо $\Theta_i(x, y)$ их значения, получим

$$\left.\begin{aligned}
&0,9114\Phi(0)+0,1411\Phi(0,3188)+0,0305\Phi(0,4) = -0,7408, \\
&0,0644\Phi(0)+0,7884\Phi(0,3188)+0,1898\Phi(0,825) = -0,5386, \\
&0,0594\Phi(0)+0,1951\Phi(0,3188)+0,2125\Phi(0,825)-\Phi(0,4)+ \\
&+0,0406\Phi(0,9) = -0,4916, \\
&0,0388\Phi(0)+0,1276\Phi(0,3188)+0,7330\Phi(0,825)+ \\
&+0,2531\Phi(1,5) = -0,3246,
\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&0{,}0348\Phi(0)+0{,}1145\Phi(0{,}3188)+0{,}2397\Phi(0{,}825)+\\
&+0{,}2758\Phi(1{,}5)-\Phi(0{,}9)+0{,}0542\Phi(1{,}6)=-0{,}0191,\\
&0{,}0198\Phi(0)+0{,}0649\Phi(0{,}3188)+0{,}1359\Phi(0{,}825)-\\
&-0{,}6993\Phi(1{,}5)+0{,}3375\Phi(2{,}4)=-0{,}1659,\\
&0{,}0671\Phi(0)+0{,}0562\Phi(0{,}3188)+0{,}1177\Phi(0{,}825)+\\
&+0{,}2603\Phi(1{,}5)+0{,}2922\Phi(2{,}4)-\Phi(1{,}6)=-0{,}1931,\\
&0{,}0083\Phi(0)+0{,}0214\Phi(0{,}3188)+0{,}0553\Phi(0{,}825)+\\
&+0{,}1222\Phi(1{,}5)-0{,}8628\Phi(2{,}4)=-0{,}0672.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1.25)
$$

Методом последовательного исключения неизвестных получены следующие значения безусловной функции обеспеченности наполнений:

$$\Phi(0)=0{,}9951; \qquad \Phi[0{,}9(3)]=0{,}8650;$$
$$\Phi(0{,}3188)=0{,}9797; \qquad \Phi(1{,}5)=0{,}6597;$$
$$\Phi(0{,}4)=0{,}9671; \qquad \Phi[1{,}6(4)]=0{,}5704;$$
$$\Phi(0{,}825)=0{,}8940; \qquad \Phi(2{,}4)=0{,}2679.$$

Имея кривую обеспеченности наполнений $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ..., ..., $\Phi_{n+2}(x)$, нетрудно определить *функцию обеспеченности дефицитов отдачи.*

Разрешая уравнения годового водного баланса водохранилища в перебойные годы $\alpha(y)-y-x_\partial=0$ относительно y, получим

$$y=\mu(x). \qquad (2.1.26)$$

Кривая (2.1.26) выбирается так же, как и (2.1.23).

Выберем из всех x_i ($i=0, 1, 2, \ldots, k-1, k, \ldots, n$) системы интегральных уравнений (2.1.19) такие два смежные их значения x_k и x_{k-1} (рис. 2.1.6), которые удовлетворяют неравенству

$$x_k \leqslant \mu(0) \leqslant x. \qquad (2.1.27)$$

Далее определяем корни следующих уравнений:

$$x_n=\mu(x),\ x_{n-1}=\mu(x),\ \ldots,\ x_{k-1}=\mu(x) \text{ и } x_k=\mu(x),$$

где $x_k, \ldots, x_n$ — корни уравнения (2.1.23). Пусть ими будут $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$. Тогда вся область интегрирования

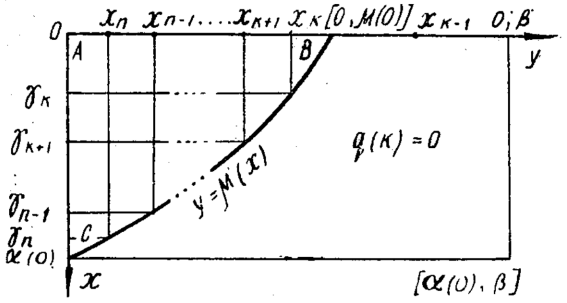

Рис. 2.1.6. Разбиение области интегрирования для дефицитов отдачи при $\alpha=\alpha(y)$

$[x=0,\ y=\mu(x),\ y=0$ — фигура $ABC]$ разобьется на некоторое число частных областей (рис. 2.1.6). В результате система интегральных соотношений для кривой обеспеченности дефицитов отдачи имеет вид

$$
\left.
\begin{aligned}
f_1(x_\partial) &= F[\alpha(0)-x_\partial]+\int_0^{x_0}\Theta_1(x,\ y)dy+\cdots+\\
&+\int_{x_{k-1}}^{x_k}\Theta_{n-k+1}(x,\ y)\,dy+\int_{x_k}^{\mu(x_\partial)}\Theta_{n-k+2}(x,\ y)\,dy\\
&\qquad\qquad (0\leqslant x_\partial\leqslant\lambda_k);\\
f_2(x_\partial) &= F[\alpha(0)-x_\partial]+\int_0^{x_n}\Theta_1(x,\ y)\,dy+\int_{x_n}^{x_{n-1}}\Theta_2(x,\ y)\,dy+\\
&+\cdots+\int_{x_{k+1}}^{\mu(x_\partial)}\Theta_{n-k+1}(x,\ y)\,dy,\ (\lambda_k\leqslant x\leqslant\lambda_{k+1});\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{n-k+1}(x_\partial) &= F[\alpha(0)-x_\partial]+\int_0^{x_n}\Theta_1(x,\ y)\,dy+
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2.1.28)
$$

$$+\int_{x_n}^{\mu(x_\partial)}\Theta_2(x,y)\,dy,\ (\lambda_{n-1}\leqslant x_\partial\leqslant\lambda_n);$$

$$f_{n-k+2}(x_\partial)=F[\alpha(0)-x_\partial]+\int_0^{\mu(x_\partial)}\Theta_1(x,y)\,dy$$

$$[\lambda_n\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(0)],$$

где $\Theta_i(x,y)=\Phi_i(y)\cdot[1-\alpha'(y)]\cdot q[\alpha(y)-y-x_\partial]$, $(i=1,2,\ldots,\ldots,n-k,+2)$.

Необходимо отметить, что верхний предел для аргумента $x_\partial=\alpha(0)$ в последнем уравнении является корнем уравнения $y=\mu(x_\partial)$ при $y=0$.

Система интегральных соотношений (2.1.28) записана в общем виде. В реальных условиях обычно $n=k$ и часто не превышает системы двух интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}f_1(x_\partial)&=F[\alpha(0)-x_\partial]+\int_0^{x_n}\Theta_1(x,y)\,dy+\int_{x_n}^{\mu(x_\partial)}\Theta_2(x,y)\,dy\\&\qquad(0\leqslant x_\partial\leqslant\lambda_n);\\f_2(x_\partial)&=F[\alpha(0)-x_\partial]+\int_0^{\mu(x_\partial)}\Theta_1(x,y)\,dy,\ [\lambda_n\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(0)].\end{aligned}\right\}\quad(2.1.29)$$

При условиях $x_n=\mu(0)$ либо $x_n=0$ (или $\lambda=0$) система (2.1.29) вырождается в одно интегральное соотношение:

$$f(x_\partial)=F[\alpha(0)-x_\partial]+\int_0^{\mu(x_\partial)}\Phi_1(y)\cdot[1-\alpha'(y)]\,q[\alpha(y)-y-x_\partial]\,dy,$$

$$[0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(0)].\qquad(2.1.30)$$

Для указанных выше параметров регулирования $\beta=2{,}40$ и $\alpha(y)=0{,}25y+0{,}30$ были определены следующие значения корней уравнения (2.1.21): $x_2=0{,}3188$; $x_1=0{,}825$ и $x_0=1{,}50$.

Уравнение годового баланса запишется $0{,}25y+0{,}30-y=0$, отсюда $y=\mu(x_\partial)=\frac{1{,}2-4x_\partial}{3}$. При $x_\partial=0$ значение $\mu(0)=0{,}4$.

Условие (2.1.27) удовлетворяется при $x_2 \leqslant \mu(0) \leqslant x_1$. Корнем уравнения $x_0 = \mu(x_\partial)$, т. е. $0{,}3188 = \frac{1{,}2-4x_\partial}{3}$, будет $\lambda_0 = 0{,}0610$. Остальные корни функций наполнения x_1 и x_2 больше $\mu(0)$.

Таким образом, система (2.1.28) для указанных параметров регулирования запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_\partial) &= 0{,}7408e^{x_\partial} + 0{,}5556e^{x_\partial}\left[\int_0^{0{,}3188} \Phi_1(y)\,e^{0{,}75y}\,dy + \right. \\ &\left. + \int_{0{,}3188}^{\frac{1{,}2-4x_\partial}{3}} \Phi_2(y)\,e^{0{,}75y}dy\right], \quad (0 \leqslant x_\partial \leqslant 0{,}0610); \\ f_2(x_\partial) &= 0{,}7408e^{x_\partial} + 0{,}5556e^{x_\partial} \int_0^{\frac{1{,}2-4x_\partial}{3}} \Phi_1(y)\,e^{0{,}75y}\,dy \\ &\qquad (0{,}0610 \leqslant x_\partial \leqslant 0{,}3). \end{aligned}\right\} \quad (2.1.31)$$

Последнее уравнение системы (2.1.19) с учетом уравнения водного баланса зоны *холостых сбросов* имеет такой вид:

$$\psi(x_c) = F[\beta + \alpha(0) + x_c] + \int_0^{x_n} \Theta_1(x, y)\,dy + \cdots +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_0} \Theta_{n+1}(x, y)\,dy + \int_{x_0}^{\beta} \Theta_{n+2}(x, y)\,dy, \quad (0 \leqslant x_c < \infty), \quad (2.1.32)$$

где $\Theta_i(x, y) = \Phi_i(y) \cdot [1 - \alpha'(y)] \cdot q[\beta + \alpha(\beta) - y + x_c]$. Или, при указанных выше параметрах,

$$\psi(x_c) = e^{-(x_c+2{,}7)}\left[1 + 0{,}75\left(\int_0^{0{,}3188} \Phi_1(y)\,e^{0{,}75y}\,dy + \right.\right.$$

$$+\int_{0,3188}^{0,825}\Phi_2(y)\,e^{0,75y}\,dy+\int_{0,825}^{1,5}\Phi_3(y)\,e^{0,75y}\,dy+\int_{1,5}^{2,4}\Phi_4(y)\,e^{0,75y}dy\Bigg)\Bigg] \tag{2.1.33}$$

имеем

$$\psi(x_c)=0{,}2673e^{-x_c}. \tag{2.1.34}$$

Проверка при $x_c=0$ дает $\psi(x_c=0)=0{,}2673$ вместо 0,2679, полученных путем решения системы уравнений (2.1.25).

В заключение убедимся в соблюдении критериального тождества (баланса за многолетие):

$$E_{\alpha(y)}=\alpha(0)+\int_0^{\infty}\Phi(y)\,\alpha'(y)\,dy=0{,}3+0{,}25\int_0^{2,4}\Phi(y)\,dy=0{,}7297;$$

$$E_c=0{,}2679;\quad E_\partial=0{,}0005.$$

Следовательно, 0,7297+0,2679—0,0005=0,9971.

Полученный небаланс в 0,0029 ($\Delta=0{,}3\%$) незначителен и объясняется целиком приближенностью формул квадратур.

Глава 2.2

МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА ПРИ ОТДАЧЕ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ НАПОЛНЕНИЯ ВОДОХРАНИЛИЩА В КОНЦЕ ГОДА

Для рек, сток которых сосредоточен в течение весьма короткого сезона половодья (равнинный Казахстан и другие регионы, сходные по гидрологическому режиму), вполне рациональной является схема, согласно которой отдача водохранилища назначается в зависимости от его наполнения в конце водохозяйственного года, т. е. $\alpha = \alpha(x)$.

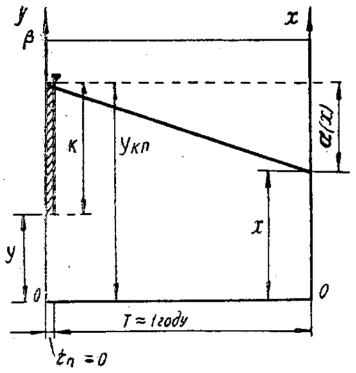

Рис. 2.2.1. Годовой баланс водохранилища при $\alpha = \alpha(x)$

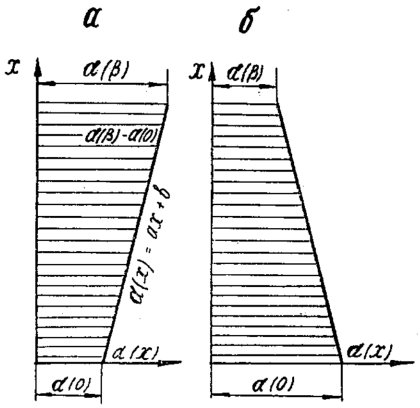

Рис. 2.2.2. Изменение отдачи в зависимости от наполнения водохранилища в конце года: *а* — при $\min \alpha(x)$; *б* — при $\max \alpha(x)$

Достоинством такой схемы является учет не только наполнения в конце предшествующего года, но и водности половодья в год регулирования. В этих реальных условиях отдача на предстоящий год может назначаться в начале межени соответ-

ственно тому запасу воды, который будет в водохранилище на момент окончания паводка. При этом предполагается, что весь годовой объем стока проходит в весьма короткий период весеннего снеготаяния ($t_п \to 0$), а вся сработка водохранилища осуществляется практически на протяжении всего года.

При регулировании стока на переменную отдачу $\alpha(x)$ связь между наполнениями в конце паводка и года происходит через известную функцию отдачи. Поясним это на примере. Пусть функция отдачи задана в виде $\alpha(x)=ax+b$, где a и b постоянные. Тогда по наполнению на момент окончания паводка $z_{кп} = x+\alpha(x)=x(1+a)+b$ находим аргумент $x=(z_{кп}-b):(1-a)$. Следовательно, при известном наполнении в конце паводка и заданном виде функции $\alpha(x)$ наполнение водохранилища в конце года — величина известная (рис. 2.2.1, 2.2.2).

1. Расчеты неглубокого многолетнего регулирования стока

Функция обеспеченности наполнений определяется интегрированием всего квадрата наполнений $[\beta, \beta]$, так как $\beta \leqslant \min \alpha(x)$:

$$\Phi(x)=F[x+\alpha(x)]+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,[1-\alpha'_y(x)]\,q[x-y+\alpha(x)]\,dy. \quad (2.2.1)$$

Не нарушая методической общности, примем параметр $\gamma=1$. Учитывая также, что $\alpha'_y(x)=0$, получим

$$\Phi(x)=e^{-x-\alpha(x)}+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,e^{-x+y-\alpha(x)}dy, \quad (2.2.2)$$

где $\alpha(x)=ax+b$.

Решая (2.2.2) методом определителей Фредгольма при $b=\beta$, имеем

$$\Phi(x)=\frac{ae^{-(1+a)x}}{ae^{\beta}-e^{-a\beta}-1}. \quad (2.2.3)$$

Функция обеспеченности дефицитов отдачи состоит из двух интегральных уравнений, соответствующих двум частным областям *1* и *2* (рис. 2.2.3), устанавливаемых исходя из уравнения годового водного баланса водохранилища $k=\alpha(x)-y-x_{\partial}$. При $k=0$ $y=\alpha(0)-x$, которое, если $y=\beta$, имеет единственный корень

$$x_0=\alpha(0)-\beta. \quad (2.2.4)$$

По условию рассматриваемой расчетной схемы $\beta \leqslant \alpha(0)$, если при опорожненном состоянии водохранилища ($x=0$) наступит $\min \alpha(x)$ (рис. 2.2.2, *а*).

Прямая (2.2.4) разобьет прямоугольник *ABCD* на две части *ABED*, для которой $F(k)<1$ и *ECD* с $F(k)=1$ (рис. 2.2.3). Фигура *ABED* разобьется на две частные области *1* и *2* с разными пределами интегрирования $(0, \beta)$ и $(0, \alpha(0)-x)$, по которым составляется система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_\partial) &= F[\alpha(0)-x_\partial] + \int_0^\beta \Phi(y)\, q[\alpha(0)-y-x_\partial]\, dy \\ &\qquad [0 \leqslant x_\partial \leqslant \alpha(0)-\beta]; \\ f_2(x_\partial) &= F[\alpha(0)-x_\partial] + \int_0^{\alpha(0)-x_\partial} \Phi(y)\, q[\alpha(0)-y-x_\partial]\, dy \\ &\qquad [\alpha(0)-\beta \leqslant x_\partial \leqslant \alpha(0)]. \end{aligned}\right\} \quad (2.2.5)$$

В частном случае, когда $b=\beta=\alpha(0)$, значение корня $x_0=0$. Тогда вместо двух частных областей *1* и *2* имеем лишь одну с пределами изменения $x[0, \alpha(0)]$ и $y[0, \alpha(0)-x]$. Следовательно, функция обеспеченности дефицитов отдачи будет описываться одним уравнением:

$$f(x_\partial) = F[\alpha(0)-x_\partial] + \int_0^\beta \Phi(y)\, q[\alpha(0)-y-x_\partial]\, dy \quad [0 \leqslant x_\partial \leqslant \alpha(0)]. \quad (2.2.6)$$

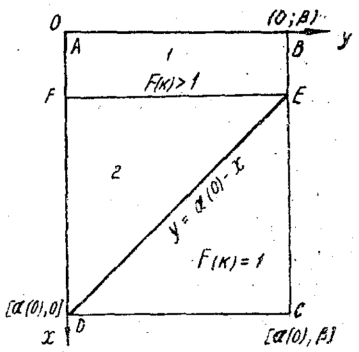

Рис. 2.2.3. Выделение области с $F(k)<1$

Используя (2.2.3), получаем решение системы уравнений (2.2.5) и (2.2.6):

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_\partial) &= \frac{a e^{x_\partial}}{a e^{\alpha(0)} + e^{-a\beta} - 1}, \quad [0 \leqslant x_\partial \leqslant \alpha(0)-\beta]; \\ f_2(x_\partial) &= \frac{e^{x_\partial}(a + e^{-\alpha(0)-a\beta}) - e^{(1+a)[\alpha(0)-x_\partial]}}{a e^{\alpha(0)} + e^{-a\beta} - 1}, \\ &\qquad [\alpha(0)-\beta \leqslant x_\partial \leqslant \alpha(0)]; \end{aligned}\right\} \quad (2.2.7)$$

$$f(x_\partial) = \frac{e^{x_\partial}(a+e^{-\beta(a+1)})-e^{(1+a)(x_\partial-\beta)}}{ae^{\beta}+e^{-a\beta}-1}. \qquad (2.2.8)$$

при $\alpha(0)=b=\beta$.

В годы, дающие сброс, наполнение в конце года всегда $x_н=\beta$, а отдача $\alpha(\beta)$. При этом, если учесть баланс воды в зоне избыточного притока, для *функции обеспеченности холостых сбросов* будем иметь

$$\psi(x_c)=F[\alpha(\beta)+\beta+x_c]+$$

$$+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,q[\alpha(\beta)+\beta-y+x_c]\,dy$$

$$(0\leqslant x_c<\infty). \qquad (2.2.9)$$

Или, используя $\alpha(\beta)=a\beta+\beta$ и (2.2.3), имеем

$$\psi(x_c)=\frac{ae^{-(a+1)\beta-x_c}}{ae^{\beta}+e^{-a\beta}-1}. \qquad (2.2.10)$$

Таблица 2.2.1

Абсциссы обобщенной водохозяйственной характеристики водохранилища

x	$f(x_\partial)$	$\Phi(x)$	$\psi(x_c)$
0	0,8218	0,8218	0,3693
0,1	0,8663	0,7004	0,3341
0,2	0,9080	0,5975	0,3024
0,3	0,9455	0,5085	—
0,4	0,9770	0,4333	—
0,5	1,0	0,3693	0,2240
1,0	—	—	0,1358
2,0	—	—	0,0500
5,0	—	—	0,0249

При конкретных параметрах $\beta=0{,}5$; $\alpha(\beta)=0{,}8$; $\alpha(0)=0{,}5$; т. е. $\alpha(x)=0{,}6x+0{,}5$, численные значения функций (2.2.3), (2.2.8) и (2.2.10) приведены в табл. 2.2.1.

Нетрудно убедиться, что критериальное тождество (2.1.7) строго выполняется.

2. Расчеты глубокого многолетнего регулирования стока

Как и ранее, систему интегральных уравнений, описывающих *кривую обеспеченности наполнений,* получим на основе разбивки квадрата наполнений $[\beta, \beta]$ на частные области интегрирования (рис. 2.2.4).

Из уравнения годового водного баланса водохранилища, полагая в нем $k=0$, имеем

$$y=x+\alpha(x). \qquad (2.2.11)$$

Линия (2.2.11) разделит квадрат наполнений (β, β) на две зоны: с $q(k)=0$ и с $q(k)>0$.

Полагая в (2.2.11) значение $y=\beta$, получим

$$\beta=x+\alpha(x)=\eta(x). \qquad (2.2.12)$$

Пусть наименьший корень этого уравнения будет x. Если окажется, что корень x_0 больше минимального значения отда-

чи водохранилища, т. е. $x_0 > \alpha(0)$, то следует искать корень x_1 уравнения $x_0 = x + \alpha(x)$ и т. д. до тех пор, пока некоторый корень x_n уравнения $x_{n-1} = x + \alpha(x)$ не станет меньше $\alpha(0)$. Определив корни $x_0, x_1, \ldots, x_n$, проведем на рис. 2.2.4, *а* горизонтальные прямые $x = x_0$, $x = x_1, \ldots$, а также вертикальные

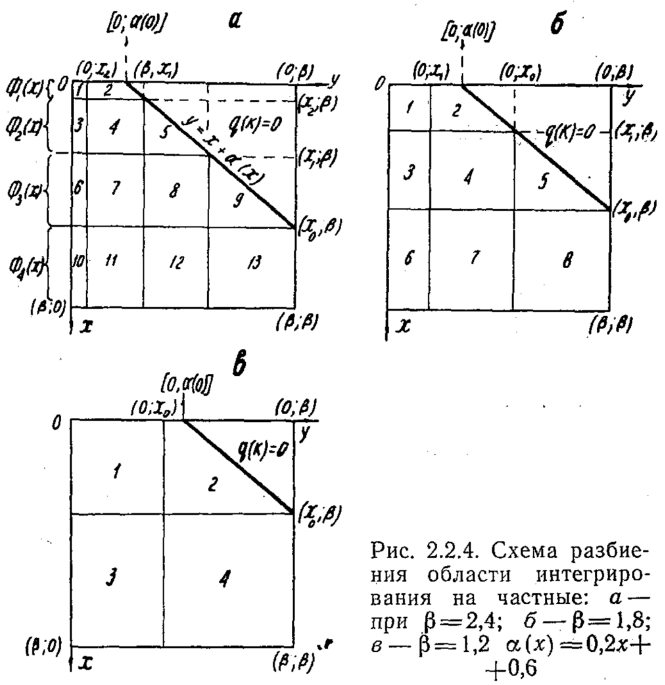

Рис. 2.2.4. Схема разбиения области интегрирования на частные: *а* — при $\beta = 2{,}4$; *б* — $\beta = 1{,}8$; *в* — $\beta = 1{,}2$ $\alpha(x) = 0{,}2x + 0{,}6$

линии $y = x_0$, $y = x_1, \ldots, y = x_n$. В результате действительная область интегрирования, отвечающая зоне квадрата наполнений с $q(k) > 0$, разобьется на 13 частных областей, которые соответствуют параметрам регулирования $\beta = 2{,}4$ и $\alpha(x) = 0{,}2x + 0{,}6$.

В общем случае число частных областей интегрирования будет равно

$$m = \frac{\nu(\nu+5)}{2} + 1, \qquad (2.2.13)$$

где ν — количество положительных корней $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Так, число частных областей $m = 8$ (рис. 2.2.4, *б*) будет при $\nu = 2$, т. е. при двух положительных корнях уравнения (2.2.13) — x_0 и x_1; значение $m = 4$ будет при $\nu = 1$ (рис. 2.2.4, *в*).

Следовательно, система интегральных уравнений для зоны наполнений водохранилища может быть представлена таким образом:

$$\Phi_1(x)=F[x+\alpha(x)]+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+$$

$$+\int_{x_n}^{x+\alpha(x)}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant x_n);$$

$$\Phi_2(x)=F[x+\alpha(x)]+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+$$

$$+\int_{x_n}^{x_{n-1}}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy+\int_{x_{n-1}}^{x+\alpha(x)}\Phi_3(y)\,q(k)\,dy,$$

$$(x_n\leqslant x\leqslant x_{n-1});$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2.2.14)$$

$$\Phi_{n+1}(x)=F[x+\alpha(x)]+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+$$

$$+\int_{x_n}^{x_{n-1}}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy+\cdots+\int_{x_0}^{x+\alpha(x)}\Phi_{n+2}(y)\,q(k)\,dy,$$

$$(x_1\leqslant x\leqslant x_0);$$

$$\Phi_{n+2}(y)=F[x+\alpha(x)]+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\cdots+$$

$$+\int_{x_1}^{x_0}\Phi_{n+1}(y)\,q(k)\,dy+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_{n+2}(y)\,q(k)\,dy,\quad (x_0\leqslant x\leqslant\beta);$$

где $q(k)=q[x-y+\alpha(x)]$.

Система (2.2.14) содержит $n+2$ интегральных уравнений, т. е. на одно больше, чем число корней ν. Например, при наличии двух корней $x_0>\alpha(0)$ и $x_1<\alpha(0)$ система (2.2.14) будет состоять из трех интегральных уравнений:

$$
\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F[x+\alpha(x)]+\int_0^{x_1}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\\
&+\int_{x_1}^{x+\alpha(x)}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant x_1);\\
&\Phi_2(x)=F[x+\alpha(x)]+\int_0^{x_1}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\int_{x_1}^{x_0}\Phi_2(y)\,q(k)\times\\
&\times dy+\int_{x_0}^{x+\alpha(x)}\Phi_3(y)\,q(k)\,dy,\quad (x_1\leqslant x\leqslant x_0);\\
&\Phi_3(x)=F[x+\alpha(x)]+\int_0^{x_1}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\int_{x_1}^{x_0}\Phi_2(y)\,q(k)\times\\
&\times dy+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_3(y)\,q(k)\,dy,\quad (x_0\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\}\qquad (2.2.15)
$$

В случае одного корня $x_0<\alpha(0)$ она сведется к двум уравнениям:

$$
\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F[x+\alpha(x)]+\int_0^{x_0}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\\
&+\int_0^{x+\alpha(x)}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant x_0);\\
&\Phi_2(x)=F[x+\alpha(x)]+\int_0^{x_0}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\\
&+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy,\quad (x_0\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\}\qquad (2.2.16)
$$

Нетрудно заметить, что если корень x_0 окажется не только больше $\alpha(0)$, но одновременно его значение будет равно или больше многолетней емкости водохранилища, т. е., если $x_0 \geqslant \beta$, то в этом частном случае система (2.2.16) выродится в одно интегральное уравнение, которое рассмотрено в расчетной схеме неглубокого многолетнего регулирования стока (2.2.1).

Не нарушая методической общности, для некоторого упрощения математических выводов примем $\gamma=1$. Тогда (2.2.16) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x) &= \left[1+\int_0^{x_0}\Phi_1(y)e^y dy+\int_{x_0}^{x+\alpha(x)}\Phi_2(y)e^y dy\right]\cdot e^{-x-\alpha(x)},\\ &\qquad (0\leqslant x\leqslant x_0);\\ \Phi_2(x) &= \left[1+\int_0^{x_0}\Phi_1(y)e^y dy+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_2(y)e^y dy\right]\cdot e^{-x-\alpha(x)},\\ &\qquad (x_0\leqslant x\leqslant \beta).\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.17)$$

Для ее решения введем следующие обозначения:

$$A=\int_0^{x_0}\Phi_1(y)e^y dy \quad \text{и} \quad B=\int_{x_0}^{\beta}\Phi_2(y)e^y dy. \qquad (2.2.18)$$

Тогда второе уравнение из (2.2.17) будет выглядеть так:

$$\Phi_2(x)=(1+A+B)e^{-x-\alpha(x)}. \qquad (2.2.19)$$

С другой стороны, второй интеграл первого уравнения (2.2.17) есть

$$\int_{x_0}^{x+\alpha(x)}\Phi_2(y)e^y dy=\int_{x_0}^{\beta}\Phi_2(y)e^y dy+\int_{\beta}^{x+\alpha(x)}\Phi_2(y)e^y dy=B+$$

$$+\int_{\beta}^{x+\alpha(x)}\Phi_2(y)e^y dy. \qquad (2.2.20)$$

Подставляя (2.2.19) в первое уравнение (2.2.17), как решение функции $\Phi_2(y)$, с учетом (2.2.20) получим

$$\Phi_1(x) = (1+A+B)\,[1+M(x)]\,e^{-x-\alpha(x)}, \qquad (2.2.21)$$

где $M(x) = \int\limits_{\beta}^{x+\alpha(x)} e^{-\alpha(y)}\,dy.$

Значения A и B определяются так. Приняв $x=y$, левую и правую части выражений (2.2.19) и (2.2.21), умножим на e^y и возьмем интеграл

$$\int\limits_0^{x_0} \Phi_1(y)\,e^y\,dy = \int\limits_0^{x_0} [1+A+B]\cdot[1+M(x)]\,e^{-\alpha(y)}\,dy,$$

$$\int\limits_{x_0}^{\beta} \Phi_2(y)\,e^y dy = \int\limits_{x_0}^{\beta} (1+A+B)\,e^{-\alpha(y)}dy.$$

Или учитывая (2.2.18):

$$A = (1+A+B)\cdot\int\limits_0^{x_0} [1+M(x)]\,e^{-\alpha(y)}dy,$$

$$B = (1+A+B)\cdot\int\limits_{x_0}^{\beta} e^{-\alpha(y)}dy. \qquad (2.2.18')$$

Суммируя (2.2.18′) и прибавляя к обеим частям полученного соотношения по единице, будем иметь

$$1+A+B = (1+A+B)\left[\int\limits_0^{x_0} [1+M(x)]\,e^{-\alpha(y)}dy + \int\limits_{x_0}^{\beta} e^{-\alpha(y)}dy\right] + 1.$$

Откуда

$$1+A+B = \frac{1}{1-\int\limits_0^{\beta} e^{-\alpha(y)}dy - \int\limits_0^{x_0} M(x)e^{-\alpha(y)}\,dy}. \qquad (2.2.22)$$

Подставляя (2.2.22) в уравнения (2.2.19) и (2.2.21), получим

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= \frac{[1+M(x)]e^{-x-\alpha(x)}}{1-\int\limits_0^{\beta} e^{-\alpha(y)}dy-\int\limits_0^{x_0} M(x)e^{-\alpha(y)}\,dy}, \quad (0\leqslant x\leqslant x_0);\\
\Phi_2(x) &= \frac{e^{-x-\alpha(x)}}{1-\int\limits_0^{\beta} e^{-\alpha(y)}dy-\int\limits_0^{x_0} M(x)e^{-\alpha(y)}\,dy}, \quad (x_0\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.23}$$

Это решение справедливо для условий $x_0\leqslant\alpha(0)$ независимо от закона изменения отдачи $\alpha(x)$ и выбора емкости водохранилища.

Функция обеспеченности дефицитов отдачи описывается системой интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
f_1(x_\partial) &= F[\alpha(0)-x_\partial]+\int\limits_0^{x_0}\Phi_1(y)\,q[\alpha(0)-y-x_\partial]\,dy+\\
&+\int\limits_{x_0}^{\alpha(0)-x_\partial}\Phi_2(y)\,q[\alpha(0)-y-x_\partial]\,dy, \quad (0\leqslant x_\partial\leqslant\lambda_0);\\
f_2(x_\partial) &= F[\alpha(0)-x_\partial]+\int\limits_0^{\alpha(0)-x_\partial}\Phi_1(y)\,q[\alpha(0)-y-x_\partial]dy\\
&\qquad\qquad [\lambda_0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(0)]
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.24}$$

соответственно трем частным областям *1*, *2*, *3* (рис. 2.2.5), установленным согласно уравнению годового баланса водохранилища:

$$k=\alpha(0)-y-x_\partial. \tag{2.2.25}$$

При $x_0=\alpha(0)$ система (2.2.24) выродится в одно уравнение:

$$f(x_\partial)=F[\alpha(0)-x_\partial]+\int\limits_0^{\alpha(0)-x_\partial}\Phi(y)\,q[\alpha(0)-y-x_\partial]\,dy$$

$$(0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha(0)). \tag{2.2.26}$$

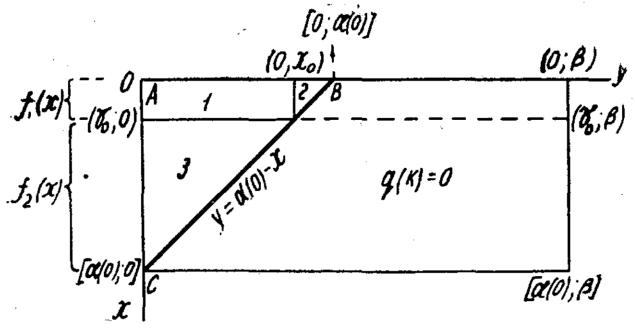

Рис. 2.2.5. Разбиение области ABC на частные *1, 2* и *3* для функции дефицитов отдачи ($\beta=0{,}8$ и $\alpha(x)=0{,}25x+0{,}4$)

В общем случае функция *обеспеченности холостых сбросов* имеет вид

$$\psi(x_c)=F[\alpha(\beta)+\beta+x_c]+\int_0^{x_n}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\cdots+$$

$$+\int_{x_1}^{x_0}\Phi_{n+1}(y)\,q(k)\,dy+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_{n+2}(y)\,q(k)\,dy,\quad (0\leqslant x_c<\infty). \qquad (2.2.27)$$

При наличии одного корня $x_0<\alpha(0)$ уравнения $k=\beta-y+\alpha(x)+x_c$ функция обеспеченности холостых сбросов будет включать только два интеграла:

$$\psi(x_c)=F[\alpha(\beta)+\beta+x_c]+\int_0^{x_0}\Phi_1(y)\,q(k)\,dy+\int_{x_0}^{\beta}\Phi_2(y)\,q(k)\,dy. \qquad (2.2.27')$$

Здесь

$$q(k)=q[\alpha(\beta)+\beta-y+x_c].$$

3. Особенности алгоритма численной интерпретации

Кривая обеспеченности наполнений. Алгоритмы численной интерпретации, приведенные в гл. 1.2, сохраняются за исключением некоторых из них.

Абсциссы кривой обеспеченности наполнений водохранилища на конец первого (начального) года регулирования в отличие от (1.2.44) определяются по формуле

$$\Phi_1(x_i) = F[x_i + \alpha(x_i)] = 1 - P[x_i + \alpha(x_i)]. \quad (2.2.28)$$

Учитывая, что $\alpha(x_i) = ax_i + b$, имеем

$$\Phi_1(x_i) = F[x_i\ (1+a) + b], \quad (2.2.28')$$

где $a = [\alpha(\beta) - \alpha(0)] : \beta$ и $b = \alpha(0)$ (см. рис. 2.2.2, *а*).

Дальнейший ход построения расчетных алгоритмов аналогичен изложенному в гл. 1.2. Отметим, что таблица постоянных множителей несколько отличается от таблицы, составленной при $\alpha = \text{const}$. В ней, в частности, отсутствуют диагональные строки с одинаковыми значениями $F(k)$.

Кривые обеспеченности дефицитов отдачи и холостых сбросов. Обеспеченность расчетного стока для зоны дефицитов отдачи

$$k_{ij} = \alpha(0) - y_j - x_{\partial i}$$

в объеме $\geqslant k_{ij}$ рассчитывается по формуле

$$F_{ij}(k) = 1 - P[\alpha(0) - y_j - x_{\partial i}], \quad (2.2.29)$$

годовых же объемов холостых сбросов —

$$-F_{ij}(k) = 1 - P[k_{ij} = \beta + x_{ci} - y_j + \alpha(\beta)]. \quad (2.2.30)$$

Последующие расчеты выполняются так же, как и в гл. 1.2,

Таблица 2.2.2

Абсциссы обобщенной водохозяйственной характеристики водохранилища

x	Аналитический метод	Численная интерпретация	Погрешность $\pm\Delta$	x	Аналитический метод	Численная интерпретация	Погрешность $\pm\Delta$
	$\Phi(x)$				$f(x_\partial)$		
0	0,9585	0,9583	−0,0002	0	0,9585	0,9582	−0,0003
0,1	.9278	.9272	0,0006	0,08	.9722	.9721	0,0001
0,2	.8892	.8883	0,0009	0,1	.9744	.9742	0,0002
0,3	.8447	.8444	0,0003	0,2	.9836	.9837	−0,0001
0,4	.7558	.7561	+0,0003	0,3	.9885	.9883	−0,0002
0,5	.6670	.6662	−0,0008	0,4	1,0	.9999	−0,0001
0,6	.5887	.5887	0,0			$\psi(x_c)$	
0,7	.5195	.5196	+0,0001	0	0,4586	0,4584	−0,0002
0,8	.4585	.4585	0,0	0,7	.2270	.2271	+0,0001
				1,3	.1381	.1380	−0,0001
				...	...	...	...

Рассмотрим численный пример расчета при следующих параметрах регулирования: $\beta = 0{,}8$; $\alpha(x) = 0{,}25x + 0{,}4$. Максимальное значение отдачи $\alpha(\beta) = 0{,}6$, а минимальное $\alpha(0) = 0{,}4$.

Решения интегральных уравнений (2.2.23), (2.2.24) и (2.2.27′), выполненные аналитическим методом и его численной интерпретацией, дали результаты, обобщенные в табл. 2.2.2.

4. Номографирование расчетных методов

С учетом наиболее вероятных значений емкости для номографирования приняты уравнения (2.2.1) и (2.2.16), отвечающие условиям $b \leqslant \beta$ и $b < \beta \leqslant b(2+a)$.

В случаях, когда γ параметр кривой Пирсона III типа имеет целочисленные значения, использованы строгие аналитические решения интегральных уравнений (2.2.3) и (2.2.17).

Во всех остальных случаях реализованы приближенные формулы, полученные использованием теоремы о среднем значении определенного интеграла, обеспечившие вычисления значений $\Phi(x)$ с точностью $\varepsilon \leqslant 0{,}001$, а именно:

при $b < \beta$

$$\Phi(x) = F[x+\alpha(x)] + q[x+\alpha(x)-c] \times$$

$$\times \frac{\int_0^{\beta} F[y+\alpha(y)] \cdot q[x-y+\alpha(y)]\,dy}{q[x+\alpha(x)-c] - \int_0^{\beta} q[y+\alpha(y)-c]\,q[x+\alpha(x)-y]\,dy}; \qquad (2.2.31)$$

при $b < \beta \leqslant b \cdot (2+a)$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x) &= F[x+\alpha(x)] + Aq[x-c_1+\alpha(x)], \quad (0 \leqslant x \leqslant x_0); \\ \Phi_2(x) &= F[x+\alpha(x)] + B \cdot q[x-c_2+\alpha(x)], \quad (x_0 \leqslant x \leqslant \beta), \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.32)$$

где $c = \frac{\beta}{2}$; $\quad c_1 = \frac{2x_0 - \beta + \alpha(0)}{4}$; $\quad c_2 = \frac{\beta}{4}$.

$$A = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & c_{12} \\ m_2 & c_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}}, \qquad B = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & m_1 \\ c_{12} & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}}.$$

Коэффициенты определителей следующие:

$$c_{11} = q[x+\alpha(x)-c_1] - \int_0^{x_0} q[y+\alpha(y)-c_1] \cdot q[x+\alpha(x)-y]\,dy;$$

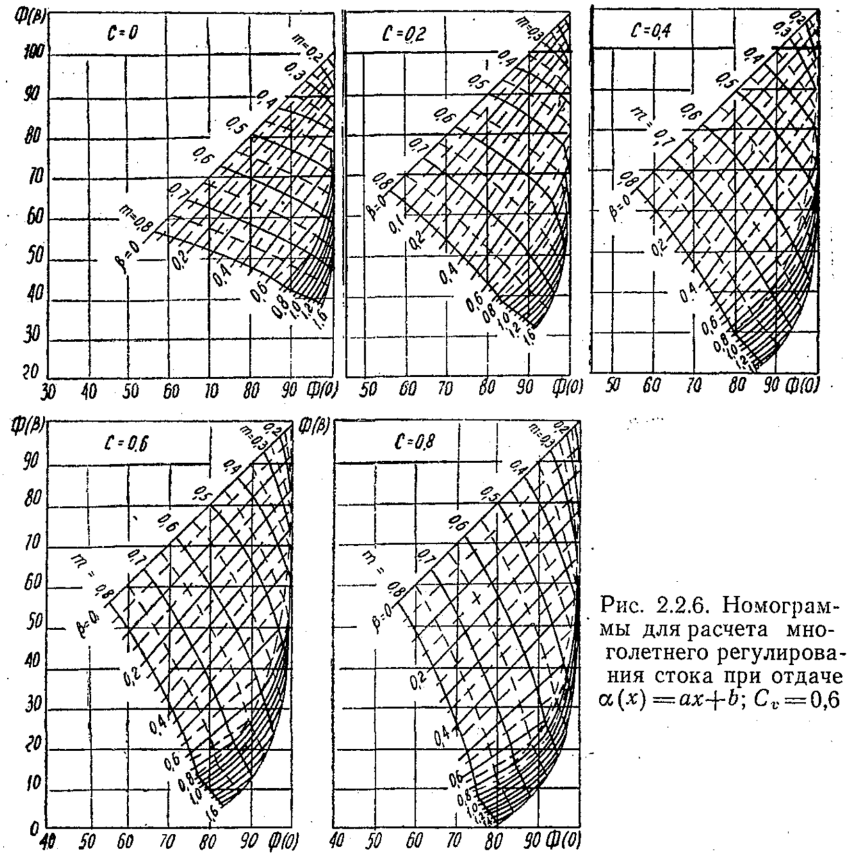

Рис. 2.2.6. Номограммы для расчета многолетнего регулирования стока при отдаче $\alpha(x)=ax+b$; $C_v=0{,}6$

$$c_{12}=-\int_{x_0}^{x+\alpha(x)} q[y+\alpha(y)-c_2]\,q[x+\alpha(x)-y]\,dy;$$

$$c_{21}=-\int_{0}^{x_0} q[y+\alpha(y)-c_1]\cdot q[x+\alpha(x)-y]\,dy;$$

$$c_{22}=q[x+\alpha(x)-c_2]-\int_{x_0}^{\beta} q[y+\alpha(y)-c_2]\,q[x+\alpha(x)-y]\,dy;$$

$$m_1=\int_{0}^{x+\alpha(x)} F[y+\alpha(y)]\,q[x+\alpha(x)-y]\,dy;$$

$$m_2=\int_{0}^{\beta} F[y+\alpha(y)]\cdot q[x+\alpha(x)-y]\,dy.$$

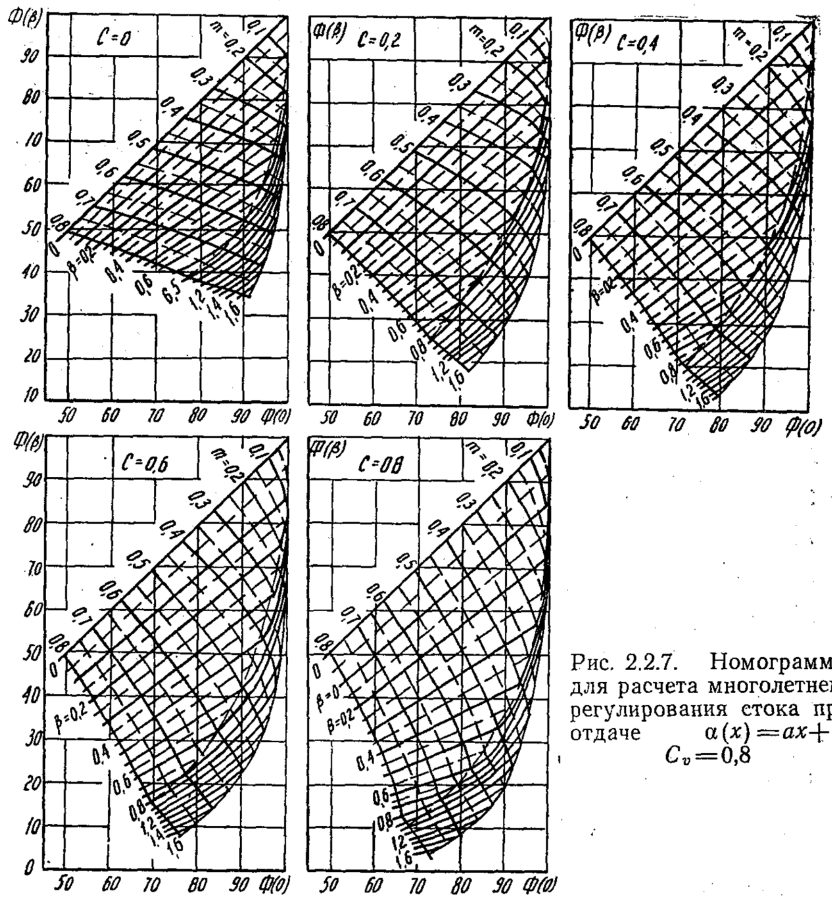

Рис. 2.2.7. Номограммы для расчета многолетнего регулирования стока при отдаче $\alpha(x)=ax+b$; $C_v=0{,}8$

Численные значения этих коэффициентов при различных параметрах регулирования и стока легко могут быть определены с использованием известных таблиц [33] и др.

Расчетные номограммы связывают четыре переменные величины $\Phi(0)$, $\Phi(\beta)$, b и β при двух фиксированных значениях a и C_v.

Номограммы составлены при пяти значениях параметра a и трех величины C_v (рис. 2.2.6—2.2.8). При промежуточных значениях указанных параметров допустима линейная интерполяция.

С помощью номограмм можно определить две величины при четырех заданных, например, найти a и β при фиксированных значениях $\Phi(0)$, $\Phi(\beta)$, b и C_v или a и $\Phi(\beta)$, если известны $\Phi(0)$, b, C_v и β и т. д.

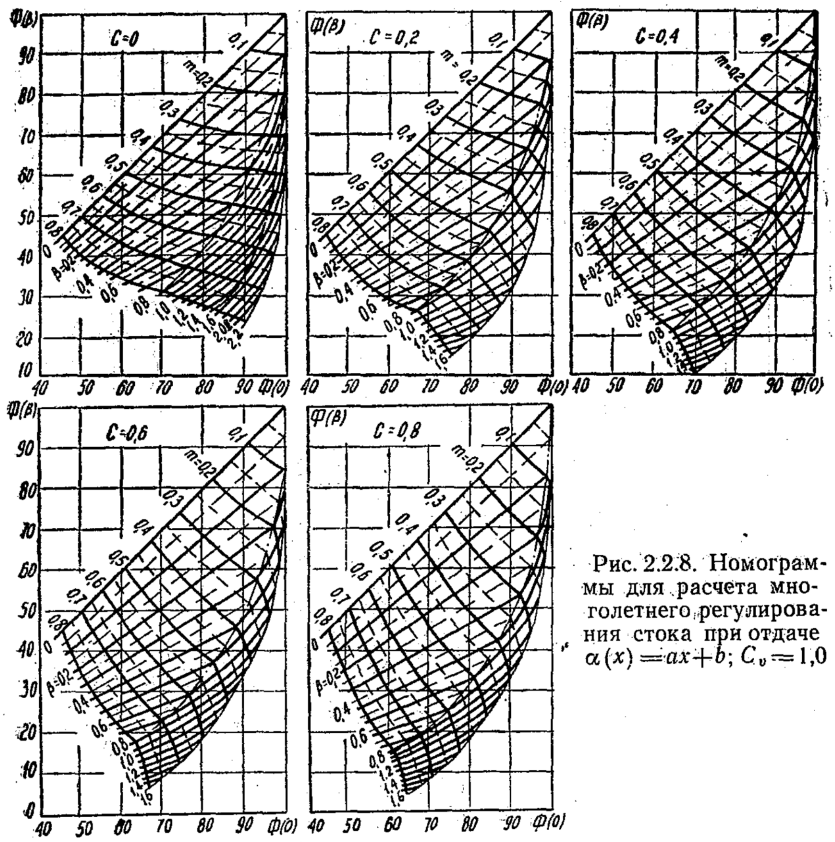

Рис. 2.2.8. Номограммы для расчета многолетнего регулирования стока при отдаче $\alpha(x)=ax+b$; $C_v=1{,}0$

Получив две крайние точки кривой обеспеченности наполнений $\Phi(0)$ и $\Phi(\beta)$, можно построить приближенный закон изменения отдач, заменив кривую отрезком прямой. Это позволяет получить простые формулы, удобные для вычисления характеристик переменной отдачи (рис. 2.2.9):

$$E_{\alpha(x)}=0{,}5a\beta[\Phi(0)-\Phi(\beta)]; \tag{2.2.33}$$

$$ax=a\beta\cdot\frac{\Phi(0)-\Phi(x)}{\Phi(0)-\Phi(\beta)}; \tag{2.2.34}$$

$$\Phi(x)=\Phi(0)-\frac{x}{\beta}[\Phi(0)-\Phi(\beta)]. \tag{2.2.35}$$

Формулы (2.2.33)—(2.2.35) являются приближенными, причем точность расчетов зависит от глубины регулирования.

Поясним использование расчетных номограмм.

Пример 1. Основной водопотребитель требует годовой объ-

ем отдачи $a=b=0{,}3$ с обеспеченностью 95%. Дополнительным потребителем воды является ирригация: регулярное и лиманное орошение с обеспеченностями соответственно 75 и 50%. Значение коэффициента вариации $C_v=1$ (р. Кенгир и др.). Требуется определить объемы дополнительной отдачи водохранилища в зависимости от его емкости β.

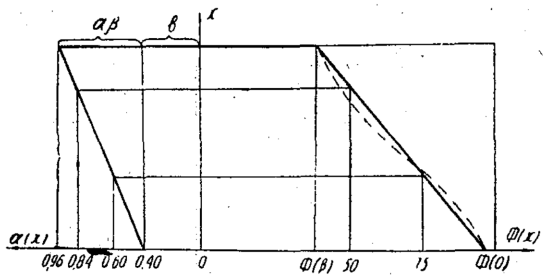

Рис. 2.2.9. Графическое определение объема дополнительной отдачи

На номограммах, соответствующих $C_v=1$, находим точки пересечения линий $\Phi(0)=95\%$, $b=0{,}3$ и отвечающие им значения параметров a, $\Phi(\beta)$ и β.

b	$\Phi(0)$	a	β	$\Phi(\beta)$
0,3	0,95	0	0,30	0,70
0,3	0,95	0,2	0,35	0,66
0,3	0,95	0,4	0,40	0,60
0,3	0,95	0,6	0,50	0,52
0,3	0,95	0,8	0,60	0,44

С помощью формулы (2.2.34) определяем объемы дополнительной отдачи, соответствующие обеспеченности 50 и 75%:

β	$a_{50\%}$	$a_{75\%}$
0,30	0	0
0,35	0,07	0,05
0,40	0,16	0,09
0,50	0,30	0,13
0,60	0,42	0,19

Окончательный выбор емкости водохранилища может быть сделан на основе экономического сравнения вариантов.

Пример 2. Пусть $C_v=0{,}8$. Из водохранилища емкостью $\beta=0{,}7$ необходимо обеспечить отдачу для основного потребителя в объеме $a=b=0{,}4$ с $\Phi(0)=95\%$. Кроме того, необходимо выявить возможности получения дополнительной отдачи для орошения.

Из номограмм с $C_v=0{,}8$ выбираем такую, для которой параметрам $b=0{,}4$ и $\Phi(0)=95\%$ соответствовало бы заданное значение параметра $\beta=0{,}7$. В данном случае пятая по счету

номограмма, с которой снимаем $a=0{,}8$ и $\Phi(\beta)=38\%$. Объем дополнительной отдачи $a\beta=0{,}56$ (с обеспеченностью 38%).

Объемы дополнительной отдачи, отвечающие более высоким значениям обеспеченности, могут быть определены по формуле (2.2.34) или графически (см. рис. 2.2.9). Например, дополнительные отдачи, обеспеченные на 50 и 75%, будут равны 0,44 и 0,20.

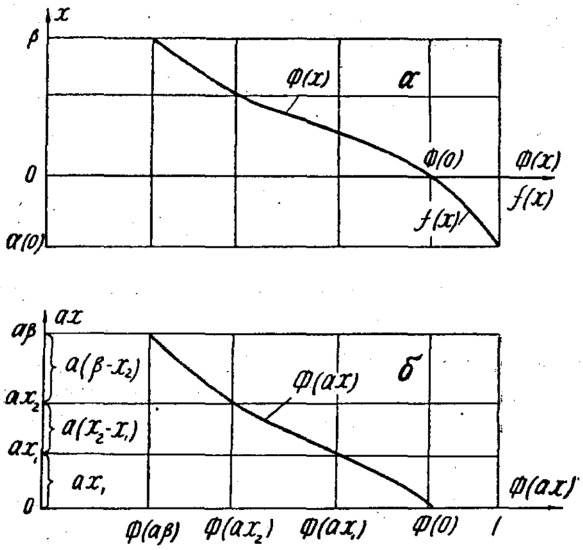

Рис. 2.2.10. Схема распределения дополнительной отдачи ax: $а$ — кривые наполнений $\Phi(x)$ и дефицитов $f(x_\partial)$; $б$ — кривая обеспеченности $\Phi(ax)$

Принципиальная схема распределения дополнительной отдачи водохранилища (ax) между отдельными водопотребителями различной обеспеченности показана на рис. 2.2.10.

Глава 2.3

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОДОХРАНИЛИЩА ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ РАЗНООБЕСПЕЧЕННЫХ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Водохранилища многолетнего регулирования стока в засушливых районах страны являются, как правило, комплексными, т. е. служат источником водообеспечения ряда отраслей народного хозяйства. Многоцелевое хозяйственное назначение их при этом вызывает значительное усложнение методики и техники водохозяйственных расчетов. Однако комплексное водохранилище при одном и том же его объеме позволяет получить существенно большую зарегулированную отдачу по сравнению с водохранилищем одноцелевого хозяйственного назначения.

Основными компонентами водохозяйственного комплекса, потребляющего воду как вещество, являются ирригация и промышленно-коммунальное водоснабжение. Будучи наиболее водоемкими, они значительно отличаются между собой в отношении надежности водоподачи. Так, оптимум расчетной обеспеченности для промышленно-коммунального водоснабжения составляет 95—97% и более. Для ирригации же, как потребителя более «гибкого» и не вызывающего столь больших ущербов из-за ограничений в водоподаче, как в промышленном производстве, оптимальное значение обеспеченности в среднем составляет около 75—80% (колеблясь в довольно широких пределах от 50% для трав и до 90% для огородных и других в зависимости от состава культур).

В связи с задачами более полного использования водных ресурсов в районах, подобных равнинному Казахстану, С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем [60] предложена новая расчетная схема многолетнего регулирования речного стока. В частности, признано целесообразным рассматривать «схемы регулирования, ориентированные на двойной норматив обеспеченности, принимая его, например, таким: нормальная отдача

гарантируется в 80% лет; 70% нормальной отдачи гарантируется с высокой степенью надежности, т. е. в 97% лет [60]».

Основная идея указанной схемы, по существу, и явилась отправным началом для построения в аналитической форме предлагаемой обобщенной методики расчетов многолетнего регулирования стока для двух потребителей с разной обеспеченностью отдачи.

Необходимо отметить разработки Д. В. Коренистова и Р. Р. Казака, выполненные в 1948 г. специально для целей регулирования стока рек Донбасса (основные положения и расчетные номограммы опубликованы в монографии Я. Ф. Плешкова [74]). В работе С. Н. Никитина рассмотрена расчетная схема многолетнего регулирования с переменным расходом, исходящая из строгой регламентации «...назначаемой на год вперед отдачи в зависимости от наполнения водохранилища на начало года» [72]. Ряд интересных методических предложений по регулированию стока на двух потребителей содержится в работах [5, 59].

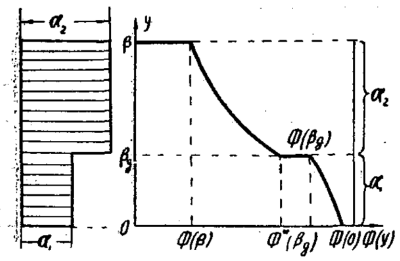

Рис. 2.3.1. Расчетная схема регулирования стока для двух потребителей

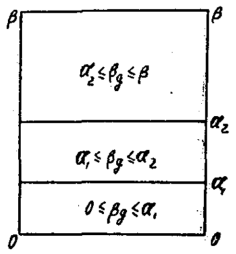

Рис. 2.3.2. Пределы изменения емкости β_∂

Сущность предлагаемой ниже расчетной схемы многолетнего регулирования стока заключается в следующем. Допустим, водохранилище имеет емкость, равную β. В процессе эксплуатации жестко регламентируются правила сработки, а именно, для промежутка наполнений $\beta_\partial \leqslant x \leqslant \beta$ отдача назначается повышенной α_2, для промежутка же $0 \leqslant x \leqslant \beta_\partial$ — пониженной α_1 (здесь β_∂ — многолетняя диспетчерская емкость). При этом обеспеченность пониженной отдачи $\Phi(0)$ более высокая, чем для повышенной отдачи $\Phi(\beta_\partial)$ (рис. 2.3.1).

Параметры β и β_∂ устанавливаются при проектировании водохранилища, причем они должны отвечать оптимальному значению расчетной обеспеченности для принятых значений отдач α_1 и α_2.

Таким образом, при фиксированных значениях параметров

регулирования β, $\beta_д$, α_2 и α_1 определению подлежат обеспеченности как повышенной, так и пониженной отдач, т. е. значения $\Phi(\beta_д)$ и $\Phi(0)$.

1. Функция обеспеченности наполнений водохранилища

Приводимый способ построения интегральных уравнений соответствует графическому методу С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля, если в нем сделать предельный переход к бесконечно большому числу бесконечно малых ступеней, на которые делится кривая *ABCDE* (рис. 2.3.3). Здесь не приведены все

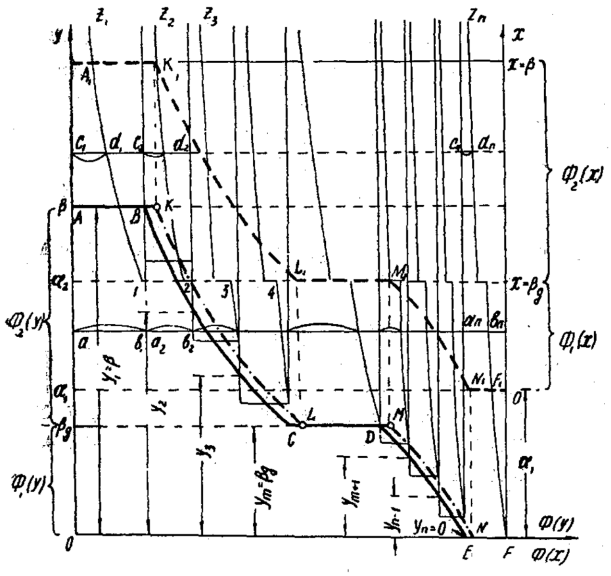

Рис. 2.3.3. Построение к выводу системы интегральных уравнений (2.3.2)

промежуточные операции предельного перехода и получения интегральных уравнений, так как они подробно рассмотрены Н. А. Картвелишвили [43] и В. А. Киктенко [48—56]. Данный способ позволяет, с одной стороны, познать физическую основу расчетных схем получения водохозяйственных характеристик водохранилища при наличии двух равнообеспеченных потребителей, с другой — наглядно показать, как меняются численные значения обеспеченности $\Phi(\beta_д)$ и $\Phi(0)$ от одних расчетных схем к другим и от соотношения параметров регулирования β, $\beta_д$ и α_2, α_1.

Многолетняя диспетчерская емкость водохранилища может располагаться в трех зонах: $0 \leqslant \beta_д \leqslant \alpha_1$; $\alpha_1 \leqslant \beta_д \leqslant \alpha_2$ и $\alpha_2 \leqslant$

$\leqslant \beta_\partial \leqslant \beta$ (рис. 2.3.2). Внутри каждой зоны могут быть несколько расчетных случаев в зависимости от глубины регулирования стока. Так, для условия $0 \leqslant \beta_\partial \leqslant \alpha_1$ параметр β может удовлетворить неравенствам

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \leqslant \beta \leqslant 2\alpha_1; \\ &2\alpha_1 \leqslant \beta \leqslant 3\alpha_1; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &n\alpha_1 \leqslant \beta \leqslant (n+1)\alpha_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1)$$

Для всех этих случаев аналитические решения многолетнего регулирования стока, очевидно, будут различными. Причем кривые обеспеченности наполнений будут описываться различными системами интегральных уравнений. Каждый из расчетных случаев (2.3.1) в свою очередь может быть разбит на несколько подслучаев в зависимости от значения параметра α_2. Дать для всех их единую расчетную схему невозможно. Поэтому можно рассматривать каждый раз условия, наложенные на параметр α_2.

При соотношениях $0 \leqslant \beta_\partial \leqslant \alpha_1$ рассмотрим, согласно (2.3.1), расчетный случай

$$2\alpha_1 \leqslant \beta \leqslant 3\alpha_1 \qquad (2.3.2)$$

с дополнительным условием $\alpha_2 \geqslant \beta - \beta_\partial$.

При отсутствии корреляционной связи между стоком смежных лет уравнения функции обеспеченности наполнений водохранилища имеют вид (рис. 2.3.4, *а*).

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1(x) = F(x+\alpha_1) + \int_0^{\beta_\partial} \Phi_1(y)\, q(x-y+\alpha_1)\, dy + \\ &+ \int_{\beta_\partial}^{x+\alpha_1} \Phi_2(y)\, q(x-y-\alpha_1)\, dy, \quad (0 \leqslant x \leqslant \beta_\partial); \\ &\Phi_2(x) = F(x+\alpha_2) + \int_0^{\beta_\partial} \Phi_1(y)\, q(x-y+\alpha_2)\, dy + \\ &+ \int_{\beta_\partial}^{\beta} \Phi_2(y)\, q(x-y+\alpha_2)\, dy, \quad (\beta_\partial \leqslant x \leqslant \beta). \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.3)$$

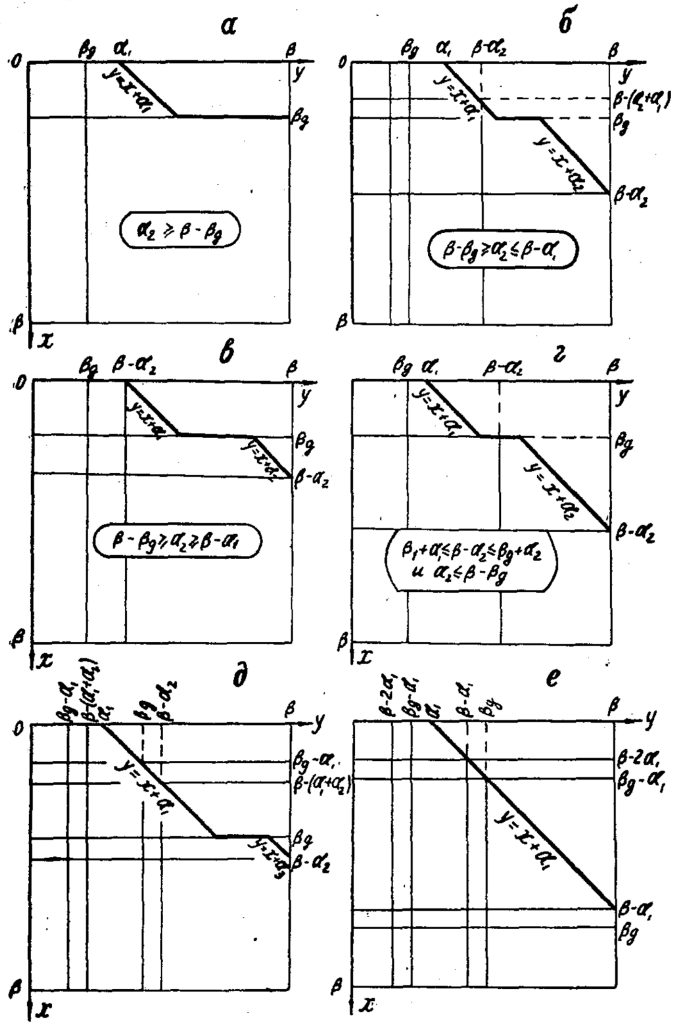

Рис. 2.3.4. Построения к системам интегральных уравнений (2.3.3), (2.3.5) — (2.3.9)

Из системы (2.3.3) видно, что в точке $x = \beta_\partial$ функции $\Phi_1(\beta_\partial)$ и $\Phi_2(\beta_\partial)$ в противовес ранее выведенным уравнениям не равны друг другу. Это объясняется тем, что при данном аргументе x осуществляется переход с одного значения отдачи на другое, и кривая обеспеченности наполнений имеет разрыв в виде горизонтального участка $[\Phi_1(\beta_\partial) - \Phi_2(\beta_\partial)]$.

Оставляя рассматриваемый случай (2.3.2) неизменным, взамен $\alpha_2 = \beta - \beta_\partial$ примем теперь условие

$$\beta-\beta_\partial \geqslant \alpha_2 \leqslant \beta-\alpha_2, \qquad (2.3.4)$$

согласно которому искомая функция интегральных уравнений будет иметь вид (рис. 2.3.4, *б*)

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= F(x+\alpha_1) + \int_0^{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)} R_1(x, y)\, dy + \int_{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)}^{\beta_\partial} R_2(x, y)\, dy + \\
&\quad + \int_{\beta_\partial}^{x+\alpha_1} R_3(x, y)\, dy, [0 \leqslant x \leqslant \beta-(\alpha_1+\alpha_2)]; \\
\Phi_2(x) &= F(x+\alpha_1) + \int_0^{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)} R_1(x, y)\, dy + \int_{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)}^{\beta_\partial} R_2(x, y)\, dy + \\
&\quad + \int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_3(x, y)\, dy + \int_{\beta-\alpha_2}^{x+\alpha_2} R_4(x, y)\, dy, \ [\beta-(\alpha_1+\alpha_2) \leqslant x \leqslant \beta_\partial]; \\
\Phi_3(x) &= F(x+\alpha_2) + \int_0^{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)} R_1^*(x, y)\, dy + \\
&\quad + \int_{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)}^{\beta_\partial} R_2^*(x, y)\, dy + \int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_3^*(x, y)\, dy + \\
&\quad + \int_{\beta-\alpha_2}^{x+\alpha_2} R_4^*(x, y)\, dy, [\beta_\partial \leqslant x \leqslant \beta-\alpha_2]; \\
\Phi_4(x) &= F(x+\alpha_2) + \int_0^{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)} R_1^*(x, y)\, dy + \\
&\quad + \int_{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)}^{\beta_\partial} R_2^*(x, y)\, dy + \int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_3^*(x, y)\, dy + \\
&\quad + \int_{\beta-\alpha_2}^{\beta} R_4^*(x, y)\, dy, \ [\beta-\alpha_2 \leqslant x \leqslant \beta],
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.5)$$

где $R_i(x, y)=\Phi_i(y)q(x-y+\alpha_1)$, $R_i^*(x, y)=\Phi_i(y)q(x-y+\alpha_2)$ $(i=1, 2, 3, 4)$.

Если в (2.3.4), заменив знак неравенства, положим $\beta-\beta_\partial \geqslant \geqslant \alpha_2 \geqslant \beta-\alpha_1$, то получим систему из трех интегральных уравнений (рис. 2.3.4, *в*):

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x+\alpha_1)+\int_0^{\beta_\partial} R_1(x, y)\,dy+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_2(x, y)\,dy+\\
&+\int_{\beta-\alpha_2}^{x+\alpha_1} R_3(x, y)\,dy, \quad (0\leqslant x\leqslant \beta_\partial);\\
&\Phi_2(x)=F(x+\alpha_2)+\int_0^{\beta_\partial} R_1^*(x, y)\,dy+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_2^*(x, y)\,dy+\\
&+\int_{\beta-\alpha_2}^{x+\alpha_2} R_3^*(x, y)\,dy, \quad (\beta_\partial\leqslant x\leqslant \beta-\alpha_2);\\
&\Phi_3(x)=F(x+\alpha_2)+\int_0^{\beta_\partial} R_1^*(x, y)\,dy+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_2^*(x, y)\,dy+\\
&+\int_{\beta-\alpha_2}^{\beta} R_3^*(x, y)\,dy, \quad (\beta-\alpha_2\leqslant x\leqslant \beta).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.6)$$

Здесь R_i и R_i^* имеют те же значения, что и выше, но при $i=1, 2, 3$. Наконец, если вместо (2.3.4) принять такие два одновременно возможных дополнительных условия $\beta_\partial+\alpha_1<\beta-\alpha_2<\beta_\partial+\alpha_2$ и $\alpha_2<\beta-\beta_\partial$, то искомая система будет состоять из трех уравнений, но несколько иного вида (рис. 2.3.4, *г*):

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x+\alpha_1)+\int_0^{\beta_\partial} R_1(x, y)\,dy+\int_{\beta_\partial}^{x+\alpha_1} R_2(x, y)\,dy\\
&(0\leqslant x\leqslant \beta_\partial);
\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_2(x)=F(x+\alpha_2)+\int\limits_0^{\beta_\partial} R_1^*(x,y)\,dy+\int\limits_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_2^*(x,y)\,dy+\\
&+\int\limits_{\beta-\alpha_2}^{x+\alpha_2} R_3^*(x,y)\,dy,\quad (\beta_\partial\leqslant x\leqslant\beta-\alpha_2);\\
&\Phi_3(x)=F(x+\alpha_2)+\int\limits_0^{\beta_\partial} R_1^*(x,y)\,dy+\int\limits_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_2^*(x,y)\,dy+\\
&+\int\limits_{\beta-\alpha_2}^{\beta} R_3^*(x,y)\,dy,\quad (\beta-\alpha_2\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\}\qquad (2.3.7)$$

Как видно, при одном и том же расчетном случае $2\alpha_1\leqslant\beta\leqslant 3\alpha_1$, но в зависимости от соотношения между β_∂ и параметром α_2 безусловная кривая обеспеченности наполнений описывается системами с различным числом интегральных уравнений (от 2 до 4) и разной структурой последних.

Рассмотрим теперь расчетную схему $\alpha_1<\beta_\partial\leqslant\alpha_2$. При таком значении β_∂ по сравнению с расчетной схемой $\beta_\partial\leqslant\alpha_1$ будут иметься более благоприятные условия регулирования стока для первого потребителя, использующего пониженную отдачу α_1 (за счет некоторого сокращения обеспеченности повышенной отдачи α_2).

Допустим, что многолетняя емкость водохранилища изменяется в пределах $3\alpha_1\leqslant\beta\leqslant 4\alpha_1$, причем разность $\beta-\alpha_2$ находится в промежутке $[\beta_\partial, 2\alpha_1]$.

Тогда будем иметь следующую систему интегральных уравнений (рис. 2.3.4, *д*):

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x+\alpha_1)+\int\limits_0^{\beta_\partial-\alpha_1} R_1(x,y)\,dy+\int\limits_{\beta_\partial-\alpha_1}^{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)} R_2(x,y)\,dy+\\
&\qquad+\int\limits_{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)}^{x+\alpha_1} R_3(x,y)\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant\beta_\partial-\alpha_1);\\
&\Phi_2(x)=F(x+\alpha_1)+\int\limits_0^{\beta_\partial-\alpha_1} R_1(x,y)\,dy+\int\limits_{\beta_\partial-\alpha_1}^{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)} R_2(x,y)\,dy+
\end{aligned}\right|$$

$$+\int_{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)}^{\beta_\partial} R_3(x,y)\,dy+\int_{\beta_\partial}^{x+\alpha_1} R_4(x,y)\,dy$$

$$[\beta_\partial-\alpha_1\leqslant x\leqslant\beta-(\alpha_1+\alpha_2)];$$

$$\Phi_3(x)=F(x+\alpha_1)+\int_0^{\beta_\partial-\alpha_1} R_1(x,y)\,dy+\int_{\beta_\partial-\alpha_1}^{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)} R_2(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)}^{\beta_\partial} R_3(x,y)\,dy+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_4(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha_1}^{x+\alpha_1} R_5(x,y)\,dy,\ [\beta-(\alpha_1+\alpha_2)\leqslant x\leqslant\beta_\partial];$$

$$\Phi_4(x)=F(x+\alpha_2)+\int_0^{\beta_\partial-\alpha_1} R_1^*(x,y)\,dy+\int_{\beta_\partial-\alpha_1}^{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)} R_2^*(x,y)\,dy+ \tag{2.3.8}$$

$$+\int_{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)}^{\beta_\partial} R_3^*(x,y)\,dy+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_4^*(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha_2}^{x+\alpha_2} R_5^*(x,y)\,dy,\quad(\beta_\partial\leqslant x\leqslant\beta-\alpha_2);$$

$$\Phi_5(x)=F(x+\alpha_2)+\int_0^{\beta_\partial-\alpha_1} R_1^*(x,y)\,dy+\int_{\beta_\partial-\alpha_1}^{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)} R_2^*(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-(\alpha_1+\alpha_2)}^{\beta_\partial} R_3^*(x,y)\,dy+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} R_4^*(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha_2}^{\beta} R_5^*(x,y)\,dy,\quad(\beta-\alpha_2\leqslant x\leqslant\beta).$$

Если диспетчерскую емкость водохранилищ принять еще большей, а именно, изменяющейся в пределах $\alpha_2 \leqslant \beta_\partial \leqslant \beta$, то безусловная кривая обеспеченности наполнений будет описываться системами, как правило, с большим числом интегральных уравнений. Так, для рассмотренного расчетного случая $2\alpha_1 \leqslant \beta \leqslant 3\alpha_1$, но при ограничениях $\beta_\partial \leqslant 2\alpha_1$ и $\beta \leqslant \beta_\partial + \alpha_1$ имеем (рис. 2.3.4, *е*)

$$\Phi_1(x) = F(x+\alpha_1) + \int_0^{\beta-2\alpha_1} R_1(x, y)\,dy + \int_{\beta-2\alpha_1}^{\beta_\partial-\alpha_1} R_2(x, y)\,dy + \int_{\beta_\partial-\alpha_1}^{x+\alpha_1} R_3(x, y)\,dy, \quad (0 \leqslant x \leqslant \beta-2\alpha_1);$$

$$\Phi_2(x) = F(x+\alpha_1) + \int_0^{\beta-2\alpha_1} R_1(x, y)\,dy + \int_{\beta-2\alpha_1}^{\beta_\partial-\alpha_1} R_2(x, y)\,dy + \int_{\beta_\partial-\alpha_1}^{\beta-\alpha_1} R_3(x, y)\,dy + \int_{\beta-\alpha_1}^{x+\alpha_1} R_4(x, y)\,dy, \quad (2.3.9)$$

$$(\beta-2\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_\partial-\alpha_1);$$

$$\Phi_3(x) = F(x+\alpha_1) + \int_0^{\beta-2\alpha_1} R_1(x, y)\,dy + \int_{\beta-2\alpha_1}^{\beta_\partial-\alpha_1} R_2(x, y)\,dy + \int_{\beta_\partial-\alpha_1}^{\beta-\alpha_1} R_3(x, y)\,dy + \int_{\beta-\alpha_1}^{\beta_\partial} R_4(x, y)\,dy + \int_{\beta_\partial}^{\beta} R_5(x, y)\,dy, \quad (\beta_\partial-\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta-\alpha_1);$$

$$\Phi_4(x) = F(x+\alpha_1) + \int_0^{\beta-2\alpha_1} R_1(x, y)\,dy + \int_{\beta-2\alpha_1}^{\beta_\partial-\alpha_1} R_2(x, y)\,dy +$$

$$+\int_{\beta_\partial-\alpha_1}^{\beta-\alpha_1} R_3(x,y)\,dy+\int_{\beta-\alpha_1}^{\beta_\partial} R_4(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{\beta_\partial}^{\beta} R_5(x,y)\,dy,\quad (\beta-\alpha_1\leqslant x\leqslant\beta_\partial);$$

$$\Phi_5(x)=F(x+\alpha_2)+\int_0^{\beta-2\alpha_1} R_1^*(x,y)\,dy+\int_{\beta-2\alpha_1}^{\beta_\partial-\alpha_1} R_2^*(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{\beta_\partial-\alpha_1}^{\beta-\alpha_1} R_3^*(x,y)\,dy+\int_{\beta-\alpha_1}^{\beta_\partial} R_4^*(x,y)\,dy+$$

$$+\int_{\beta_\partial}^{\beta} R_5(x,y)\,dy,\quad (\beta_\partial\leqslant x\leqslant\beta).$$

Как видно даже из одного подробно рассмотренного расчетного случая $2\alpha_1\leqslant\beta\leqslant3\alpha_1$ (с несколькими дополнительными условиями), безусловная кривая обеспеченности наполнений описывается различными системами интегральных уравнений, число и структура которых зависит от соотношения диспетчерской емкости β_∂ с другими параметрами регулирования. Таких случаев, вообще говоря, может быть очень много. Поэтому целесообразно устанавливать вид систем и структуру интегральных уравнений функций обеспеченности наполнений водохранилища отдельно для каждого основного расчетного случая, определяемого условием $n\alpha_1\leqslant\beta\leqslant(n+1)\alpha_1$.

При этом заслуживает внимания следующий относительно простой и наглядный способ построения указанных систем интегральных уравнений, основанный на выделении частных областей интегрирования в квадрате наполнений $[\beta, \beta]$.

Из уравнения годового водного баланса водохранилища при расчетной водоносности $k=0$ имеем

$$\left.\begin{aligned} y&=x+\alpha_1,\quad (0\leqslant x\leqslant\beta_\partial);\\ y&=x+\alpha_2,\quad (\beta_\partial\leqslant x\leqslant\beta).\end{aligned}\right\}\qquad (2.3.10)$$

На рис. 2.3.5 показаны эти прямые в системе прямоугольных координат. Как видно, в области *ABCDE* функция обеспеченности расчетного стока $F(k=0)=1$, а $q(k)=0$. Следовательно, областью интегрирования будет фигура *OAEDCMNO*.

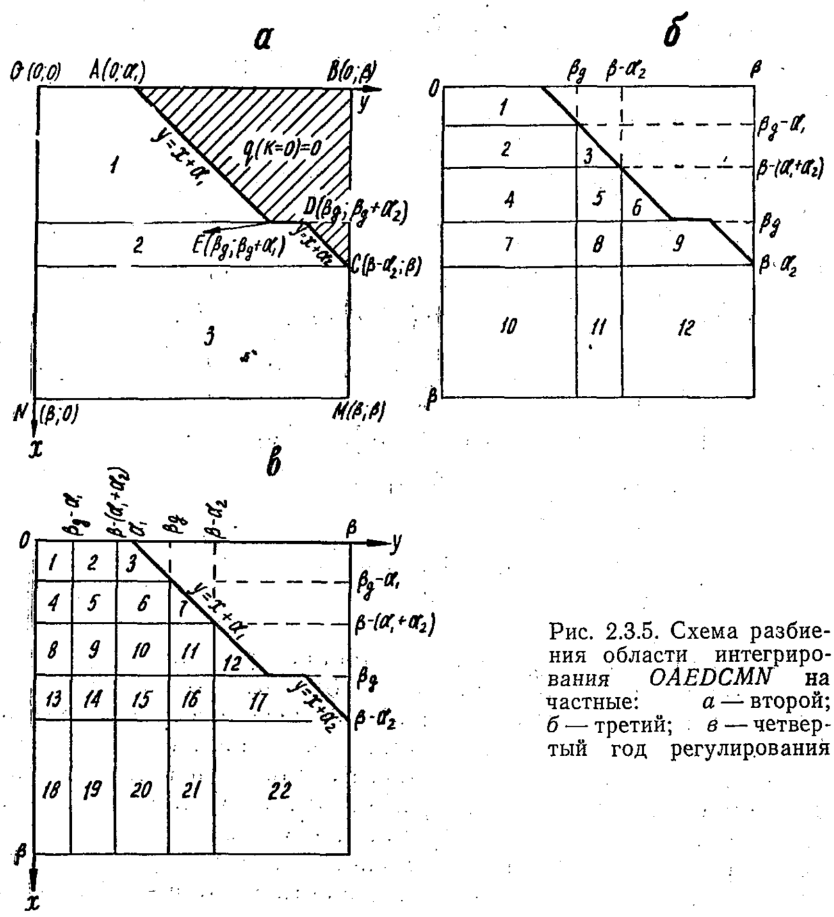

Рис. 2.3.5. Схема разбиения области интегрирования *OAEDCMN* на частные: *а* — второй; *б* — третий; *в* — четвертый год регулирования

Интегралы частных областей 1, 2 и 3 (рис. 2.3.5, *а*) по промежуткам $(0 \leqslant x \leqslant \beta_д)$, $(\beta_д \leqslant x \leqslant \beta - \alpha_2)$ и $(\beta - \alpha_2 \leqslant x \leqslant \beta)$ для второго года регулирования образуют систему

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{11}(x) &= F(x+\alpha_1) + \int_0^{x+\alpha_1} \Phi_{10}(y)\, q(x-y+\alpha_1)\, dy \\ &\qquad (0 \leqslant x \leqslant \beta_д); \\ \Phi_{21}(x) &= F(x+\alpha_2) + \int_0^{x+\alpha_2} \Phi_{10}(y)\, q(x-y+\alpha_2)\, dy \\ &\qquad (\beta_д \leqslant x \leqslant \beta-\alpha_2); \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.11)$$

$$\Phi_{31}(x)=F(x+\alpha_2)+\int_0^{\beta}\Phi_{10}(y)\,q(x-y+\alpha_2)\,dy$$

$$(\beta-\alpha_2\leqslant x\leqslant\beta).$$

Здесь $\Phi_{10}(y)$ — функция обеспеченности наполнений для первого (начального) года регулирования.

Для третьего года регулирования в качестве исходных принимаются функции обеспеченности наполнений, полученные из системы (2.3.11). Так как эти функции различны, то $OAEDCMNO$ разобьется уже на 12 частных областей интегрирования (рис. 2.3.5, *б*).

$$\Phi_{12}(x)=F(x+\alpha_1)+\int_0^{x+\alpha_1}\Phi_{11}(y)\,q(x-y+\alpha_1)\,dy$$

$$(0\leqslant x\leqslant\beta_\partial);$$

$$\Phi_{22}(x)=F(x+\alpha_1)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_{11}(y)\,q(x-y+\alpha_1)\,dy+$$

$$+\int_{\beta_\partial}^{x+\alpha_1}\Phi_{21}(y)\,q(x-y+\alpha_1)\,dy,$$

$$[\beta_\partial-\alpha_1\leqslant x\leqslant\beta-(\alpha_1+\alpha_2)];$$

$$\Phi_{32}(x)=F(x+\alpha_1)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_{11}(y)\,q(x-y+\alpha_1)\,dy+ \qquad (2.3.12)$$

$$+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2}\Phi_{21}(y)\,q(x-y+\alpha_1)\,dy+\int_{\beta-\alpha_2}^{x+\alpha_1}\Phi_{31}(y)\times$$

$$\times q(x-y+\alpha_1)\,dy,\quad[\beta-(\alpha_1+\alpha_2)\leqslant x\leqslant\beta_\partial];$$

$$\Phi_{42}(x)=F(x+\alpha_2)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_{11}(y)\,q(x-y+\alpha_2)\,dy+$$

$$+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2}\Phi_{21}(y)\,q(x-y+\alpha_2)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha_2}^{x+\alpha_2}\Phi_{31}(y)\,q(x-y+\alpha_2)\,dy,\quad(\beta_\partial\leqslant x\leqslant\beta-\alpha_2);$$

$$\Phi_{52}(x)=F(x+\alpha_2)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_{11}(y)\,q(x-y+\alpha_2)\,dy+$$

$$+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2}\Phi_{21}(y)\,q(x-y+\alpha_2)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-\alpha_2}^{\beta}\Phi_{31}(y)\,q(x-y+\alpha_2)\,dy,\quad(\beta-\alpha_2\leqslant x\leqslant\beta).$$

Система интегральных уравнений для четвертого года регулирования определяется, согласно 2.3.5, *в*, аналогично.

Для следующего (пятого) года регулирования дальнейшее разбиение области *OAEDCMNO* не происходит, так как прямая $y=\beta-(\alpha_1+\alpha_2)$ не пересекает линию $y=x+\alpha_1$. Следовательно, для рассматриваемого расчетного случая $3\alpha_1\leqslant\beta\leqslant4\alpha_1$ начиная с четвертого года регулирования достигается стабилизация расчетных условий при любых соотношениях между параметрами β, β_∂ и α_1, α_2.

Поскольку при длительной эксплуатации водохранилища функции обеспеченности наполнений $\Phi_{1i}(x)$, $\Phi_{2i}(x)$ не зависят от значения функции (начальной) $\Phi_{10}(y)$, то вторые индексы при них могут быть опущены.

Решение полученных систем интегральных уравнений покажем применительно (2.3.6), где помимо основного условия $2\alpha_1\leqslant\beta\leqslant3\alpha_1$ должно соблюдаться также дополнительное: $\beta-\beta_\partial\geqslant\alpha_2\geqslant\beta-\alpha_1$.

Пусть численными значениями параметров регулирования стока будут $\beta=1{,}4$; $\beta_\partial=0{,}3$; $\alpha_1=0{,}5$; $\alpha_2=1{,}0$; $C_v=0{,}71$ и $C_s\simeq1{,}42$.

Тогда система интегральных уравнений (2.3.6) перепишется в следующем виде:

$$\Phi_1(x)=F(x+0{,}5)+\int_0^{0{,}3}\Phi_1(y)\,q(x-y+0{,}5)\,dy+$$

$$+\int_{0{,}3}^{0{,}4}\Phi_2(y)\,q(x-y+0{,}5)\,dy+$$

$$+\int_{0,4}^{x+0,5}\Phi_3(y)\,q(x-y+0,5)\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant 0,3);$$

$$\Phi_2(x)=F(x+1)+\int_{0}^{0,3}\Phi_1(y)\,q(x-y+1)\,dy+$$

$$+\int_{0,3}^{0,4}\Phi_2(y)\,q(x-y+1)\,dy+\int_{0,4}^{x+1}\Phi_3(y)\,q(x-y+1)\,dy,\quad (0,3\leqslant x\leqslant 0,4);$$

$$\Phi_3(x)=F(x+1)+\int_{0}^{0,3}\Phi_1(y)\,q(x-y+1)\,dy+$$

$$+\int_{0,3}^{0,4}\Phi_2(y)\,q(x-y+1)\,dy+\int_{0,4}^{1,4}\Phi_3(y)\,q(x-y+1)\,dy,\quad (0,4\leqslant x\leqslant 1,4),$$

(2.3.13)

где

$$q(x-y+0,5)=1,4716[(x+0,5)e^{2y}-ye^{2y}]\cdot e^{-2x};$$

$$q(x-y+1)=0,5412[(x+1)e^{2y}-ye^{2y}]\cdot e^{-2x};$$

$$F(x+0,5)=0,7358(x+1)e^{-2x};$$

$$F(x+1)=0,2706(x+1,5)e^{-2x}.$$

(2.3.14)

Введем следующие обозначения:

$$A_1=\int_{0}^{0,3}\Phi_1(y)e^{2y}\,dy;\quad A_2=\int_{0,3}^{0,4}\Phi_2(y)e^{2y}dy;\quad A_3=\int_{0,4}^{1,4}\Phi_3(y)e^{2y}dy;$$

$$B_1=\int_{0}^{0,3}\Phi_1(y)\cdot ye^{2y}\,dy;\quad B_2=\int_{0,3}^{0,4}\Phi_2(y)\cdot ye^{2y}dy;\quad B_3=$$

(2.3.15)

$$= \int_{0,4}^{1,4} \Phi_3(y) \cdot ye^{2y} dy. \Bigg| \Bigg)$$

Тогда третье уравнение (2.3.13), учитывая (2.3.14), после соответствующих преобразований может быть представлено в виде

$$\Phi_3(x) = 0{,}5412(Ax+B)e^{-2x}, \tag{2.3.16}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= A_1+A_2+A_3+0{,}5; \\ B &= -(B_1+B_2+B_3)+A_1+A_2+A_3+0{,}75. \end{aligned}\right\} \tag{2.3.17}$$

Второе уравнение (2.3.13), учитывая (2.3.16), будет выглядеть так:

$$\Phi_2(x) = [0{,}0488Ax^3+0{,}1465(A+B)x^2+(0{,}4006A-0{,}1172B)x+ \\ +(0{,}0297A+0{,}5646B)]e^{-2x}. \tag{2.3.18}$$

Аналогично после преобразований может быть представлено и первое уравнение системы (2.3.13)

$$\Phi_1(x) = [(0{,}1327Ax^3+(0{,}1991A+0{,}3982B)x^2+ \\ +(0{,}7907A-0{,}7168B)x+(1{,}7941B-0{,}3810A)e^{-2x}. \tag{2.3.19}$$

Решения для $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ и $\Phi_3(x)$ подставим в (2.3.15) вместо соответствующих им функций, и, выполнив интегрирование, получим

$$A_1 = 0{,}5095B-0{,}767A; \quad B_1 = 0{,}0751B-0{,}00952A;$$

$$A_2 = 0{,}0190A+0{,}0542B; \quad B_2 = 0{,}0667A+0{,}0190B;$$

$$A_3 = 0{,}4871A+0{,}5412B; \quad B_3 = 0{,}4835A+0{,}4871B.$$

Или, учитывая (2.3.17), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} 0{,}5706A &= 1{,}1049B+0{,}5; \\ 0{,}5194A &= 1{,}5811B-0{,}25, \end{aligned}\right\} \tag{2.3.20}$$

т. е.

$$A = 3{,}2492 \text{ и } B = 1{,}2254.$$

Подставляя значения постоянных A и B в полученные выше выражения для $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ и $\Phi_3(x)$, будем иметь окончательное решение в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x) = (0{,}4313x^3+1{,}1349x^2+1{,}6908x+0{,}9606)\,e^{-2x}, \\
&\qquad (0 \leqslant x \leqslant 0{,}3); \\
&\Phi_2(x) = (0{,}1586x^3+0{,}6553x^2+1{,}1581x+0{,}7883)\,e^{-2x}, \\
&\qquad (0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}4); \\
&\Phi_3(x) = (1{,}7585x+0{,}6632)\,e^{-2x}, \quad (0{,}4 \leqslant x \leqslant 1{,}4).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.21)$$

По аналогичной схеме могут быть получены аналитические решения и для систем интегральных уравнений (2.3.3), (2.3.5), (2.3.7) и (2.3.9) при соответствующих им параметрам регулирования, если γ — целое число.

Если параметр γ кривой Пирсона III типа не является целым числом, то для всех полученных выше систем интегральных уравнений приближенные решения (с любой заданной точностью) могут быть получены путем сведения их к системам линейных алгебраических уравнений или численной интерпретации аналитического метода.

2. Функции обеспеченности дефицитов отдачи и холостых сбросов

Объем дефицита определяется по отношению к суммарному значению отдачи обоих потребителей, равному α_2. Так как при переходе через наполнение β_∂ происходит изменение отдачи, то баланс водохранилища в перебойные годы будет выражаться не одним, а двумя уравнениями. Так, для промежутка $0 \leqslant x_\partial \leqslant \alpha_2 - \alpha_1$, считая наполнение сверх β_∂ равным $y - \beta$ должен соблюдаться следующий баланс для перебойных лет:

$$y - \beta_\partial + k_1 = \alpha_2 - x_\partial$$

или

$$k_1 = \alpha_2 + \beta_\partial - y - x_\partial. \qquad (2.3.22)$$

Аналогично для промежутка $\alpha_2 - \alpha_1 \leqslant x_\partial \leqslant \alpha_2$ можно записать $y + k_2 = \alpha_1 - x_1$, или $k_2 = \alpha_1 - y - x_1$, где $(0 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_1)$.

Заменяя в последнем равенстве значение x_1 эквивалентной величиной $x_1 - (\alpha_2 - \alpha_1)$, будем иметь

$$k_2 = \alpha_2 - y - x_\partial\,. \qquad (2.3.23)$$

В прямоугольнике $[\alpha_2, \beta]$ определим прямые линии, которые выделяют области с $k_1 = 0$ и $k_2 = 0$, т. е.

$$y=\alpha_2+\beta_\partial-x_\partial \qquad (2.3.24)$$

и

$$y=\alpha_2-x_\partial. \qquad (2.3.25)$$

Построим эти прямые (рис. 2.3.6). Из уравнения (2.3.24) имеем $y=0$ при $x=\alpha_2+\beta_\partial$ и $x=0$ при $y=\alpha_2+\beta_\partial$. В координатном поле $[x=\alpha_2,\ y=\beta]$ прямая (2.3.24) выделяет область DEC, в пределах которой обеспеченность расчетного стока $F(k_1)=1$, а его плотность вероятностей $q(k_1)=0$.

Аналогично прямая (2.3.25) выделяет в том же координатном поле область ABC, в пределах которой $q(k_2)=0$. Построение кривой обеспеченности дефицитов отдачи возможно как в случае неглубокого, так и глубокого многолетнего регулирования стока.

Схема неглубокого регулирования стока. В случае неглубокого многолетнего регулирования стока ($\beta\leqslant\alpha_1$), как показано, безусловная функция обеспеченности наполнений описывается системой двух интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x+\alpha_1)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_1(y)\,q(x-y+\alpha_1)\,dy+\\
&+\int_{\beta_\partial}^{\beta}\Phi_2(y)\,q(x-y+\alpha_1)\,dy,\quad (0\leqslant x\leqslant\beta_\partial);\\
&\Phi_2(x)=F(x+\alpha_2)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_1(y)\,q(x-y+\alpha_2)\,dy+\\
&+\int_{\beta_\partial}^{\beta}\Phi_2(y)q(x-y+\alpha_2)dy,\quad (\beta_\partial\leqslant x\leqslant\beta).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.26)$$

Здесь функция $\Phi_1(y)$ соответствует интервалу $0\leqslant y\leqslant\beta_\partial$, а $\Phi_2(y)$ — $\beta_\partial\leqslant y\leqslant\beta$. Очевидно, совместное влияние функций $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(y)$ на формирование дефицитов в отдаче будет наблюдаться в частных областях интегрирования 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а в 7 — влияние функции $\Phi_1(y)$ (рис. 2.3.6).

Таким образом, кривая обеспеченности дефицитов отдачи будет описываться следующей системой интегральных уравнений:

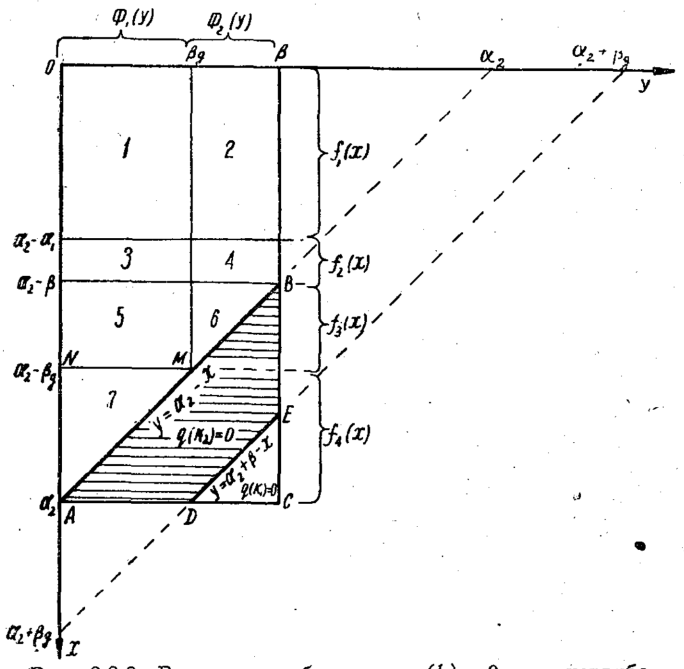

Рис. 2.3.6. Выделение области с $q(k)=0$ при неглубоком регулировании стока ($\beta \leqslant \alpha_1$)

$$
\left.
\begin{aligned}
f_1(x_д) &= F(\alpha_2+\beta_д-x_д)+\int_0^{\beta_д}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2+\beta_д-y-x_д)+dy+\\
&+\int_{\beta_д}^{\beta}\Phi_2(y)\,q(\alpha_2-\beta_д-y-x_д)\,dy,\quad (0\leqslant x_д\leqslant \alpha_2-\alpha_1);\\
f_2(x_д) &= F(\alpha_2-x_д)+\int_0^{\beta_д}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2-y-x_д)\,dy+\\
&+\int_{\beta_д}^{\beta}\Phi_2(y)\,q(\alpha_2-y-x_д)\,dy,\quad (\alpha_2-\alpha_1\leqslant x_д\leqslant \alpha_2-\beta);\\
f_3(x_д) &= F(\alpha_2-x_д)+\int_0^{\beta_д}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2-y-x_д)\,dy+
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2.3.27)
$$

$$+\int_{\beta_\partial}^{\alpha_2-x_\partial}\Phi_2(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy,\quad(\alpha_2-\beta\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2-\beta_\partial);$$

$$f_4(x_\partial)=F(\alpha_2-x_\partial)+\int_0^{\alpha_2-x_\partial}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy$$

$$(\alpha_2-\beta_\partial\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2).$$

Таким образом, кривая обеспеченности дефицитов отдачи для случая неглубокого многолетнего регулирования стока $\beta\leqslant\alpha_1$ описывается четырьмя различными функциями. Это означает, что она претерпевает изменения кривизны в точках $x_\partial=\alpha_2-\alpha_1$; $x_\partial=\alpha_2-\beta$ и $x_\partial=\alpha_2-\beta_\partial$.

Покажем, что полученные выше интегральные соотношения (2.3.27) удовлетворяют уравнению баланса водохранилища за многолетие, т. е. критериальному тождеству:

$$\alpha_2+E_c-E_\partial\equiv 1. \tag{2.3.28}$$

При значении параметра γ кривой Пирсона III типа, например, равном единице, система уравнений (2.3.26) имеет следующее решение:

$$\Phi_1(x)=\frac{e^{-\alpha_1-x}}{M},\ (0\leqslant x\leqslant\beta_\partial);\quad \Phi_2(x)=\frac{e^{-\alpha_2-x}}{M},\ (\beta_\partial\leqslant x\leqslant\beta), \tag{2.3.29}$$

где $M=1-\beta_\partial e^{-\alpha_1}-(\beta-\beta_\partial)e^{-\alpha_2}$.

Заметим, что площадка AB на кривой обеспеченности наполнений (рис. 2.3.7) при $x=\beta_\partial$ будет равна

$$\Delta\Phi(\beta_\partial)=M^{-1}\cdot e^{-\beta_\partial}(e^{-\alpha_1}-e^{-\alpha_2}).$$

Подставляя (2.3.29) в интегральные соотношения (2.3.27) и выполнив интегрирование, получим

$$f_1(x_\partial)=\frac{e^{-\alpha_2-\beta_\partial+x_\partial}}{M},\quad f_2(x_\partial)=\frac{e^{-\alpha_2+x_\partial}}{M},$$

$$(0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2-\alpha_1);\qquad (\alpha_2-\alpha_1\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2-\beta);$$

$$f_3(x_\partial)=\frac{(1-\beta e^{-\alpha_2}+\alpha_2 e^{-\alpha_2})\cdot e^{-\alpha_2+x_\partial}}{M}-\frac{x_\partial\cdot e^{-2\alpha_2+x_\partial}}{M}, \tag{2.3.30}$$

$$(\alpha_2-\beta\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2-\beta_\partial);$$

$$f_4(x_\partial)=\left(1+\frac{\alpha_2 e^{-\alpha_1}}{M}\right)\cdot e^{-\alpha_2+x_\partial}-\frac{x_\partial\cdot e^{\alpha_2-\alpha_1+x_\partial}}{M},$$

$$(\alpha_2-\beta_\partial\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2).$$

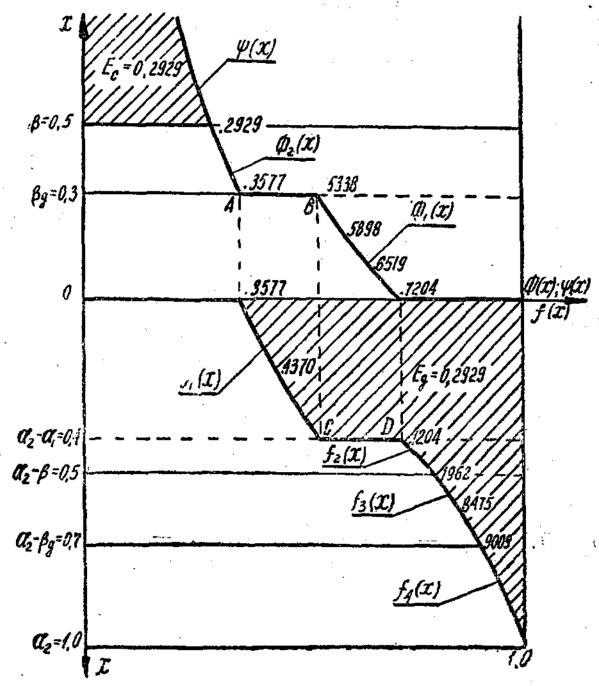

Рис. 2.3.7. Обобщенная водохозяйственная характеристика при $\beta=0{,}5$; $\beta_\partial=0{,}3$; $\alpha_1=0{,}6$; $\alpha_2=0{,}1$; $2=1{,}0$

При этом площадка CD на кривой обеспеченности дефицитов будет равна $\Delta f(\alpha_2-\alpha_1)=f_2(\alpha_2-\alpha_1)-f_1(\alpha_2-\alpha_1)=(1-e^{-\beta_\partial})\cdot\frac{e^{-\alpha_1}}{M}$.

Математическое ожидание дефицитов отдачи, согласно (2.3.30), равно

$$E_\partial=\alpha_2-1+\frac{e^{-(\beta+\alpha_2)}}{M}. \qquad (2.3.31)$$

Функция обеспеченности холостых сбросов имеет вид

$$\psi(x_c)=F(\beta+\alpha_2+x_c)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_1(y)\,q(\beta+\alpha_2-y+x_c)\,dy+$$

$$+\int_{\beta_\partial}^{\beta} \Phi_2(y)\, q(\beta+\alpha_2-y+x_c)\, dy, \quad (0\leqslant x_c\leqslant\infty); \tag{2.3.32}$$

решением которого является

$$\psi(x_c)=M^{-1}\cdot e^{-(\beta+\alpha_2+x_c)}. \tag{2.3.33}$$

Откуда

$$E_c=M^{-1}\cdot e^{-(\beta+\alpha_2)}. \tag{2.3.34}$$

Подставляя (2.3.31) и (2.3.34) в (2.3.28), имеем $\alpha_2+M^{-1}\cdot e^{-(\beta+\alpha_2)}-\alpha_2-M^{-1}\cdot e^{-(\beta+\alpha_2)}+1\equiv 1$, что указывает на правильность выводов расчетных алгоритмов. При конкретных значениях параметров $\beta=0{,}5$; $\beta_\partial=0{,}3$; $\alpha_1=0{,}6$ и $\alpha_2=1{,}4$ получены следующие значения искомых функций (см. также рис. 2.3.7).

Таблица 2.3.1

Координаты обобщенной водохозяйственной кривой водохранилища

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x)$	$f_1(x_\partial)$	$f_2(x_\partial)$	$f_3(x_\partial)$	$f_4(x_\partial)$	$\varphi(x_c)$
0	0,7204	—	0,3577	—	—	—	0,2929
0,3	0,5338	0,3577	—	—	—	—	0,2347
0,4	—	—	0,5338	0,7204	—	—	0,2124
0,5	—	0,2929	—	0,7962	0,7962	—	0,1921
0,7	—	—	—	—	0,9009	0,9009	0,1573
1,0	—	—	—	—	—	1,0	0,1165

Схема глубокого регулирования стока ($\beta>\alpha_1$). Рассмотрим расчетную схему при емкости водохранилища $2\alpha_1\leqslant\beta\leqslant 3\alpha_1$ с дополнительным условием $\beta-\beta_\partial\geqslant\alpha_2\geqslant\beta-\alpha_1$.

Используя уравнения годовых балансов водохранилища (2.3.22) и (2.3.23) в прямоугольнике $[\alpha_2, \beta]$ при $k_1=0$ и $k_2=0$, построим прямые $y=\alpha_2+\beta_\partial-x$ и $y=\alpha_2-x$, которые выделяют области с плотностями расчетного стока $q(k_1)=0$ и $q(k_2)=0$ (рис. 2.3.8).

Из уравнения прямой $y=\alpha_2-x_1$ при $y=\beta_\partial$ и $y=\beta-\alpha_2$ имеем $x=\alpha_2-\beta_\partial$ и $x=2\alpha_2-\beta$. Проведем прямые $y=\beta_\partial$; $y=\beta-\alpha_2$; $x=\alpha_2-\beta_\partial$ и $x=2\alpha_2-\beta$ (рис. 2.3.8). Действительная область интегрирования $ABCDEA$ при этом разобьется на девять частных областей.

Так, промежутку $(0\leqslant x\leqslant\alpha_2-\alpha_1)$ будут соответствовать три частные области интегрирования (*1*, *2* и *3*), промежутку $(\alpha_2-\alpha_1\leqslant x\leqslant 2\alpha_2-\beta)$ — (*4*, *5* и *6*). Промежуткам же $(2\alpha_2-\beta\leqslant x\leqslant\alpha_2-\beta_\partial)$ и $(\alpha_2-\beta_\partial\leqslant x\leqslant\alpha_2)$ отвечают соответственно две (*7* и *8*) и одна (*9*) частные области интегрирования, согласно которым имеем систему из четырех уравнений:

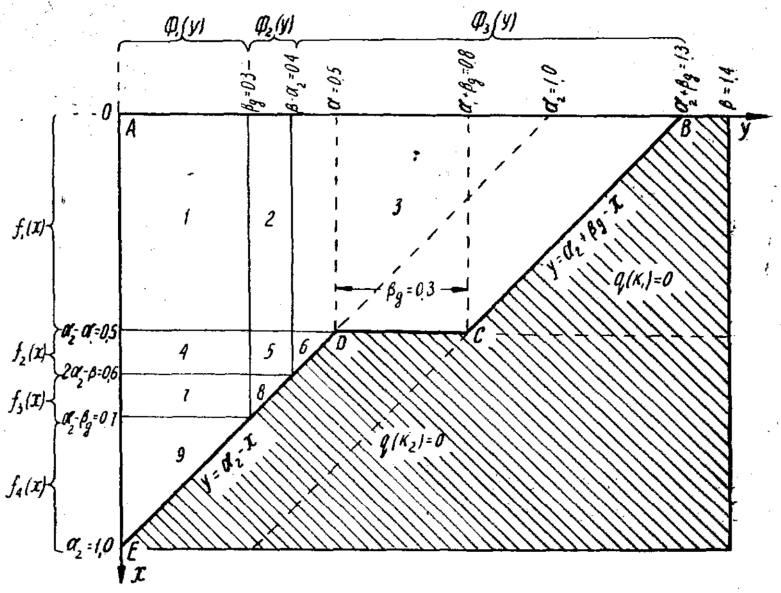

Рис. 2.3.8. Разбиение $ABCDE$ на частные области интегрирования при параметрах $\beta=1{,}4$; $\beta_\partial=0{,}3$; $\alpha_1=0{,}5$; $\alpha_2=1{,}0$ и $C_\partial\simeq 0{,}71$

$$
\left.
\begin{aligned}
f_1(x_\partial) = F(\alpha_2+\beta_\partial-x_\partial)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2+\beta_\partial-y-x_\partial)\,dy+ \\
+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2}\Phi_2(y)\,q(\alpha_2+\beta_\partial-y-x_\partial)\,dy+\int_{\beta-\alpha_2}^{\alpha_2+\beta_\partial-x_\partial}\Phi_3(y)\,q \\
(\alpha_2+\beta_\partial-y-x_\partial)\,dy,\quad (0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2-\alpha_1); \\
f_2(x_\partial) = F(\alpha_2-x_\partial)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy+ \\
+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2}\Phi_2(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy+\int_{\beta-\alpha_2}^{\alpha_2-x_\partial}\Phi_3(y)\,q(\alpha_2-y- \\
-x_\partial)\,dy,\quad (\alpha_2-\alpha_1\leqslant x_\partial\leqslant 2\alpha_2-\beta);
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2.3.35)
$$

$$f_3(x_\partial)=F(\alpha_2-x_\partial)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy+$$

$$+\int_{\beta_\partial}^{\alpha_2-x_\partial}\Phi_2(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy,\quad(2\alpha_2-\beta\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2-\beta_\partial);$$

$$f_4(x_\partial)=F(\alpha_2-x_\partial)+\int_0^{\alpha_2-x_\partial}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy$$

$$(\alpha_2-\beta_\partial\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2).$$

Решениями системы (2.3.35) при параметрах $\beta=1{,}4$; $\beta_\partial=0{,}3$; $\alpha_1=0{,}5$; $\alpha_2=1{,}0$ и $C_v=0{,}71$; $C_s=2C_v$ будут

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(x_\partial)=(0{,}6582-0{,}8751x_\partial+0{,}4381x_\partial^2-0{,}0871x_\partial^3)e^{2x_\partial},\\
&\qquad(0\leqslant x_\partial\leqslant 0{,}5);\\
&f_2(x_\partial)=(0{,}7884-1{,}1581x_\partial+0{,}6553x_\partial^2-0{,}1586x_\partial^3)e^{2x_\partial},\\
&\qquad(0{,}5\leqslant x_\partial\leqslant 0{,}6);\\
&f_3(x_\partial)=(0{,}7937-1{,}1939x_\partial+0{,}7469x_\partial^2-0{,}2656x_\partial^3+\\
&\quad+0{,}0517x_\partial^4-0{,}0043x_\partial^5)e^{2x_\partial},\quad(0{,}6\leqslant x_\partial\leqslant 0{,}7);\\
&f_4(x_\partial)=(0{,}8811-1{,}5111x_\partial+1{,}1413x_\partial^2-0{,}4740x_\partial^3+\\
&\quad+0{,}1095x_\partial^4-0{,}0117x_\partial^5)e^{2x_\partial},\quad(0{,}7\leqslant x_\partial\leqslant 1{,}0),
\end{aligned}\right\}\qquad(2.3.36)$$

т. е. $f_1(0)=0{,}6582$; $f_1(0{,}3)=0{,}7885$; $f_1(0{,}5)=0{,}8681$; $f_2(0{,}5)=0{,}9606$; $f_2(0{,}6)=f_3(0{,}6)=0{,}9801$; $f_3(0{,}7)=f_4(0{,}7)=0{,}9928$ и $f_4(1{,}0)=1{,}0000$.

Функция обеспеченности холостых сбросов для данной расчетной схемы будет определяться следующим интегральным соотношением:

$$\psi(x_c)=F(\beta+\alpha_2+x_c)+\int_0^{\beta_\partial}\Phi_1(y)\,q(\beta+\alpha_2-y+x_c)\,dy+$$

$$\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2} \Phi_2(y)\, q(\beta+\alpha_2-y+x_c)\, dy+ \int_{\beta-\alpha_2}^{\beta} \Phi_3(y)\, q(\beta+\alpha_2-y+x_c)\, dy,$$

$$(0 \leqslant x_c < \infty), \qquad (2.3.37)$$

т. е. $\psi(x_c)=[1{,}7585(\beta+x_c)+0{,}6632]\cdot e^{-2(3+x_c)}$. Или (при $x_c=0$ и $x_c=0{,}4$) $\psi(0)=0{,}1900$ и $\psi(0{,}4)=0{,}1046$.

Оставляя основной расчетный случай $2\alpha_1 \leqslant \beta \leqslant 3\alpha_1$, введем следующее дополнительное условие $\beta-\beta_\partial \leqslant \alpha_2 \leqslant \beta-\alpha_1$ (вместо $\beta-\beta_\partial \leqslant x_2 \leqslant \beta-\alpha_1$). Безусловная кривая обеспеченности на-

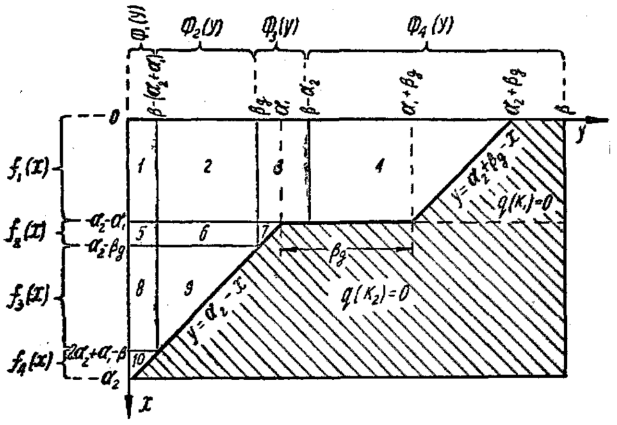

Рис. 2.3.9. Схема к получению интегральных соотношений (2.3.38) при $\beta=1{,}4$; $\beta_\partial=0{,}3$; $\alpha_1=0{,}6$ и $\alpha_2=1{,}0$

полнений будет описываться четырьмя интегральными уравнениями (2.3.5), согласно которым кривая обеспеченности дефицитов отдачи будет представлена четырьмя уравнениями (рис. 2.3.9):

$$f_1(x_\partial)=F(\alpha_2+\beta_\partial-x_\partial)+\int_0^{\beta-(\alpha_2+\alpha_1)} \Phi_1(y)\, q(\alpha_2+\beta_\partial-$$

$$-y-x_\partial)\, dy+\int_{\beta-(\alpha_2+\alpha_1)}^{\beta_\partial} \Phi_2(y)\, q(\alpha_2+\beta_\partial-y-x_\partial)\, dy+$$

$$+\int_{\beta_\partial}^{\beta-\alpha_2}\Phi_3(y)\,q(\alpha_2+\beta_\partial-y-x_\partial)\,dy+\int_{\beta-\alpha_2}^{\alpha_2+\beta_\partial-x_\partial}\Phi_4(y)\times$$

$$\times q(\alpha_2+\beta_\partial-y-x_\partial)\,dy,\quad (0\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2-\alpha_1);$$

$$f_2(x_\partial)=F(\alpha_2-x_\partial)+\int_0^{\beta-(\alpha_2+\alpha_1)}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy+$$

$$+\int_{\beta-(\alpha_2+\alpha_1)}^{\beta_\partial}\Phi_2(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy+\int_{\beta_\partial}^{\alpha_2-x_\partial}\Phi_3(y)\,q(\alpha_2-$$

$$-y-x_\partial)\,dy,\quad (\alpha_2-\alpha_1\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2-\beta_\partial);$$

$$f_3(x_\partial)=F(\alpha_2-x_\partial)+\int_0^{\beta-(\alpha_2+\alpha_1)}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy+ \qquad (2.3.38)$$

$$+\int_{\beta-(\alpha_2+\alpha_1)}^{\alpha_2-x_\partial}\Phi_2(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy,$$

$$(\alpha_2-\beta_\partial\leqslant x_\partial\leqslant 2\alpha_2+\alpha_1-\beta);$$

$$f_4(x_\partial)=F(\alpha_2-x_\partial)+\int_0^{\alpha_2-x_\partial}\Phi_1(y)\,q(\alpha_2-y-x_\partial)\,dy,$$

$$(2\alpha_2+\alpha_1-\beta\leqslant x_\partial\leqslant\alpha_2).$$

Интегральные соотношения справедливы при любых законах распределения вероятностей годовых объемов стока, удовлетворяющих условиям $\lim\limits_{k\to\infty}F(k)=0$ и $\lim\limits_{k\to 0}F(k)=1$, и могут быть решены при любых сочетаниях параметров регулирования.

3. Особенности алгоритма численной интерпретации метода

Численный способ построения безусловной кривой обеспеченности наполнений в случае двух разнообеспеченных водопотребителей имеет некоторую специфику расчетного алгорит-

ма. Поскольку отдача назначается в зависимости от состояния наполнения относительно многолетней диспетчерской емкости $\beta_д$, то годовой водный баланс водохранилища будет представлен не одним, а двумя уравнениями:

для промежутка $(0 \leqslant x \leqslant \beta_д)$

$$k_{ij} = x_i - y_j + \alpha_1, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, k), \quad (j = 0, 1, \ldots, k, \ldots, n); \tag{2.3.39}$$

для промежутка $\beta_д \leqslant x \leqslant \beta$

$$k_{ij} = x_i - y_j + \alpha_2, \quad (i = k, k+1, \ldots, n), \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, n). \tag{2.3.40}$$

Соответственно и значения обеспеченности расчетного стока должны подсчитываться по следующим видоизмененным формулам:

$$\left.\begin{aligned} F(x_i - y_j + \alpha_1) &= 1 - P_{ij}; \\ F(x_k - y_j + \alpha_2) &= 1 - P^*_{kj}; \\ F(x_i - y_j + \alpha_2) &= 1 - P_{ij}. \end{aligned}\right\} \tag{2.3.41}$$

Таким образом, при наполнении, равном $x_k = \beta_д$, необходимо определять два значения обеспеченности расчетного стока F_{kj} и F^*_{kj} и, следовательно, два значения функции обеспеченности наполнений $\Phi(\beta_д)$ и $\Phi^*(\beta_д)$ (см. рис. 2.3.1).

Формулы для определения обеспеченности наполнений на конец первого года регулирования (начальная итерация) будут

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x_i) &= F(x_i + \alpha_1), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k; \\ \Phi^*_1(x_k) &= F(x_k + \alpha_2); \\ \Phi_1(x_i) &= F(x_i + \alpha_2), \quad i = k+1; k+2; \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{2.3.42}$$

Для всех последующих лет регулирования система итерационных формул сохраняется такой же, как (1.2.47). Несколько видоизменится лишь формула для определения значений частных вероятностей наполнений $\beta_д$, а именно:

$$\Delta p_{(s+1)k} = \frac{\Phi_s(x_{k-1}) + \Phi_s(x_k) - \Phi^*_s(x_k) - \Phi^*_s(x_{k-1})}{2}. \tag{2.3.43}$$

Необходимо отметить, что в результате скачкообразного изменения отдачи при переходе от α_1 и α_2 диагонально расположенные клетки таблицы постоянных множителей с одинаковыми значениями F_{ij}, соответствующими наполнениям $x_i \geqslant \beta_\partial$, получат сдвиг вправо на число клеток $m=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{h}$, где h — величина интервала наполнений.

Абсциссы безусловной кривой обеспеченности наполнений, вычисленные по формуле (2.3.21), так и численным способом при параметрах $\beta=1{,}4$; $\beta_\partial=0{,}3$; $\alpha_1=0{,}5$; $\alpha_2=1{,}0$ и $C_v\simeq 0{,}71$ равны (табл. 2.3.2)

Таблица 2.3.2

Значения функции $\Phi(x)$

x_i	Аналитический метод	Численный способ	$\pm\Delta$
0	0,9606	0,9602	−0,0004
0,1	.9345	.9340	−0,0005
0,2	.9033	.9028	−0,0005
0,3	.6580	.6579	−0,0001
0,4	.6140	.6141	+0,0001
0,5	.5674	.5677	0,0003
0,6	.5175	.5175	0,0000
0,7	.4671	.4675	0,0004
0,8	.4179	.4183	0,0004
0,9	.3712	.3714	0,0002
1,0	.3276	.3280	0,0004
1,1	.2878	.2880	0,0002
1,2	.2515	.2520	−0,0005
1,3	.2191	.2191	0,0000
1,4	.1900	.1900	0,0000

Как видно, значения $\Phi(x_i)$, определенные двумя способами, хорошо согласуются между собой (отклонения не превышают $\pm 0{,}0005$).

На рис. 2.3.7 и 2.3.10 показаны обобщенные водохозяйственные характеристики режима работы водохранилища при неглубоком и глубоком регулировании стока.

Как видно из рис. 2.3.10, объему дефицита $x_\partial=\alpha_2-\alpha_1=0{,}5$ на кривой обеспеченности дефицитов отдачи отвечает горизонтальная площадка $bc=0{,}9606-0{,}8680=0{,}0926$ (9,26%). На безусловной кривой обеспеченности наполнений ей соответствует функция $\Phi_1(x)$ с пределами изменения аргумента $(0\leqslant x\leqslant\beta_\partial)$—$BC$. Горизонтальной площадке на безусловной кривой наполнений, равной $AB=0{,}8680-0{,}6580=0{,}2100$, наоборот, отвечает криволинейный участок ab, функция обеспеченности дефицитов отдачи $f_1(x_\partial)$. Математическое ожидание суммы отдач, определяемое по формулам (2.3.36), равно 0,8780.

Отметим, что расчетная схема многолетнего регулирования стока для двух потребителей позволяет значительно повысить отдачу водохранилища по сравнению с расчетом на одного потребителя. Например, при $\beta=1{,}4$ отдача увеличивается с 0,705 (по графикам Л. Ф. Плешкова при $p=96\%$ и обеспеченность отдачи α_1) при одном потребителе до 0,878 (при двух потребителях), или на 25%. Сокращение водоподачи первому потребителю с 0,705 до 0,495, т. е. на $0{,}21\bar{k}$ компенсируется почти двойным обьемом менее обеспеченной отдачи $(0{,}878-0{,}495=0{,}383\bar{k})$ с $\Phi_2(\beta_\partial)=65{,}8\%$.

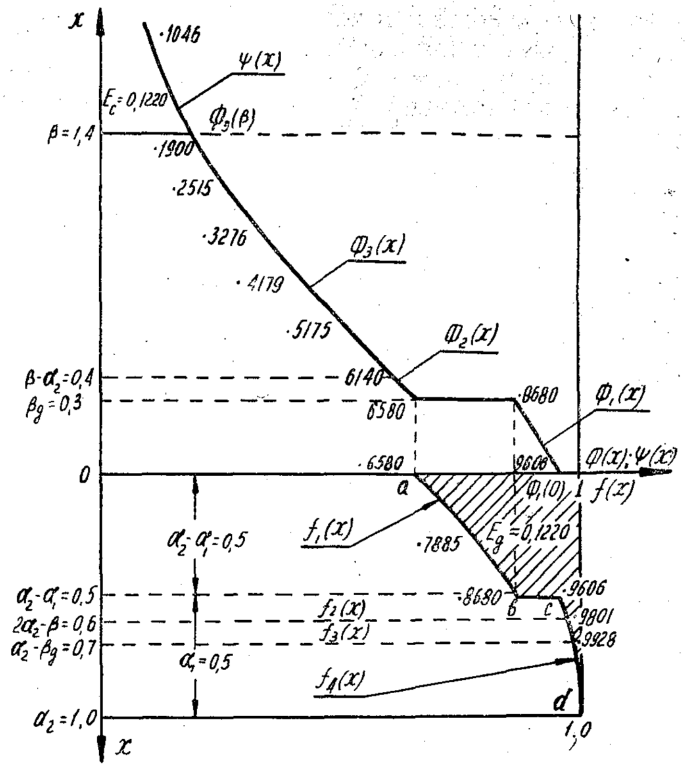

Рис. 2.3.10. Обобщенная водохозяйственная характеристика многолетнего регулирования стока для двух потребителей ($\beta=1{,}4$; $\beta_д=0{,}3$; $\alpha_2=1{,}0$; $\alpha_1=0{,}5$; $C_v\simeq0{,}71$)

4. Расчетная номограмма

Строгие методы расчета комплексных водохранилищ в силу большой трудоемкости вычислений требуют их номографирования. Номограммы для расчета водохранилищ, обслуживающие двух водопотребителей, впервые составлены Д. В. Коренистовым и В. Р. Казаком для региональных гидрологических условий Донбасса, а именно, для рек, в которых 55% годового стока проходит за два весенних месяца и $C_v=0{,}4\div0{,}7$. Нами предлагаются номограммы, свободные от указанных ограничений.

Расчетные схемы, ориентированные на двух потребителей, позволяют учесть самые различные соотношения между объемами водопотребления на промышленное водоснабжение и ирригацию.

В предельном случае при полном отключении ирригационного водопотребителя (за пределами обеспеченности) параметры α_1 и α_2 будут $\alpha_1=\alpha_{вод}$ и $\alpha_2=\alpha_{вод}+\alpha_{ирр}$, где $\alpha_{вод}$ — плановый объем водоподачи для наиболее ответственного потребителя (водоснабжения); $\alpha_{ирр}$ — то же, для менее ответственного водопотребителя.

В реальных условиях менее ответственный потребитель (за пределами его обеспеченности) обычно полностью не отключается. Поэтому при установлении параметра α_1 необходимо учитывать также и сниженную водоподачу менее ответственному потребителю $\alpha_{ирр.сн}$. В этом случае параметры α_1 и α_2 должны устанавливаться следующим образом (см. рис. 2.3.1):

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\alpha_{вод}+\alpha_{ирр.сн}\\ \alpha_2&=\alpha_{вод}+\alpha_{ирр}.\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.44)$$

На основе изложенной схемы составлены номограммы $\beta=f(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\beta_\partial=\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ при значениях параметров $P_1=\Phi(0)=95\%$, $P_2=\Phi^*(\beta_\partial)=75\%$; $C_v=0{,}4\div1{,}0$; $C_s=2C_v$, $r=0$.

Координаты опорных точек определяются следующим образом. При фиксированных значениях параметров C_v, α_1, α_2 и β_∂ подбирается такое значение многолетней емкости β, при котором обеспеченность отдачи α_1 будет равна $P_1=95\%\pm\varepsilon$. При этом обеспеченность повышенной отдачи $P_2=\Phi^*(\beta_\partial)$, как правило, не будет совпадать с ее заданным значением. Изменяя многолетнюю диспетчерскую емкость β_∂, получаем ряд значений P_2, отвечающих вполне определенной величине β.

Например, для одной опорной точки номограммы при $P_1=95\%$ и $C_v=0{,}8$ определены следующие вспомогательные значения β, β_∂ и P_2:

α_1	α_2	β	β_∂	P_2
0,7	0,8	1,99	0,401	0,869
0,7	0,8	1,84	0,542	0,818
0,7	0,8	1,74	0,696	0,763
0,7	0,8	1,69	0,845	0,710

Искомые значения β и β_∂ находятся путем графической интерполяции $P_2=0{,}75\%$ (рис. 2.3.11). Полученные координаты опорных точек, послужившие основой для построения серии номограмм (рис. 2.3.12 и 2.3.13), сведены в табл. 2.3.3.

Номограммы позволяют определять любые два параметра регулирования (при фиксированных значениях остальных).

Таблица 2.3.3

Координаты опорных точек расчетных номограмм (P_1=95% и P_2=75%)

α_1	α_2	C_v													
		0,4		0,5		0,6		0,7		0,8		0,9		1,0	
		β	$\beta_д$	β	$\beta_д$	β	$\beta_д$	β	$\beta_д$	β	$\beta_д$	β	$\beta_д$	β	$\beta_д$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0,3	0,3	—	—	—	—	—	—	—	—	0,18	0,18	0,28	0,22	0,34	0,30
0,3	0,4	—	—	—	—	—	—	—	—	0,20	0,18	0,32	0,19	0,42	0,23
0,3	0,5	—	—	—	—	—	—	—	—	0,24	0,11	0,40	0,17	0,54	0,20
0,3	0,6	—	—	—	—	—	—	—	—	0,33	0,07	0,52	0,13	0,71	0,19
0,3	0,7	—	—	—	—	—	—	—	—	0,50	0,05	0,73	0,11	0,96	0,18
0,3	0,8	—	—	—	—	—	—	—	—	0,70	0,04	1,0	0,09	1,32	0,16
0,3	0,9	—	—	—	—	—	—	—	—	1,08	0,01	1,47	0,08	1,85	0,14
0,4	0,4	—	—	0,05	0,05	0,15	0,15	0,22	0,22	0,34	0,31	0,48	0,31	0,60	0,36
0,4	0,5	—	—	0,05	0,05	0,15	0,15	0,25	0,18	0,37	0,22	0,56	0,28	0,71	0,34
0,4	0,6	—	—	0,05	0,05	0,18	0,11	0,33	0,14	0,46	0,17	0,68	0,25	0,87	0,32
0,4	0,7	—	—	0,12	0,04	0,27	0,06	0,46	0,11	0,65	0,16	0,90	0,23	1,15	0,31
0,4	0,8	—	—	0,26	0,03	0,41	0,02	0,64	0,08	0,87	0,15	1,19	0,22	1,54	0,30
0,4	0,9	—	—	0,54	0,02	—	—	0,96	0,05	0,30	0,13	1,70	0,21	2,09	0,28
0,4	0,95	—	—	0,77	0,01	—	—	1,25	0,03	1,69	0,12	—	—	—	—
0,4	1,0	—	—	1,03	0,01	—	—	1,58	0,02	2,08	0,10	—	—	—	—
0,5	0,5	0,06	0,06	0,17	0,17	0,30	0,30	0,43	0,32	0,55	0,37	0,78	0,45	0,90	0,51
0,5	0,6	0,06	0,06	0,17	0,17	0,32	0,22	0,50	0,28	0,65	0,34	0,91	0,42	1,07	0,49
0,5	0,7	0,07	0,06	0,24	0,13	0,38	0,15	0,63	0,23	0,83	0,30	1,12	0,39	1,36	0,47
0,5	0,8	0,17	0,04	0,36	0,10	0,53	0,11	0,81	0,20	1,08	0,29	1,43	0,37	1,78	0,46
0,5	0,9	0,38	0,03	0,64	0,08	0,79	0,08	1,17	0,17	1,56	0,28	1,96	0,36	2,38	0,44
0,5	0,95	0,55	0,02	0,87	0,07	1,02	0,06	1,49	0,15	1,97	0,26	—	—	—	—
0,5	1,0	0,79	0,02	1,17	0,07	1,34	0,03	1,89	0,14	2,44	0,25	—	—	—	—
0,6	0,6	0,18	0,18	0,32	0,32	0,48	0,35	0,72	0,45	0,92	0,55	1,25	0,66	1,44	0,79
0,6	0,7	0,19	0,18	0,37	0,24	0,54	0,27	0,84	0,40	1,07	0,50	1,44	0,62	1,75	0,75

Окончание таблицы 2.3.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0,6	0,8	0,28	0,12	0,48	0,19	0,74	0,25	1,05	0,36	1,35	0,47	1,78	0,59	2,22	0,73
0,6	0,9	0,77	0,09	0,75	0,16	1,04	0,23	1,43	0,33	1,87	0,45	2,36	0,58	2,86	0,71
0,6	0,95	0,63	0,08	1,00	0,15	1,30	0,21	1,79	0,31	2,32	0,44	—	—	—	—
0,6	1,0	0,90	0,07	1,33	0,14	1,70	0,17	2,29	0,30	2,82	0,43	—	—	—	—
0,7	0,7	0,32	0,29	0,55	0,39	0,81	0,49	1,15	0,63	1,43	0,77	2,30	1,15	1,44	0,72
0,7	0,8	0,40	0,20	0,65	0,32	0,99	0,44	1,37	0,59	1,72	0,73	2,84	1,13	1,80	0,60
0,7	0,9	0,57	0,16	0,90	0,26	1,34	0,42	1,80	0,55	2,33	0,70	3,58	1,11	2,57	0,58
0,7	0,95	0,75	0,15	1,17	0,25	1,66	0,40	2,20	0,53	2,80	0,69	—	—	—	—
0,7	1,0	1,07	0,13	1,56	0,24	2,24	0,36	2,85	0,52	3,46	0,68	—	—	—	—
0,8	0,8	0,63	0,37	1,0	0,59	1,40	0,74	1,90	1,0	2,50	1,25	—	—	—	—
0,8	0,9	0,80	0,32	1,27	0,52	1,79	0,70	2,46	0,95	3,22	1,20	—	—	—	—
0,8	0,95	1,04	0,31	1,58	0,50	2,18	0,68	2,95	0,93	—	—	—	—	—	—
0,8	1,0	1,49	0,30	2,10	0,48	3,01	0,65	—	—	—	—	—	—	—	—
0,85	0,85	0,90	0,49	1,30	0,71	1,96	0,97	—	—	—	—	—	—	—	—
0,85	0,90	1,02	0,47	1,50	0,68	2,20	0,95	—	—	—	—	—	—	—	—
0,85	0,95	1,25	0,44	1,86	0,66	2,65	0,93	—	—	—	—	—	—	—	—
0,9	0,90	1,30	0,67	1,80	0,87	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,9	0,95	1,57	0,63	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,9	1,0	2,25	0,61	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

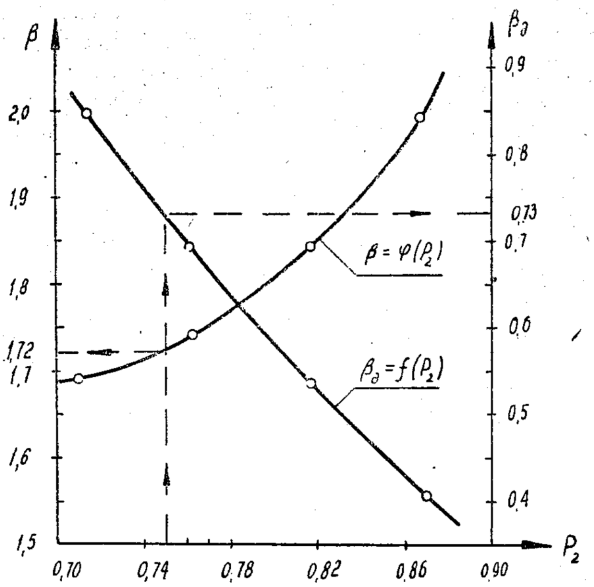

Рис. 2.3.11. Графическое определение координат опорной точки номограммы при $P_1=95\%$; $C_v=0{,}8$; $\alpha_1=0{,}7$ и $\alpha_2=0{,}8$

Применение номограмм покажем на численном примере. Пусть $C_v=0{,}8$; $\alpha_{вод}=0{,}3$; $\alpha_{ирр}=0{,}5$ (при $\alpha_{ирр.сн}=0{,}35$). По формуле (2.3.44) определяем параметры $\alpha_1=0{,}3+0{,}35=0{,}65$

Таблица 2.3.4

Значения β и β_d ($P_1=95\%$ и $P_2=75\%$)

C_v	α_1	α_2	По номограммам		По формулам	
			β	$\beta_д$	β	$\beta_д$
1,0	0,40	0,70	1,14	0,31	1,15	0,29
1,0	0,50	0,70	1,36	0,47	1,41	0,44
1,0	0,60	0,70	1,76	0,75	1,80	0,71
0,80	0,50	0,80	1,08	0,29	1,07	0,29
0,80	0,60	0,80	1,34	0,47	1,33	0,49
0,80	0,70	0,80	1,74	0,73	1,73	0,75
0,60	0,50	0,70	0,39	0,15	0,42	0,16
0,60	0,60	0,70	0,74	0,25	0,75	0,25
0,60	0,70	0,90	1,34	0,42	1,27	0,42
0,60	0,80	0,90	1,80	0,70	1,71	0,74

и $\alpha_2=0{,}30+0{,}5=0{,}80$. На номограмме, соответствующей значению $C_v=0{,}8$, ищем точку пересечения линии $\alpha_2=0{,}8$ и $\alpha_1=0{,}65$. Ордината этой точки соответствует искомому значению

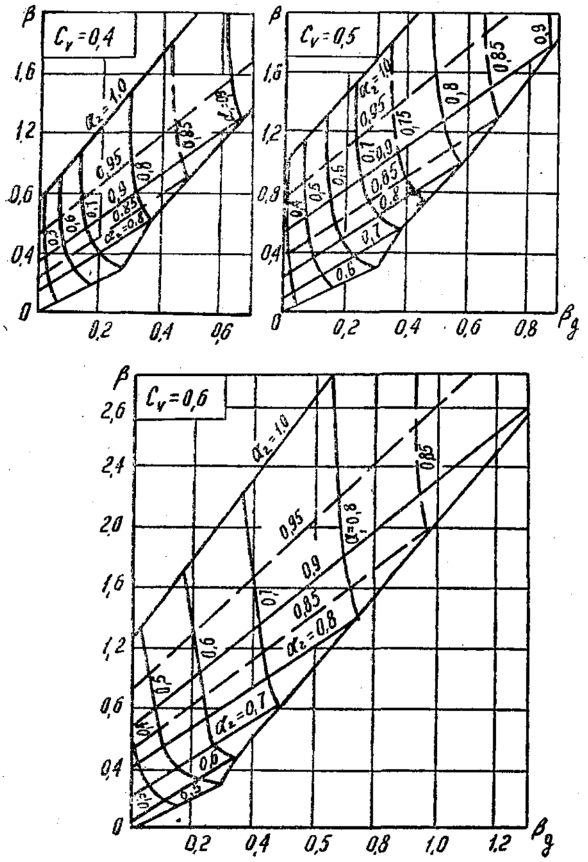

Рис. 2.3.12. Расчетные номограммы многолетнего регулирования стока для двух потребителей при $C_v=0,4\div0,6$ ($P_1=95\%$, $P_2=75\%$)

$\beta=1,55$, а ее абсцисса — $\beta_\partial=0,60$. Аналогично решаются и другие задачи. Сезонная составляющая емкости определяется при этом обычными приемами.

Для рек казахстанского типа питания можно установить всю полезную емкость водохранилища β_Σ и полную диспетчерскую емкость $\beta_{\partial\Sigma}$, которые приближенно будут равны $\beta_\Sigma=\beta+\alpha_2$ и $\beta_{\partial\Sigma}=\beta_\partial+\alpha_1$. Обобщая расчетные данные, использованные для построения номограмм, авторы получили эмпирические формулы:

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\beta_{\alpha_2,p_2}+\frac{\beta_{\alpha_1,p_1}}{\beta_{\alpha_2,p_2}}[\beta_{\alpha_2,p_1}-\beta_{\alpha_2,p_2}];\\ \beta_\partial&=\frac{\beta_{\alpha_1,p_1}}{\beta_{\alpha_2,p_1}}\left[\beta_{\alpha_2,p_1}-\beta_{\alpha_2,p_2}\left(1+\frac{P_2}{P_1}\right)\right].\end{aligned}\right\}\qquad(2.3.45)$$

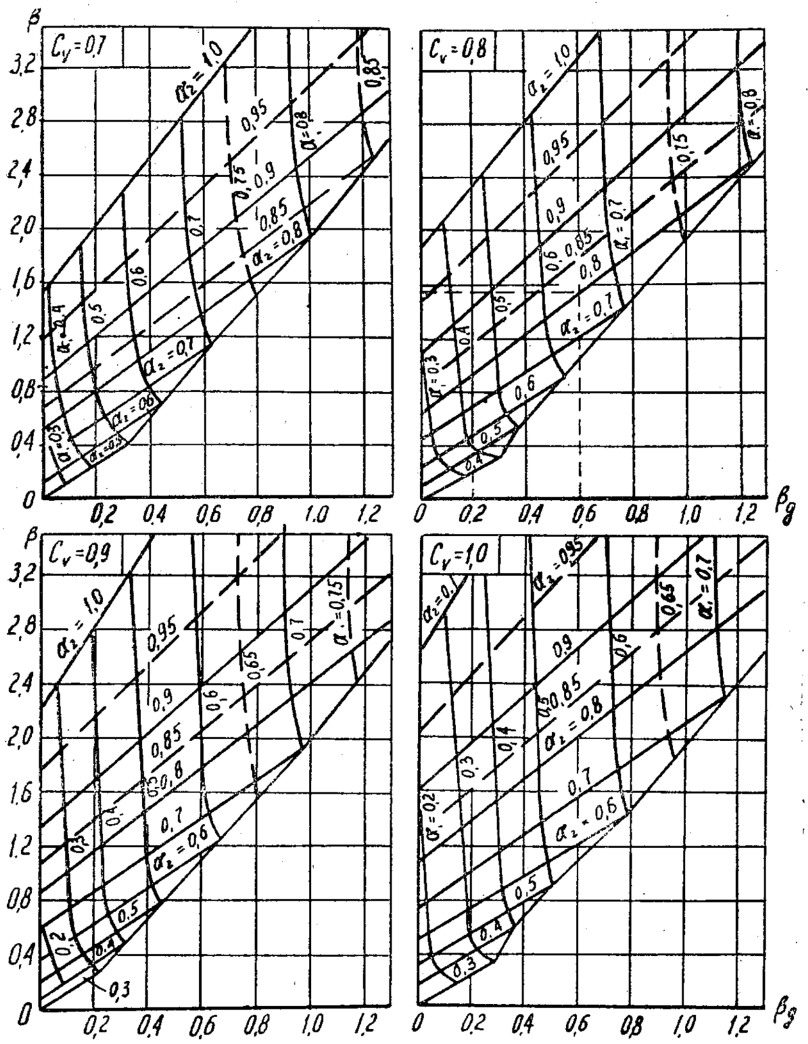

Рис. 2.3.13. Расчетные номограммы многолетнего регулирования стока для двух потребителей при $C_v=0,7\div1,0$ ($P_1=95\%$, $P_2=75\%$)

Значения многолетней емкости водохранилища β, определенные согласно принятому для номографирования расчетному методу, приведены в табл. 2.3.4. Указаны также и емкости, вычисленные по эмпирическим формулам (2.3.45).

Как видно, эмпирические формулы в пределах изменения коэффициента $C_v=0,6\div1,0$ дают хорошее согласие с обобщенным методом расчета и обеспечивают приемлемую точность.

Глава 2.4

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ НЕГЛУБОКОГО МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА НА СЛУЧАЙНУЮ ОТДАЧУ ВОДОХРАНИЛИЩА

Задача многолетнего регулирования стока на переменную по годам отдачу все еще остается недостаточно разработанной, в особенности для районов с неустойчивым естественным увлажнением. Данному вопросу посвящены исследования М. В. Потапова [75], Н. А. Картвелишвили [40], П. Я. Ляпичева [64], В. Г. Логинова [65] и др. Переменную отдачу водохранилища они ставят в зависимость от тех или иных условий: наполнения водохранилища, водности года, естественных запасов влаги в почвогрунтах и т. д., или же она рассматривается как случайная величина (для ирригационных водохранилищ), зависящая от дефицита влажности (испарение минус осадки) вегетационного периода [65]. Алгоритм расчета регулирования стока, предложенный В. Г. Логиновым, можно применять лишь для специфических условий режима рек казахстанского типа питания (в половодии продолжительностью $t_{\text{п}} \rightrightarrows 0$ проходит весь объем годового стока). Он отличается сложностью даже для водохранилища одноцелевого (ирригационного) назначения.

В общем случае объемы отдачи комплексного водохранилища зависят от гидрологических, агрометеологических и других факторов, а также от потребности в воде отраслей народного хозяйства, находящихся в сложном взаимодействии. Так, в районах неустойчивого естественного увлажнения объемы водоподачи из водохранилища, например для орошаемого земледелия, судоходства, ондатрового хозяйства и т. д., определяются водностью года, которая, в свою очередь, взаимосвязана с климатическими случайными по характеру условиями года. Таким образом, суммарная отдача α_{Σ} комплексного водохранилища является переменной величиной (рис. 2.4.1). Однако изу-

чение ее колебаний не только с позиции теории вероятностных процессов, но и вообще не проводилось.

Учет в расчетах регулирования стока переменного характера отдачи даже в случае одноцелевого (ирригационного) назначения водохранилища [65] дает уменьшение емкости гид-

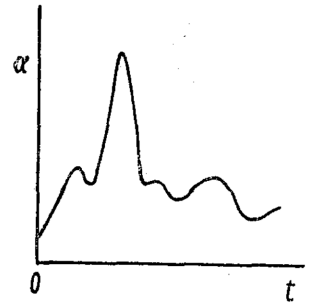

Рис. 2.4.1. График водопотребления $\alpha_2=f(t)$

роузла на 15% (по сравнению с расчетами на постоянное значение α) [65]. Поэтому изучение режима колебаний величины α_Σ, выявление закономерности в ее изменениях является актуальным. Очевидно, в отдельных исследованиях, тем более на стадии постановки вопроса, не могут быть получены исчерпывающие результаты по изучаемой проблеме. В нашей работе данный вопрос на обширных фактических материалах также не исследовался. Нами приведен вывод интегральных уравнений регулирования стока на переменную (случайную) отдачу водохранилища, являющуюся логическим развитием теории аналитического метода расчетов (часть II). Описаны типы кривых распределения вероятностей годовых объемов отдачи для отдельных компонентов комплекса, которые представляют большой теоретический и практический интерес.

1. Функции распределения вероятностей расчетного стока и объемов водопотребления компонентами водохозяйственного комплекса

Многолетний баланс воды комплексного водохранилища для зоны наполнения имеет вид

$$k=x-y+\alpha_\Sigma, \qquad (2.4.1)$$

где α_Σ – суммарный годовой объем отдачи водохранилища, образующийся из отдач на заливку поймы, специальные попуски (санитарные, судоходные и т. д.), орошаемое земледелие, выработку электроэнергии и др., т. е.

$$\alpha_\Sigma=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n. \qquad (2.4.2)$$

Слагаемые суммы (2.4.2) состоят как из постоянных годовых объемов величин (заливка поймы, специальные и санитарные попуски и т. д.), так и переменных из года в год (орошаемое земледелие, выработка электроэнергии и др.). В общем случае, суммарная отдача из водохранилища является переменной величиной из года в год и рассматривается нами как случайная, имеющая вероятностный характер изменения режимов годовых ее объемов. Допустим, что вид кривой распределения вероятностей $\Theta(\alpha_\Sigma)$ нам известен. Предполагаем, что стохастическая связь между годовыми объемами отдачи α_Σ и притока воды к створу рассчитываемого водохранилища k отсутствует или пренебрежимо мала. В этих условиях годовой баланс водохранилища (2.4.1) можно представить в виде

$$k-\alpha_\Sigma=x-y=z. \tag{2.4.3}$$

Сумма переменной величины z состоит в правой части уравнения $k-\alpha_\Sigma=z$ из притока воды в водохранилище $k[0, \infty)$ и $\alpha_\Sigma[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, в левой — $(x-y)=z$ с $x[0, \beta]$ и $y[0, \beta]$. Кривая обеспеченности величины k является неограниченной функцией, величины α_Σ, x, y наоборот — ограниченной, имеющей разрывы первого рода соответственно в точках α_{min}, α_{max}, 0 и β.

Если известен вид кривой распределения $\Theta(k-\alpha_\Sigma)$, то функция обеспеченности наполнений водохранилища $\Phi(x)$, как показано ниже, определяется интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Функция распределения вероятности величины $z=k-\alpha_\Sigma$ может быть установлена путем применения известного в теории вероятностей закона распределения нескольких случайных аргументов [8, 17, 30, 63, 77].

Как известно, законом распределения вероятностей для случая функции двух аргументов $Z=\varphi(X, Y)$ будет

$$\Theta(z)=P((X, Y)\subset D)=\iint\limits_{D_z} q(x, y)\ dxdy, \tag{2.4.4}$$

где $q(x, y)$ — плотность распределения системы (X, Y)); P — вероятность попадания точки (X, Y) в область D_z.

Пусть зависимость $\varphi(X, Y)$ будет представлена в виде суммы

$$Z=X+Y. \tag{2.4.5}$$

Тогда закон распределения величины Z, согласно (2.4.4), будет

$$\Theta(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(x, y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} q(x, y)\,dy\right\}dx. \quad (2.4.6)$$

Дифференцируя по переменной Z, получим

$$\left.\begin{aligned} q(z)&=\int_{-\infty}^{\infty} q(x, z-x)\,dx;\\ q(z)&=\int_{-\infty}^{\infty} q(y, z-y)\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (2.4.7)$$

Годовые объемы притока воды k и суммарная отдача из водохранилища α_Σ, по предположению, приняты независимыми величинами (или связь между ними так мала, что ею можно пренебречь). Тогда из (2.4.7) имеем:

$$\left.\begin{aligned} q(z)&=\int_{(k)} q(k)\cdot q(z-k)\,dk;\\ q(z)&=\int_{(\alpha_\Sigma)} q(\alpha_\Sigma)\cdot q(z-\alpha_\Sigma)\,d\alpha_\Sigma, \end{aligned}\right\} \quad (2.4.8)$$

где $q(k)$ и $q(\alpha_\Sigma)$ — плотности вероятностей величин $k[0, \infty]$ и $\alpha_\Sigma[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$.

Кривая распределения вероятности величины k является непрерывно-дифференцируемой функцией и в качестве ее могут быть приняты известные в теории вероятности законы распределения, в частности Пирсона III типа.

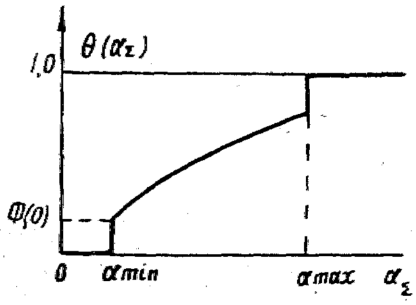

Рис. 2.4.2. Функция распределения вероятности отдачи α_Σ

Функция распределения вероятности величины α_Σ может быть установлена по формулам (2.4.7), если сумму, например, при $n=4$ представить в следующем виде:

$$\alpha_{\Sigma}=\alpha_{\Sigma_1}+\alpha_{\Sigma_2}, \tag{2.4.9}$$

где $\alpha_{\Sigma_1}=\alpha_1+\alpha_2$ и $\alpha_{\Sigma_2}=\alpha_3+\alpha_4$.

Сначала, отдельно для каждой определяется кривая распределения сумм $\alpha_{\Sigma 1}$ и $\alpha_{\Sigma 2}$ путем композиции законов распределения α_1 и α_2; α_3 и α_4, затем, согласно (2.4.9), величины α_{Σ} (рис. 2.4.2).

$$\Theta(\alpha_{\Sigma})=\Theta^*(\alpha_{\Sigma})+p_{\alpha_{\min}}\cdot U(\alpha_{\Sigma}-\alpha_{\min})+p_{\alpha_{\max}}\cdot U(\alpha_{\Sigma}-\alpha_{\max}). \tag{2.4.10}$$

Или, после дифференцирования

$$q(\alpha_{\Sigma})=q^*(\alpha_{\Sigma})+p_{\alpha_{\min}}\cdot\delta(\alpha_{\Sigma}-\alpha_{\min})+p_{\alpha_{\max}}\cdot\delta(\alpha_{\Sigma}-\alpha_{\max}) \tag{2.4.11}$$

получаем плотность вероятности α_{Σ}. Здесь $U(\alpha_{\Sigma}-\alpha)$ и $\delta(\alpha_{\Sigma}-\alpha)$ соответственно единичная ступенчатая и дельта функций. В результате их применения кривая $\Theta(\alpha_{\Sigma})$, имеющая разрывы в точках $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$ (с вероятностью $p_{\alpha_{\min}}$ и $p_{\alpha_{\max}}$), становится непрерывно-дифференцируемой функцией в пределах изменения α_{Σ} $[0, \infty)$.

Законами распределения вероятностей отдачи $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в большинстве случаев могут быть известные в теории вероятности и математической статистике кривые. Например, в работе Н. П. Капитоновой [4] показано, что между годовыми объемами отдачи на массивы орошения и притоком воды в водохранилище ирригационного назначения имеется обратная линейная коррелятивная связь. При этом предполагается, что источник изъятия воды и орошаемый массив находятся в одном и том же речном бассейне. Это позволяет за функцию распределения вероятностей годовых объемов отдачи на массивы орошения принять закон распределения стока реки k, в частности кривую Пирсона III типа ($C_s=2C_v$), которая широко применяется в гидрологии и водохозяйственных расчетах.

Попуски на поддержание санитарного состояния реки и судоходных глубин, водоснабжения промышленности и населения и др. могут быть рассмотрены как постоянные из года в год величины, так как в реальных условиях они имеют незначительные колебания.

Как известно, кривая распределения вероятностей постоян-

[4] **Н. П. Капитонова.** Прием расчета сезонно-годового регулирования стока с учетом естественного увлажнения территории (для ирригационных целей). — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 9. Алма-Ата, 1972.

ных величин описывается единичной ступенчатой функцией (рис. 2.4.5)

$$\Theta(\alpha=\text{const})=\begin{cases}0 \text{ при } \alpha<\alpha_0,\\ U(\alpha-\alpha_0),\ (\alpha_0\leqslant\alpha<\infty),\end{cases} \qquad (2.4.12)$$

производная от которой дает плотность вероятности δ-функцию:

$$\delta(\alpha)=\begin{cases}0 \text{ при } \alpha<\alpha_0,\\ \delta(\alpha-\alpha_0),\ (\alpha_0\leqslant\alpha<\infty).\end{cases} \qquad (2.4.13)$$

Величина Z в (2.4.8) имеет знакопеременные значения. Поэтому область интегрирования D_z определяется на основе анализа возможных пределов ее изменения.

В системе координат k, α_Σ и z построим поверхность $z=k-\alpha_\Sigma$. Пересечем ее плоскостью, параллельной плоскости $k0\alpha_\Sigma$, на которую спроектируем линии пересечения. В результате получаем область D_1, в которой $Z<z$ (рис. 2.4.3, *а*). Так как значения $z=k-\alpha_\Sigma$ могут быть и отрицательными (при $\alpha_\Sigma>k$), поступая аналогичным образом, определяем область D_2, где $Z>z$ (рис. 2.4.3, *б*).

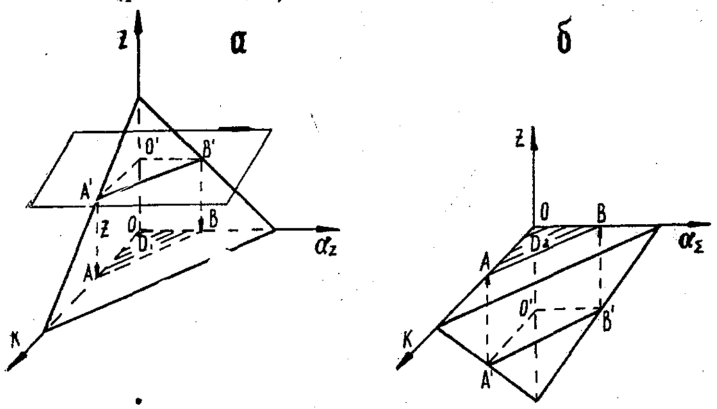

Рис. 2.4.3. К построению функции распределения вероятности величины z: *а* — определение области интегрирования D_1; *б* — области D_2

При известных D_1 и D_2 нетрудно установить вид кривой распределения вероятностей величины по формулам (2.4.6)—(2.4.8), который имеет следующий общий вид:

$$\Theta(z)=\Theta^*(z)+p_1U(z-z_1)+p_2U(z-z_2), \qquad (2.4.14)$$

где p_1, p_2 — значения функции $\Theta(z)$ в точках разрыва $z_1=k-$

$-\lambda\alpha_{max}$ и $z_2=k-\lambda\alpha_{min}$. При $Z<(k-\lambda\alpha_{max})$ функция $\Theta(z)=0$, а при $Z>(k-\lambda\alpha_{min})-\Theta(z)=1$ (рис. 2.4.4.) Здесь λ — коэффициент нормирования, так как величина α_Σ должна быть измерена в единицах нормы стока $\bar{k}=1$.

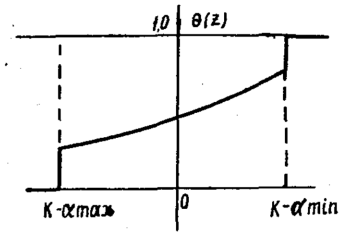

Рис. 2.4.4. Функция распределения вероятности расчетного стока $z=k-\alpha_\Sigma$

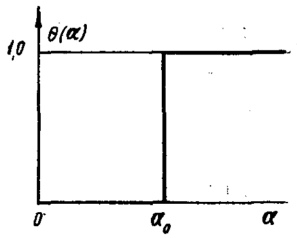

Рис. 2.4.5. Функция распределения вероятности постоянной величины $\alpha=$const

Отметим, что исследований, а тем более обобщающих выводов о типе кривых распределений отдачи α_Σ нет. Поэтому для конкретных районов закон распределения величины α_Σ должен устанавливаться на основе фактических данных о потребностях в воде компонентов водохозяйственного комплекса, естественной увлажненности почвогрунтов и других факторов.

2. Интегральные уравнения регулирования стока

Величина $z=k-\alpha_\Sigma$ в (2.4.3) представляет собой приток воды к створу гидроузла минус переменную по годам отдачу, а разность $x-y$ — наполнение водохранилища за отрезок времени t_i-t_{i-1}. Следовательно, применительно к балансовому уравнению (2.4.3) и на основе формулы полной вероятности и аппарата обобщенных функций [20, 56] может быть выведено интегральное уравнение регулирования стока.

Кривую распределения притока $\Theta(z)$ будем рассматривать как условную функцию наполнений водохранилища $\Theta(x/y)$. Тогда формулу полной вероятности, учитывая пределы изменения аргумента $y[0, \beta]$, можно представить в виде

$$\Theta(x)=\int_0^\beta \Theta(x/y)\,d\Theta(y). \qquad (2.4.15)$$

Функция $\Theta(y)$ имеет разрывы первого рода в точках 0 и β. Если их учесть и перейти от функции распределения к функции

обеспеченности наполнений $\Phi(y)$, то интеграл Стилтьеса (2.4.15) перепишется в виде обычного интеграла Коши—Римана:

$$\Phi(x) = \int_0^{\beta} \Phi(x/y)\, d\Phi(y) - \Phi(x/0) \cdot [\Phi(0) - 1] + \Phi(\beta) \cdot \Phi(x/\beta). \tag{2.4.16}$$

Выражение (2.4.16) можно получить также и непосредственно через интеграл Стилтьеса, если значение функции $\Theta(y)$ в точках разрыва 0 и β выразить через единичную ступенчатую функцию $U(y-y_i)$:

$$\Theta(y) = \Theta^*(y) + \Theta(0) \cdot U(y-0) + [1 - \Theta(\beta)] \cdot U(y-\beta), \tag{2.4.17}$$

где $\Theta(0)$ и $1-\Theta(\beta)$ — значения функции $\Theta(y)$ в точках разрыва 0 и β.

Функция $\Theta(y)$ в записи (2.4.17) является дифференцируемой на всем диапазоне изменения аргумента y. Подставляя ее в формулу (2.1.15), имеем

$$\Theta(x) = \int_0^{\beta} \Theta(x/y)\, d[\Theta(y) + \Theta(0)\, U(y-0) + [1 - \Theta(\beta)]\, U(y-\beta)] = \tag{2.4.18}$$

$$= \int_0^{\beta} \Theta(x/y)\, d\Theta(y) + \Theta(0) \cdot \Theta(x/0) + [1 - \Theta(\beta)]\, \Theta(x/\beta).$$

Интегрируя последнее выражение по частям и выполнив затем переход от функции распределения к обеспеченности наполнений, после элементарных преобразований получим

$$\Phi(x) = \Phi(x/0) - \int_0^{\beta} \Phi(y)\, \Phi'(x/y)\, dy. \tag{2.4.19}$$

Если известен вид кривой распределений вероятностей (2.4.14) $\Theta(z)$, то обеспеченность величины z будет равна

$$F(z) = 1 - \Theta(z). \tag{2.4.20}$$

Функция $\Phi(x/y)$ в (2.4.19) представляет собой обеспеченность наполнения x в конце i-го года при условии, что в начале

этого же года наполнение было y, т. е. она выражает функцию обеспеченности расчетного стока z, определяемого годовым водным балансом водохранилища (2.4.3):

$$\Phi(x/y)=F(x-y). \tag{2.4.21}$$

Тогда уравнение (2.4.19) может быть представлено в виде

$$\Phi(x)=F(x)+\int_0^{\beta}\Phi(y)\,q(x-y)\,dy, \tag{2.4.22}$$

где $q(x-y)$ — плотность вероятности величины $z=x-y$.

Таким образом, безусловная функция обеспеченности наполнений водохранилища описывается интегральным уравнением Фредгольма второго рода, техника решения которого изложена в предыдущих главах.

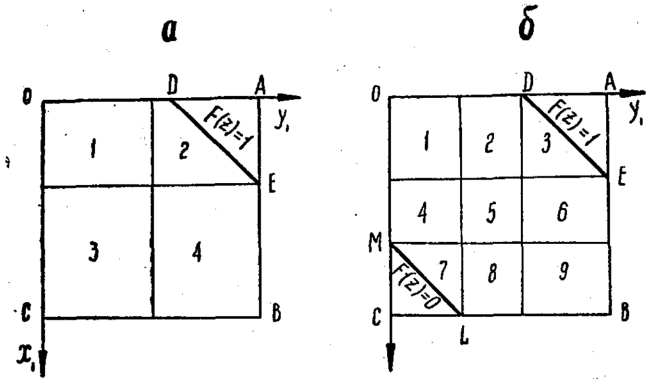

Рис. 2.4.6. Разбиение квадрата наполнений на частные области интегрирования: *а* — при значениях $F(z)=1$; *б* — при $F(z)=1$ и $F(z)=0$

Зная функцию $\Phi(x)$, нетрудно найти функцию обеспеченности холостых сбросов и дефицитов отдачи. Число интегральных уравнений, описывающее функцию (2.4.22) $\Phi(x)$, зависит от значения $z=k-\alpha_{\Sigma}$. Пусть величина z в $z=x-y$ будет равна нулю, откуда y будет равен x. На рис. 2.4.6 построены прямые DE и ML, разграничивающие квадрат наполнений $[\beta, \beta]$ на зоны с $F(z)=1$, $F(z)=0$ и $F(z)<1$. Координаты точек D, E, M, L, очевидно, будут $(0, z_1)$; $(\beta-z_1, \beta)$; $(z_2, 0)$ и $(\beta, \beta-z_2)$.

Если значение обеспеченности $F(z)$ заключено в промежут-

ке (0,1), то безусловная кривая обеспеченности наполнений $\Phi(x)$ строится путем решения непосредственно уравнения (2.4.22). Если же $F(z)$ равна 0 или 1, то искомая функция $\Phi(x)$ будет описываться разными уравнениями, соответствующими частным областям интегрирования 1, 2, 3, 4 (при $0<F(z)\leqslant 1$) и 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (при $0\leqslant F(z)\leqslant 1$ (см. рис. 2.4.6).

Для случая $(0<F(z)\leqslant 1)$ безусловная функция обеспеченности наполнений $\Phi(x)$ будет состоять из системы двух уравнений (рис. 2.4.6, *а*):

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x)+\int_0^{\beta-z_1}\Phi_1(y)q(z)\,dy+\int_{\beta-z_1}^{x}\Phi_2(y)q(z)\,dy,\\
&\qquad(0\leqslant x\leqslant\beta-z_1);\\
&\Phi_2(x)=F(x)+\int_0^{\beta-z_1}\Phi_1(y)q(z)\,dy+\int_{\beta-z_1}^{\beta}\Phi_2(y)q(z)\,dy.\\
&\qquad(\beta-z_1\leqslant x\leqslant\beta),
\end{aligned}\right\}\qquad(2.4.23)$$

где $q(z)=q(x-y)$.

В случае же $0\leqslant F(z)\leqslant 1$ имеем систему из трех уравнений (рис. 2.4.6, *б*):

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x)=F(x)+\int_0^{\beta-z_2}\Phi_1(y)q(z)\,dy+\\
&+\int_{\beta-z_2}^{\beta-z_1}\Phi_2(y)q(z)\,dy+\int_{\beta-z_1}^{x}\Phi_3(y)q(z)\,dy,\\
&\qquad(0\leqslant x\leqslant\beta-z_1);\\
&\Phi_2(x)=F(x)+\int_0^{\beta-z_2}\Phi_1(y)q(z)\,dy+\\
&+\int_{\beta-z_2}^{\beta-z_1}\Phi_2(y)q(z)\,dy+\int_{\beta-z_1}^{z_2}\Phi_3(y)q(z)\,dy,\\
&\qquad(\beta-z_1\leqslant x\leqslant z_2);
\end{aligned}\right\}\qquad(2.4.24)$$

$$\Phi_3(x) = F(x) + \int_0^{\beta - z_2} \Phi_1(y)\, q(z)\, dy +$$

$$+ \int_{\beta - z_2}^{\beta - z_1} \Phi_2(y)\, q(z)\, dy + \int_{\beta - z_2}^{\beta} \Phi_3(y)\, q(z)\, dy, \quad (z_2 \leqslant x \leqslant \beta).$$

Интегральные уравнения (2.4.23) и (2.4.24) независимо от вида функции обеспеченности расчетного стока $F(x)$ и ядра уравнений $q(z)$ могут быть решены путем сведения их к системе простых алгебраических уравнений или численным интегрированием на ЭВМ.

Глава 2.5

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН ДЛЯ РАСЧЕТОВ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА

Трудоемкость расчетов многолетнего регулирования стока свойственна всем методам и приемам, в том числе аналитическому. Практическая реализация последних при выполнении массовых расчетов может быть целесообразна в случае использования быстродействующих электронных вычислительных машин. В этой связи рассмотрим некоторые методические вопросы использования электронных вычислительных машин при реализации аналитического и численного методов расчетов многолетнего регулирования стока.

1. Порядок решения систем интегральных уравнений, описывающих безусловную кривую обеспеченности наполнений

Реализация аналитического метода расчета затруднена решением систем, содержащих большое число линейных алгебраических уравнений, которые получаются в результате аппроксимации исходных интегральных уравнений безусловных функций обеспеченности наполнений водохранилища.

В случаях обычного (ручного) счета целесообразно решение указанных систем с относительно небольшим числом (не свыше 6—8). При этом далеко не всегда будет обеспечиваться необходимая точность вычисления абсцисс безусловной кривой наполнения (порядка $\pm 0{,}001$). Для того чтобы обеспечить заданную точность расчета, в особенности в случае схем глубокого многолетнего регулирования стока, системы интегральных уравнений необходимо сводить к значительно большому числу линейных алгебраических уравнений. Практически число таких уравнений, как правило, должно составлять от 10 до

20. Решение их выполняется на электронных вычислительных машинах.

Для получения расширенной матрицы системы линейных алгебраических уравнений следует предварительно определить значения функции плотностей вероятностей расчетного стока $q(k_i=hi)$ и его обеспеченности $F(k_i=h\cdot i)$, где $i=\frac{\alpha}{h}+1, \frac{\alpha}{h}+2, \ldots, \frac{\beta+\alpha}{h}-1, \frac{\beta+\alpha}{h}$. Эти функции при значениях коэффициента вариации годового стока $C_v \geqslant 0{,}4 \div 0{,}5$ могут быть получены машинным счетом или же по таблицам, в частности [34 и др.].

Некоторое затруднение возникает при вычислении коэффициентов определителя получаемой системы линейных алгебраических уравнений. Однако благодаря известной закономерности в их изменении можно упростить задачу. Так, все коэффициенты определителя могут быть получены, если известны коэффициенты a_{1i}, a_{in}, a_{ni} и a_{i1} $(i=1, 2, \ldots, n)$, т. е. достаточно определить значение только $4(n-4)$ коэффициентов.

В случае применения формулы трапеции для приближенного интегрирования (с шагом h для вычисления коэффициентов определителя) нетрудно получить следующие расчетные зависимости:

$$a_{11}=a_{nn}=-\left[1-\frac{h}{2}\cdot q(\alpha)\right], \tag{2.5.1}$$

$$a_{i1}=\frac{h}{2}\cdot q[(i-1)h+\alpha], \quad i=2, 3, \ldots, n; \tag{2.5.2}$$

$$a_{1i}=h\cdot q[\alpha-h(i-1)], \quad i=2, 3, \ldots, \frac{d}{h}; \tag{2.5.3}$$

$$a_{1i}=0 \text{ для } i=\frac{\alpha}{h}+1, \ \frac{\alpha}{h}+2, \ldots, n \tag{2.5.4}$$

(исключая случай $C_v=1$, при котором $q(0)=1$ и $a_{1i}=\frac{h}{2}$ (при $i=\frac{\alpha}{h}+1$), остальные значения $a_{1i}=0$):

$$a_{22}=-[1-h\cdot q(\alpha)]; \tag{2.5.5}$$

$$a_{i2}=2a_{i-1,1}, \quad i=3, 4, \ldots, n; \tag{2.5.6}$$

$$a_{in}=\frac{a_{i-1,\,n-1}}{2}, \ i=\frac{\beta-\alpha}{2}+2, \ldots, n-1. \tag{2.5.7}$$

Значения свободных членов линейных алгебраических уравнений находятся по формуле

$$b_i = -F(\alpha + ih), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.5.8)$$

Все остальные коэффициенты определителя равны по диагонали. Формулы (2.5.1)—(2.5.8) с учетом последнего замечания при заданных параметрах регулирования стока полностью определяют все коэффициенты расширенной матрицы, т. е. если известна структура линейных алгебраических уравнений, то их составление не представляет трудности.

Рассмотрим методический пример получения расширенной матрицы при параметрах регулирования $\beta = 2{,}0$; $\alpha = 0{,}8$; $C_v = 0{,}50$; $C_s = 0{,}1$. Как показано выше (см. гл. 1.5), безусловная функция обеспеченности наполнений водохранилища при этих параметрах, удовлетворяющих условию $2\alpha \leqslant \beta \leqslant 3\alpha$, описывается следующими интегральными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x) = F(x+\alpha) + \int_0^{\beta-2\alpha} \Phi_1(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy + \\
&+ \int_{\beta-2\alpha}^{x+\alpha} \Phi_2(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy, \quad (0 \leqslant x \leqslant \beta-2\alpha); \\
&\Phi_2(x) = F(x+\alpha) + \int_0^{\beta-2\alpha} \Phi_1(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy + \\
&+ \int_{\beta-2\alpha}^{\beta-\alpha} \Phi_2(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy + \int_{\beta-\alpha}^{x+\alpha} \Phi_3(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy, \\
&\qquad (\beta-2\alpha \leqslant x \leqslant \beta-\alpha); \\
&\Phi_3(x) = F(x+\alpha) + \int_0^{\beta-2\alpha} \Phi_1(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy + \\
&+ \int_{\beta-2\alpha}^{\beta-\alpha} \Phi_2(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy + \int_{\beta-\alpha}^{\beta} \Phi_3(y)\, q(x-y+\alpha)\, dy, \\
&\qquad (\beta-\alpha \leqslant x \leqslant \beta).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.5.9)$$

Значения функций $F(k)$ и $q(k)$ в (2.5.9) при параметре $\gamma = 4$ (C_v 0,5 и $C_s = 1{,}0$) приведены в табл. 2.5.1.

Учитывая методический характер примера для наполнений водохранилища, выберем шаг $h = 0{,}2$. Тогда порядок определителя системы линейных алгебраических уравнений будет

$$n=\frac{\beta}{h}+1=11. \qquad (2.5.10)$$

Для первого уравнения системы (2.5.9) значение аргумента $x=0$; 0,2 и 0,4, во втором — $x=0{,}6$; 0,8; 1,0 и 1,2 и, наконец, в третьем — $x=1{,}4$; 1,6; 1,8 и 2,0. Заменяя интегралы по формуле приближенных квадратур (трапеций) и подставляя в

Таблица 2.5.1

Значения функций $F(k)$ и $q(k)$

κ	$F(\kappa)$	$q(\kappa)$	κ	$F(\kappa)$	$q(\kappa)$	κ	$F(\kappa)$	$q(\kappa)$
0	—	0	1,0	0,4335	0,7816	2,0	0,0424	0,1143
0,2	—	0,1533	1,2	0,2942	0,6068	2,2	0,0244	0,0686
0,4	—	0,5513	1,4	0,1906	0,4325	2,4	0,0138	0,0401
0,6	—	0,8361	1,6	0,1189	0,2900	2,6	0,0077	0,0228
0,8	0,6025	0,8904	1,8	0,0719	0,1858	2,8	0,0042	0,0116

(2.5.9) численные значения функций $F(k)$ и $q(k)$, будем иметь систему из 11 линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты при неизвестных и значения $b_i=-F(\alpha+ih)$, вычисленные по формулам (2 5.1)—(2.5.8), приведены в табл. 2.5.3. Например, первое уравнение системы имеет вид

$$-0{,}9110\Phi(0)+0{,}1672\Phi(0{,}2)+0{,}1103\Phi(0{,}4)+ \\ +0{,}0307\Phi(0{,}6)=-0{,}6025. \qquad (2.5.11)$$

В случаях регулирования стока на переменную отдачу $\alpha(y)$ или $\alpha(x)$ на двух потребителей (с разной обеспеченностью отдачи) и для других расчетных схем алгоритмы получения расширенных матриц в основном будут аналогичны рассмотренному выше, за исключением формул (2.5.1)—(2.5.8), число и структура которых при этом несколько изменяется.

2. Общая схема реализации численного метода построения безусловной кривой обеспеченности наполнений на ЭВМ

Согласно алгоритму численной интерпретации, определение абсцисс безусловной кривой наполнений и обеспеченность расчетного стока являются общими для всех итераций. Их значения, учитывая требования размещения числового материала в запоминающем устройстве ЭВМ, записываются в одну строку, а не в виде квадратной матрицы (таблицы постоянных множителей), используемой при ручном счете. Далее, вычисляются абсциссы кривой обеспеченности наполнений на конец первого года регулирования (начальная итерация), после чего, согласно системе итерационных формул (1.2.47), под-

считываются частные вероятности наполнений, т. е. элементы строчной матрицы $\Delta p_1, \Delta p_2, \ldots, \Delta p_m$.

Абсциссы кривой обеспеченности наполнений на конец второго года регулирования, согласно алгоритму (см. гл. 1.2), вычисляются путем умножения строчной матрицы Δp_i на матрицу обеспеченности расчетного стока F_{ij}.

Аналогично определяются абсциссы кривой обеспеченности наполнений на конец всех последующих годов регулирования (до момента стабилизации кривой). При этом каждой итерации пересчитываются элементы строчной матрицы Δp_i.

Число итераций n определяется требуемой точностью вычислений ε из условия

$$\max_i | \Phi_n(x_i) - \Phi_{(n-1)}(x_i) | < \varepsilon.$$

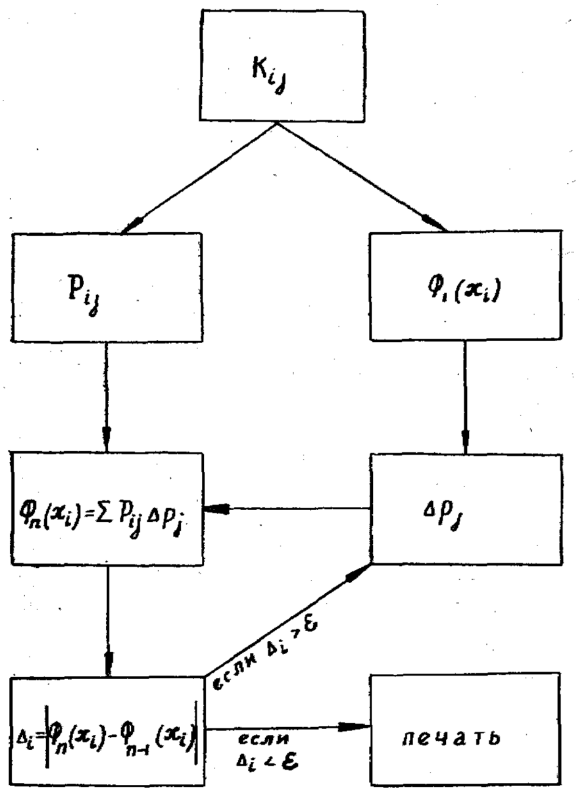

Рис. 2.5.1. Блок-схема программы

Таким образом, алгоритм вычисления абсцисс стабилизированной кривой обеспеченности наполнений водохранилища многолетнего регулирования стока реализуется согласно указанной схеме.

На рис. 2.5.1 показана блок-схема программы. При построении кривой обеспеченности наполнений в случае двух разнообеспеченных потребителей схема программы счета и блок-схема программы в основном аналогичны. Несколько различаются они лишь при определении значений расчетного стока k_{ij} и обеспеченности наполнений для первого года регулирования, так как вычисляются по двум направлениям: для наполнений $\leqslant \beta_\partial$ при отдаче α_1, а при наполнениях $> \beta_\partial$ при отдаче α_2. Весь остальной вычислительный процесс, как это видно из блок-схемы, будет совершенно одинаковым.

Приведем результаты вычислений безусловных кривых обеспеченности наполнений, полученные на ЭВМ [48] и ручным счетом, т. е. численным интегрированием для двух иллюстративных примеров расчета (при значении параметра $\gamma=1$).

Таблица 2.5.2

Значения функции $\Phi(x_i)$

x_i	$\beta=0,8$ и $\alpha=0,8$		$\beta=1,4$; $\beta_\partial=0,7$ и $\alpha_1=0,7$; $\alpha_2=0,8$	
	На ЭВМ	Численное интегрирование	На ЭВМ	Численное интегрирование
0	0,7021	0,703	0,9195	0,918
0,1	.6353	.637	.8985	.897
0,2	.5749	.575	.8647	.865
0,3	.5201	.520	.8306	.832
0,4	.4706	.470	.7932	.794
0,5	.4256	.425	.7585	.759
0,6	.3853	.385	.7216	.722
0,7	.3487	.349	.6829	.683
0,7	—	—	.5894	.590
0,8	.3155	.316	.5338	.533
0,9	—	—	.4768	.479
1,0	—	—	.4336	.433
1,1	—	—	.3925	.393
1,2	—	—	.3567	.356
1,3	—	—	.3215	.322
1,4	—	—	.2903	.291

Как видно, результаты ручного счета отличаются от машинного лишь на третий знак после запятой, что показывает высокую точность алгоритмов численной интерпретации.

В заключении укажем, что по схеме, подобной рассмотренной с учетом особенностей алгоритма, могут быть запрограммированы решения задач, связанных с определением по численному методу кривых обеспеченности холостых сбросов, дефицитов отдачи и других частных характеристик многолетнего режима работы водохранилища. Сходными будут и программы, реализующие расчетные схемы регулирования стока при переменной отдаче $\alpha(y)$ или $\alpha(x)$.

Таблица 2.5.3

Расширенная матрица при $h=0{,}2$ и $n=11$ ($\beta=2{,}0$; $\alpha=0{,}8$; $C_v=0{,}5$ и $C_s=1{,}0$)

Строка	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	a_{4i}	a_{5i}	a_{6i}	a_{7i}	a_{8i}	a_{9i}	a_{10i}	a_{11i}	$e_i=F(\alpha+ih)$
a_{i1}	0,91096	.16722	.11026	.03066	0	0	0	0	0	0	0	—.6065
a_{i2}	.07816	.82192	.16722	.11026	.03066	0	0	0	0	0	0	—.4335
a_{i3}	.06068	.15632	—.82192	.16722	.11026	.03066	0	0	0	0	0	—.2942
a_{i4}	.04325	.12136	.15632	—.82192	.16722	.11026	.03066	0	0	0	0	—.1906
a_{i5}	.02900	.08650	.12136	.15632	—.82192	.16722	.11026	.03066	0	0	0	—.1189
a_{i6}	.01858	.05800	.08650	.12136	.15632	—.82192	.16722	.11026	.03066	0	0	—.0719
a_{i7}	.01143	.03716	.05800	.08650	.12136	.15632	—.82192	.16722	.11026	.03066	0	—.0424
a_{i8}	.00686	.02286	.03716	.05800	.08650	.12136	.15632	—.82192	.16722	.11026	.01533	—.0244
a_{i9}	.00401	.01372	.02286	.03716	.05800	.08650	.12136	.15632	.82192	.16722	.05513	—.0138
a_{i10}	.00228	.00802	.01372	.02286	.03716	.05800	.08650	.12136	.15632	—.82192	.8361	—.0077
a_{i11}	.00116	.00456	.00802	.01372	.02286	.03716	.05800	.08650	.12136	.15632	—.91096	—.0042

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В теории многолетнего регулирования речного стока особое место занимают методы расчетов, использующие обобщенные стоковые характеристики и аппарат теории вероятности, математической статистики, к числу которых относится и метод интегральных уравнений. Они позволяют построить безусловные кривые обеспеченностей наполнений, дефицитов отдачи и холостых сбросов минуя промежуточные построения: условные кривые на 1-й, 2-й, . . . , n-й годы регулирования.

В засушливых районах в силу высокой вариации C_v годового стока емкость водохранилищ в несколько раз превышает их годовой объем плановой отдачи, т. е. требуется так называемое глубокое многолетнее регулирование стока. На реках казахстанского типа питания до 95—100% годового стока сосредоточено в коротком сезоне весеннего половодья. Для этих условий возможно определить всю полезную емкость водохранилища как единого целого. Существенно развита численная интерпретация аналитического метода расчетов. Она распространена на новые усложненные схемы. Кроме того, ей дана строгая математическая основа.

Показано основное отличие алгоритмов неглубокого и глубокого регулирования соответственно по признакам отсутствия и наличия в составе матрицы «постоянных множителей» значений расчетного стока с обеспеченностью $F(0)=1$.

Аналитический метод расчета водохранилища с отдачей, изменяющейся (в начале или конце водохозяйственного года) от его наполнений, т. е. при $\alpha(y)$ и $\alpha(x)$ эффективен в случаях комплексного регулирования стока. При наличии правильного и лиманного орошения в составе комплекса он позволяет назначить отдачу на предстоящий год эксплуатации (на момент окончания весеннего половодья) по фактическому, а не прогнозируемому состоянию наполнения водохранилища.

Обобщенный метод расчетов многолетнего регулирования стока на двух разнообеспеченных водопотребителей увеличивает суммарную отдачу водохранилища до 25% по сравнению с регулированием на одного потребителя.

Методика расчета на отдачу нетто учитывает функцию потерь, зависящую от параметров регулирования и стока, морфологии чаши водохранилища, климатических условий и других региональных факторов. Она разработана в двух интерпретациях: аналитической и численной. Параметр полезной отдачи может назначаться постоянным и переменным, зависящим от наполнения водохранилища в конце года.

Упрощенный прием расчета водохранилищ, основанный на теореме о среднем в интегральном исчислении, отличается высокой точностью. При этом значительно сокращается объем вычислительных операций. Все соотношения и формулы удовлетворяют критериальному тождеству (балансу водохранилища за многолетие), что подтверждает правильность разработанных методических построений.

Разработки расчетных приемов выполнены в порядке усложнения схем регулирования и алгоритмов с последующим обобщением методических построений, т. е. следуя от частного к общему.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреянов В. Г.** Внутригодовое распределение стока. Л., Гидрометеоиздат, 1960.

2. **Баишев Б. Б.** Аналитический метод расчета водохранилищ при переменном (оросительном) водопотреблении на трактах переброски стока.— В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 13. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1976.

3. **Баишев Б. Б., Киктенко В. А., Редькин В. К.** Обобщенный прием расчета водохранилища на тракте переброски стока (при переменном режиме водопотребления).— Там же, с. 125.

4. **Баишев Б. Б., Киктенко В. А., Редькин В. К.** Основные расчетные схемы водохранилищ на трактах межбассейновых перебросок стока.— Там же, с. 109.

5. **Бахтиаров В. А.** Водное хозяйство и водохозяйственные расчеты. Л., Гидрометеоиздат, 1961.

6. **Беркалиев З. Т.** Гидрологический режим рек Центрального, Северного и Западного Казахстана. Алма-Ата, Изд-во АН КазССР, 1959.

7. **Блохинов В. Г.** Распределение вероятностей величин речного стока. М., «Наука», 1974.

8. **Боев Г. П.** Теория вероятностей. М.— Л., Гостехиздат, 1950.

9. **Браславский А. П., Шергина К. Б.** Потери воды на испарение из водохранилища засушливой зоны Казахстана (на приеме Кенгирского водохранилища). Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1965.

10. **Бусалаев И. В.** К вопросу оптимизации водохозяйственного проектирования.— В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 3. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1965.

11. **Бусалаев И. В., Сергеева Л. В.** Применение методов теории случайных процессов при водохозяйственном проектировании.— В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 4. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1966.

12. **Бусалаев И. В.** Метод оптимизации состава водохранилищ каскадного регулирования стока.— В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 8. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1971.

13. **Бусалаев И. В., Куперман И. Г.** Метод расчета некоторых вероятностных характеристик бассейновых водохозяйственных систем.— В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 11. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1974.

14. **Бусленко Н. П.** и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). М., Физматгиз, 1962.

15. **Вагапов М. Н.** Статистические характеристики годовых балансовых разностей.— Известия АН КазССР. Сер. энергетическая, 1961, вып. 2 (20).

16. **Вагапов М. Н.** Метод расчета многолетнего регулирования стока по характеристикам водобалансовых разностей. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 2. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1964.

17. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.

18. **Великанов А. Л.** Определение обеспеченной рабочей мощности группы ГЭС с учетом развития энергосистемы.— В кн.: Проблемы гидроэнергетики и регулирования стока. Вып. 11. М., 1963.

19. **Виноградов Ю. В.** Композиционный метод построения кривых обеспеченности гидрологических величин.— Известия АН УзССР, Сер. техн. наук, 1962, вып. 2.

20. **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Обобщенные функции. Вып. 1, 2, 3. М., Физматгиз, 1958, 1959.

21. **Гильденблат Я. Д., Козак В. Р.** О выборе обеспеченности при расчете водохранилищ для промышленного водоснабжения.— В кн.: Проблемы регулирования речного стока. Вып. 4. М., Изд-во АН СССР, 1950.

22. **Гнеденко Б. В.** Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.

23. **Голубцов В. В.** О влиянии вековых изменений солнечной активности на водность рек.— Труды КазНИГМИ, 1964, вып. 21.

24. **Грузинов В. И.** О применении теоремы полной вероятности к расчетам водохранилищ многолетнего регулирования речного стока.— В кн.: Научные доклады высшей школы, серия энергетическая. М., «Советская наука», 1958.

25. **Гуглий И. В.** К расчету многолетнего регулирования стока с учетом корреляционных связей между величинами смежных лет.— В кн.: Проблемы регулирования речного стока. Вып. 8. М., Изд-во АН СССР, 1959.

26. **Гуглий И. В.** К уточнению графиков для определения многолетней составляющей емкости водохранилища с учетом корреляционной связи между стоком смежных лет.— Труды Гидропроекта, 1964, № 12.

27. **Демин И. В.** Особенности проектирования ирригационных систем Заволжья на местном стоке.— Нижневолгопроект, 1934, вып. III.

28. **Дружинин И. П., Коваленко З. П., Кукушкина В. П., Хамьянова Н. В.** Речной сток и геофизические процессы. М., «Наука», 1966.

29. **Дружинин И. П., Кукушкина В. П., Кулиш В. П.** и др. Природа многолетних колебаний речного стока. Новосибирск, «Наука», 1976.

30. **Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. С.** Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М., Гостехиздат, 1955.

31. **Ермаков С. М., Михайлов Г. А.** Курс статистического моделирования. М., «Наука», 1976.

32. **Ефимович П. Е.** Вопросы водохозяйственных расчетов и гидрологии. М.— Л., 1936.

33. **Захаров В. П.** Кривые распределения вероятностей в применении к гидрологическим и водохозяйственным расчетам. — Известия КазФАН СССР, 1946, № 1 (25).

34. **Захаров В. П., Чокин Ш. Ч.** Обобщенный прием расчетов многолетнего регулирования стока. Гидротехническое строительство. М., «Энергия», 1950, № 3.

35. **Захаров В. П., Ким В. Я.** Непрерывная периодичность гидрологического процесса как методическая основа водохозяйственных расчетов. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 1. Алма-Ата, Изд-во АН КазССР, 1963.

36. **Захаров В. П., Чокин Ш. Ч.** Основы методики составления водохозяйственных балансов. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 2. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1964.

37. **Иванов Г. П.** Метод расчета многолетнего регулирования стока. — Труды 1-го совещания по регулированию стока, 1946.

38. **Калинин Г. П.** Проблемы глобальной гидрологии. Л., Гидрометеоиздат, 1968.

39. **Камкина Т. А., Картвелишвили Н. А.** Об определении основных параметров ГЭС с многолетним регулированием. — Известия Вузов. Энергетика, 1960, № 11.

40. **Картвелишвили Н. А.** Теория вероятностных процессов в гидрологии и регулировании речного стока. Л., Гидрометеоиздат, 1967.

41. **Картвелишвили Н. А.** Регулирование речного стока. М. — Л., Гидрометеоиздат, 1970.

42. **Картвелишвили Н. А.** Стохастическая гидрология. Л., Гидрометеоиздат, 1975.

43. **Киктенко В. А.** Прием расчетов комплексного регулирования стока рек в полупустынных районах Казахстана. — Труды совещания по изучению стока, регулированию стока и зимнему режиму (Тезисы), 1954.

44. **Киктенко В. А.** Приемы расчетов комплексного регулирования стока рек с резко выраженным весенним половодьем. — Известия АН КазССР. Сер. энергетическая, 1955, вып. 9.

45. **Киктенко В. А., Оширов Э. Н.** Аналитический метод определения отдач и сбросов при многолетнем регулировании стока. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 2. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1964.

46. **Киктенко В. А., Оширов Э. Н.** Методика аналитического расчета многолетнего регулирования стока при большой емкости водохранилища. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 2. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1964.

47. **Киктенко В. А.** Обобщенный метод расчета многолетнего регулирования стока на отдачу нетто. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 3. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1965.

48. **Киктенко В. А., Байбулатов Р. Б.** Логическая схема программы расчетов многолетнего регулирования стока. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 3. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1965.

49. **Киктенко В. А., Оширов Э. Н.** Развитие обобщенного метода расчетов многолетнего регулирования стока на основе интегральных уравнений. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 3. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1965.

50. **Киктенко В. А.** Обобщенный расчет многолетнего регулирования стока на двух потребителей с разной обеспеченностью. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 4. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1966.

51. **Киктенко В. А.** Аналитическое выражение дефицитов отдачи и холостых сбросов при многолетнем регулировании стока для двух потребителей с разной обеспеченностью. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 4. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1966.

52. **Киктенко В. А., Оширов Э. Н.** Приближенный способ построения безусловной кривой обеспеченности наполнений водохранилища. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 4. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1966.

53. **Киктенко В. А., Мальковский И. М., Оширов Э. Н.** Обобщенный расчет регулирования стока при учете корреляционной связи между водностью смежных лет (на основе формулы полной вероятности). — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 6. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1968.

54. **Киктенко В. А., Баишев Б. Б.** Распределение вероятностей речного стока, нарушенного хозяйственной деятельностью человека. — В кн.: Водные ресурсы. М., «Наука», 1973.

55. **Коренистов Д. В.** Кривые распределения С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля для расчета вероятностей речного стока. — Гидротехническое строительство, 1948, № 6.

56. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М., «Наука», 1968.

57. **Краснов М. А., Киселев А. И., Макаренко Г. И.** Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.

58. **Крицкий С. Н., Менкель М. Ф.** Гидрологические основы речной гидротехники. М., Изд-во АН СССР, 1950.

59. **Крицкий С. Н., Менкель М. Ф.** Водохозяйственные расчеты. Л., Гидрометеоиздат, 1952.

60. **С. Н. Крицкий., Менкель М. Ф.** Водные ресурсы рек Тобола и Ишима, их регулирование и использование. — Вестник АН КазССР, 1957, № 7.

61. **Крицкий С. Н., Менкель М. Ф.** Расчет многолетнего регулирования речного стока с учетом корреляционной связи между стоком смежных лет. — В кн.: Проблемы регулирования речного стока. Вып. 5. М., Изд-во АН СССР, 1959.

62. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М., Физматгиз, 1963.

63. **Лоэв М.** Теория вероятностей. М., ИЛ., 1962.

64. **Ляпичев П. А.** Методика регулирования стока и водохозяйственных расчетов. М., Госстройиздат, 1955.

65. **Логинов В. Г.** Прием расчетов регулирования стока на случайную отдачу. — Труды Гидропроекта, 1970, № 19.

66. **Маматканов Д. М.** Моделирование и предсказание колебаний речного стока. Фрунзе, «Кыргызстан», 1973.

67. **Маматканов Д. М., Дружинин И. Л.** К вопросу о построении обобщенных графиков для расчета многолетнего регулирования стока рек. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 1. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1963.

68. **Мониава А. Я.** Расчет многолетнего регулирования речного стока при параллельной работе электростанций. — Труды института энергетики АН ГССР. Тбилиси, «Мецниереба», 1959, т. XII.

69. **Мостков М. А.** Введение в системную гидроэнергетику. Тбилиси, Изд-во АН ГССР, 1954.

70. **Мостков М. А.** Основы и расчет водно-силового регулирования. Тбилиси, Закгиз, 1933.

71. **Никитин С. Н.** Основы гидроэнергетических расчетов. М., Госэнергоиздат, 1959.

72. **Никитин С. Н.** Расчеты многолетнего регулирования переменным расходом для одного или нескольких потребителей различной обеспеченности. — Гидротехническое строительство. «Энергия», 1940, № 11.

73. **Панасенко И. М.** О сезонных перебоях вследствие недополнения водохранилища. — Труды института энергетики АН КазССР, т. I. Алма-Ата, Изд-во АН КазССР, 1958.

74. **Плешков Я. Ф.** Регулирование речного стока. Л., Гидрометеоиздат, 1972.

75. **Потапов М. В.** Водохозяйственные расчеты при регулировании стока на переменное оросительное потребление. — Труды первого совещания по регулированию стока. 1946.

76. **Потапов М. В.** Регулирование стока. Сочинение. Т. 3. М., Сельхозгиз, 1951.

77. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.

78. **Раткович Д. Я.** Многолетние колебания речного стока. Л., Гидрометеоиздат, 1976.

79. **Раткович Д. Я.** Закономерности чередования маловодных и многоводных лет как основа расчетов регулирования речного стока. — Труды ГГИ, вып. 143, 1968; вып. 160, 1969; вып. 162, 180, 1970.

80. **Резниковский А. Ш., Великанов А. Л., Соловьева И. Ю.** Водноэнергетические расчеты на цифровых вычислительных машинах. — Гидротехническое строительство. «Энергия», 1962, № 12.

81. **Резниковский А. Ш.** Моделирование гидрологических рядов и расчет многолетнего регулирования стока каскадом ГЭС. — Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1964, № 2.

82. **Резниковский А. Ш., Костина С. Б.** О связанности гидрологических рядов. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 5. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1967.

83. **Романовский В. И.** Математическая статистика в опытном деле. М. — Л., Гостехиздат, 1948.

84. **Романовский В. И.** Дискретные цепи Маркова. М., Гостехиздат, 1948.

85. **Рыбкин С. И.** Метод расчета на основе теории вероятностей основных водохозяйственных характеристик водохранилищ при многолетнем регулировании стока. — В кн.: Труды Первого совещания по регулированию стока. М., Изд-во АН СССР, 1946.

86. **Саваренский А. Д.** Регулирование речного стока водохранилищами. М., Изд-во АН СССР, 1951.

87. **Сарманов И. О.** Несимметричная гамма-корреляция. — Труды ГГИ, 1969, вып. 162.

88. **Сванидзе Г. Г.** Методика стохастического моделирования гидрологических рядов и некоторые вопросы многолетнего регулирования речного стока.— Труды института энергетики АН ГССР, 1961, т. XIV.

89. **Сванидзе Г. Г.** Основы расчета регулирования речного стока методом Монте-Карло. Тбилиси, «Мецниереба», 1964.

90. **Сванидзе Г. Г.** Математическое моделирование гидрологических рядов. Л., Гидрометеоиздат, 1977.

91. **Соколовский Д. Л.** Некоторые вопросы гидрологии и водного хозяйства засушливых районов.— В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. I. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1963.

92. **Цветков Е. В.** Эксплуатационные и проектные задачи регулирования речного стока.— В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. I. Алма-Ата, Изд-во АН КазССР, 1963.

93. **Чокин Ш. Ч.** Оптимальные параметры гидроэлектрических станций М., МЭИ, 1953.

94. **Чокин Ш. Ч.** Расчетная обеспеченность работы гидроэлектростанции. Алма-Ата, Изд-во АН КазССР, 1958.

95. **Чокин Ш. Ч., Редькин В. К.** Обобщенный метод расчета регулирования речного стока при однотактном режиме работы водохранилища. — В кн.: Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства. Вып. 4. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1966.

96. **Чокин Ш. Ч., Захаров В. П., Калачев Н. С., Киктенко В. А.** Территориальное перераспределение водных ресурсов и задачи гидрологических исследований в Срединном регионе.— Труды IV Всесоюзного гидрологического съезда, 1976, т. 4.

97. **Чокин Ш. Ч., Григорьев В. А., Редькин В. К.** Методика расчета регулирования стока. Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1977.

98. **Bendat I., Piersol A.** Measuzement and Analysis of Random Data. New York — London — Sydney, 1967.

99. **Dhir R. D., Ahuja P. R.,** Krishnamurthy. Fixation of Storage of Capacity of Reservoirs. New Delhi, 1954.

100. **Fathy A., Shukry S.** The Problem of Reservoirs Capacity for Long — term Storage.— Journal of the Hidraulics Div. Proceedings of the ASCE, 1956, v. 82. N 5—6.

101. **Gani I., Moran P.** The Solution of Dam Equations by Monte — Carlo Methods.— Australian Journal of Applied Science, 1955, v. 6.

102. **Gani I., Prabhu N.** Stationary Distributions of the Negative Exponential Type for the Infinite Dam. — J. Roy. Statist. Soc. B. 19, 1957.

103. **Gani I., Prabhu N.** The Continuous Time Treatmens of a Storage Problem. Nature, 1958.
104. **Gani I.** Some Problems in the Theory of Provisioning and of Dams. Biometrika, 1955, 42.
105. **Gani I.** Problems in the Probabity Theory of Storage Systems.— J. Roy. Statist. Soc. B. 1957.
106. **Hazen A.** Storage to be Provided in Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply. Trans. of ASCE, 1914.
107. **Hurst H. E.** Measurement and Utilisation of the Water Reservoirs of the Nile Basin. ASCE, 1954, p. III, v.3.
108. **Hurst H. E.** Long — term Storage Capacity of Reservoirs. Trans. ASCE, 1951, v. 116.
109. **Hurst H. E.** Methods of Using Long — term Storage in Reservoirs. Proceedings of Institution of Civil Engs., 1956, p. 1, v. 5.
110. **Kisiel C.** Time series Analysis of Hydrologic Data. Advances in Hydroscience. Academic Press New York and London, 1969, v. 5.
111. **Langbein W. B.** Queuing Theory and Water Storage. Proceedings ASCE, 1958, v. 84, N HY 5.
112. **Little J. D.** The Use of Storage Water in Hydroelectric Systems.— J. Operations Res. Soc. America, 1955, v. 3. N 2.
113. **Moran P. A.** Probability Theory of Dams and Storage Systems. Australian. — J. of Applied Science, 1954, v. V.
114. **Moran P. A.** The Theory of Storage. London — New York, 1959.
115. **Prabhu N. U.** Some solutions for the Finite Dam. Am. Math. stat., 1958, 29.
116. **Prabhu N. U.** On an Integral Equation Occuring in the Theory of Finite Dams. Quart. J. Math., 1958, 9.
117. **Roche M.** Hudrologie de surface. Paris, 1963.
118. **Sudler Ch.** Storage Required for the Regulation of Stream Flow. Trans, of ASCE, 1927.
119. **Yevjevich V. M.** Fluctuations of wet and dry years. Colorade Stadte Univ. Fort Collins, USA, 1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 6

Часть I

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА ПРИ ПОСТОЯННОМ ОБЪЕМЕ ОТДАЧИ ИЗ ВОДОХРАНИЛИЩА 11

Глава 1.1

Существующие методы расчетов многолетнего регулирования стока и тенденции их дальнейшего развития . . . . . —
1. Основные положения . . . . . —
2. Расчетные приемы, основанные на естественной модели речного стока 12
3. Расчетные приемы, основанные на математической модели стока 13
4. Основные тенденции развития методов расчетов многолетнего регулирования стока 18

Глава 1.2

Аналитические методы расчетов неглубокого многолетнего регулирования стока 20
1. Безусловная функция обеспеченности наполнений . . . 21
2. Интегральные соотношения для функций обеспеченности дефицитов отдачи и холостых сбросов 28
3. Численная интерпретация аналитического метода неглубокого многолетнего регулирования стока 32

Глава 1.3

Аналитический метод расчетов глубокого многолетнего регулирования стока 40
1. Функция обеспеченности наполнений . . . . . —
2. Функция обеспеченности дефицитов отдачи 49
3. Функция обеспеченности холостых сбросов 51
4. Особенности численной интерпретации аналитического метода 52

Глава 1.4

Обобщение аналитического метода расчетов многолетнего регулирования стока 54
1. Функция обеспеченности наполнений . . . . . —
2. Функция обеспеченности дефицитов отдачи 58
3. Функция обеспеченности холостых сбросов 59

Глава 1.5

Учет корреляционной связи между стоком смежных лет в расчетах многолетнего регулирования стока 65
1. Состояние вопроса . . . . . —
2. Построение функции распределения вероятностей наполнений водохранилища при учете корреляционной связи . . . 67
3. Построение обобщенной водохозяйственной характеристики водохранилища 69

Глава 1.6

Обобщенный метод расчета многолетнего регулирования стока с учетом потерь воды из водохранилища 77
1. Исходные положения и расчетная схема . . . . . —
2. Аналитический метод расчета 80
3. Численная интерпретация аналитического метода . . . 88

Глава 1.7

Упрощенный способ аналитического метода описания обобщенной водохозяйственной характеристики водохранилища . . . 90
1. Постановка задачи . . . . . —
2. Расчетные алгоритмы при неглубоком многолетнем регулировании стока 91
3. Расчетные алгоритмы при глубоком регулировании стока . 94
4. Построение кривых обеспеченности сбросов и дефицитов отдачи 97

Часть II

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ РЕЧНОГО СТОКА НА ПЕРЕМЕННЫЕ ПО ГОДАМ ОБЪЕМЫ ОТДАЧИ ИЗ ВОДОХРАНИЛИЩА

Глава 2.1

Обобщенные приемы расчетов регулирования стока при отдаче, зависящей от наполнения водохранилища в начале года . . . 99
1. Неглубокое многолетнее регулирование стока 100
2. Глубокое многолетнее регулирование стока 104
3. Обобщение расчетной схемы на случай любой емкости водохранилища 109

Глава 2.2

Методы расчетов регулирования стока при отдаче, зависящей от наполнения водохранилища в конце года 119
1. Расчеты неглубокого многолетнего регулирования стока . 120
2. Расчеты глубокого многолетнего регулирования стока . . 122
3. Особенности алгоритма численной интерпретации . . . 129
4. Номографирование расчетных методов 131

Глава 2.3

Обобщенный метод построения водохозяйственных характеристик водохранилища при наличии двух равнообеспеченных потребителей 137
1. Функция обеспеченности наполнений водохранилища . . 139
2. Функции обеспеченности дефицитов отдачи и холостых сбросов 153
3. Особенности алгоритма численной интерпретации метода . 162
4. Расчетная номограмма 165

Глава 2.4

Аналитические методы расчетов неглубокого многолетнего регулирования стока на случайную отдачу из водохранилища . . . 172
1. Функции распределения вероятностей расчетного стока и объемов водопотребления компонентами водохозяйственного комплекса 173
2. Интегральные уравнения регулирования стока 178

Глава 2.5

Применение электронных вычислительных машин для расчетов многолетнего регулирования стока 183
1. Порядок решения систем интегральных уравнений, описывающих безусловную кривую обеспеченности наполнений . . —
2. Общая схема реализации численного метода построения безусловной кривой обеспеченности наполнений на ЭВМ . . 186

Заключение 190
Литература 192

Вячеслав Афанасьевич Киктенко, Баяхмет Баишевич Баишев

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА

Утверждено к печати Ученым советом Казахского научно-исследовательского института энергетики Министерства энергетики и электрификации СССР

Рецензенты: кандидаты технических наук *И. В. Бусалаев, М. Н. Вагапов*

Редактор *Н. Ф. Федосенко.* Худ. редактор *А. Б. Мальцев.* Оформление художника *И. З. Уразаева.* Техн. редакторы *В. К. Горячкина, В. М. Муромцева.* Корректор *Т. П. Нежданова*

ИБ № 371

Сдано в набор 18.06.80. Подписано в печать 3.10.80. УГ15122. Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Типографская № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. п. л. 12,5. Уч.-изд. л. 12,2. Тираж 800. Заказ 97. Цена 1 р. 90 к.

Издательство «Наука» Казахской ССР. Типография издательства «Наука» Казахской ССР. Адрес издательства и типографии: *480021, г. Алма-Ата, Шевченко, 28.*