

557.49

К 27

Н. А. КАРТВЕЛИШВИЛИ

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ОТКРЫТЫЕ ПОТОКИ

221692

БИБЛИОТЕКА
Ленинградского
Гидрометеорологического
Института



ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ
ЛЕНИНГРАД
1968

Монография посвящена теории и расчетам неустановившихся потоков в открытых руслах (движение волны паводка, волновые режимы, вызываемые суточным регулированием на ГЭС и т. д.). Рассматривается связь гидравлических уравнений неустановившегося движения с уравнениями гидродинамики, исследуется устойчивость установившегося потока и самопроизвольное возникновение бегущих волн (быстротоки, горные стремнины) при отсутствии и наличии аэрации. Для анализа различных случаев неустановившегося движения в речных руслах и гидротехнических сооружениях последовательно используются прямые методы математической физики, позволяющие сводить машинные расчеты к использованию нескольких стандартных программ (решение алгебраических уравнений, вычисление определенных интегралов и т. п.), имеющихся для ЦВМ всех марок. Рассматривается также задача о графике нагрузки, допустимом с точки зрения ограничений режима уровней в нижнем бьефе, и задача об определении характеристик русла по наблюдениям над неустановившимся движением.

Книга рассчитана на гидрологов, гидротехников, гидроэнергетиков и на исследователей в области гидравлики и русловых процессов.

The monograph deals with the theory and computation of unsteady flows in the open channels. Correlation of hydraulics & hydrodynamics equations is considered; flow stability and spontaneous formation of rapids, races, riffles, etc. are discussed, in case of aeration and of no aeration. The unsteady flow in the river bed is analysed with the help of the direct methods of mathematical physics which allow programming and, therefore, machine computation. The problem is considered of scheduling the load of a hydro-electric power station with a view of preventing any disturbances in the level regime of the lower pool. Determination of the free-flowing channel characteristics is given from observations of the unsteady flow.

The publication is intended for hydrologists, hydraulic engineers and research workers in the field of hydraulic engineering and fluviomorphological processes in rivers.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основное содержание теории неустановившихся открытых потоков в их гидравлической идеализации заключается в следующем:

1) выводе гидравлических уравнений неустановившихся потоков, их связи с уравнениями гидродинамики;

2) устойчивости установившегося течений — выяснении условий, при которых происходит нарушение устойчивости и самопроизвольное возникновение бегущих волн (переход потока в «сверхбурное» состояние);

3) решении уравнений неустановившегося движения для различных краевых и начальных условий:

а) случаи, разрешимые в квадратурах,

б) численное интегрирование с помощью различного рода разностных схем,

в) решения прямыми методами математической физики (Ритц, Галеркин и т. д.);

г) решения на основании тех или иных идеализаций, не вытекающих непосредственно из уравнений движения (так называемые инженерные решения);

4) различных обратных задачах гидравлики неустановившихся потоков, в частности определений характеристик речного русла по наблюдениям над неустановившимся движением.

Основная доля огромной мировой литературы по неустановившимся потокам посвящена задачам 3а, 3б, 3г. Что касается задач 1, 2, 3в и 4, то несмотря на то, что их теоретическое и практическое значение отнюдь не меньше, чем задач 3а, 3б, 3г, они изучены значительно слабее. Это обстоятельство было подчеркнуто автором в генеральном докладе на XI конгрессе Международной ассоциации гидравлических

исследований, который проходил в Ленинграде в сентябре 1965 г. и был специально посвящен неустановившимся потокам. Именно отмеченное обстоятельство и интерес, проявленный к задачам 1, 2, 3в, 4 участниками столь представительного форума, побудили автора написать данную монографию.

Глава I посвящена выводу уравнений гидравлики неустановившихся потоков из уравнений гидродинамики. Повышение уровня строгости и уточнение, достигаемые при этом способе вывода, имеют значение в первую очередь для надежного обоснования критериев устойчивости установившегося течения. Потеря этой устойчивости возможна в горных стремнинах и на быстротоках, где поток часто бывает аэрирован. В связи с этим в главе I рассматриваются также уравнения гидродинамики двухфазного (аэрированного) потока и дается переход к уравнениям аэрированного потока в гидравлической идеализации. Такой переход требует информации о процессе засасывания воздуха потоком и о многих других деталях движения, которые сейчас еще совершенно не изучены. Поэтому приходится принимать дополнительные гипотезы, из-за которых соответствующие уравнения становятся менее достоверными, чем в случае неаэрированного потока. Но тем не менее поскольку эти гипотезы (они четко оговорены в тексте монографии) достаточно правдоподобны, то получаемые с их помощью решения дают, по-видимому, удовлетворительное приближение к действительности. Значение этих гипотез также и в том, что они обнаруживают те пробелы, заполнить которые должна гидродинамическая теория движения смесей.

Глава II посвящена математической теории устойчивости установившегося течения по отношению к малым возмущениям, целиком основывающейся на уравнениях главы I. Задача здесь состоит в том, чтобы выяснить условия, при которых волна, возникшая в потоке в результате малого возмущения, будет нарастать при своем движении по руслу и условия, при которых такого нарастания не будет. Эта задача отличается от обычных для гидродинамики задач устойчивости, в которых требуется выяснить условия, при которых отклонение от установившегося течения в данной точке потока, вызванное малым возмущением, будет затухать с течением времени (так ставится, например, вопрос о потере устойчивости ламинарного течения и переходе его в турбулентное). Здесь следует заметить, что затухание малых (теоретически бесконечно малых) волн при их движении по руслу есть только необходимое, но, вообще говоря, недостаточное условие затухания волн конечной амплитуды, иначе говоря, из неустойчивости потока «в малом» вытекает его неустойчивость «в большом», но из устойчивости «в малом» устойчивость «в большом», вообще

говоря, не вытекает. Исследование устойчивости «в большом» любой нелинейной системы сопряжено с серьезными трудностями. Эти трудности усугубляются тем, что в данном случае задача выражается дифференциальными уравнениями в частных производных. Автору неизвестно ни одной попытки решения задачи об устойчивости потока «в большом». Но вместе с тем автору неизвестно и ни одного факта, который свидетельствовал бы о том, что критерий устойчивости потока «в малом» недостаточен для решения задач, возникающих в гидрологической и инженерной практике.

В главе III рассматривается решение задач неустановившегося движения с краевыми и начальными условиями или с краевыми условиями и условиями периодичности прямыми методами математической физики (называемыми также просто прямыми методами или вариационными методами). Необходимо заметить, что эти методы применимы не ко всем задачам неустановившегося движения. В частности, они не применимы (по крайней мере при нынешней их разработанности) к исследованию прерывных волн. Но в большинстве задач неустановившегося движения в речных руслах и в искусственных каналах они вполне могут конкурировать с разностными схемами. Их малая распространенность объясняется лишь тем, что они разработаны хуже методов разностных схем не только в аспекте их применения к данной задаче, но и в чисто математическом плане.

Наконец, в главе IV рассматриваются некоторые задачи, в которых требуется по полной или частичной информации о решениях уравнений неустановившегося движения (например, по ограничениям, которым удовлетворяют эти решения) выяснить характеристики русла или краевые условия. Такие задачи называются обратными. Они составляют категорию наиболее трудных и наименее изученных задач неустановившегося движения.

Задачи 3а, 3б, 3г в данной монографии не затрагиваются. Они продолжают усиленно разрабатываться, в особенности в СССР, главным образом в Новосибирске (группа О. Ф. Васильева в Институте гидродинамики СО АН СССР — задачи 3а, 3б), Ленинграде (группа М. С. Грушевского в ГГИ и группа Е. К. Трифонова во ВНИИГе — задача 3б), Москве (группа Л. С. Кучмента и Н. С. Нечаевой в Гидрометцентре СССР — задача 3г) и Киеве (группа И. А. Железняк в УкрНИГМИ — задача 3г). Авторы этих разработок, несомненно, осветят в литературе избранные ими направления значительно лучше, чем это может сделать автор данной монографии.

Выход капитального обзора «Механика в СССР за 50 лет», в котором дано описание развития теории неустановившихся

открытых потоков и приведена подробная библиография, позволил не включать в данную монографию обзорную и библиографическую части. Поэтому сделаны ссылки только на работы, из которых автор непосредственно что-либо заимствовал, на работы, в которых ранее были получены результаты, развитые и обобщенные в данной монографии, и на работы, в которых излагается математическая сторона используемых в монографии методов. Ссылки на свои предыдущие работы по неустановившимся потокам автор считал излишними, ибо все результаты этих работ, относящиеся к затрагиваемому здесь кругу проблем, включены в монографию.

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОТОКА В ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ИДЕАЛИЗАЦИИ

§ 1. Неаэрированный поток

Под открытыми потоками мы будем подразумевать не просто потоки со свободной поверхностью, а такие, у которых ширина свободной поверхности B есть неубывающая функция глубины. Таким образом, неустановившиеся безнапорные течения в тоннелях и трубах из рассмотрения исключаются.

Гидравлические уравнения неустановившегося потока могут быть выведены различными способами. Наиболее строгим является вывод этих уравнений из дифференциальных уравнений гидродинамики. Такой путь, которому мы и будем следовать, вместе с тем также наиболее естественен и прост, ибо он не требует введения обычных для гидравлики гипотез вроде гипотезы гидростатического распределения давлений в потоке и четко указывает на те предположения, которые действительно принципиально неизбежны при переходе к гидравлической идеализации.

Для потока несжимаемой жидкости напомним гидродинамические уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + X - R_x, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + Y - R_y, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + Z - R_z, \quad (1.3)$$

в которых

$$R_x = \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} - \nu \nabla^2 \bar{u}, \quad (1.4)$$

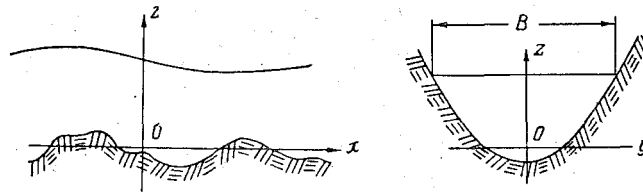
$$R_y = \frac{\partial}{\partial x} \overline{v'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'} - \nu \nabla^2 \bar{v}, \quad (1.5)$$

$$R_z = \frac{\partial}{\partial x} \overline{w'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{w'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'w'} - \nu \nabla^2 \bar{w}. \quad (1.6)$$

Здесь $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, u' , v' , w' — проекции на оси x , y , z соответственно, осредненной и пульсационной составляющих вектора

скорости потока, X, Y, Z — проекции вектора ускорения объемных сил, p — гидродинамическое давление, ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, ∇^2 — оператор Лапласа. (Черта сверху в этих уравнениях есть символ обычного для гидродинамики осреднения по времени.)

Расположение осей координат x, y, z в потоке изображено на фиг. 1. Тогда $X = g \sin \alpha$, $Y = 0$, $Z = -g \cos \alpha = -g_*$, где g — ускорение силы тяжести, α — угол наклона оси x к горизонту.



Фиг. 1. Расположение осей координат в потоке.

Интегрируя уравнение (1.3) по z , получим следующее выражение для давления в потоке:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{p}}{\rho} = \frac{\bar{p}_H}{\rho} + g_*(H - z) + \int_z^H R_z d\xi + \int_z^H \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} d\xi + \\ + \int_z^H \frac{\partial \bar{w} \bar{u}}{\partial x} d\xi + \int_z^H \frac{\partial \bar{w} \bar{v}}{\partial y} d\xi + \bar{w}_H^2 - \bar{w}^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь индекс H означает, что соответствующие переменные относятся к значению $z = H$, т. е. к свободной поверхности потока. В формуле (1.7) и всюду ниже предполагается, что пересечение свободной поверхности потока с плоскостью нормальной к оси x есть горизонтальная прямая. Очевидно, что

$$\bar{w}_H = \bar{u}_H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.8)$$

где первое слагаемое обусловлено непараллельностью свободной поверхности оси x , а второе — перемещением свободной поверхности.

Обратимся к формуле дифференцирования под знаком интеграла

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi(\lambda, \mu) d\lambda = \frac{d}{d\mu} \int_\alpha^\beta \Phi(\lambda, \mu) d\lambda - \\ - \Phi(\beta, \mu) \frac{d\beta}{d\mu} + \Phi(\alpha, \mu) \frac{d\alpha}{d\mu}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Так как H зависит от x и t , но не зависит от y , то интегралы в (1.7) преобразуются по этой формуле так:

$$\begin{aligned}\int_z^H \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} d\xi &= \frac{\partial}{\partial t} \int_z^H \bar{w} d\xi - \bar{w}_H \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \int_z^H \frac{\partial \bar{w} \bar{u}}{\partial x} d\xi &= \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H \bar{w} \bar{u} d\xi - \bar{w}_H \bar{u}_H \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \int_z^H \frac{\partial \bar{w} \bar{v}}{\partial y} d\xi &= \frac{\partial}{\partial y} \int_z^H \bar{w} \bar{v} d\xi.\end{aligned}$$

Теперь, учитывая формулу (1.8), приведем выражение (1.7) к виду

$$\begin{aligned}\frac{\bar{p}}{\rho} &= \frac{\bar{p}_H}{\rho} + g_*(H-z) + \int_z^H R_z d\xi + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^H \bar{w} d\xi + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H \bar{w} \bar{u} d\xi + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_z^H \bar{w} \bar{v} d\xi - \bar{w}^2. \quad (1.10)\end{aligned}$$

В связи с имеющимся мнением о существовании влияния сил поверхностного натяжения на устойчивость потока следует учесть эти силы. Тогда под $\bar{p}_H$ в формуле (1.10) следует понимать разность между давлением под поверхностной молекулярной пленкой и атмосферным давлением, т. е. величину

$$\bar{p}_H = -c/L,$$

где

$$L = \left[1 + \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} : \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

— радиус кривизны свободной поверхности потока, а c — капиллярная постоянная.

Подставим $\bar{p}$ из выражения (1.10) в (1.1) и осредним получающееся в результате этого уравнение по площади сечения потока F . Ограничиваясь случаем русла, симметричного относительно плоскости xOz , когда все интегралы по F , содержащие $\partial/\partial y$, заведомо равны нулю, будем иметь

$$\begin{aligned}i - \frac{\partial H}{\partial x} + \sigma \frac{\partial L^{-1}}{\partial x} &= \\ &= \frac{1}{g_* F} \int_F dF \left\{ R_x + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H R_z d\xi + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_z^H \bar{w} d\xi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_z^H \bar{w} \bar{u} d\xi - \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial x} \right\}, \quad (1.11)\end{aligned}$$

где $i = \operatorname{tg} \alpha$ и $\sigma = c/\rho g_*$.

Уравнение (1.11) нужно преобразовать так, чтобы операции дифференцирования вышли за знак интеграла по F . Для этого необходимо вывести некоторые формулы, которые понадобятся не только здесь, но и в следующем параграфе. Эти формулы также основываются на формуле дифференцирования под знаком интеграла (1.9).

Очевидно, что

$$\int_F \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t) dF = \int_{-B/2}^{B/2} dy \int_{z_0}^H \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t) dz.$$

Напомним, что здесь $z_0 = z_0(x, y)$ есть уравнение смоченной поверхности русла, $H = H(x, t)$; $B = B(x, H)$. На основании формулы (1.9) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^H \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^H \varphi(x, y, z, t) dz - \\ &- \varphi(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial x} + \varphi(x, y, z_0, t) \frac{\partial z_0}{\partial x}. \end{aligned}$$

Учитывая далее, что $z_0(x, B/2) = z_0(x, -B/2) = H$, напомним на основании той же формулы (1.9)

$$\begin{aligned} \int_F \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t) dF &= \frac{\partial}{\partial x} \int_F \varphi(x, y, z, t) dF - \\ &- \frac{\partial H}{\partial x} \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(x, y, H, t) dy + \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(x, y, z, t) \frac{\partial z_0}{\partial x} dy. \quad (1.12) \end{aligned}$$

Заменяя здесь дифференцирование по x дифференцированием по t , получим

$$\begin{aligned} \int_F \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, z, t) dF &= \frac{\partial}{\partial t} \int_F \varphi(x, y, z, t) dF - \\ &- \frac{\partial H}{\partial t} \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(x, y, z, t) dy. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Для случая, когда φ есть четная функция y , т. е. когда $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, -y, z, t)$, можно получить также с помощью несколько более кропотливых, но очевидных выкладок:

$$\begin{aligned} \int_F \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, y, z, t) dF &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_F \varphi(x, y, z, t) dF - \\ &- 2 \frac{\partial H}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(x, y, H, t) dy - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varphi\left(x, \frac{B}{2}, H, t\right)\left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial x}\right)\Bigg\} - \\
& -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(x, y, H, t) dy + 2 \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z_0, t) \frac{\partial z_0}{\partial x} dy + \\
& + \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(x, y, z_0, t) \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} dy, \quad (1.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_F \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \varphi(x, y, z, t) dF = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_F \varphi(x, y, z, t) dF - \\
& - \frac{\partial H}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(x, y, H, t) dy - 2\varphi\left(x, \frac{B}{2}, H, t\right) \frac{\partial B}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right\} - \\
& - \frac{\partial H}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(x, y, H, t) dy - \right. \\
& \left. - \varphi\left(x, \frac{B}{2}, H, t\right) \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial x}\right) \right\} + \\
& + \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, z_0, t) \frac{\partial z_0}{\partial x} dy. \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Полагая, что на смоченной поверхности русла вектор скорости равен нулю и используя формулы (1.12) — (1.15), приведем уравнение (1.10) к виду

$$\begin{aligned}
i - \frac{\partial H}{\partial x} + \sigma \frac{\partial L^{-1}}{\partial x} &= j_1 + j_2 + \frac{1}{g_* F} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_F \bar{u} dF + \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \int_F \bar{u}^2 dF + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_F dF \int_z^H \bar{\omega} \bar{u} dF + \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_F dF \int_z^H \bar{\omega} d\xi - \frac{\partial}{\partial x} \int_F \bar{\omega}^2 dF + \\
&\left. + \frac{\partial H}{\partial x} \int_{-B/2}^{B/2} \left(\bar{u}_H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \right)^2 dy \right\} + D. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Здесь

$$D = \frac{1}{g_* F} \left\{ \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial z_0}{\partial x} dy \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^H \bar{w} dz + 2 \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial z_0}{\partial x} dy \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^H \bar{w} \bar{u} dz + \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} dy \int_{z_0}^H \bar{w} \bar{u} dz \right\}, \\ j_1 = \frac{1}{g_* F} \int_F dF \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \bar{u}' \bar{w}' - v \nabla^2 \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H \frac{\partial}{\partial x} (\bar{w}' \bar{u}' - v \nabla^2 \bar{w}) dz \right\}, \\ j_2 = \frac{1}{g_* F} \int_F \frac{\partial}{\partial x} \{ \bar{u}' \bar{u}' + (\bar{w}' \bar{w}')_H \} dF,$$

причем j_1 — диссипативный член, а j_2 — член, учитывающий количество движения, связанное с пульсациями скоростей в потоке.

Осреднение по F уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

с учетом формулы (1.8) дает

$$\frac{\partial U F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (1.17)$$

где $U = \frac{1}{F} \int \bar{u} dF$ — средняя скорость потока.

Чтобы перейти к гидравлической идеализации, нужно принять некоторые предположения, позволяющие выразить все члены уравнения (1.16) через переменные, характеризующие поток как целое.

Имея $\bar{w} = w_1 + w_2$, где слагаемое w_1 обусловлено непараллельностью траекторий вектора скорости, а w_2 — перемещением этих траекторий в пространстве, и учитывая формулу (1.8), можно написать

$$\bar{u} = \delta U, \quad w_1 = \varepsilon \bar{u}_H \frac{\partial H}{\partial x}, \quad w_2 = \eta \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.18)$$

где $\delta, \varepsilon, \eta$ — некоторые функции координат x, y, z и времени t . Тогда

$$\int_F \bar{u}^2 dF = \alpha' F U^2, \\ \int_F dF \int_z^H \bar{w} d\xi = \frac{F^2}{B} \left(\beta_1' U \frac{\partial H}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right), \\ \int_F dF \int_z^H \bar{w} \bar{u} d\xi = \frac{F^2}{B} \left(\beta_3 U^2 \frac{\partial H}{\partial x} + \beta_4 U \frac{\partial H}{\partial t} \right),$$

где

$$\begin{aligned}\beta'_1 &= \frac{B}{F^2} \int_F \delta(x, y, H, t) dF \int_z^H \varepsilon(x, y, \xi, t) d\xi, \\ \beta_2 &= \frac{B}{F^2} \int_F dF \int_z^H \eta(x, y, \xi, t) d\xi, \\ \beta_3 &= \frac{B}{F^2} \int_F \delta(x, y, H, t) dF \int_z^H \varepsilon(x, y, \xi, t) \delta(x, y, \xi, t) d\xi, \\ \beta_4 &= \frac{B}{F^2} \int_F dF \int_z^H \delta(x, y, \xi, t) \eta(x, y, \xi, t) d\xi, \\ \alpha' &= \frac{1}{F} \int_F \delta^2(x, y, z, t) dF\end{aligned}$$

суть функции x и t .

Диссипативный член в гидравлике принимается в виде $j_1 = Q^2/K^2$, где $Q = UF$ — расход потока, K — пропускная способность русла. Что касается члена j_2 , то естественно постулировать, что он может быть представлен в виде $j_2 = \frac{1}{g_* F} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\alpha'' F U^2)$, где $\alpha'' = \alpha''(x, t)$ — коэффициент количества движения пульсаций. Следует, однако, учитывать разницу между этим выражением для j_2 и аналогичными выражениями (1.18): последние вполне точны до тех пор, пока не делается каких-либо предположений о функциях δ , ε , η или α' , β'_1 , β_2 , β_3 , β_4 , тогда как выражение для j_2 есть гипотеза независимо от того, какие предположения делаются о коэффициенте α'' . Примем теперь, как обычно для гидравлики, что полный коэффициент количества движения $\alpha = \alpha' + \alpha''$ постоянен. Тогда, используя уравнение неразрывности (1.17), нетрудно получить

$$\begin{aligned}j_2 + \frac{1}{g_* F} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_F \bar{u} dF + \frac{\partial}{\partial x} \int_F \bar{u}^2 dF \right) &= \\ &= \frac{1}{g_*} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha \frac{U}{g_*} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{g_*} \cdot \frac{U}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}.\end{aligned}$$

Наконец, в качестве последнего предположения, отбросим два члена, предшествующих D в правой части уравнения (1.16). Заметим, что в задаче об устойчивости равномерного установившегося потока по отношению к малым возмущениям это последнее предположение не вносит никакой погрешности, так как в указанной задаче отбрасываемые члены оказываются бесконечно малыми высших порядков и на решение не влияют.

Теперь уравнение (1.16) может быть записано в окончательном виде

$$i - \frac{\partial H}{\partial x} + \sigma \frac{\partial L^{-1}}{\partial x} = \frac{Q^2}{K^2} + \frac{1}{g_*} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \\ + \alpha \frac{U}{g_*} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{g_*} \cdot \frac{U}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + \\ + \frac{1}{g_* F} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \cdot \frac{F^2}{B} \left(\beta'_1 U \frac{\partial H}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{F^2}{B} \left(\beta_3 U^2 \frac{\partial H}{\partial x} + \beta_4 U \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right\} + D. \quad (1.19)$$

Для вывода этого уравнения не потребовалось каких-либо предположений о коэффициентах β'_1 , β_2 , β_3 , β_4 , но для его решения кое-какие допущения, разумеется, все же придется сделать.

Уравнение (1.19) получено при ограничении, что поток имеет вертикальную плоскость симметрии. Это ограничение не существенно — уравнение (1.19) справедливо и для потоков, не имеющих плоскости симметрии. Однако вывод его в этом общем случае требует очень кропотливых рассуждений и выкладок в связи с тем, что здесь в противоположность симметричному случаю нельзя утверждать, что интегралы по F , содержащие $\partial/\partial y$, заведомо равны нулю. Мы сочли возможным не приводить эти выкладки, так как они, сильно усложняя все построение, не дают вместе с тем чего-либо нового для характеристики физической стороны одномерной идеализации течения.

Уравнение (1.19) используется только для анализа устойчивости установившегося течения. При анализе волновых движений в этом уравнении заведомо можно пренебречь членом $\sigma \partial L^{-1}/\partial x$, учитывающим поверхностное натяжение. Но и после этого использовать уравнение (1.19) имеет смысл только при исследовании ондуляций, т. е. колебаний свободной поверхности вблизи фронта прерывной волны и при исследовании разрушения волны. В остальных задачах, с которыми до настоящего времени сталкивалась практика, член, стоящий в фигурных скобках в уравнении (1.19), учитывающий влияние кривизны струй и вертикальных составляющих ускорения, так же, как и член D , не играет существенной роли и может быть отброшен. Кроме того, из-за малости множителя $\alpha - 1$ можно не учитывать также член, предшествующий члену в фигурных скобках, и тогда уравнение (1.19) приобретет вид

$$i - \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{Q^2}{K^2} + \frac{1}{g_*} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha \frac{U}{g_*} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (1.20)$$

Оно называется уравнением Сен-Венана.

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{F} \right) = \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{F^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{F^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = B \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_* = B \frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_*\end{aligned}$$

где $(\partial F / \partial x)_*$ — изменение площади сечения по длине потока, связанное с непрямолинейностью русла, можно записать уравнение (1.20) так (для простоты считаем $\alpha=1$):

$$\begin{aligned}i - \left(1 - \frac{BQ^2}{g_* F^3} \right) \frac{\partial H}{\partial x} = \\ = \left[\frac{1}{K^2} - \frac{1}{g_* F^3} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_* \right] Q^2 + \\ + \frac{2Q}{g_* F^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{g_* F} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}.\end{aligned}$$

Рассматривая потоки небольшого уклона, направим теперь ось x горизонтально и примем $g_* = g$. Пусть AB на фиг. 2 есть свободная поверхность потока при установившемся режиме с некоторым произвольным расходом Q_0 , который в дальнейшем можно будет выбрать сообразуясь с удобством выкладок. Тогда (в обозначениях фиг. 2) имеем

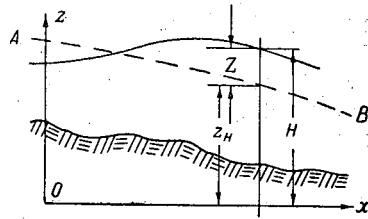
$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial z_H}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} = -I + \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad (1.21)$$

где I — уклон линии AB . Величина BQ^2/gF^3 , как известно, пренебрежимо мала по сравнению с единицей как в естественных, так и в искусственных руслах, исключая только горные стремнины и быстроты. Пренебрегая ею, обозначая

$$\frac{1}{K^2} - \frac{1}{gF^3} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_* = \frac{1}{K_*^2}, \quad (1.22)$$

используя соотношение (1.21) и учитывая, что $i=0$, когда ось x горизонтальна, приведем уравнение (1.19) к виду

$$I - \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{Q^2}{K_*^2} + \frac{1}{gF} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{gF^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1.23)$$



Фиг. 2. К выбору системы отсчета уровней.

В очень многих случаях, в особенности при расчете движения паводков по речным руслам, оказывается возможным пренебречь силами инерции, и тогда уравнение (1.19) приводится к еще более простому виду

$$I - \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{Q^2}{K_*^2}. \quad (1.24)$$

Уравнение же неразрывности (1.17) во всех случаях можно записать так:

$$B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (1.25)$$

Все задачи, рассматриваемые в данной книге, кроме задач устойчивости, таковы, что в них можно пользоваться либо гиперболической системой (1.23) и (1.25), либо параболической (1.24) и (1.25). Обе эти системы нелинейны, что и порождает главные трудности исследования неустановившихся потоков.

Чтобы избежать этих трудностей, многие авторы линеаризуют уравнения неустановившегося движения (сущность линеаризации подробно излагается в следующей главе). При этом линеаризация не приводит к недопустимым погрешностям, если исследуемое неустановившееся движение мало отклоняется от некоторого установившегося, т. е. тогда, когда оно слабо выражено. Но вместе с тем в литературе описаны случаи, когда линеаризация давала хорошие результаты и тогда, когда отклонения от установившегося движения заведомо нельзя считать малыми, например в некоторых расчетах паводковых волн [1]. Эти случаи никто не пытался объяснить. Самое простое предположение, которое можно высказать на этот счет, состоит в том, что утверждения авторов соответствующих работ ошибочны. Но совершенно не исключено, что дело здесь гораздо глубже. Вполне можно допустить, что в речных руслах большого протяжения и неправильной формы действия локальных нелинейностей направлены в противоположные стороны, в результате чего эффекты различных нелинейностей взаимно компенсируются и интегрально явление протекает так, как оно протекало бы в линейной модели. Разумеется, доказательство справедливости или, наоборот, опровержение этой гипотезы требуют серьезного специального исследования. Но затраты труда на такое исследование безусловно немедленно окупится, так как его результатом будет либо создание новой, более обоснованной идеализации неустановившегося движения в речном русле (в случае подтверждения гипотезы), либо существенное совершенствование существующей идеализации (если гипотеза будет опровергнута).

§ 2. Гидродинамические уравнения аэрированного потока

В руслах большого уклона как естественных (горные стремнины), так и искусственных (быстротоки) поток может быть аэрированным, и тогда уравнения Рейнольдса, из которых мы исходили в § 1, к нему уже неприменимы. В главе II нами будет рассмотрена устойчивость установившегося аэрированного течения, а поэтому следует вывести уравнения возмущенного (т. е. неустановившегося) движения аэрированного потока. Для этого нужно исходить из уравнений гидродинамики водовоздушной (т. е. двухфазной) смеси. Мы дадим вывод этих уравнений по Ф. И. Франклю [2], работа которого в рамках принятых им ограничений есть наиболее полная и строгая по этому вопросу.

Ф. И. Франкль рассматривает смесь, состоящую из жидкой (вода) и твердой (частицы наносов) фаз. Но это отличие от нашего случая водовоздушной смеси не принципиально до тех пор, пока речь идет только об использовании основных законов механики, а не каких-либо иных физических зависимостей. Поэтому общие концепции Франкля полностью приемлемы и в данном случае. Если к тому же пренебречь взаимодействием фаз (т. е. растворением воздуха в воде или выделением из воды растворенного в ней воздуха) и сжимаемостью воздушных пузырьков, что вполне допустимо при тех, сравнительно очень низких градиентах давлений и скоростей, которые характерны для рассматриваемых здесь потоков, то следует говорить не только о приемлемости концепций Франкля, но и о полной тождественности уравнений двухфазной смеси в тех случаях, когда вторая фаза есть твердые частицы и когда она есть пузырьки газа.

В основе вывода уравнений Франкля лежит пространственно-временная операция осреднения, являющаяся обобщением той временной операции осреднения, в результате которой из уравнений Навье—Стокса получаются уравнения Рейнольдса. Пусть $f = f(x, y, z, t)$ есть какая-либо гидродинамическая величина (скорость, давление и т. п.) в точке потока с координатами x, y, z в момент t . Эта точка может находиться как внутри жидкой фазы, так и внутри газового пузырька. Пусть далее Ω есть область в четырехмерном пространстве x_1, y_1, z_1, t_1 , определяемая неравенствами

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 \leq r^2, \quad |t_1 - t| \leq \Delta t,$$

где r и Δt — некоторые данные малые величины. Осредненное значение $\bar{f}$ определяется так:

$$\bar{f} = \frac{\int \int \int \int f dx_1 dy_1 dz_1 dt_1}{\int \int \int \int dx_1 dy_1 dz_1 dt_1} = \bar{f}(x, y, z, t), \quad (2.1)$$

где интегралы в числителе и знаменателе берутся по области Ω . Введем разрывную функцию s , равную единице внутри газовых пузырьков и нулю внутри жидкости. Очевидно, что осредненное значение s , т. е. функция $\bar{s}(x, y, z, t)$, есть непрерывная функция координат, которую можно назвать воздуходержанием потока. Наряду с общим осреднением (2.1) необходимо ввести еще осреднения по объемам, занятым жидкостью и пузырьками газа,

$$f^* = \frac{\bar{f}(1-\bar{s})}{1-\bar{s}}, \quad f_s^* = \frac{\bar{f}\bar{s}}{\bar{s}}. \quad (2.2)$$

Установим уравнения неразрывности. Пусть $F(x_1, y_1, z_1) = 0$ есть уравнение некоторой произвольной, но фиксированной замкнутой поверхности S внутри потока смеси. Если газовые пузырьки считаются несжимаемыми, то можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} \int \int \int_W s(x_1, y_1, z_1, t_1) dx_1 dy_1 dz_1 = \\ = - \int_F s(x_1, y_1, z_1, t_1) V_{sn}(x_1, y_1, z_1, t_1) dS. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь W — объем, ограниченный поверхностью $F=0$, а V_{sn} — проекция вектора скорости газовых пузырьков V_s на внешнюю нормаль к поверхности S . Уравнение (2.3) выражает то обстоятельство, что увеличение объема газа внутри поверхности S в единицу времени (левая часть уравнения) равно притоку газа внутрь сквозь эту поверхность за ту же единицу времени (правая часть уравнения). Положив

$$x_1 = x + \zeta, \quad y_1 = y + \eta, \quad z_1 = z + \vartheta, \quad t_1 = t + \tau, \quad (2.4)$$

будем рассматривать $\zeta, \eta, \vartheta, \tau$ как постоянные, а x, y, z, t — как переменные. Уравнение (2.3) приобретет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_W s(x + \zeta, y + \eta, z + \vartheta, t + \tau) dx dy dz = \\ = - \int_S s(x + \zeta, y + \eta, z + \vartheta, t + \tau) \times \\ \times V_{sn}(x + \zeta, y + \eta, z + \vartheta, t + \tau) dS. \end{aligned}$$

Осредним это уравнение в смысле операции (2.1), т. е. проинтегрируем по четырехмерной области

$$\zeta^2 + \eta^2 + \vartheta^2 \leq r^2, \quad |\tau| \leq \Delta t, \quad (2.5)$$

а затем разделим на объем этой области, т. е. на $\frac{4\pi}{3} r^3 \cdot 2\Delta t$. Учитывая, что вследствие постоянства области S и области интегрирования (2.5), можно менять местами интегрирование

по ξ, η, θ и дифференцирование по t , а также интегрирование по x, y, z и ξ, η, θ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_W \int \int \bar{s}(x, y, z, t) dx dy dz = \\ = - \int_S \int \bar{s}(x, y, z, t) V_{sn}^*(x, y, z, t) dS. \end{aligned} \quad (2.6)$$

По теореме Остроградского, поток вектора $\bar{s}V_{sn}^*$ через замкнутую поверхность S , стоящий в правой части уравнения, равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему W (если внутри объема отсутствуют источники и стоки, как в нашем случае). Учитывая, кроме того, что дифференцирование по t можно внести под знак интеграла, получим

$$\int_W \int \int \left\{ \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{s}V_s^*) \right\} dx dy dz = 0. \quad (2.7)$$

В силу произвольности области интегрирования это означает, что подынтегральное выражение равно нулю. В развернутом виде это записывается так:

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{s}u_s^*)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{s}v_s^*)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{s}w_s^*)}{\partial z} = 0, \quad (2.8)$$

где u_s^*, v_s^*, w_s^* — компоненты вектора V_s^* . Уравнение неразрывности для жидкой фазы получается аналогично

$$\frac{\partial (1-\bar{s})}{\partial t} + \frac{\partial [(1-\bar{s})u^*]}{\partial x} + \frac{\partial [(1-\bar{s})v^*]}{\partial y} + \frac{\partial [(1-\bar{s})w^*]}{\partial z} = 0. \quad (2.9)$$

Перейдем к выводу динамических уравнений. Проекция на ось x количества движения газовых пузырьков, заключенных в объеме W , равна

$$\int_W \int \int \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1) u_s(x_1, y_1, z_1, t_1) dx_1 dy_1 dz_1.$$

Здесь ρ_s — плотность воздуха. Изменение этой проекции за время $t_1'' - t_1'$ составляет

$$\begin{aligned} \int_W \int \int \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1'') u_s(x_1, y_1, z_1, t_1'') dx_1 dy_1 dz_1 - \\ - \int_W \int \int \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1') u_s(x_1, y_1, z_1, t_1') dx_1 dy_1 dz_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Через поверхность S , ограничивающую объем W , в единицу времени проходит наружу объема масса газа

$$\int_S \int \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1) V_{sn}(x_1, y_1, z_1, t_1) dS_1.$$

которая уносит с собой определенное количество движения. За время $t_1'' - t_1'$ проекция этого количества движения на ось x составляет

$$\int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \int_S \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1) u_s(x_1, y_1, z_1, t_1) V_{sn}(x_1, y_1, z_1, t_1) dS. \quad (2.11)$$

На пузырьки газа действуют объемные силы и силы гидродинамического давления. Проекции объемных сил на оси x, y, z обозначим через X, Y, Z . Проекция на ось x импульса объемных сил, действующих на пузырьки воздуха в объеме W за время $t_1'' - t_1'$, равна

$$\int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \int_W \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1) X(x_1, y_1, z_1, t_1) dx_1 dy_1 dz_1. \quad (2.12)$$

Обозначим через $p_{x\xi}$ проекцию на ось x сил гидродинамического давления, действующих на единицу поверхности площадки, нормальной к оси ξ . Тогда проекция на ось x импульса гидродинамического давления на пузырьки газа за время $t_1'' - t_1'$ составит

$$- \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \int_{\Phi} p_{x\xi} d\Phi,$$

где Φ — общая поверхность пузырьков воздуха в объеме W .

На основании теоремы количества движения можно написать

$$\begin{aligned} & \int_W \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1'') u_s(x_1, y_1, z_1, t_1'') dx_1 dy_1 dz_1 - \\ & - \int_W \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1') u_s(x_1, y_1, z_1, t_1') dx_1 dy_1 dz_1 + \\ & + \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \int_S \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1) u_s(x_1, y_1, z_1, t_1) V_{sn}(x_1, y_1, z_1, t_1) dS = \end{aligned}$$

$$= \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \int_W \int \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1) X(x_1, y_1, z_1, t_1) dx_1 dy_1 dz_1 - \\ - \int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \int_{\Phi} p_{xn} d\Phi.$$

Переходя здесь к пределу при $t_1'' \rightarrow t_1'$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_W \int \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1) u_s(x_1, y_1, z_1, t_1) dx_1 dy_1 dz_1 + \\ + \int_S \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1) u_s(x_1, y_1, z_1, t_1) V_{sn}(x_1, y_1, z_1, t_1) dS = \\ = \int_W \int \rho_s s(x_1, y_1, z_1, t_1) X(x_1, y_1, z_1, t_1) dx_1 dy_1 dz_1 - \int_{\Phi} p_{xn} d\Phi. \quad (2.13)$$

По теореме теории поля об интегральном преобразовании тензоров, аналогичной теореме Остроградского, имеем

$$\int_{\Phi} p_{xn} d\Phi = \int_W \int \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y_1} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z_1} \right) dx_1 dy_1 dz_1, \quad (2.14)$$

где W_{Φ} — часть объема W , занятого воздушными пузырьками. Выражение (2.14) иначе записывается так:

$$\int_{\Phi} p_{xn} d\Phi = \int_W \int s(x_1, y_1, z_1, t_1) \times \\ \times \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y_1} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z_1} \right) dx_1 dy_1 dz_1. \quad (2.15)$$

Делая теперь замену переменных (2.4), используя выражение (2.15) и интегрируя по области (2.5), из формулы (2.13) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_W \int \overline{s u_s} dx dy dz + \int_S \overline{s u_s} V_{sn} dS = \\ = \int_W \int \overline{s X} dx dy dz - \\ - \frac{1}{\rho_s} \int_W \int s \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (2.16)$$

Поскольку в рассматриваемом случае явление протекает в поле силы тяжести, $X = \text{const}$ и $\bar{s}X = \bar{s}X$. Далее, в силу (2.2) $\overline{su_s} = \bar{s}u_s^*$. Обращаясь к остальным членам выражения (2.16), положим

$$\begin{aligned} u_s(x + \zeta, y + \eta, z + \vartheta, t + \tau) = \\ = u_s^*(x, y, z, t) + u'_s(x, y, z, t, \zeta, \eta, \vartheta, \tau) \end{aligned} \quad (2.17)$$

и представим аналогичными выражениями компоненты v_s и w_s . Далее напомним

$$\begin{aligned} s(x + \zeta, y + \eta, z + \vartheta, t + \tau) = \\ = \bar{s}(x, y, z, t) + s'(x, y, z, t, \zeta, \eta, \vartheta, \tau), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} p_{xy}(x + \zeta, y + \eta, z + \vartheta, t + \tau) = \\ = \bar{p}_{xy}(x, y, z, t) + p'_{xy}(x, y, z, t, \zeta, \eta, \vartheta, \tau). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Аналогичные выражения будем иметь для p_{xx} и p_{xz} . При интегрировании по области (2.5) величины, зависящие только от x, y, z, t , как например $u_s^*(x, y, z, t)$, следует рассматривать как постоянные. Исходя из этого

$$\begin{aligned} \overline{su_s V_{sn}} &= \overline{s(u_s^* + u'_s)(V_{sn}^* + V'_{sn})} = \\ &= \overline{su_s^* V_{sn}^* + su'_s V_{sn}^* + sV'_{sn} u_s^* + su'_s V'_{sn}} = \\ &= \bar{s}u_s^* V_{sn}^* + \overline{su'_s V_{sn}^*} + \overline{sV'_{sn} u_s^*} + \overline{su'_s V'_{sn}} = \\ &= \bar{s}u_s^* V_{sn}^* + \overline{su'_s V'_{sn}} = \bar{s}u_s^* V_{sn}^* + \bar{s}(u'_s V'_{sn})^* \end{aligned} \quad (2.20)$$

ибо очевидно, что $\overline{su'_s} = \bar{s}V'_{sn} = 0$. Используя выражения (2.17) — (2.20), применяя ко второму члену правой части (2.16) теорему Остроградского и действуя в остальном так же, как и при выводе уравнения неразрывности, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{s} u_s^*}{\partial t} + \frac{\partial \bar{s} u_s^* u_s^*}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s} u_s^* v_s^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s} u_s^* w_s^*}{\partial z} + \frac{\partial \bar{s} (u'_s u'_s)^*}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s} (u'_s v'_s)^*}{\partial y} + \\ + \frac{\partial \bar{s} (u'_s w'_s)^*}{\partial z} = \bar{s}X - \frac{\bar{s}}{\rho_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_{xz}}{\partial z} \right) - \\ - \frac{1}{\rho_s} \left(s' \frac{\partial \bar{p}'_{xx}}{\partial x} + s' \frac{\partial \bar{p}'_{xy}}{\partial y} + s' \frac{\partial \bar{p}'_{xz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Совершенно аналогично напишем уравнения динамики газовых пузырьков для осей y и z :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{s} v_s^*}{\partial t} + \frac{\partial \bar{s} v_s^* u_s^*}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s} v_s^* v_s^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s} v_s^* w_s^*}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial \bar{s} (v_s' u_s')^*}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s} (v_s' v_s')^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s} (v_s' w_s')^*}{\partial z} = \\ & = \bar{s} Y - \frac{\bar{s}}{\rho_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_{yz}}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{1}{\rho_s} \left(s' \frac{\partial p'_{yx}}{\partial x} + s' \frac{\partial p'_{yy}}{\partial y} + s' \frac{\partial p'_{yz}}{\partial z} \right), \quad (2.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{s} w_s^*}{\partial t} + \frac{\partial \bar{s} w_s^* u_s^*}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s} w_s^* v_s^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s} w_s^* w_s^*}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial \bar{s} (w_s' u_s')^*}{\partial x} + \frac{\partial \bar{s} (w_s' v_s')^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{s} (w_s' w_s')^*}{\partial z} = \\ & = \bar{s} Z - \frac{\bar{s}}{\rho_s} \left(\frac{\partial \bar{p}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_{zz}}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{1}{\rho_s} \left(s' \frac{\partial p'_{zx}}{\partial x} + s' \frac{\partial p'_{zy}}{\partial y} + s' \frac{\partial p'_{zz}}{\partial z} \right), \quad (2.23) \end{aligned}$$

а также уравнения динамики жидкой фазы:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (1-\bar{s}) u^*}{\partial t} + \frac{\partial (1-\bar{s}) u^* u^*}{\partial x} + \frac{\partial (1-\bar{s}) u^* v^*}{\partial y} + \frac{\partial (1-\bar{s}) u^* w^*}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial (1-\bar{s}) (u' u')^*}{\partial x} + \frac{\partial (1-\bar{s}) (u' v')^*}{\partial y} + \frac{\partial (1-\bar{s}) (u' w')^*}{\partial z} = \\ & = (1-\bar{s}) X - \frac{1-\bar{s}}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_{xz}}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(s' \frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} + s' \frac{\partial p'_{xy}}{\partial y} + s' \frac{\partial p'_{xz}}{\partial z} \right), \quad (2.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (1-\bar{s}) v^*}{\partial t} + \frac{\partial (1-\bar{s}) v^* u^*}{\partial x} + \frac{\partial (1-\bar{s}) v^* v^*}{\partial y} + \frac{\partial (1-\bar{s}) v^* w^*}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial (1-\bar{s}) (v' u')^*}{\partial x} + \frac{\partial (1-\bar{s}) (v' v')^*}{\partial y} + \frac{\partial (1-\bar{s}) (v' w')^*}{\partial z} = \\ & = (1-\bar{s}) Y - \frac{1-\bar{s}}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_{yz}}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(s' \frac{\partial p'_{yx}}{\partial x} + s' \frac{\partial p'_{yy}}{\partial y} + s' \frac{\partial p'_{yz}}{\partial z} \right), \quad (2.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (1-\bar{s}) w^*}{\partial t} + \frac{\partial (1-\bar{s}) w^* u^*}{\partial x} + \frac{\partial (1-\bar{s}) w^* v^*}{\partial y} + \frac{\partial (1-\bar{s}) w^* w^*}{\partial z} + \\
& + \frac{\partial (1-\bar{s}) (w' u')^*}{\partial x} + \frac{\partial (1-\bar{s}) (w' v')^*}{\partial y} + \frac{\partial (1-\bar{s}) (w' w')^*}{\partial z} = \\
& = (1-\bar{s}) Z - \frac{1-\bar{s}}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_{zz}}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{1}{\rho} \left(s' \frac{\partial p'_{zx}}{\partial x} + s' \frac{\partial p'_{zy}}{\partial y} + s' \frac{\partial p'_{zz}}{\partial z} \right). \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Система уравнений (2.8), (2.9), (2.21)–(2.26) не замкнута по тем же причинам, что и система уравнений Рейнольдса для однофазной жидкости; получить из общих законов механики какие-либо дополнительные уравнения, содержащие только те неизвестные, какие входят в эту систему, невозможно.

Умножая уравнения (2.21)–(2.23) на ρ_s , а уравнения (2.24–2.26) на ρ и суммируя затем уравнения для газа и жидкости, относящиеся к одинаковым осям, получим аналог уравнений (1.1)–(1.3) для двухфазной смеси:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} [\rho_s \bar{s} u_s^* + \rho (1-\bar{s}) u^*] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_s \bar{s} u_s^* u_s^* + \rho (1-\bar{s}) u^* u^*] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_s \bar{s} u_s^* v_s^* + \rho (1-\bar{s}) u^* v^*] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_s \bar{s} u_s^* w_s^* + \rho (1-\bar{s}) u^* w^*] = \\
& = -P_x + [\rho_s \bar{s} + \rho (1-\bar{s})] X - R_x, \quad (2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} [\rho_s \bar{s} v_s^* + \rho (1-\bar{s}) v^*] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_s \bar{s} v_s^* u_s^* + \rho (1-\bar{s}) v^* u^*] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_s \bar{s} v_s^* v_s^* + \rho (1-\bar{s}) v^* v^*] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_s \bar{s} v_s^* w_s^* + \rho (1-\bar{s}) v^* w^*] = \\
& = -P_y + [\rho_s \bar{s} + \rho (1-\bar{s})] Y - R_y, \quad (2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} [\rho_s \bar{s} w_s^* + \rho (1-\bar{s}) w^*] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_s \bar{s} w_s^* u_s^* + \rho (1-\bar{s}) w^* u^*] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_s \bar{s} w_s^* v_s^* + \rho (1-\bar{s}) w^* v^*] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_s \bar{s} w_s^* w_s^* + \rho (1-\bar{s}) w^* w^*] = \\
& = -P_z + [\rho_s \bar{s} + \rho (1-\bar{s})] Z - R_z. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Здесь

$$P_x = \frac{\partial \bar{p}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_{xz}}{\partial z}, \quad (2.30)$$

$$P_y = \frac{\partial \bar{p}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_{yz}}{\partial z}, \quad (2.31)$$

$$P_z = \frac{\partial \bar{p}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_{zz}}{\partial z}, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
R_x = & \frac{\partial}{\partial x} [\rho_s \bar{s} (u'_s u'_s)^* + \rho (1 - \bar{s}) (u' u')^*] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_s \bar{s} (u'_s v'_s)^* + \rho (1 - \bar{s}) (u' v')^*] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_s \bar{s} (u'_s w'_s)^* + \rho (1 - \bar{s}) (u' w')^*], \quad (2.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_y = & \frac{\partial}{\partial x} [\rho_s \bar{s} (v'_s u'_s)^* + \rho (1 - \bar{s}) (v' u')^*] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_s \bar{s} (v'_s v'_s)^* + \rho (1 - \bar{s}) (v' v')^*] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_s \bar{s} (v'_s w'_s)^* + \rho (1 - \bar{s}) (v' w')^*], \quad (2.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_z = & \frac{\partial}{\partial x} [\rho_s \bar{s} (w'_s u'_s)^* + \rho (1 - \bar{s}) (w' u')^*] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_s \bar{s} (w'_s v'_s)^* + \rho (1 - \bar{s}) (w' v')^*] + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_s \bar{s} (w'_s w'_s)^* + \rho (1 - \bar{s}) (w' w')^*]. \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Система уравнений (2.8), (2.9), (2.27) — (2.29) также не замкнута, но она не содержит членов с пульсацией давления, о которых сейчас ничего не известно даже гипотетически, и поэтому она удобнее, чем система (2.8), (2.9), (2.21) — (2.26).

§ 3. Гидравлические уравнения аэрированного потока

Чтобы замкнуть систему уравнений (2.8), (2.9), (2.27) — (2.29) или чтобы получить из нее замкнутую систему для одномерной идеализации, нужно, как и в случае однофазного потока, принять те или иные гипотезы, не сводящиеся к основным законам механики, или опереться на экспериментальные данные.

Гипотеза I такого рода заключается в предположении, что поток имеет четко выраженную свободную поверхность, т. е. поверхность, на которой $\bar{s}$ делает скачок от $\bar{s} < 1$ под поверхностью до $\bar{s} = 1$ над поверхностью. Это значит, что случаи, когда отсутствует четкое разделение области, в которой движутся воздушные пузырьки, окруженные жидкостью, и области, в которой движется в воздухе водяная пыль (т. е. случаи, когда поток в обычном понимании перестает существовать), из рассмотрения исключаются.

Опираясь на эту гипотезу, осредним по площади сечения потока уравнения неразрывности. Направляя оси координат так, как показано на фиг. 1, и предполагая по-прежнему, что

плоскость xOz есть плоскость симметрии потока, получим, интегрируя выражение (2.8) по F ,

$$\int_F \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} dF + \int_F \frac{\partial \bar{s} u_s^*}{\partial x} dF + \int_F \frac{\partial \bar{s} w_s^*}{\partial z} dF = 0. \quad (3.1)$$

Используя, как и в § 1, формулу дифференцирования под знаком интеграла, найдем отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_F \bar{s} dF - \frac{\partial H}{\partial t} \int_{-B/2}^{B/2} \bar{s}_H dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_F \bar{s} u_s^* dF - \\ - \frac{\partial H}{\partial x} \int_{-B/2}^{B/2} \bar{s}_H u_{sH}^* dy + \int_{-B/2}^{B/2} \bar{s}_H w_{sH}^* dy = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

По аналогии с формулой (1.8) можно написать

$$w_{sH}^* = u_{sH}^* \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \Delta w_s. \quad (3.3)$$

Здесь Δw_s — составляющая w_{sH}^* , обусловленная обменом воздухом между потоком и атмосферой, положительная, когда воздух выделяется из потока, и отрицательная, когда воздух засасывается в поток. Из выражений (3.2) и (3.3) легко получить

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_F \bar{s} dF + \frac{\partial}{\partial x} \int_F \bar{s} u_s^* dF + \int_{-B/2}^{B/2} \bar{s}_H \Delta w_s dy = 0. \quad (3.4)$$

Последний член этого уравнения можно представить как $W_s B$, где W_s — объем воздуха, выделяемого в атмосферу в единицу времени с единицы площади свободной поверхности. Далее

$$\int_F \bar{s} dF = SF, \quad \int_F \bar{s} u_s^* dF = q. \quad (3.5)$$

где S — среднее содержание воздуха в единице объема потока, а q — расход воздуха через поперечное сечение. В результате уравнение (3.4) приобретает вид

$$\frac{\partial SF}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + W_s B = 0. \quad (3.6)$$

Для жидкой фазы формула, соответствующая (3.3), будет

$$w_H^* = u_H^* \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \Delta w, \quad (3.7)$$

где Δw — составляющая скорости w_H^* , вызванная выделением водяной пыли из потока в атмосферу. Осредняя уравнение

(2.9) по площади сечения потока и используя (3.7), получим так же, как было получено выражение (3.6), следующее одномерное уравнение неразрывности для жидкой фазы:

$$-\frac{\partial SF}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + WB = 0. \quad (3.8)$$

Здесь W — объем водяной пыли, выделяющейся в атмосферу в единицу времени с единицы площади свободной поверхности, а

$$Q = \int_F (1 - \bar{s}) u^* dF \quad (3.9)$$

— расход жидкости через поперечное сечение потока.

В связи с уравнениями неразрывности необходимо заметить следующее. В работах по движению смесей часто принимается гипотеза, которую мы будем называть гипотезой гидравлической крупности. Она состоит в том, что вектор скорости твердой фазы или газа есть геометрическая сумма вектора скорости жидкой фазы и вертикально направленного вектора ω , численно равного гидравлической крупности твердых частиц или газовых пузырьков. Для тяжелых твердых частиц (при нашем выборе координатных осей) гидравлическую крупность следует считать отрицательной и вектор ω направлен вниз, для газовых же пузырьков гидравлическая крупность положительна и вектор ω направлен вверх. Нетрудно видеть, что эта гипотеза несовместима с уравнениями неразрывности турбулентного потока смеси. Действительно, полагая в соответствии с этой гипотезой

$$u_s^* = u^* + \omega_x, \quad v_s^* = v^* + \omega_y, \quad w_s^* = w^* + \omega_z,$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции вектора ω на оси координат, и складывая после этого уравнения (2.8) и (2.9), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^* + \bar{s}\omega_x) + \frac{\partial}{\partial y} (v^* + \bar{s}\omega_y) + \frac{\partial}{\partial z} (w^* + \bar{s}\omega_z) = 0. \quad (3.10)$$

Рассматривая стационарный равномерный поток в бесконечно широком русле, в котором плоскость xOy есть плоскость дна, нужно положить $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ и тогда из выражения (3.10) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z} (w^* + \bar{s}\omega_z) = 0, \quad w^* + \bar{s}\omega_z = \psi(x, y, t).$$

Но из условий неизменности течения по x, y и t следует, что произвольная функция $\psi = \text{const}$, а из условий на поверхности ($w^* = 0$ и $s = s_H$) вытекает $\psi = \bar{s}_H \omega_z$ и, следовательно,

в толще потока $w^* = (\bar{s}_H^* - \bar{s})\omega_z \neq 0$, чего, очевидно, в рассматриваемом случае быть не может. То, что это есть именно противоречие, а не факт, требующий объяснения (хотя в литературе и известны попытки дать такое объяснение), видно не только из бесспорности тех исходных позиций, которые послужили для вывода уравнений (2.8) и (2.9), но и из следующего. Нетрудно проверить, что, если гипотеза гидравлической крупности верна, то уравнения (3.3) и (3.7) в общем случае не могут удовлетворяться одновременно и, стало быть, по крайней мере одно из них неверно. Но тогда должно быть ошибочным по крайней мере одно из уравнений (3.6) и (3.8). Однако оба эти уравнения могут быть выведены и без помощи уравнений (3.3) и (3.7) — на основании одного лишь закона сохранения вещества. Действительно, выделяя двумя нормальными к оси x сечениями элемент потока длиной dx , видим, что, если через первое (по течению) сечение в элемент за время dt вносится объем воздуха qdt , то за то же время через второе сечение выносится объем $(q + \frac{\partial q}{\partial x} dx)dt$, а через свободную поверхность элемента в атмосферу выделяется объем $W_s B dx dt$.

Таким образом, за время dt в элементе накапливается объем воздуха

$$q dt - (q + \frac{\partial q}{\partial x} dx) dt - W_s B dx dt = -(\frac{\partial q}{\partial x} + W_s B) dx dt.$$

С другой же стороны этот накапливающийся за время dt объем можно выразить так:

$$(SF + \frac{\partial SF}{\partial t} dt) dx - SF dx = \frac{\partial SF}{\partial t} dt dx.$$

Приравнявая эти два выражения, получим уравнение (3.6). Совершенно аналогично можно получить и уравнение (3.8). Таким образом, результат, получающийся из уравнений (3.3) и (3.7), несовместимых с гипотезой гидравлической крупности, безусловно верен, а это значит, что гипотеза гидравлической крупности должна быть отвергнута. Следует заметить, что ни теория [3], ни опыт [4] не подтверждают этой гипотезы. Хотя в работе [3] и показано, что при некоторых соотношениях между размерами и плотностью частицы и частотой пульсаций потока эта гипотеза более или менее точно выдерживается для отдельной частицы, но это ничего не говорит в пользу того, что она будет выдержана и для системы взаимодействующих (через скоростное поле потока) частиц: для того, чтобы она выдерживалась в последнем случае, только необходимо, но еще недостаточно, чтобы она была справедливой для уединенной частицы.

Переходя к динамическим уравнениям, примем гипотезу II, заключающуюся в том, что вязкостью жидкости и газа как

внутри этих фаз, так и на поверхности их контакта можно пренебречь. Это значит, что в формулах (2.30) — (2.32) следует принять

$$\begin{aligned}\bar{p}_{xx} &= \bar{p}_{yy} = \bar{p}_{zz} = \bar{p}, \\ \bar{p}_{xy} &= \bar{p}_{yx} = \bar{p}_{yz} = \bar{p}_{zy} = \bar{p}_{zx} = \bar{p}_{xz} = 0, \\ P_x &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad P_y = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad P_z = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}.\end{aligned}$$

Тогда из выражения (2.29) получается

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \bar{p}_H + g_* \int_z^H [\rho_s \bar{s} + \rho(1 - \bar{s})] d\xi + \int_z^H R_z d\xi + \\ &+ \int_z^H \frac{\partial}{\partial t} [\rho_s \bar{s} w_s^* + \rho(1 - \bar{s}) w^*] d\xi + \\ &+ \int_z^H \frac{\partial}{\partial x} [\rho_s \bar{s} w_s^* u_s^* + \rho(1 - \bar{s}) w^* u^*] d\xi + \\ &+ \int_z^H \frac{\partial}{\partial y} [\rho_s \bar{s} w_s^* v_s^* + \rho(1 - \bar{s}) w^* v^*] d\xi + \rho_s \bar{s}_H w_{sH}^* w_{sH}^* + \\ &+ \rho(1 - \bar{s}_H) w_H^* w_H^* - \rho_s \bar{s} w_s^* w_s^* - \rho(1 - \bar{s}) w^* w^*. \quad (3.11)\end{aligned}$$

В аэрированном потоке поверхностная пленка нарушена и давления по разные стороны свободной поверхности одинаковы, т. е. $p_H = 0$. Учитывая это и преобразуя (3.11) с помощью формулы дифференцирования под знаком интеграла так же, как это было сделано с выражением (1.7), получим, используя выражения (3.3) и (3.7),

$$\begin{aligned}\bar{p} &= g_* \int_z^H [\rho_s \bar{s} + \rho(1 - \bar{s})] d\xi + \\ &+ \int_z^H R_z d\xi + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^H [\rho_s \bar{s} w_s^* + \rho(1 - \bar{s}) w^*] d\xi + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H [\rho_s \bar{s} w_s^* u_s^* + \rho(1 - \bar{s}) w^* u^*] d\xi + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_z^H [\rho_s \bar{s} w_s^* v_s^* + \rho(1 - \bar{s}) w^* v^*] d\xi - \\ &- \rho_s \bar{s} w_s^* w_s^* - \rho(1 - \bar{s}) w^* w^* + \rho_s \bar{s}_H w_{sH}^* \Delta w_s + \rho(1 - \bar{s}_H) w_H^* \Delta w.\end{aligned}$$

Подставим значение $\bar{p}$ в формулу (2.27) и проинтегрируем результат по площади сечения потока

$$\begin{aligned} \int_F dF \left\{ -g_* i [\rho_s \bar{s} + \rho(1 - \bar{s})] + g_* \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H [\rho_s \bar{s} + \rho(1 - \bar{s})] d\xi + \right. \\ + R_x + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H R_z d\xi + \frac{\partial}{\partial t} [\rho_s \bar{s} u_s^* + \rho(1 - \bar{s}) u^*] + \\ + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_s \bar{s} u_s^* u_s^* + \rho(1 - \bar{s}) u^* u^*] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_s \bar{s} u_s^* w_s^* + \rho(1 - \bar{s}) u^* w^*] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \int_z^H [\rho_s \bar{s} w_s^* + \rho(1 - \bar{s}) w^*] d\xi + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_z^H [\rho_s \bar{s} w_s^* u_s^* + \rho(1 - \bar{s}) w^* u^*] d\xi - \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} [\rho_s \bar{s} w_s^* w_s^* + \rho(1 - \bar{s}) w^* w^* - \rho_s \bar{s}_H w_{sH}^* \Delta w_s - \right. \\ \left. - \rho(1 - \bar{s}_H) w_H^* \Delta w] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Используя формулу (1.9), вытекающие из нее формулы (1.12)–(1.15), а также формулы (3.3) и (3.7) и обозначая

$$a = 1 - \frac{\rho_s}{\rho},$$

$$j = \frac{1}{g_* F \rho} \int_F dF \left\{ R_x + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H R_z d\xi \right\},$$

можно придать этому уравнению следующий вид:

$$\begin{aligned} i(1 - aS) - \frac{\partial H}{\partial x} = j + \frac{1}{g_* F} \left\{ g_* a \frac{\partial}{\partial x} \int_F dF \int_z^H \bar{s} d\xi + \right. \\ + \frac{\partial}{\partial t} \int_F [(1 - a) \bar{s} u_s^* + (1 - \bar{s}) u^*] dF + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_F [(1 - a) \bar{s} u_s^* u_s^* + (1 - \bar{s}) u^* u^*] dF + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_F dF \int_z^H [(1 - a) \bar{s} w_s^* u_s^* + (1 - \bar{s}) w^* u^*] d\xi + \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_F dF \int_z^H [(1 - a) \bar{s} w_s^* + (1 - \bar{s}) w^*] d\xi \right\} + A + D + E, \quad (3.12) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{g_* F} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \int_F [(1-a) \bar{s} w_s^* w_s^* + (1-\bar{s}) w^* w^*] dF + \right. \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial x} \int_{-B/2}^{B/2} [(1-a) \bar{s}_H \left(u_{sH} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \Delta w_s \right)^2 + \\
&\quad \left. + (1-\bar{s}_H) \left(u_H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \Delta w \right)^2] dy \right\}, \\
D &= \frac{1}{g_* F} \left\{ g_* a \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial z_0}{\partial x} dy \int_{z_0}^H \bar{s} dz + \right. \\
&\quad + \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial z_0}{\partial x} dy \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^H [(1-a) \bar{s} w_s^* + (1-\bar{s}) w^*] dz + \\
&\quad + 2 \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial z_0}{\partial x} dy \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^H [(1-a) \bar{s} w_s^* u_s^* + (1-\bar{s}) w^* u^*] dz + \\
&\quad \left. + \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} dy \int_{z_0}^H [(1-a) \bar{s} w_s^* u_s^* + (1-\bar{s}) w^* u^*] dz \right\}, \\
E &= \frac{1}{g_* F} \left\{ \int_{-B/2}^{B/2} [(1-a) \bar{s}_H u_{sH}^* \Delta w_s + (1-\bar{s}_H) u_H^* \Delta w] dy - \right. \\
&\quad \left. - \int_{-B/2}^{B/2} (H-z_0) \frac{\partial}{\partial x} [(1-a) \bar{s}_H w_{sH}^* \Delta w_s + (1-\bar{s}_H) w_H^* \Delta w] dy \right\}.
\end{aligned}$$

При $\bar{s} = \Delta w_s = \Delta w = 0$ уравнение (3.12) обращается в уравнение (1.16), как этого и следовало ожидать

Гипотеза III заключается в том, что пренебрегаем членом A в формуле (3.12) на тех же основаниях, по которым были отброшены соответствующие члены в уравнении (1.16).

Механизм обмена воздухом и водяной пылью между потоком и атмосферой изучен далеко не настолько, чтобы сейчас можно было предложить какие-либо уравнения, связывающие Δw_s и Δw с другими элементами потока. А так как в дальнейшем уравнения данного параграфа будут применяться только к таким потокам, у которых в среднем расход воздуха через свободную поверхность равен нулю (т. е. засасывание воздуха на одних участках свободной поверхности компенсируется выделением его на других участках, если засасывание и выделение вообще имеют место), то естественно принять *гипотезу IV* — $\Delta w_s = \Delta w = 0$ в уравнении (3.12) и соответственно $W_s = W = 0$ в уравнениях (3.6) и (3.8). Иными словами, в

уравнении (3.11) член E равен нулю. Гипотеза IV означает, что обмен воздухом и водяной пылью между потоком и атмосферой отсутствует не только в среднем, но и вообще. Такое предположение имеет преимущество простоты, и в то же время любая другая более сложная гипотеза в данное время не будет более обоснованной. Гипотеза IV означает также, что изменения степени аэрации потока S во времени и по длине могут происходить только за счет несинхронного изменения скоростей жидких частиц u^* и воздушных пузырьков u_s^* . Поэтому, когда выполняется гипотеза IV, эти изменения могут быть лишь очень незначительными. Это дает основание ими пренебречь и принять гипотезу V — $S = \text{const}$.

Положим, как и в § 1,

$$u^* = \delta U, \quad u_s^* = \gamma u^*, \quad \bar{s} = \sigma S,$$

$$w_s^* = \varepsilon_s u_{sH}^* \frac{\partial H}{\partial x} + \eta_s \frac{\partial H}{\partial t},$$

$$w^* = \varepsilon u_H^* \frac{\partial H}{\partial x} + \eta \frac{\partial H}{\partial t},$$

где $\delta, \gamma, \sigma, \varepsilon_s, \eta_s, \varepsilon, \eta$ — некоторые функции координат и времени. Величину U можно определить по-разному. Определим ее как среднюю скорость течения водовоздушной смеси $U = (Q + q)F$, т. е. как

$$U = \frac{1}{F} \int_F [(1 - \bar{s}) u^* + \bar{s} u_s^*] dF.$$

Теперь можно написать:

$$\int_F dF \int_z^H \bar{s} d\xi = S \int_F dF \int_z^H \sigma d\xi = \vartheta_1 S F^2 / B,$$

$$\int_F [(1 - a) \bar{s} u_s^* + (1 - \bar{s}) u^*] dF = (1 - \vartheta_2 S) U F,$$

$$\int_F [(1 - a) \bar{s} u_s^* u_s^* + (1 - \bar{s}) u^* u^*] dF = (\alpha' - \vartheta_3 S) U^2 F,$$

$$\begin{aligned} \int_F dF \int_z^H [(1 - a) \bar{s} w_s^* + (1 - \bar{s}) w^*] d\xi = \\ = \frac{F^2}{B} [(\beta'_1 - \vartheta_4 S) U \frac{\partial H}{\partial x} + (\beta'_2 - \vartheta_5 S) \frac{\partial H}{\partial t}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_F dF \int_z^H [(1 - a) \bar{s} w_s^* u_s^* + (1 - \bar{s}) w^* u^*] d\xi = \\ = \frac{F^2}{B} [(\beta'_3 - \vartheta_6 S) U^2 \frac{\partial H}{\partial x} + (\beta'_4 - \vartheta_7 S) U \frac{\partial H}{\partial t}]. \end{aligned}$$

где

$$\vartheta_1 = \frac{B}{F^2} \int_F dF \int_z^H \sigma d\xi, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{F} \int_F [1 - (1-a)\gamma] \sigma \delta dF,$$

$$\vartheta_3 = \frac{1}{F} \int_F [1 - (1-a)\gamma] \sigma \delta^2 dF,$$

$$\vartheta_4 = \frac{B}{F^2} \int_F \delta_H dF \int_z^H [\varepsilon - (1-a)\varepsilon_s \gamma] \sigma d\xi,$$

$$\vartheta_5 = \frac{B}{F^2} \int_F dF \int_z^H [\eta - (1-a)\eta_s \gamma] \sigma d\xi,$$

$$\vartheta_6 = \frac{B}{F^2} \int_F \delta_H dF \int_z^H [\varepsilon - (1-a)\varepsilon_s \gamma] \sigma \delta d\xi,$$

$$\vartheta_7 = \frac{B}{F^2} \int_F dF \int_z^H [\eta - (1-a)\eta_s \gamma] \sigma \delta d\xi,$$

$$\beta'_1 = \frac{B}{F^2} \int_F \delta_H dF \int_z^H \varepsilon d\xi,$$

$$\beta'_2 = \frac{B}{F^2} \int_F dF \int_z^H \eta d\xi,$$

$$\beta'_3 = \frac{B}{F^2} \int_F \delta_H dF \int_z^H \varepsilon \delta d\xi,$$

$$\beta'_4 = \frac{B}{F^2} \int_F dF \int_z^H \eta \delta d\xi,$$

$$\alpha' = \frac{1}{F} \int_F \delta^2 dF.$$

Член j в уравнении (3.12) так же, как и в уравнении (1.16), можно представить в виде суммы j_1 и j_2 , где j_1 — диссипативный член, а j_2 учитывает количество движения, связанное с пульсациями скоростей. В качестве гипотезы VI мы примем предположение, уже фигурировавшее в § 2, а именно,

$$j_2 = \frac{1}{g_* F} \cdot \frac{\partial \alpha' F U^2}{\partial x},$$

где $\alpha'' = \text{const}$. Попробуем определить j_1 . Для равномерного аэрированного потока в призматическом русле все производные по x и t равны нулю и уравнение (3.11) приобретает вид

$$i(1 - aS) = j_1.$$

Составим уравнение равномерного потока двухфазной смеси исходя из гидравлических соображений. Выделим в потоке отсек длиной l . За время Δt приложенная к отсеку сила тяжести совершит работу

$$\left\{ \frac{\rho}{g_*} \int_F (1 - \bar{s}) u^* dF + \frac{\rho_s}{g_*} \int_F \bar{s} u_s^* dF \right\} i l \Delta t. \quad (3.13)$$

Работа сил сопротивления, вызванных шероховатостью дна и стенок русла за то же время, будет равна $\tau_0 \chi l U \Delta t$, где τ_0 — среднее касательное напряжение на смоченной поверхности русла, а χ — смоченный периметр.

Кроме преодоления сил сопротивления, поток затрачивает еще энергию на транспорт воздушных пузырьков. Эту энергию можно определить из следующих соображений. Предположим, что рассматриваемый отсек потока остановился. Тогда пузырьки воздуха начнут всплывать под действием архимедовых сил. Для пузырька диаметром d эта сила равна

$$\frac{1}{6} \pi d^3 \frac{\rho - \rho_s}{g}.$$

Если ω есть скорость всплывания пузырька, то работа, производимая одним пузырьком за время Δt , будет

$$\frac{\pi d^3}{6} \cdot \frac{\rho - \rho_s}{g} \omega,$$

а для n пузырьков, содержащихся в отсеке, можно написать

$$\frac{n \pi d^3}{6} \cdot \frac{\rho - \rho_s}{g} \omega \Delta t = F l S a \frac{\rho}{g} \omega \Delta t, \quad (3.14)$$

ибо $n \pi d^3 / 6 F l = S$. Это и есть работа, затрачиваемая потоком на удержание воздуха в своей толще. Скорость всплывания пузырьков ω в стоячей жидкости зависит от многих факторов, включая конфигурацию системы пузырьков. Согласно работе [5], абсолютная скорость подъема пузырей, заполняющих с одинаковой концентрацией s пространство между двумя горизонтальными плоскостями, определяется как

$$\omega = \omega_0 (1 - s), \quad (3.15)$$

где ω_0 — скорость всплывания (гидравлическая крупность) уединенного пузырька. В качестве гипотезы VII примем вместо выражения (3.15) формулу

$$\omega = \omega_0 (1 - S).$$

Теперь можно написать уравнение работ

$$\frac{U \Delta t}{g} \left\{ \rho \int_F (1 - \bar{s}) u^* dF + \rho_s \int_F \bar{s} u_s^* dF \right\} = \\ = \tau_0 \chi l U \Delta t + FlSa \frac{\rho}{g} \omega_0 (1 - S) \Delta t,$$

или

$$i \frac{1 - \vartheta_2 S}{1 - aS} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\tau_0}{\gamma_c} + \frac{a \omega_0 S (1 - S)}{(1 - aS) U}, \quad (3.16)$$

где R — гидравлический радиус, а

$$\gamma_c = \frac{\rho (1 - S) + \rho_s S}{g}$$

— объемный вес водовоздушной смеси. Для однофазного потока

$$\frac{\tau_0}{\gamma_c} = \frac{U^2}{C^2}, \quad (3.17)$$

где C — коэффициент Шези. Примем, что формула (3.17) сохраняет силу и для аэрированного потока. В этом и будет заключаться *гипотеза VIII*. Основанием для этой гипотезы будет то, что в крайних случаях $S=0$ (поток воды) и $S=1$ (поток воздуха) формула (3.17) верна, а значит можно ожидать, что она будет верна и в промежуточных случаях. Из выражений (3.12), (3.16) и (3.17) имеем

$$j_1 = \frac{1 - aS}{1 - \vartheta_2 S} \left\{ (1 - aS) \frac{U^2}{C^2 R} + \frac{a \omega_0}{U} S (1 - S) \right\}. \quad (3.18)$$

Примем теперь *гипотезу IX* — формула (3.18) распространяется и на неустановившееся движение. Это есть обобщение обычной для гидравлики гипотезы — сопротивления в неустановившемся движении могут определяться по тем же формулам, что и в установившемся. В результате всех этих преобразований членов уравнения (3.11), ему можно придать такой вид:

$$i(1 - aS) - \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1 - aS}{1 - \vartheta_2 S} \left[(1 - aS) \frac{U^2}{C^2 R} + \frac{a \omega_0}{U} S (1 - S) \right] + \\ + \frac{1}{g_* F} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \cdot \frac{F^2}{B} \left(\beta_1 U \frac{\partial H}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{F^2}{B} \left(\beta_3 U^2 \frac{\partial H}{\partial x} + \beta_4 U \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + g_* a \vartheta_1 S \frac{\partial B F^2}{\partial x} + (1 - \vartheta_2 S) \frac{\partial}{\partial t} U F + \alpha \frac{\partial U^2 F}{\partial x} \right\} + D, \quad (3.19)$$

где

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' - \vartheta_3 S, \quad \beta_k = \beta'_k - \vartheta_{k+3} S, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Складывая уравнения неразрывности (3.6) и (3.8) и учитывая, что $Q + q = UF$, получим (при $W = W_s = 0$).

$$\frac{\partial UF}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (3.20)$$

Используя выражение (3.20), можно придать уравнению (3.19) окончательный вид

$$\begin{aligned} i(1 - aS) - \frac{\partial H}{\partial x} = & \frac{1 - aS}{1 - \Phi_2 S} \left[(1 - aS) \frac{U^2}{C^2 R} + \frac{a\omega_0}{U} S(1 - S) \right] + \\ & + \frac{1 - \Phi_2 S}{g_*} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha \frac{U}{g_*} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\alpha - 1 + \Phi_2 S}{g_*} \cdot \frac{U}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + \\ & + \frac{1}{g_* F} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \cdot \frac{F^2}{B} \left(\beta_1 U \frac{\partial H}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{F^2}{B} \left(\beta_3 U^2 \frac{\partial H}{\partial x} + \beta_4 U \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right\} + D. \quad (3.21) \end{aligned}$$

В частном случае неаэрированного потока, когда $S = 0$, это уравнение переходит в уравнение (1.19), если в последнем отбросить член, учитывающий поверхностное натяжение.

Вернемся теперь к допущениям, которые были приняты при выводе гидравлических уравнений неустановившегося потока.

В случае однофазного (не аэрированного) потока, вывод уравнения (1.19) не требует, в сущности говоря, никаких предположений, кроме тех, которые вытекают из использования одномерной идеализации течения, т. е. являются совершенно обычными для всей гидравлики вообще. Остановившись на этих предположениях нет необходимости. Нужно лишь подчеркнуть еще раз, что принятый способ вывода гидравлических уравнений из общих уравнений гидродинамики позволяет свести к минимуму число предположений такого рода, в частности, он делает ненужными неоправданное предположение о гидростатическом распределении давлений в потоке, и весьма искусственные построения, обычно применяемые при учете влияния кривизны струй в уравнениях движения.

Значительно сложнее обстоит дело в случае двухфазного (аэрированного потока), ибо для замыкания уравнений Франкля, из которых мы в этом случае исходили, требуется такая информация о взаимодействии фаз между собой и с граничными поверхностями потока, которой наука в данное время еще не располагает. В связи с этим полезно дать сводку гипотез, принятых при выводе гидравлических уравнений аэрированного потока, с некоторыми дополнительными комментариями.

Гипотеза I — поток имеет четко выраженную свободную поверхность. В рамках одномерной идеализации эта гипотеза совершенно необходима, так как случай, когда она не выполняется, т. е. когда движение воды с воздушными пузырьками в нижних слоях потока плавно переходит в его верхних слоях в движение водяных капель в воздухе, принципиально нельзя исследовать, отвлекаясь от стратификации фаз по вертикали. Иными словами, этот последний случай требует по меньшей мере двухмерной идеализации.

Гипотеза II — вязкость внутри жидкой и газообразной фаз и на поверхностях их контакта во внимание не принимается. В гидравлической идеализации от этой гипотезы можно отказаться за счет соответствующего усложнения выкладок. Но делать это нецелесообразно, ибо те тонкие рассуждения, к которым тогда придется прибегнуть, не дадут ничего нового: дифференцированный анализ вязких и турбулентных напряжений все равно бесполезен, так как он будет сведен на нет необходимостью принять достаточно грубую гипотезу о гидравлических сопротивлениях (гипотеза VIII), о которой подробнее будет сказано ниже.

Гипотеза III — пренебрежение членом A в уравнении (3.12). Эта гипотеза основана на том, что A есть квадратичный член по отношению к вертикальным составляющим скоростей течения. А так как эти составляющие в десятки раз меньше горизонтальных, то их квадратами вполне можно пренебречь при изучении явлений, определяющихся в своих главных чертах горизонтальными составляющими.

Гипотеза IV — отсутствует обмен воздухом и водяной пылью между потоком и атмосферой. Эта гипотеза вынужденная, так как о процессе этого обмена сейчас ничего неизвестно — по крайней мере о его количественной стороне. Сфера действия гипотезы IV очень ограничена.

В задаче об устойчивости равномерного потока, к которой и применяются (в данной монографии) полученные с ее помощью уравнения, она не приводит к противоречиям. Но, например, при исследовании замедленного (в результате подпора) движения аэрированного потока, из которого обязательно выделяется воздух, эта гипотеза неверна даже в первом приближении.

Гипотеза V — средняя концентрация воздуха в потоке постоянна. Эта гипотеза может быть (но не обязательно будет) справедливой только в тех условиях, в которых справедлива гипотеза IV. Для того чтобы отказаться от нее хотя бы в рамках действия гипотезы IV, нужен очень подробный гидродинамический анализ двухфазного потока, а этот анализ еще не выполнен; он невозможен пока не будет установлена достоверная связь между скоростями движения фаз.

Гипотеза VI — количество движения, обусловленное пульсациями скоростей, связано с количеством движения, обусловленным осредненными такой же зависимостью скоростями, что и в однофазном потоке. Эта гипотеза так же, как и соответствующее соотношение для однофазных потоков, по-видимому, не вызывает особых возражений.

Гипотеза VII — гидравлическая крупность системы пузырьков в потоке связана с гидравлической крупностью уединенного пузырька через среднее, а не через локальное воздуходо-содержание. Необходимость в такой гипотезе вытекает из одномерной идеализации, т. е. из того, что мы отвлекаемся от стратификации воздушных пузырьков по вертикали.

Гипотеза VIII — связь между средними касательными напряжениями на дне потока, удельным весом водовоздушной смеси, средней скоростью ее течения и коэффициентом Шези такая же, как в случае однофазного потока. Опытов, которые прямо подтверждали бы эту гипотезу, нет. Основание для ее принятия, указанное выше и состоящее в том, что эта гипотеза безусловно верна в двух крайних случаях (поток воды и поток воздуха), носит необходимый, но не достаточный характер: если бы рассматриваемая гипотеза не была верна в этих случаях, ее следовало бы отвергнуть, но из того, что она верна в этих случаях, еще не следует, что она верна вообще. Заменять ее каким-либо более сложным соотношением сейчас нет никаких оснований, ибо предложить что-либо более обоснованное при нынешнем состоянии изученности сопротивлений в двухфазных потоках просто нельзя. Следует заметить, что вопрос о сопротивлениях до сих пор далеко не решен даже для однофазного потока, ибо рекомендации классической гидравлики в этой области внутренние противоречивы. Эти противоречия прежде всего в том, что классическая гидравлика игнорирует форму сечения русла как фактор, влияющий на гидравлические сопротивления. Более подробный анализ этих противоречий и путей их устранения лежит за пределами темы данной монографии. Они здесь упомянуты в связи с тем, что, если такое положение существует в случае однофазных потоков, то ждать каких-либо теоретически или экспериментально обоснованных результатов для много более сложного случая двухфазного потока, разумеется, сейчас не приходится.

Гипотеза IX — законы сопротивлений в установившемся и неустановившемся движениях одинаковы. Эта гипотеза заимствована из однофазной гидравлики, где она принимается повсеместно, при отсутствии каких-либо экспериментальных данных о сопротивлениях в неустановившемся потоке. Но эта гипотеза стоит под сомнением: как известно, гидравлические сопротивления связаны с распределением скоростей по сечению потока, а это распределение может быть (при одинако-

вых условиях) различным для установившегося и неустановившегося течения.

Как видим, попытка анализа гипотез IV, V и VII, а также в особенности гипотез VIII и IX поднимает две проблемы принципиального значения: проблему гидродинамики аэрированного потока и проблему гидравлических сопротивлений, каждая из которых требует цикла самостоятельных специальных исследований. Перечисленные гипотезы оказываются необходимыми в настоящем именно потому, что такие исследования — дело будущего.

УСТОЙЧИВОСТЬ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ

§ 4. Гидравлические концепции теорий устойчивости. Устойчивость неаэрированного потока

Строгое математическое определение понятия устойчивости установившегося турбулентного течения сопряжено с затруднениями, связанными с тем, что такое определение может быть только статистическим: турбулентное течение есть движение неустановившееся, об установившемся турбулентном течении можно говорить лишь в статистическом смысле. Исследование устойчивости руслового турбулентного потока сопряжено с еще большими затруднениями: с одной стороны, можно надеяться получить полное представление об устойчивости только если подходить к ней как к пространственной задаче гидродинамики, а с другой стороны, на устойчивость существенно влияют гидравлические сопротивления, имеющаяся информация о которых практически не выходит за рамки одномерной гидравлической идеализации потока. Трудности, порождаемые этим последним обстоятельством, не могут быть преодолены при современном уровне знаний о гидравлических сопротивлениях, что сильно ограничивает возможности исследования устойчивости. В таких условиях общее математическое определение устойчивости теряет свою ценность и мы, не пытаясь его сформулировать, сосредоточим внимание на физических проявлениях неустойчивости. Такими проявлениями могут быть: 1) возникновение поперечной циркуляции, 2) аэрация потока, 3) возникновение стоячих волн, 4) возникновение бегущих волн с нарастающей амплитудой. Анализ возможностей возникновения поперечной циркуляции требует глубокой теории или хотя бы гипотезы, объясняющей структуру тензора турбулентных напряжений в потоке в условиях пространственной задачи.

Несколько проще выглядит имеющаяся попытка решить задачу о начале аэрации. П. А. Войнович и А. И. Шварц [6] рассматривают скорость распространения волны на поверхно-

сти раздела двух жидкостей (вода — воздух) в условиях плоской задачи гидродинамики и считают за начало аэрации возникновение таких соотношений, когда эта скорость становится комплексной величиной. Хотя ни откуда не следует, что переход волновой скорости на поверхности раздела жидкостей в область комплексных значений соответствует именно возникновению аэрации, а не какому-либо иному изменению возможной формы движения, но тем не менее, полученный указанными авторами результат, о том что аэрация начинается при скоростях течения около 11 м/сек., не противоречит данным наблюдений по крайней мере, если принять во внимание возможные погрешности этих данных. Это свидетельствует о том, что концепция Войновича и Шварца может быть принята как гипотетическая, но мы не будем останавливаться на ней более подробно, ибо указывая ориентировочно условия начала аэрации, она не дает возможности определить степень аэрации потока, которая и представляет главный интерес. Степень аэрации будет определяться в дальнейшем по экспериментальным данным, которые содержат также и информацию о начале аэрации. Работа Войновича и Шварца интересна в том отношении, что попытка объяснить возникновение аэрации потока предпринята ими с гидродинамических позиций. Из дальнейшего будет видно, что для решения этой задачи гидравлическая идеализация слишком груба.

Надеясь на то, что гидравлическая идеализация даст возможность установить критерий возникновения стоячих волн, по-видимому, также нельзя. Это видно хотя бы из того, что стоячие волны сплошь и рядом есть образования, составляющие острый угол с осью потока, т. е. такие, которые заведомо могут быть описаны не менее чем двумя пространственными координатами.

Поэтому мы можем ожидать, что гидравлическая идеализация окажется инструментом, достаточным для анализа одного лишь четвертого проявления неустойчивости — нарастающих бегущих волн. Следует заметить, что теоретический анализ этого вида неустойчивости наиболее важен для практики, ибо вопрос об аэрации так или иначе решается на основании экспериментальных данных, а стоячие волны, если они и возникают, имеют очень малую амплитуду и неприятностей обычно не вызывают.

Необходимо заметить также, что возникновение одного из перечисленных проявлений неустойчивости совершенно не исключает других ее проявлений, например, нарастающие бегущие волны могут иметь место в аэрированном потоке, на них могут накладываться стоячие волны и т. д.

После этих предварительных замечаний рассмотрим последствия малого возмущения равномерного потока в призма-

тическом русле в гидравлической идеализации. В условиях равномерного течения H , F , K , Q , а также коэффициенты β'_1 , β_2 , β_3 , β_4 сохраняют постоянные значения, которые мы обозначим индексом нуль. В результате возмущения эти переменные приобретают значения:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \Delta H, \quad F = F_0 + B_0 \Delta H, \quad K = K_0 + K'_0 \Delta H, \\ Q &= Q_0 + \Delta Q, \quad \beta'_1 = \beta'_{10} + \Delta \beta'_1, \quad \beta_2 = \beta_{20} + \Delta \beta_2, \\ \beta_3 &= \beta_{30} + \Delta \beta_3, \quad \beta_4 = \beta_{40} + \Delta \beta_4. \end{aligned}$$

Здесь $K' = dK/dH$. Единственное ограничение, которое мы наложим на рассматриваемое малое возмущение, состоит в том, что малым ΔH и ΔQ отвечают $\partial \Delta H / \partial x$, $\partial \Delta H / \partial t$, $\partial \Delta Q / \partial x$, $\partial \Delta Q / \partial t$ того же порядка малости. Подставляя написанные значения (H и т. д.) в уравнения (1.17) и (1.19), отбрасывая (как обычно в задачах об устойчивости «в малом») величины порядка малости выше первого и учитывая, что в рассматриваемом случае $Q_0^2 / K_0^2 = i$, получим следующие линейные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} 2i(u - \mu h) + (1 - \alpha \lambda^2) \frac{\partial h}{\partial s} - \alpha \lambda \frac{\partial h}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial u}{\partial \tau} + \alpha \lambda^2 \frac{\partial u}{\partial s} + \\ + \beta_1 \lambda \frac{\partial^3 h}{\partial \tau \partial s^2} + \beta_2 \frac{\partial^3 h}{\partial \tau^2 \partial s} + (\beta_3 \lambda^2 - \nu) \frac{\partial^3 h}{\partial \tau} = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где
$$\begin{aligned} s &= \frac{Bx}{F}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{g_* B}{F}}, \quad h = \frac{B \Delta H}{F}, \\ u &= \frac{\Delta Q}{Q}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{B Q^2}{g_* F^3}}, \quad \mu = \frac{F K'}{B K}, \\ \nu &= \frac{\sigma B^2}{F} = \frac{c B^2}{g_* F^2}, \quad \beta_1 = \beta'_1 + \beta_4, \end{aligned}$$

причем индекс нуль для простоты всюду опущен.

Из формулы (4.1) вытекает существование функции $\Phi(s, \tau)$ такой, что

$$h = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad u = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}. \quad (4.3)$$

Подставляя h и u в формулу (4.2), получим

$$\begin{aligned} (\beta_3 \lambda^2 - \nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^4} + \beta_1 \lambda \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^3 \partial \tau} + \beta_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^2 \partial \tau^2} + \\ + (1 - \alpha \lambda^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - 2\alpha \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \tau} - 2i\mu \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \frac{2i}{\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Полагая в этом уравнении $\Phi = e^{qs+rt}$, получим уравнение, связывающее q и r ,

$$(1 - \beta_2 q^2) r^2 + \left[2 \left(\frac{i}{\lambda} + \alpha \lambda q \right) - \beta_1 \lambda q^3 \right] r + \\ + 2i\mu q + (\alpha \lambda^2 - 1) q^2 - (\beta_3 \lambda^2 - \nu) q^4 = 0. \quad (4.5)$$

Рассуждая формально, следует считать, что, если $\text{Re } r > 0$ хотя бы для одного собственного значения r , то при фиксированном s будут иметь место колебания h с нарастающей амплитудой, т. е. потеря устойчивости. Попробуем довести это рассуждение до конца. Амплитуда колебаний h не может нарастать беспредельно, ибо при некотором не очень большом значении h линейное приближение, из которого получено уравнение (4.4), потеряет силу. Это будет означать либо возникновение стоячих волн с постоянной амплитудой, либо разрушение этих волн, сопровождающееся захватом воздуха, т. е. аэрацию потока, которая, очевидно, будет продолжаться до тех пор, пока не станет $\text{Re } r = 0$. Здесь нужно заметить, что, как будет видно из § 5 в случае аэрированного потока для малых возмущений также имеет место уравнение (4.5), но с $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha, \lambda, \mu$, зависящими от степени аэрации.

Таким образом, осуществление неравенства $\text{Re } r > 0$ означает либо первое, либо второе проявление неустойчивости. Какое именно — принципиально можно выяснить, исследовав стоячие волны не по линеаризованным уравнениям, а по полным уравнениям § 1 и установив, имеет ли место разрушение этих волн. Формальные рассуждения позволяют ожидать от гидравлической идеализации решения задачи о первых двух проявлениях неустойчивости. То обстоятельство, что гидравлическая идеализация слишком груба, как это отмечалось выше, должно было бы, по-видимому, сказаться в том, что описанное решение будет неточным в количественном отношении. Однако из дальнейшего будет видно, что это не так — из гидравлической идеализации нельзя получить решения для первых двух видов неустойчивости даже в самом грубом приближении, иными словами, гидравлическая идеализация не охватывает причин, приводящих к аэрации и к стоячим волнам.

Выясним теперь, при каких условиях возникшая в результате возмущения бегущая волна будет затухать, а не нарастать при своем движении вдоль русла. На основании выражения (4.3) напомним

$$h = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = q e^{qs+rt} = q \exp(s \text{Re } q + \tau \text{Re } r) \times \\ \times [\cos(s \text{Im } q + \tau \text{Im } r) + \sqrt{-1} \sin(s \text{Im } q + \tau \text{Im } r)]. \quad (4.6)$$

Из формулы (4.6) следует, что закон движения гребня волны есть

$$s \operatorname{Im} q + \tau \operatorname{Im} r = k \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Подставляя τ из формулы (4.7) в (4.6), получим закон изменения высоты гребня волны по длине русла

$$h_{\max} = |q| \exp \left(k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\operatorname{Re} r}{\operatorname{Im} r} \right) \exp \left\{ \operatorname{Re} q - \operatorname{Re} r \frac{\operatorname{Im} q}{\operatorname{Im} r} \right\} s. \quad (4.8)$$

Отсюда видно, что волна будет затухать, если

$$\operatorname{Re} q - \operatorname{Re} r \frac{\operatorname{Im} q}{\operatorname{Im} r} < 0. \quad (4.9)$$

Это неравенство и есть условие устойчивости установившегося потока. Оно может выполняться как при $\operatorname{Re} r > 0$, так и при $\operatorname{Re} r < 0$. Определим параметры потока, при которых имеет место неравенство (4.9). Полагая

$$q = \rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi), \quad r = \sigma (\cos \psi + \sqrt{-1} \sin \psi), \quad (4.10)$$

можно записать неравенство (4.9) так:

$$\cos \varphi - \sin \varphi \frac{\cos \psi}{\sin \psi} < 0. \quad (4.11)$$

В граничном случае перехода от устойчивости к неустойчивости будет

$$\cos \varphi - \sin \varphi \frac{\cos \psi}{\sin \psi} = 0, \quad (4.12)$$

откуда $\sin(\psi - \varphi) = 0$, и, следовательно, $\psi = \varphi + 2\pi n$, или $\psi = \varphi + \pi + 2\pi n$. Нетрудно проверить, что при $\psi = \varphi + 2\pi n$ уравнение (4.12) удовлетворяется тождественно, а при $\psi = \varphi + \pi + 2\pi n$ только, если $\varphi = \pi + 2\pi n$. Таким образом, решением является $\psi = \varphi + 2\pi n$. Вообще же

$$\cos \varphi - \sin \varphi \frac{\cos \psi}{\sin \psi} = \varepsilon, \quad (4.13)$$

и, следовательно,

$$\psi = \varphi + 2\pi n + \delta, \quad \delta = \delta(\varepsilon, \varphi). \quad (4.14)$$

В случае малого ε , который мы и будем рассматривать, легко найти с точностью до малых высших порядков

$$\delta = \varepsilon \sin \varphi, \quad \sin \psi = \sin \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\varphi,$$

$$\cos \psi = \cos \varphi - \frac{\varepsilon}{2} (1 - \cos 2\varphi).$$

Таким образом,

$$r = \sigma(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) - \frac{\varepsilon \sigma}{2} (1 - \cos 2\varphi - \sqrt{-1} \sin 2\varphi). \quad (4.15)$$

Подставляя q из выражения (4.10) и r из (4.15) в уравнение (4.5) и отделяя вещественную часть от мнимой, получим:

$$A_1 \sigma^2 + B_1 \sigma + C_1 = 0, \quad A_2 \sigma^2 + B_2 \sigma + C_2 = 0, \quad (4.16)$$

где

$$A_1 = \cos 2\varphi - \beta_2 \rho^2 \cos 4\varphi - \varepsilon(\cos \varphi - \cos 3\varphi) + \varepsilon \beta_2 \rho^2 (\cos 3\varphi - \cos 5\varphi),$$

$$A_2 = \sin 2\varphi - \beta_2 \rho^2 \sin 4\varphi - \varepsilon(\sin \varphi - \sin 3\varphi) + \varepsilon \beta_2 \rho^2 (\sin 3\varphi - \sin 5\varphi),$$

$$B_1 = 2 \frac{i}{\lambda} \cos \varphi + 2\alpha \lambda \rho \cos 2\varphi - \beta_1 \lambda \rho^3 \cos 4\varphi -$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} \left[2 \frac{i}{\lambda} (1 - \cos 2\varphi) + 2\alpha \lambda \rho (\cos \varphi - \cos 3\varphi) - \right. \\ \left. - \beta_1 \lambda \rho^3 (\cos 3\varphi - \cos 5\varphi) \right],$$

$$B_2 = 2 \frac{i}{\lambda} \sin \varphi + 2\alpha \lambda \rho \sin 2\varphi - \beta_1 \lambda \rho^3 \sin 4\varphi +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{2i}{\lambda} \sin 2\varphi - 2\alpha \lambda \rho (\sin \varphi - \sin 3\varphi) + \beta_1 \lambda \rho^3 (\sin 3\varphi - \sin 5\varphi) \right],$$

$$C_1 = 2i\mu \rho \cos \varphi + (\alpha \lambda^2 - 1) \rho^2 \cos 2\varphi - (\beta_3 \lambda^2 - \nu) \rho^4 \cos 4\varphi,$$

$$C_2 = 2i\mu \rho \sin \varphi + (\alpha \lambda^2 - 1) \rho^2 \sin 2\varphi - (\beta_3 \lambda^2 - \nu) \rho^4 \sin 4\varphi.$$

Исключая из уравнений (4.16) сначала σ^2 , а затем σ , будем иметь:

$$\sigma = - \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad \sigma^2 = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Возводя правую часть первого из этих выражений в квадрат и приравнявая правой части второго выражения, получим уравнение

$$(A_1 C_2 - A_2 C_1)^2 - (A_1 B_2 - A_2 B_1)(B_1 C_2 - B_2 C_1) = 0,$$

или в развернутом виде

$$\varepsilon^2 (1 - \cos 2\varphi) a_0 \rho^{12} + \varepsilon (\cos \varphi - \cos 3\varphi) a_2 \rho^{10} - \\ - \varepsilon (\cos 2\varphi - \cos 4\varphi) i a_3 \rho^9 + (1 - \cos 4\varphi) a_4 \rho^8 + \\ + (\cos \varphi - \cos 5\varphi) i a_5 \rho^7 + 2(1 - \cos 6\varphi) i^2 a_6 \rho^6 + \\ + 2(\cos \varphi - \cos 3\varphi) i a_7 \rho^5 + 2(\cos 2\varphi - \cos 4\varphi) i^2 a_8 \rho^4 - \\ - \varepsilon \left[4(1 - \cos 2\varphi) i \mu + (\cos 4\varphi - \cos 6\varphi) \frac{\beta_2 i^2}{\lambda^2} \right] \rho^3 + \\ + 2(1 - \cos 2\varphi) i^2 a_{10} \rho^2 - 4\varepsilon (1 - \cos 2\varphi) \frac{\mu i^3}{\lambda^2} \rho = 0, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 2\beta_2^2(\beta_3\lambda^2 - \nu) \left[\left(\beta_3 - \frac{\beta_1^2}{4\beta_2} \right) \lambda^2 - \nu \right], \\
 a_2 &= (\beta_3\lambda^2 - \nu) \left\{ \left(2\beta_2\beta_3 - 2\alpha\beta_2^2 - \frac{\beta_1^2}{2} \right) \lambda^2 - 2\beta_2\nu + 2\beta_2^2 \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \beta_1\beta_2\lambda^2(\alpha\lambda^2 - 1), \\
 a_3 &= \mu\beta_2 [4\beta_2(\beta_3\lambda^2 - \nu) + \beta_1^2], \\
 a_4 &= \frac{1}{2} \{ [2\alpha(2\alpha\beta_2 - \beta_1)(\beta_3\lambda^2 - \nu) + \\
 &\quad + \beta_1(\alpha - 1)(\beta_1 - 2\alpha\beta_2) + \alpha\beta_2 - \beta_3] \lambda^2 + \nu - \beta_2 \}, \\
 a_5 &= \alpha\beta_2 [4(\beta_3\lambda^2 - \nu) - \beta_1\lambda^2] + \beta_1(\beta_3\lambda^2 - \nu) + \\
 &\quad + \{ [2\alpha\beta_2(\beta_2 - \beta_1) - 2\beta_2\beta_3 + \beta_1^2] \lambda^2 + 2\beta_2(\nu - \beta_2) \} \mu, \\
 a_6 &= \beta_2 \left(\beta_2\mu^2 - \beta_1\mu + \beta_3 - \frac{\nu}{\lambda^2} \right), \\
 a_7 &= \{ [(2\alpha - 1)\beta_2 - \alpha\beta_1 + \beta_3] \lambda^2 + \beta_2 - \nu \} \mu + \\
 &\quad + \alpha(\alpha\beta_2 + \beta_3 - \beta_1) \lambda^2 - \alpha\nu + \alpha\beta_2 - \beta_1, \\
 a_8 &= [2(\alpha - 1)\beta_2 + \beta_1] \mu - \alpha\beta_2 - \beta_3 + \frac{\beta_2 + \nu}{\lambda^2}, \\
 a_{10} &= \mu^2 - 2\alpha\mu + \alpha - \frac{1}{\lambda^2}.
 \end{aligned}$$

При этом в каждом коэффициенте уравнения (4.17) удержаны только члены низшего (для этого коэффициента) порядка.

Условие устойчивости (4.9) можно записать также в виде неравенства $\varepsilon < 0$, неравенство же $\varepsilon > 0$ будет условием неустойчивости. Из выражений (4.9) и (4.10) видно, что реальный физический смысл имеют только вещественные положительные значения ρ . Следовательно, условие устойчивости установившегося течения есть условие существования положительных корней уравнения (4.17) при $\varepsilon < 0$, а условие неустойчивости — условие существования положительных корней уравнения (4.17) при $\varepsilon > 0$. Для того чтобы установить эти условия, обратимся к известной теореме Декарта: число вещественных положительных корней алгебраического уравнения равно числу перемен знака в ряду его коэффициентов или меньше этого числа на четное число (равные нулю коэффициенты при этом не учитываются). Пусть $a_0 < 0$. Тогда при $a_{10} < 0$ число перемен знака в ряду коэффициентов уравнения (4.17) может быть только четным числом, если $\varepsilon > 0$, и только

нечетным числом, если $\varepsilon < 0$: чтобы установить это, достаточно обратить внимание на то, что число перемен знака между двумя коэффициентами четно, когда эти коэффициенты одного знака, и нечетно в противоположном случае. Следовательно, при $a_{10} < 0$ уравнение (4.17) имеет хотя бы один положительный корень, если $\varepsilon < 0$, т. е. в устойчивом случае. Остальные же корни этого уравнения при этих условиях либо положительны, либо не имеют физического смысла, если они отрицательны или комплексны. Когда $a_{10} > 0$, то уравнение (4.17) имеет хотя бы один положительный корень при $\varepsilon > 0$, т. е. в неустойчивом случае, а остальные корни опять-таки либо положительны, либо лишены физического смысла. Отсюда вытекает, что условие $a_{10} < 0$ достаточно для устойчивости установившегося течения, а условие $a_{10} > 0$ достаточно для неустойчивости. Значит можно утверждать, что при $a_0 < 0$ необходимое и достаточное условие затухания бегущих волн есть $a_{10} < 0$.

Рассмотрим, в каких случаях будет $a_0 < 0$. Будем иметь в виду бесконечно широкое прямоугольное русло и примем для оценки коэффициентов β , что скорости u распределены по глубине по закону одной седьмой, а вертикальные составляющие w_1 и w_2 — по линейному закону, т. е.

$$\delta = \frac{8}{7} \left(\frac{z}{H} \right)^{\frac{1}{7}}, \quad \varepsilon = \eta = \frac{z}{H}.$$

Тогда, как нетрудно подсчитать,

$$\beta'_1 = \frac{4}{7}; \quad \beta_2 = \frac{1}{2}; \quad \beta_3 = \frac{64}{105}; \quad \beta_4 = \frac{8}{15};$$

$$\beta_1 = \beta'_1 + \beta_4 = \frac{116}{105}; \quad \beta_3 - \frac{\beta_1^2}{4\beta_2} = -\frac{774}{37975},$$

и, следовательно, $a_0 < 0$, пока $\beta_3 \lambda^2 - \nu > 0$. Но так как ν всегда очень малое число (из-за малости капиллярной постоянной), то последнее условие может оказаться невыполненным лишь при очень малых λ . В этих условиях мы переходим в область капиллярных волн, для изучения которых гидравлическая идеализация слишком груба. Поэтому рассматривать случай $\beta_3 \lambda^2 - \nu < 0$ в рамках гидравлической идеализации не имеет смысла, учитывая к тому же, что капиллярные волны не представляют интереса для речной гидравлики.

Можно попытаться установить условия, которым должны удовлетворять параметры потока для того, чтобы было $\text{Re} r > 0$, точно таким же путем, каким было установлено условие затухания бегущих волн $a_{10} < 0$. Но эта попытка не приводит к каким-либо определенным неравенствам, так как все коэффициенты уравнения, соответствующего в данном

случае уравнению (4.17), оказываются знакопеременными с изменением φ . Это и свидетельствует о том, что, как указывалось выше, в рамках гидравлической идеализации нельзя выявить никакие проявления неустойчивости, кроме нарастания высоты бегущих волн. Иными словами, в этих рамках единственное условие устойчивости есть условие $a_{10} < 0$, или

$$\frac{1}{\lambda^2} > \mu^2 - 2\alpha\mu + \alpha. \quad (4.18)$$

Это условие не включает параметров ν , β_1 , β_2 , β_3 , т. е. устойчивость потока не зависит ни от поверхностного натяжения, ни от вертикальных составляющих скорости и ускорения. Сделать такой вывод из уравнений, не учитывающих перечисленных факторов, конечно, нельзя. Но теперь становится понятным, почему такие упрощенные уравнения приводят к правильному условию устойчивости. Именно из упрощенных уравнений пришли к этому условию (хотя и совсем иными путями) В. В. Ведерников [7] и Иваса [8]. По Ведерникову, который полагал $\alpha = 1$, это условие имеет вид

$$\frac{1}{\lambda} > \mu - 1. \quad (4.19)$$

Анализ критериев (4.18) и (4.19) будет дан в § 6.

§ 5. Критерий затухания бегущих волн в аэрированном потоке

В случае аэрированного потока уравнение невозмущенного движения есть уравнение (3.16), а возмущенное движение описывается уравнениями (3.20) и (3.21). По гипотезе V (см. § 3), в этих уравнениях $S = \text{const}$, а по гипотезе VIII,

$$\frac{U^2}{C^2 R} = \frac{(Q + q)^2}{C^2 F^2 R} = \frac{(Q + q)^2}{K^2},$$

где пропускная способность русла K для водовоздушной смеси при наполнении H определяется так же, как для воды при том же наполнении H . Линеаризованные уравнения возмущенного движения получаются точно таким же путем, как и в случае неаэрированного потока. Они могут быть записаны так:

$$2i_1(u - \mu_1 h) - (1 - \alpha\lambda^2) \frac{\partial h}{\partial s} - \alpha\lambda \frac{\partial h}{\partial \tau} + (1 - \vartheta_2 S) \lambda \frac{\partial u}{\partial \tau} + \\ + \alpha\lambda^2 \frac{\partial u}{\partial s} + (\beta_1 + \beta_4) \lambda \frac{\partial^3 h}{\partial \tau \partial s^2} + \beta_2 \frac{\partial^3 h}{\partial \tau^2 \partial s} + \beta_3 \lambda^2 \frac{\partial^3 h}{\partial \tau^3} = 0, \quad (5.1)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0. \quad (5.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} i_1 &= (1 - aS)(i - 3p), \quad \mu_1 = \frac{(i - 2p)\mu - p}{i - 3p}, \\ p &= \frac{aS(1 - S)\omega_0 F}{2(1 - \vartheta_2 S)(Q + q)}, \quad \mu = \frac{FK'}{BK}, \\ \lambda &= \sqrt{\frac{B(Q + q)^2}{g_* F^3}}, \quad s = \frac{Bx}{F}, \\ \tau &= t \sqrt{\frac{g_* B}{F}}, \quad h = \frac{B \Delta H}{F}, \quad u = \frac{\Delta(Q + q)}{Q + q}. \end{aligned}$$

Полагая, как и в § 4, на основании выражения (5.2)

$$h = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad u = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \tau},$$

получим из (5.1)

$$\begin{aligned} \beta_3 \lambda^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^4} + (\beta_1 + \beta_4) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^3 \partial \tau} + \beta_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^2 \partial \tau^2} + (1 - \alpha \lambda^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \\ - 2\alpha \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \tau} - 2i_1 \mu \frac{\partial \Phi}{\partial s} - (1 - \vartheta_2 S) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \frac{2i_1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Положим теперь

$$\begin{aligned} \lambda_* &= \lambda - \frac{\vartheta_2 S}{\alpha \lambda}, \quad \alpha_* = \frac{\alpha}{(1 - \vartheta_2 S) \left(1 - \frac{\vartheta_2 S}{\alpha \lambda^2}\right)}, \\ i_* &= \frac{i_1}{1 - \vartheta_2 S} \left(1 - \frac{\vartheta_2 S}{\alpha \lambda^2}\right), \\ \mu_* &= \frac{\mu_1}{1 - \frac{\vartheta_2 S}{\alpha \lambda^2}}, \quad \beta_{1*} = \frac{\beta_1 + \beta_4}{1 - \vartheta_2 S}, \\ \beta_{2*} &= \frac{\beta_2}{1 - \vartheta_2 S}, \quad \beta_{3*} = \frac{\beta_3}{(1 - \vartheta_2 S) \left(1 - \frac{\vartheta_2 S}{\alpha \lambda^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Учитывая эти обозначения, приведем (5.3) к виду

$$\begin{aligned} \beta_{3*} \lambda_*^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^4} + \beta_{1*} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^3 \partial \tau} + \beta_{2*} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^2 \partial \tau^2} + (1 - \alpha_* \lambda_*^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \\ - 2\alpha_* \lambda_* \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \tau} - 2i_* \mu_* \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \frac{2i_*}{\lambda_*} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

что полностью совпадает с уравнением (4.4).

Следовательно, для вывода критерия устойчивости можно воспользоваться уравнением (4.17) и формулами для его коэффициентов. Оценить коэффициент a_0 в данном случае чрезвычайно трудно, для этого надо знать закон распределения воздушных пузырьков по сечению потока и влияние их на

распределение скоростей, т. е. иметь данные, которыми мы сейчас не располагаем. Однако можно утверждать, что, если этот коэффициент отрицателен при $S=0$, как это было показано в § 4, то он будет отрицательным также и при достаточно малых значениях $S > 0$, ибо физически очевидно, что зависимость a_0 от S может быть только непрерывной. Поэтому, по крайней мере для малых S , условие устойчивости может быть написано по аналогии с (4.18)

$$\frac{1}{\lambda_*^2} > \mu_*^2 - 2\alpha_* \mu_* + \alpha_* \quad (5.5)$$

Это условие нетрудно привести к виду

$$\frac{1}{\lambda^2} > \mu^2 - 2\alpha\mu + \alpha - \rho S. \quad (5.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \rho = \frac{\alpha \vartheta_2}{1 - \vartheta_2 S} \left(2\mu - 1 + \frac{1}{\alpha \lambda^2} \right) - 2\kappa \frac{\mu - 1}{i - 3\kappa S} \times \\ \times \left(\mu - \frac{\alpha}{1 - \vartheta_2 S} \right) - \left\{ \frac{\kappa(\mu - 1)}{i - 3\kappa S} \right\}^2 S, \\ \kappa = \frac{a(1 - S)\omega_0 F}{2(1 - \vartheta_2 S)(Q + q)} = \frac{a(1 - S)\omega_0}{2(1 - \vartheta_2 S)U} \end{aligned}$$

Оценим гидравлическую крупность воздушных пузырьков ω_0 . Она определяется их диаметром d , который не может превышать некоторую предельную величину d_m . Эта величина может быть найдена из следующих соображений. При движении пузырька со скоростью v относительно среды с объемным весом γ его лобовая сторона испытывает избыточное давление, равное при турбулентном обтекании $k_1(\gamma/g) \cdot \frac{1}{2} v^2$, где g — ускорение силы тяжести, а k_1 — безразмерный коэффициент. Это давление уравнивается капиллярным давлением σ/ρ , где σ — капиллярная постоянная, равная для воды 73 дин/см, а ρ — радиус кривизны лобовой поверхности пузырька, отличающийся от $\frac{1}{2}d$, так как пузырек сплющивается в направлении движения.

Полагая $\rho = k_2 \frac{d}{2}$, где k_2 — также безразмерное число, найдем предельный диаметр пузырька, движущегося по отношению к окружающей среде со скоростью v

$$d = \frac{4}{k_1 k_2} \cdot \frac{g\sigma}{\gamma v^2} = C \frac{g\sigma}{\gamma v^2}. \quad (5.7)$$

Безразмерное число C , очевидно, не зависит от соотношения плотностей пузырьков и среды. На основании опытов с

водяными каплями [9] это число оценивается величиной $C \approx 10$. С другой стороны, сила $\gamma \cdot \frac{1}{6} \pi d^3$, выталкивающая из воды пузырек, который стремится всплыть со скоростью, равной своей гидравлической крупности ω_0 , уравнивается силой лобового сопротивления

$$k' \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega_0^2}{2} \cdot \frac{\pi d^2}{4},$$

где $k' \neq k_1$, так как здесь речь идет не о максимальном избыточном давлении, а о полном сопротивлении. Отсюда легко найти, что

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4}{3k'}} \sqrt{gd} = M \sqrt{gd}, \quad (5.8)$$

причем, по данным того же источника [9], $M = 0,69$. Подставляя значение ω_0 вместо v в формулу (5.7), мы и получим предельный диаметр

$$d_m = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{C\sigma}{\gamma}} = 1,25 \text{ см.}$$

Соответствующая этому предельному диаметру наибольшая возможная гидравлическая крупность пузырьков ω_m составляет

$$\omega_m = M \sqrt{gd_m} = 24,2 \text{ см/сек.}$$

Формула (5.8) справедлива только при $d > 1,2$ см, при меньших же значениях d гидравлическая крупность пузырьков с уменьшением диаметра убывает гораздо медленнее, чем дает эта формула. В частности [9], при уменьшении d от 0,8 до 0,3 см гидравлическая крупность уменьшается только от 22 до 21 см/сек.

Таким образом, очень широкому диапазону изменения диаметра пузырьков (от 0,3 см до предельного возможного значения) соответствует изменение гидравлической крупности в сравнительно узких пределах (от 21 до 24 см/сек. в случае нулевой степени аэрации). В среднем можно принять $\omega_0 = 22$ см/сек. На этом значении мы и остановимся.

Величина ϕ_2 сейчас не может быть оценена сколько-нибудь определенно, но ее пределы можно указать достаточно уверенно. Действительно, в одном крайнем случае, когда все воздушные пузырьки сосредоточены в тонком поверхностном слое, ϕ_2 близка к нулю. В другом крайнем случае, когда пузырьки распределены равномерно по всему сечению потока, ϕ_2 близка к единице. Следовательно, можно принять $0 < \phi_2 < 1$. Преувеличение ϕ_2 дает преувеличение λ , что для оценки, которую мы сейчас произведем, невыгодно. Поэтому мы примем

$\Phi_2=1$, а так как a практически не отличается от 1, то $\kappa < \omega_0/2U$. Так как аэрация возникает при больших скоростях U , порядка 10 м/сек, то $\kappa < 0,22/2 \times 10 = 0,011$. Учитывая, что такие скорости возникают только при больших уклонах ($i > 0,1$), нетрудно убедиться, что всегда $\rho > 0$. Поэтому учет членов, зависящих от воздухоудержания S , приводит к более мягкому условию устойчивости (5.6), чем условие

$$\frac{1}{\lambda^2} > \mu^2 - 2\alpha\mu + \alpha, \quad (5.9)$$

получающее, если рассматривать водовоздушную смесь как поток однородной жидкости с расходом $Q+q$.

Для использования как условия (5.6), так и (5.9) необходимо определять величины S и q . Следует заметить, что в литературе по аэрированным потокам не делается различия между воздухоудержанием смеси по объему S и по расходу

$$S' = \frac{q}{Q+q} = \frac{S_*}{1+S_*} \quad (S_* = \frac{q}{Q}).$$

Это объясняется, по-видимому, тем, что разница между S и S' лежит в пределах точности измерений степени аэрации потока, на которых основываются формулы для воздухоудержания. Среди этих формул наиболее удобна и, по-видимому, наиболее надежна формула Н. Б. Исаченко [10]

$$S_* = k \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2}.$$

Здесь $\lambda^2 = BQ^2/gF^3$ вычисляется в предположении, что аэрация отсутствует (это есть число Фруда в том случае, когда поток не аэрирован), а λ_0 — число Фруда, при котором начинается аэрация. По Исаченко,

$$k = 0,035 + 0,83 \frac{\Delta}{R}, \quad \lambda_0^2 = 45 \left(1 - \frac{\Delta}{R}\right)^{14}.$$

где Δ — высота выступов шероховатости (абсолютная шероховатость), R — гидравлический радиус сечения, вычисленный в предположении, что аэрация отсутствует. По В. Н. Гончарову [11], величина Δ в метрах и коэффициент шероховатости n в формуле Маннинга связаны соотношением $\Delta^{1/6} = 22,6n$.

Решение задачи об устойчивости аэрированного потока, изложенное в данном параграфе, безусловно правильно, в рамках принятых предположений, только для достаточно малых S . Действительно, коэффициент a_0 характеристического уравнения (4.17) в данном случае может быть представлен так:

$$a_0 = 2\beta_{2*} \left(\beta_{2*}\beta_{3*} - \frac{\beta_{1*}^2}{4} \right) \beta_{3*} \lambda^4.$$

Знак a_0 определяется знаком множителя в скобках, так как β_{3*} есть величина всегда положительная, в чем нетрудно убедиться из § 4. Преобразовав этот множитель подстановкой значений β_{1*} , β_{2*} , β_{3*} , легко увидеть, что знак a_0 совпадает со знаком величины

$$\beta_2\beta_3 - \frac{\left(1 - \frac{\vartheta_2 S}{\alpha\lambda^2}\right)^2}{1 - \vartheta_2 S} \left(\frac{\beta_1 + \beta_4}{2} - \frac{\vartheta_4 + \vartheta_7}{2} S\right)^2,$$

о которой нельзя утверждать, что, если она отрицательна при малых S , то она останется отрицательной и с увеличением S . А как только коэффициент a_0 станет положительным, критерий (5.6) перестанет быть верным. Но с увеличением S теряет силу и гипотеза I (см. § 3) о существовании свободной поверхности потока, а это значит, что вся изложенная теория вообще неприменима при больших S . К сожалению, сейчас нельзя указать то значение S , с превышением которого эта теория становится неверной; определение этого значения пока возможно только экспериментально.

§ 6. Анализ критерия затухания бегущих волн

Рассмотрим критерий (4.18)

$$\frac{1}{\lambda^2} > \mu^2 - 2\alpha\mu + \alpha, \quad (4.18)$$

который можно относить не только к неаэрированным, но и к аэрированным потокам, если в последнем случае место расхода воды оперировать суммарным расходом водовоздушной смеси. При $\alpha=1$ критерий (4.18) переходит в критерий Ведерникова—Иваса (4.19)

$$\frac{1}{\lambda} > \mu - 1. \quad (4.19)$$

Критерий (4.18) с помощью элементарных алгебраических преобразований можно привести к виду

$$\frac{1}{\lambda^2} > (\mu - 1)^2 \left\{ 1 - (\alpha - 1) \frac{2\mu - 1}{(\mu - 1)^2} \right\}. \quad (6.1)$$

Сопоставляя выражение (6.1) с (4.19) и учитывая, что всегда $\mu=1$, нетрудно убедиться, что критерий (4.19) дает более тяжелые условия, чем это есть в действительности.

Экспериментальная проверка критерия (4.18) была предпринята Е. П. Федоровым [12] по данным наблюдений на 27 быстотоках, результаты ее приведены в приложении I (L — длина быстотока). Первые 24 быстотока имеют трапецидальное сечение, последние 3 — сечение в форме кругового

сегмента (r —радиус круга, φ —угол смоченной дуги). Е. П. Федоров μ определял по фактическим данным, коэффициент Шези C вычислял по формуле Н. Н. Павловского, λ — по фактическим данным, а коэффициент α' — по изотаксам. На основании опытов Минского и Рейхарда коэффициент $\alpha = \alpha' + \alpha''$ Федоров принимал равным

$$\alpha = 2\alpha' - 1. \quad (6.2)$$

В таблице приведены значения Ω правой части критерия (4.18) для $\alpha=1$, $\alpha=\alpha'$ и $\alpha=2\alpha'-1$. Наличие (+) или отсутствие (—) бегущих волн указано в последней графе приложения I. Случаи, когда критерий дает результаты, не согласующиеся с действительностью, отмечены звездочкой. Из данных приложения I видно, что наилучшее совпадение с действительностью имеет место при $\alpha=2\alpha'-1$, наихудшее — при $\alpha=1$, причем ошибка получается всегда в сторону завышения обеспеченности устойчивости. Из данных приложения I видно также, что α' составляет в среднем 1,04 (следовательно, $\alpha=1,08$), но с довольно большими отклонениями от этой величины.

А. С. Образовский [13] ставит α' в зависимость от коэффициента Шези. Однако для потоков с развитой турбулентностью скорость обычно определяют по формуле $\bar{u} = u_m \psi(y, z)$, в которой, u_m — максимальная скорость в сечении, а $\psi(y, z)$ зависит только от координат точки и формы сечения. Тогда

$$\alpha' = F \int \int \psi^2(y, z) dy dz : \left\{ \int \int \psi(y, z) dy dz \right\}^2, \quad (6.3)$$

т. е. зависит только от формы сечения, но не от шероховатости. Функция ψ может быть определена для русел произвольной формы, например, по В. А. Гавриленко [14], построения которого хотя и несколько формальны, но хорошо согласуются с опытными данными. По формуле (6.3) коэффициент α' есть функция наполнения русла, однако это функция очень слабоизменяющаяся. Поэтому во всех случаях можно, по-видимому, принять $\alpha'=1,04$ и соответственно $\alpha=1,08$.

Приведем обычные формулы гидравлики:

$$Q = k \sqrt{i}, \quad K = CF \sqrt{R}, \quad C = \frac{1}{n} R^y, \quad (6.4)$$

где $y=1/6$, по Маннингу, $y=1/5$, по Форхеймеру, и

$$y = 2,5 \sqrt{n} - 0,13 - 0,75(\sqrt{n} - 0,10) \sqrt{R}, \quad (6.5)$$

по Н. Н. Павловскому. Учитывая формулы (6.4), критерию (4.18) можно придать такой вид:

$$\frac{n^2}{i} > \omega^2 \Phi^2 \Psi^2 \left\{ 1 - (\alpha - 1) \frac{1 + 2\Phi\Psi}{\Phi^2 \Psi^2} \right\}, \quad (6.6)$$

или

$$\frac{n}{\sqrt{i}} > \omega \Phi \Psi \sqrt{1 - (\alpha - 1) \frac{1 + 2\Phi\Psi}{\Phi^2\Psi^2}}, \quad (6.7)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{\chi} \cdot \frac{d\chi}{dH} \right), \quad \Psi = 1 + 2 \frac{R}{C} \cdot \frac{dC}{dR},$$

$$\omega = nC \sqrt{\frac{B}{g\chi}}, \quad (6.8)$$

причем, если пользоваться формулами Маннинга и Форхеймера, то ω и Ψ не зависят от n , точнее, по Маннингу $\Psi = 4/3$, по Форхеймеру $\Psi = 7/5$ и по Н. Н. Павловскому

$$\Psi = 0,74 + 5 \sqrt{n} - 0,75 (\sqrt{n} - 0,10) (2 + \ln R) \sqrt{R}. \quad (6.9)$$

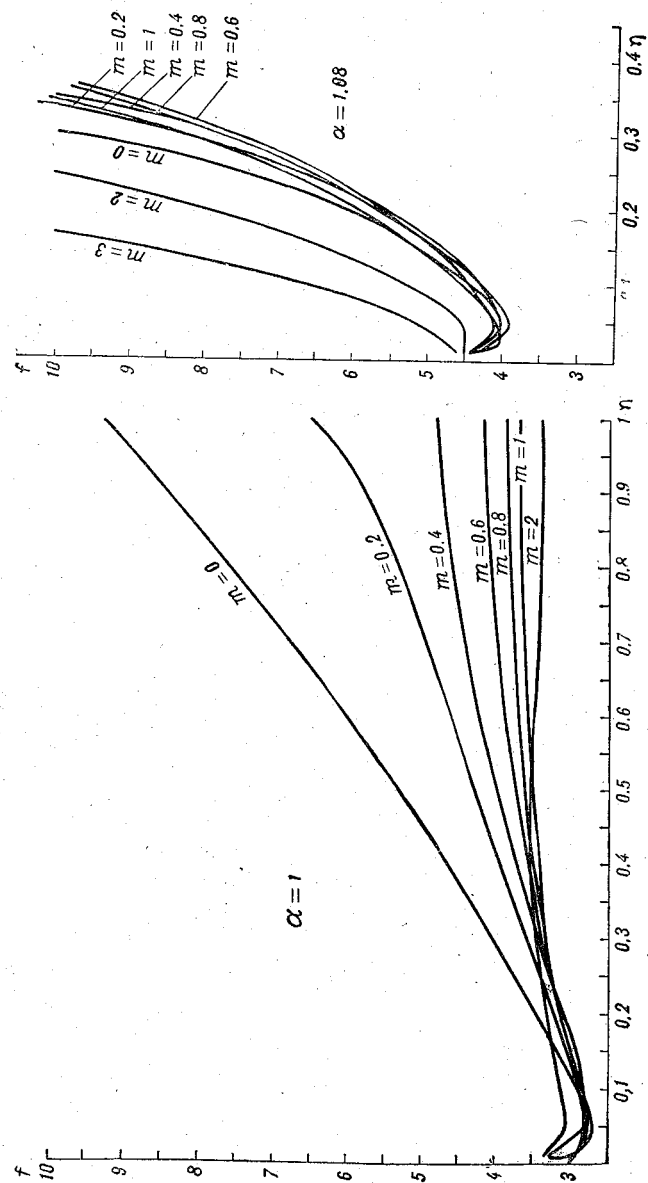
Если правая часть неравенства (4.18) или (6.6) отрицательна (а такие случаи имеются в таблице Е. П. Федорова), то правая часть неравенства (6.7) будет мнимой. В последнем случае критерий устойчивости, конечно, выполнен, и мнимая форма не должна вводить в заблуждение, ибо она есть лишь результат формальной замены неравенства (6.6) неравенством (6.7), а не результат сущности рассматриваемого явления.

Для расчетов рекомендуется пользоваться зависимостями, основанными на формуле Н. Н. Павловского. Однако формула Маннинга позволяет представить критерий (6.7) в форме компактного графика. Для трапецеидальных русел эта формула позволяет придать критерию (6.7) такой вид:

$$\frac{b^{1/6}}{n} \sqrt{\frac{i}{g}} < f(m, \alpha, \eta), \quad (6.10)$$

где $\eta = H/b$, b — ширина русла по дну, m — заложение откосов. График функции f для $\alpha = 1$ и для $\alpha = 1,08$ представлен на фиг. 3, которая подтверждает существенное влияние величины α ; значения этой функции даны в приложении II.

В случае непризматического русла нарастание высоты бегущих волн может иметь место даже тогда, когда поток не перешел в бурное состояние, например, в результате сужения русла. Поэтому само понятие устойчивости в смысле затухания бегущих волн здесь становится весьма неопределенным. Это, конечно, не исключает возможности проследить за трансформацией бегущей волны в непризматическом русле точно такими же методами, какими рассчитывается волна паводка (об одном из них будет речь в § 8). Но для речных русел (имеются в виду горные стремнины большого уклона) напрашивается иная постановка задачи. Гидравлические элементы



Фиг. 3. К критерию устойчивости установившегося течения.

речного русла F , B , χ , R могут рассматриваться как случайные функции координаты x , точнее говоря, как стационарные случайные функции. Тогда высота гребня бегущей волны тоже должна рассматриваться как случайная функция x , т. е. координаты, определяющей положение гребня в данный момент времени. Задача определения условий, которым должны удовлетворять вероятностные характеристики элементов русла как случайных функций для того, чтобы математическое ожидание высоты гребня волны не возрастало при движении волны по руслу, есть вполне четкая математическая задача, решение которой может представлять значительный интерес для изучения русловых процессов горных рек. Однако сейчас решать такую задачу, по-видимому, преждевременно, так как оно может приобрести практическое значение только тогда, когда будут сделаны необходимые шаги в направлении разработки методов и накопления данных математического описания геометрии речного русла. Эта последняя проблема представляет значительный интерес и имеет значение для всей теории русловых процессов вообще, а не только для задач устойчивости установившихся течений.

ГЛАВА III

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В РЕЧНОЙ ГИДРАВЛИКЕ

§ 7. Общая характеристика методов решения задач неустановившихся потоков

Для решения задач, сводящихся к интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных при тех или иных начальных и краевых условиях, к которым относятся и задачи неустановившегося движения, существуют три основные группы приближенных методов:

- 1) конечно-разностные, называемые также методами численного интегрирования;
- 2) методы малого параметра;
- 3) прямые методы.

Идея конечно-разностных методов достаточно известна. Эти методы универсальны в том смысле, что позволяют решать любые корректно поставленные задачи (по крайней мере такие, в которых коэффициенты уравнений, начальные и краевые условия заданы не распределениями вероятностей, а вполне детерминировано). Однако для некоторых задач и, в частности, для случая, когда вместо начальных условий задано условие периодичности решения, эти методы хотя принципиально и применимы, но не очень хорошо приспособлены. Приложением конечно-разностных методов к задачам о неустановившихся открытых потоках посвящена громадная литература, поэтому здесь эти методы не будут рассматриваться.

Методы малого параметра основаны на том, что иногда в уравнения или в начальные или краевые условия задачи входит (или может быть искусственно введен) некоторый параметр, при нулевом значении которого задача имеет точное решение. При значении параметра, отличном от нулевого (но малом), решение ищется как сумма точного решения при нулевом значении параметра и некоторого функционального ряда по степеням этого параметра. Для задач неустановившегося движения открытых потоков эти методы неэффективны.

Под прямыми понимаются методы, заключающиеся в представлении решения в виде рядов по некоторым функциям независимых переменных и сводящие задачу к решению уравнений (алгебраических или дифференциальных), определяющих коэффициенты этих рядов. Прямые методы накладывают определенные ограничения на гладкость решения. Поэтому они в противоположность, конечно, разностным методам неприменимы для задач о разрывных волнах. Но зато они лучше приспособлены для задач с условиями периодичности и дают возможность решать задачи со случайными начальными и краевыми условиями (разумеется, при сохранении требования гладкости решения).

Прямые методы широко применяются в самых разнообразных задачах механики и физики.

Существует несколько прямых методов. Здесь будет использован один из них — метод Бубнова—Галеркина; для задач неустановившегося движения он удобнее других. Чтобы изложить сущность этого метода, нам понадобятся некоторые определения.

Функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ называются линейно независимыми, если не существует таких отличных от нуля постоянных $c_0, c_1, \dots, c_n$, при которых равенство

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = 0$$

выполняется тождественно при всех x .

Последовательность $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... называется системой функций, если задана функция $\varphi_0(x)$ и закон перехода от $\varphi_n(x)$ к $\varphi_{n+1}(x)$.

Система функций называется линейно независимой, если при любом n любые n функций этой системы линейно независимы. В дальнейшем рассматриваются только линейно независимые системы.

Пусть $f(x)$ — любая кусочно-непрерывная (т. е. имеющая ограниченные скачки при некоторых значениях x) функция, заданная на отрезке $a \leq x \leq b$. Тогда, если можно найти такие числа $c_0, c_1, \dots$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left\{ f(x) - \sum_{v=0}^n c_v \varphi_v(x) \right\}^2 dx = 0, \quad (7.1)$$

то система функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ называется полной на этом отрезке.

Аппроксимация функции $f(x)$ суммой $\sum_{v=0}^n c_v \varphi_v(x)$ в смысле требования (7.1) называется аппроксимацией в среднем.

Аппроксимация же по условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \left| f(x) - \sum_{v=0}^n c_v \varphi_v(x) \right| = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (7.2)$$

называется чебышевской аппроксимацией. Из выполнения требования (7.2) вытекает выполнение требования (7.1), обратное заключение несправедливо: из (7.1) не вытекает (7.2). Более того, из (7.1) в общем случае не вытекает даже, что

$$f(x) = \sum_{v=0}^n c_v \varphi_v(x), \quad (7.3)$$

т. е., что функция $f(x)$ разложима в ряд по функциям φ_v . Но, если ряд $\sum_{v=0}^n c_v \varphi_v(x)$ сходится равномерно, то равенство (7.3) вытекает из (7.1). Напомним определение равномерной сходимости ряда. Обозначим

$$s_n(x) = \sum_{v=0}^n c_v \varphi_v(x), \quad s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), \\ r_n(x) = s(x) - s_n(x).$$

Если для произвольного положительного ε можно найти такое N , что при любом $n > N$ будет $|r_n(x)| < \varepsilon$, то говорят, что ряд сходится и имеет сумму s . Число N зависит от ε и от x . Если же N зависит только от ε и не зависит от x из промежутка (a, b) , то говорят, что ряд сходится равномерно в этом промежутке.

Мы не будем приводить здесь признаки равномерной сходимости и примеры неравномерно сходящихся рядов, так как все это изложено в специальных математических руководствах, подчеркнем только, что все функции, с которыми нам придется оперировать в дальнейшем, непрерывны и разложимы в равномерно сходящиеся ряды.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными одна к другой в промежутке (a, b) , если

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0. \quad (7.4)$$

Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ называется ортогональной системой, если

$$\int_a^b \varphi_l(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (7.5)$$

при любых различных i и k . Если, кроме того,

$$\int_a^b \{\varphi_i(x)\}^2 dx = 1 \quad (7.6)$$

при любом i , то система называется ортонормированной.

Полнота системы функций имеет для дальнейшего принципиальное значение. Ортогональность и нормированность же — свойства желательные, поскольку они приводят к некоторому (в случае уравнений с переменными коэффициентами или нелинейных уравнений не очень значительному) упрощению вычислений, но не обязательные. Однако применяемые для вычислений функции обычно ортогональны.

Нетрудно проверить, что, если система функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... ортогональна в промежутке $a \leq x \leq b$, то система функций $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$, ..., в которой

$$\psi_i(y) = \varphi_i\left(\frac{a-b}{A-B}y + \frac{Ab-aB}{A-B}\right), \quad (7.7)$$

ортгоналина в промежутке $A \leq y \leq B$.

Приведем некоторые полные ортогональные системы функций.

1. Система тригонометрических функций

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$$

ортгоналина и полна в промежутке $-\pi \leq x \leq \pi$. Системы функций

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots \quad \text{и} \quad \sin x, \sin 2x, \dots,$$

рассматриваемые каждая в отдельности, ортогональны, но неполны.

2. Полиномы Лежандра

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} = \\ = \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2v-1)}{(n-v)! (2v-n)! 2^{n-v}} x^{2v-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(из этой суммы выбрасываются члены с отрицательными степенями x) образуют полную ортогональную систему в промежутке $-1 \leq x \leq 1$. Заметим здесь, что система степенных функций $1, x, x^2, \dots$ полна в любом конечном промежутке, но не ортогональна.

3. Функции Эрмита

$$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad h_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

образуют полную ортонормированную систему на всей оси x , т. е. при $-\infty < x < \infty$.

4. Функции Лягерра

$$l_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}, \quad l_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{n!} \cdot \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

образуют полную ортонормированную систему на положительной полуоси, т. е. при $0 \leq x < \infty$.

Наиболее полное изложение теории прямых методов содержится в монографиях С. Г. Михлина [15, 16]. Однако обе эти работы требуют от читателя довольно серьезной подготовки в области функционального анализа. Значительно проще, но зато и менее полно эти методы даны в монографии [17]. Здесь мы будем пользоваться только методом Бубнова—Галеркина; сущность его мы изложим без доказательств и обоснований, отсылая к указанным монографиям.

Пусть требуется решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(y'', y', y) = 0 \quad (7.8)$$

при краевых условиях $y=A$ при $x=a$ и $y=B$ при $x=b$. Решение ищется в виде ряда

$$y = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots \quad (7.9)$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ — какая-либо полная в промежутке (a, b) система функций. При этом сумма ряда (7.9) аппроксимируется суммой конечного числа членов

$$y = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x). \quad (7.10)$$

Два уравнения, которым должны удовлетворять неизвестные коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_n$, очевидны, они вытекают из краевых условий:

$$\begin{aligned} A &= c_0 \varphi_0(a) + c_1 \varphi_1(a) + \dots + c_n \varphi_n(a), \\ B &= c_0 \varphi_0(b) + c_1 \varphi_1(b) + \dots + c_n \varphi_n(b). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Недостающие уравнения (их будет $n-1$) определяются следующим образом. Если уравнение (7.8) решить точно, то левая часть (7.8) тождественно обратится в нуль, т. е. будет ортогональна к любой другой функции. Если же в выражение (7.8) подставить значение y из (7.10), то левая часть (7.8), которую мы в данном случае обозначим через $L(x, c_0, c_1, \dots, c_n)$, не будет тождественным нулем, ибо уравнение (7.10) не есть точное решение (7.8). Метод Бубнова—Галеркина сводится к требованию, чтобы функция L была ортогональна к такому числу первых представляющих функций, ка-

кое равно числу недостающих уравнений, т. е. к функциям $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$

$$\int_a^b L(x, c_0, c_1, \dots, c_n) \varphi_v(x) dx = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n-2. \quad (7.12)$$

Уравнения (7.11) и (7.12) образуют систему $n+1$ уравнений (в общем случае трансцендентных), из которой определяется $n+1$ коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_n$, чем и решается рассматриваемая задача. Это решение несколько отличается от того, которое было предложено Бубновым и Галеркиным. Их решение связано с несколько более специальным выбором системы функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots$. Оно сводится к следующему. Положим

$$y = \frac{Ab - Ba}{b - a} + \frac{B - A}{b - a} x + z.$$

Тогда уравнение (7.8) обращается в уравнение

$$F\left(z'', \frac{B - A}{b - a} + z', \frac{Ab - Ba}{b - a} + \frac{B - A}{b - a} x + z\right) = 0$$

с однородными краевыми условиями

$$z(a) = z(b) = 0.$$

Решение опять-таки аппроксимируется рядом с конечным числом членов.

$$z = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x),$$

но функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ здесь выбираются так, чтобы каждая из них в отдельности удовлетворяла краевым условиям, т. е. чтобы было

$$\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

и тогда составляется не $n-1$, а $n+1$ уравнений (7.12).

Приложение метода Бубнова—Галеркина к уравнениям в частных производных в принципе сводится к повторению изложенной операции столько раз, сколько независимых переменных входит в уравнение: если, например, таких переменных две (x и z), то коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_n$ в (7.10) будут уже не постоянными величинами, а функциями z , и уравнения для их определения, к которым приведет метод Бубнова—Галеркина, будут уже не алгебраическими или трансцендентными, а дифференциальными (обыкновенными). Эти последние решаются повторным применением метода Бубнова—Галеркина. На деталях этих операций мы здесь не будем останавливаться, отложим пояснения до рассмотрения конкретных задач. Заметим только, что для уравнений в частных производных первый вариант метода Бубнова—Галеркина проще в

аналитическом отношении, но второй вариант позволяет получить несколько более высокую точность при том же числе членов ряда. Мы будем в дальнейшем комбинировать оба варианта метода.

В главе II, где рассматривалась устойчивость потока, нужно было исходить из полных уравнений неустановившегося потока, чтобы получить по возможности полное решение этой тонкой задачи.

В данной главе, исследуя волны в потоках, установившееся течение которых заведомо устойчиво, можно исходить из упрощенной системы (1.23) и (1.25), которую также удобно представить в безразмерной форме, но иной, чем в главе II. Для установившегося течения с расходом Q_0 будет $I = Q_0^2/K_*^2$. Вводя обозначения

$$s = \frac{x}{L}, \quad h = \frac{z}{z_0}, \quad q = \frac{Q}{Q_0}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \lambda(h, s) = \frac{LQ_0^2}{z_0 K_*^2}$$

$$\mu(h, s) = \frac{LQ_0}{gz_0 TF}, \quad \nu(h, s) = \frac{Lz_0 B}{TQ_0}, \quad C = \frac{2gz_0 T^2}{L^2},$$

представим рассматриваемые уравнения в безразмерной форме

$$\lambda(0, s) - \frac{\partial h}{\partial s} = \lambda(h, s) q^2 + \mu(h, s) \frac{\partial q}{\partial \tau} + C \mu^2(h, s) q \frac{\partial q}{\partial s}, \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \nu(h, s) \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0. \quad (7.14)$$

Здесь L , z_0 и T — некоторые единицы измерения длин, амплитуд колебаний уровня и времени, такие же произвольные, как и Q_0 . Функции λ , μ , ν будем считать разложимыми в степенные ряды

$$\begin{aligned} \lambda(h, s) &= \lambda_0(s) + \lambda_1(s)h + \lambda_2(s)h^2 + \dots, \\ \mu(h, s) &= \mu_0(s) + \mu_1(s)h + \mu_2(s)h^2 + \dots, \\ \nu(h, s) &= \nu_0(s) + \nu_1(s)h + \nu_2(s)h^2 + \dots, \end{aligned}$$

в которых

$$\lambda_0(s) = \lambda(0, s), \quad \mu_0(s) = \mu(0, s), \quad \nu_0(s) = \nu(0, s).$$

Уравнения первого (т. е. линейного) приближения, отвечающие уравнениям (7.13) и (7.14), имеют вид:

$$\lambda_1(s)h + 2\lambda_0(s)u + \frac{\partial h}{\partial s} + \mu_0(s) \frac{\partial u}{\partial \tau} + C \mu_0^2(s) \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \nu_0(s) \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0, \quad (7.16)$$

где $u = q - 1$. Мы, однако, будем оперировать не уравнениями первого приближения (7.15) и (7.16), а уравнениями второго приближения, которые получаются из уравнений (7.13) и (7.14), если удерживать в них не только первые, но и вторые степени h и u , а также произведения этих величин. Уравнения второго приближения

$$\begin{aligned} \lambda_1(s)h + 2\lambda_0(s)u + \frac{\partial h}{\partial s} + \mu_0(s)\frac{\partial u}{\partial \tau} + C\mu_0^2(s)\frac{\partial u}{\partial s} + \lambda_2(s)h^2 + \\ + 2\lambda_1(s)hu + \lambda_0(s)u^2 + \mu_1(s)h\frac{\partial u}{\partial \tau} + 2C\mu_0(s)\mu_1(s)h\frac{\partial u}{\partial s} + \\ + C\mu_0^2(s)u\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad (7.17) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + v_0(s)\frac{\partial h}{\partial \tau} + v_1(s)h\frac{\partial h}{\partial \tau} = 0 \quad (7.18)$$

значительно проще исходных уравнений (7.13) и (7.14), но в отличие от (7.15) и (7.16), они учитывают все основные нелинейности, что дает основание надеяться получить в результате их интегрирования достаточно точные результаты.

§ 8. Периодические движения

Рассмотрим интегрирование системы уравнений (7.17) и (7.18) для случая периодического движения в русле. Такое движение возникает, например, в нижнем бьефе ГЭС при ее работе с повторяющимся от суток к суткам графиком нагрузки. Расход в створе ГЭС ($x=0$), т. е. функцию $u(0, \tau)$, будем считать заданной периодической функцией времени с периодом в сутки, который мы и примем за T . Условия периодичности, которым должно удовлетворять искомое решение, будут:

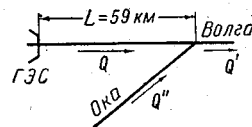
$$\begin{aligned} h(s, \tau) &= h(s, \tau + 1), \\ u(s, \tau) &= u(s, \tau + 1). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Кроме того, должно еще удовлетворяться некоторое краевое условие на противоположном створу ГЭС конце бьефа, которое будет различным для различных частных случаев.

Рассмотрим конкретный случай Горьковской ГЭС, представленный на фиг. 4. Введем обозначения:

x — расстояния, отмеряемые от створа ГЭС вниз по фарватеру Волги до точки впадения Оки в Волгу, $x=L$.

x' — расстояния, отмеряемые вниз по фарватеру Волги от места впадения в нее Оки;



Фиг. 4. Схема нижнего бьефа Горьковской ГЭС.

x'' — расстояния, отмеряемые вверх по фарватеру Оки от места впадения ее в Волгу;

$Q'(x', t)$, $Q''(x'', t)$ — мгновенные расходы воды в створах с абсциссами x' , x'' в момент t ;

Q'_0 , Q''_0 — среднесуточные расходы в Волге соответственно ниже впадения Оки и в Оке;

$z'(x', t)$, $z''(x'', t)$ — превышения мгновенных уровней воды в момент t в створах x' , x'' над уровнями установившегося режима с расходами Q'_0 , Q''_0 .

Очевидно, что для точки впадения Оки в Волгу ($x=L$, $x'=x''=0$)

$$z(L, t) = z'(0, t) = z''(0, t), \quad (8.2)$$

$$Q(L, t) + Q''(0, t) = Q'(0, t) \quad (8.3)$$

при всех t , а в бесконечном удалении от этой точки как вниз по Волге, так и вверх по Оке имеет место установившийся режим

$$z'(\infty, t) = 0, \quad Q'(\infty, t) = Q'_0, \quad (8.4)$$

$$z''(\infty, t) = 0, \quad Q''(\infty, t) = Q''_0. \quad (8.5)$$

Будем считать линию AB (фиг. 2) для Волги ниже впадения Оки и для Оки за кривую свободной поверхности при установившемся режиме с расходами Q'_0 и Q''_0 соответственно.

Наблюдения показывают, что колебания уровня Оки и Волги ниже впадения Оки невелики (даже при очень резких изменениях расхода ГЭС), поэтому здесь возможна полная линеаризация уравнений Сен-Венана, т. е. мы имеем:

для Волги ниже впадения Оки

$$-\frac{\partial z'}{\partial x} = 2 \frac{Q'_0 \Delta Q'}{K_*'^2} + \frac{1}{gF'} \cdot \frac{\partial \Delta Q'}{\partial t} + \frac{2Q'_0}{gF'^2} \cdot \frac{\partial \Delta Q'}{\partial x'},$$

$$B' \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial \Delta Q'}{\partial x'} = 0 \quad (8.6)$$

и для Оки

$$\frac{\partial z''}{\partial x''} = 2 \frac{Q''_0 \Delta Q''}{K_*''^2} + \frac{1}{gF''} \cdot \frac{\partial \Delta Q''}{\partial t} - \frac{2Q''_0}{gF''^2} \cdot \frac{\partial \Delta Q''}{\partial x''},$$

$$B'' \frac{\partial z''}{\partial t} - \frac{\partial \Delta Q''}{\partial x''} = 0. \quad (8.7)$$

Введем следующие обозначения (в дополнение к принятым в § 7):

$$s' = \frac{x'}{L}, \quad s'' = \frac{x''}{L}, \quad h' = \frac{z'}{z_0}, \quad h'' = \frac{z''}{z_0}, \quad u' = \frac{Q' - Q_0}{Q_0},$$

$$u'' = \frac{Q'' - Q_0}{Q_0},$$

$$\lambda' = 2 \frac{Q_0 Q_0' L}{z_0 K_*'^2}, \quad \lambda'' = 2 \frac{Q_0 Q_0'' L}{z_0 K_*''^2}, \quad \mu' = \frac{L Q_0^2}{g z_0 F' T},$$

$$\mu'' = \frac{L Q_0^2}{g z_0 F'' T},$$

$$v' = \frac{L z_0 B'}{T Q_0}, \quad v'' = \frac{L z_0 B''}{T Q_0}.$$

Так как тонкая структура характеристик русла в достаточном удалении от створа ГЭС не может существенно влиять на режим участка Волги от ГЭС до впадения Оки, то без особой ошибки параметры λ' , μ' , v' , λ'' , μ'' , v'' можно считать постоянными. Далее, можно пренебречь сопротивлением русел Оки и Волги ниже впадения Оки, т. е. принять приближенно $\lambda' = \lambda'' = 0$. Тогда уравнения (8.6) и (8.7) примут вид:

$$-\frac{\partial h'}{\partial s'} = \mu' \frac{\partial u'}{\partial \tau} + C \mu'^2 \frac{\partial u'}{\partial s'}, \quad v' \frac{\partial h'}{\partial \tau} + \frac{\partial u'}{\partial s'} = 0, \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial h''}{\partial s''} = \mu'' \frac{\partial u''}{\partial \tau} - C \mu''^2 \frac{\partial u''}{\partial s''}, \quad v'' \frac{\partial h''}{\partial \tau} - \frac{\partial u''}{\partial s''} = 0. \quad (8.9)$$

Рассмотрим уравнения (8.8). Так как русло Волги простирается вниз от впадения Оки практически бесконечно, то отраженных волн, бегущих к точке слияния Оки с Волгой, в этом русле не может быть. Волны же одного направления при отсутствии дисперсии определяются по выражению

$$h'(s', \tau) = \varphi(s' - a'\tau), \quad (8.10)$$

где a' — волновая скорость. Подставляя уравнение (8.10) в (8.8), легко найти:

$$u'(s', \tau) = v' a' h'(s', \tau), \quad (8.11)$$

$$a' = C \frac{\mu'}{2} + \sqrt{\left(\frac{C \mu'}{2}\right)^2 + \frac{1}{\mu' v'}}. \quad (8.12)$$

Точно так же из уравнений (8.9) имеем:

$$u''(s'', \tau) = -v'' a'' h''(s'', \tau), \quad (8.13)$$

$$a'' = -\frac{C\mu''}{2} + \sqrt{\left(\frac{C\mu''}{2}\right)^2 + \frac{1}{\mu'' v''}}. \quad (8.14)$$

Из уравнений (8.2), (8.3), (8.11), (8.13) следует, что

$$u(1, \tau) = Dh(1, \tau), \quad (8.15)$$

где $D = v'a' + v''a''$. Это и есть искомое краевое условие для $x=L$, т. е. для $s=1$. Решая поставленную задачу при этом краевом условии, мы найдем функцию $h(s, \tau)$, значения которой для $s=1$ определяют краевые условия для расчета волнового режима в Оке и в Волге ниже впадения Оки.

Если бы в створе $x=L$ Волга не принимала бы притока, но у нас были бы основания считать колебания уровня в этом створе малыми, то краевое условие (8.15) сохранило бы, конечно, силу и только постоянная D приобрела бы несколько иное выражение.

В данном случае мы исходили из экспериментально установленного факта, что неустановившееся движение в точке впадения Оки в Волгу выражено очень слабо. Случай, когда подобное предположение неправомерно, встретится нам в § 9.

Если бы в точке $x=L$ река впадала в настолько широкое озеро, что его уровень можно было бы считать независимым от расхода реки, то в качестве краевого условия мы имели бы $h(1, \tau) = 0$, т. е. частный случай условия (8.15), отвечающий значению $D=0$.

В данном параграфе мы построим изложение так, чтобы наиболее рельефно показать суть метода Бубнова—Галеркина. Это потребует довольно громоздких выкладок. Но в § 9 и 11 будут показаны приемы, которые позволяют избежать этих выкладок и давать решение задач неустановившегося движения в менее наглядной, но очень компактной и удобной для расчетов на ЦВМ форме.

Будем искать решение уравнений (7.17) и (7.18) в виде рядов Фурье по τ :

$$h = h(s, \tau) = X_0 + \sum_{r=1}^{\infty} (X_r \cos 2\pi r \tau + Y_r \sin 2\pi r \tau), \quad (8.16)$$

$$u = u(s, \tau) = \sum_{r=1}^{\infty} (P_r \cos 2\pi r \tau + Q_r \sin 2\pi r \tau), \quad (8.17)$$

удовлетворяющих условиям периодичности (8.1), с коэффициентами, зависящими от s . По поводу уравнения (8.16) нуж-

но заметить, что в рамках линейного приближения средний суточный уровень в русле совпадает с уровнем установившегося режима при среднесуточном расходе и тогда $X_0=0$, но при учете нелинейностей эти уровни не совпадают один с другим и тогда $X_0 \neq 0$.

Периодическая функция $u(0, \tau)$ может быть разложена в ряд Фурье с постоянными коэффициентами

$$u(0, \tau) = \sum_{r=1}^{\infty} (\alpha_r \cos 2\pi r \tau + \beta_r \sin 2\pi r \tau). \quad (8.18)$$

Из уравнений (8.17) и (8.18) следует, что

$$P_r(0) = \alpha_r, \quad Q_r(0) = \beta_r, \quad (8.19)$$

а из (8.15), (8.16) и (8.17) —

$$X_0(1) = 0, \quad P_r(1) = DX_r(1), \quad Q_r(1) = DY_r(1). \quad (8.20)$$

Условия (8.19) и (8.20) есть краевые для бесконечной ($r=1, 2, 3, \dots$) системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается подстановкой h и u из формул (8.16) и (8.17) в (7.17) и (7.18) и приравниванием нулю коэффициентов при $\cos 2\pi r \tau$ и $\sin 2\pi r \tau$:

$$\begin{aligned} \frac{dP_r}{ds} + 2\pi r (v_0 + v_1 X_0) Y_r + \pi v_1 \left\{ \sum_{k=1}^{r-1} k (X_{r-k} Y_k + Y_{r-k} X_k) - \right. \\ \left. - r \sum_{k=1}^{\infty} (X_{r+k} Y_k - Y_{r+k} X_k) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_r}{ds} - 2\pi r (v_0 + v_1 X_0) X_r - \pi v_1 \left\{ \sum_{k=1}^{r-1} k (X_{r-k} X_k - Y_{r-k} Y_k) + \right. \\ \left. + r \sum_{k=1}^{\infty} (X_k X_{r+k} + Y_k Y_{r+k}) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_0}{ds} + \lambda_1 X_0 + \lambda_2 X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda_2}{2} (X_k^2 + Y_k^2) + \lambda_1 (X_k P_k + Y_k Q_k) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_0}{2} (P_k^2 + Q_k^2) + \pi \mu_1 k (X_k Q_k - Y_k P_k) + \right. \\ \left. + C \mu_0 \left[\left(\mu_1 X_k + \frac{\mu_0}{2} P_k \right) \frac{dP_k}{ds} + \left(\mu_1 Y_k + \frac{\mu_0}{2} Q_k \right) \frac{dQ_k}{ds} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dX_r}{ds} + C\mu_0(\mu_0 + 2\mu_1 X_0) \frac{dP_r}{ds} + \lambda_1 X_r + 2\lambda_0 P_r + 2\pi\mu_0 r Q_r + \\
& \quad + 2\lambda_2 X_0 X_r + 2\lambda_1 X_0 P_r + 2\pi\mu_1 r X_0 Q_r + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{r-1} \left(\frac{\lambda_2}{2} X_{r-k} X_k - Y_{r-k} Y_k \right) + \lambda_1 (X_{r-k} P_k - Y_{r-k} Q_k) + \\
& \quad + \frac{\lambda_0}{2} (P_{r-k} P_k - Q_{r-k} Q_k) + \pi\mu_1 k (X_{r-k} Q_k + Y_{r-k} P_k) + \\
& \quad + C\mu_0 \left[2\mu_1 \left(X_{r-k} \frac{dP_k}{ds} - Y_{r-k} \frac{dQ_k}{ds} \right) + \frac{\mu_0}{2} \left(P_k \frac{dP_{r-k}}{ds} - Q_k \frac{dQ_{r-k}}{ds} \right) \right] \Big\} + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_2 (X_k X_{r+k} + Y_k Y_{r+k}) + 2\lambda_1 (X_{r+k} P_k + Y_{r+k} Q_k) + \right. \\
& \quad \quad + X_k P_{r+k} + Y_k Q_{r+k} + \lambda_0 (P_k P_{r+k} + Q_k Q_{r+k}) + \\
& \quad \quad + C\pi\mu_0^2 [k (X_{r+k} Q_k - Y_{r+k} P_k) + (r+k) (X_k Q_{r+k} - Y_k P_{r+k})] + \\
& \quad \quad + C\mu_0 \left[\left(\mu_1 X_{r+k} + \frac{\mu_0}{2} P_{r+k} \right) \frac{dP_k}{ds} + \left(\mu_1 X_k + \frac{\mu_0}{2} P_k \right) \frac{dP_{r+k}}{ds} + \right. \\
& \quad \quad \left. + \left(\mu_1 X_{r+k} + \frac{\mu_0}{2} Q_{r+k} \right) \frac{dQ_k}{ds} + \left(\mu_1 Y_k + \frac{\mu_0}{2} Q_k \right) \frac{dQ_{r+k}}{ds} \right] \Big\} = 0, \tag{8.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dY_r}{ds} + C\mu_0(\mu_0 + 2\mu_1 X_0) \frac{dQ_r}{ds} + \lambda_1 X_r + 2\lambda_0 Q_r - 2\pi\mu_0 r P_r + \\
& \quad + 2\lambda_2 X_0 Y_r + 2\lambda_1 X_0 Q_r - 2\pi\mu_1 r X_0 P_r + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{r-1} \left\{ \frac{\lambda_2}{2} (X_{r-k} Y_k + Y_{r-k} X_k) + \lambda_1 (X_{r-k} Q_k + Y_{r-k} P_k) + \right. \\
& \quad \quad + \frac{\lambda_0}{2} (P_{r-k} Q_k + Q_{r-k} P_r) - C\pi\mu_1 k (X_{r-k} P_k - Y_{r-k} Q_k) + \\
& \quad \quad + C\mu_0 \left[\mu_1 \left(X_{r-k} \frac{dQ_k}{ds} - Y_{r-k} \frac{dP_k}{ds} \right) + \frac{\mu_0}{2} \left(Q_k \frac{dP_{r-k}}{ds} + P_k \frac{dQ_{r-k}}{ds} \right) \right] \Big\} + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_2 (X_k Y_{r+k} - Y_k X_{r+k}) - 2\lambda_1 (X_{r+k} Q_k - Y_{r+k} P_k - \right. \\
& \quad \quad - X_k Q_{r+k} + Y_k P_{r+k}) + \lambda_0 (P_k Q_{r+k} - Q_k P_{r+k}) + \\
& \quad \quad + \pi\mu_1 [k (X_{r+k} P_k + Y_{r+k} Q_k) - (r+k) (X_k P_{r+k} + Y_k Q_{r+k})] - \\
& \quad \quad - C\mu_0 \left[\left(\mu_1 X_{r+k} + \frac{\mu_0}{2} P_{r+k} \right) \frac{dQ_k}{ds} - \left(\mu_1 X_k + \frac{\mu_0}{2} P_k \right) \frac{dQ_{r+k}}{ds} - \right. \\
& \quad \quad \left. - \left(\mu_1 Y_{r+k} + \frac{\mu_0}{2} Q_{r+k} \right) \frac{dP_k}{ds} + \left(\mu_1 Y_k + \frac{\mu_0}{2} Q_k \right) \frac{dP_{r+k}}{ds} \right] \Big\} = 0. \tag{8.25}
\end{aligned}$$

При этом используется следующая формула для произведения двух рядов Фурье:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (A_j \cos 2\pi j\tau + B_j \sin 2\pi j\tau) \sum_{l=0}^{\infty} (a_l \cos 2\pi l\tau + b_l \sin 2\pi l\tau) = \\ = A_0 a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k a_k + B_k b_k) + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ A_r a_0 + A_0 a_r + \right. \\ + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{r-1} (A_{r-k} a_k - B_{r-k} b_k) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{r+k} a_k + B_{r+k} b_k + \right. \\ + A_k a_{r+k} + B_k b_{r+k}) \left. \right] \cos 2\pi r\tau + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ B_r a_0 + A_0 b_r + \right. \\ + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{r-1} (A_{r-k} b_k + B_{r-k} a_k) - \right. \\ \left. \left. - \sum_{k=1}^{\infty} (A_{r+k} b_k - B_{r+k} a_k - A_k b_{r+k} + B_k a_{r+k}) \right] \right\} \sin 2\pi r\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что если инерционные члены не учитываются, то в уравнениях (8.23) — (8.25) нужно положить $\mu_0 = \mu_1 = 0$ и тогда они существенно упрощаются.

Для приближенного решения задачи вместо бесконечных рядов (8.16) и (8.17) следует взять конечные, т. е. считать:

$$X_r = Y_r = P_r = Q_r = 0 \quad \text{при } r > m, \quad (8.26)$$

где m — число, зависящее от требуемой точности приближения. Обозначим через M и N результаты подстановки выражений (8.16) и (8.17) при условии (8.26) соответственно в (7.13) и (7.14). Очевидно, что в этом случае нельзя обратить M и N в нули ни при каком выборе X_r, Y_r, P_r, Q_r для $r \leq m$, но, следуя методу Бубнова—Галеркина [15], нужно требовать ортогональности M и N ко всем представляющим функциям

$$1, \cos 2\pi\tau, \dots, \cos 2\pi m\tau, \sin 2\pi\tau, \dots, \sin 2\pi m\tau$$

в промежутке $(0, 1)$, т. е. выполнения условий

$$\begin{aligned} \int_0^1 M \cos 2\pi r\tau d\tau = 0, \quad \int_0^1 M \sin 2\pi r\tau d\tau = 0, \\ \int_0^1 N \cos 2\pi r\tau d\tau = 0, \quad \int_0^1 N \sin 2\pi r\tau d\tau = 0 \end{aligned}$$

для $r=0, 1, 2, \dots, m$. Это приводит к конечной системе дифференциальных уравнений, которая имеет совершенно тот же вид, что и система (8.21) — (8.25), нужно лишь при $r > m$ принять значения неизвестных по (8.26). Эта система может быть приведена к нормальной форме Коши исключением из уравнений (8.23), (8.24) и (8.25) производных от P и Q с помощью выражений (8.21) и (8.22). Численное решение ее может быть выполнено на счетных машинах, но это не очень удобно, так как краевая задача, к которой мы пришли, может быть решена численным интегрированием только путем подбора. Однако полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно решать также методом Бубнова — Галеркина. Пусть

$$\psi_0(s), \psi_1(s), \dots \quad (8.27)$$

— какая-либо полная и замкнутая в интервале $(0, 1)$ система функций, например система полиномов Лежандра. Тогда функции X_r, Y_r, P_r, Q_r можно представить рядами:

$$\begin{aligned} X_r &= a_{r0}\psi_0(s) + a_{r1}\psi_1(s) + \dots, \\ Y_r &= b_{r0}\psi_0(s) + b_{r1}\psi_1(s) + \dots, \\ P_r &= p_{r0}\psi_0(s) + p_{r1}\psi_1(s) + \dots, \\ Q_r &= q_{r0}\psi_0(s) + q_{r1}\psi_1(s) + \dots, \end{aligned} \quad (8.28)$$

где $a_{ri}, b_{ri}, p_{ri}, q_{ri}$ — постоянные коэффициенты. Для численных расчетов нужно, конечно, опять-таки ограничиться конечным числом членов в этих рядах, оборвав их на некотором n -м члене.

Коэффициенты рядов (8.28) должны быть подобраны так, чтобы прежде всего удовлетворялись краевые условия (8.19) и (8.20), т. е. чтобы было:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n p_{ri} \psi_i(0) &= \alpha_r, \quad \sum_{i=0}^n q_{ri} \psi_i(0) = \beta_r, \\ \sum_{i=0}^n p_{0i} \psi_i(0) &= 0, \quad \sum_{i=0}^n p_{ri} \psi_i(1) = D \sum_{i=0}^n a_{ri} \psi_i(1), \\ \sum_{i=0}^n q_{ri} \psi_i(1) &= D \sum_{i=0}^n b_{ri} \psi_i(1). \end{aligned} \quad (8.29)$$

Таких уравнений будет $4m+1$ [по числу неизвестных X_r, Y_r, P_r, Q_r и числу уравнений (8.21) — (8.25)], общее же число неизвестных коэффициентов равно $(4m+1)(n+1)$. Недостающие уравнения получаются по общему принципу метода Бубнова — Галеркина. Пусть $\Phi_{P_r}, \Phi_{Q_r}, \Phi_{X_r}, \Phi_{Y_r}$ есть результаты подстановки рядов (8.28) в левые части уравнений (8.21),

(8.22), (8.24) или (8.23) при $r=0$ и с учетом формулы (8.25), которые не будут, конечно, тождественными нулями, но которые должны быть ортогональны ко всем представляющим функциям ($i=0, 1, 2, \dots, n$) в промежутке $(0, 1)$, т. е. должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_{P_r} \psi_i ds &= 0, & \int_0^1 \Phi_{Q_r} \psi_i ds &= 0, \\ \int_0^1 \Phi_{X_r} \psi_i ds &= 0, & \int_0^1 \Phi_{Y_r} \psi_i ds &= 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Всего условий (8.30) будет $(4m+1)(n+1)$, т. е. уравнения (8.29) оказываются как будто лишними, так как число условий (8.30) равно числу неизвестных коэффициентов. Но если определить эти коэффициенты только из условий (8.30), то краевые условия (8.29) заведомо не будут выполнены. Поэтому нужно требовать ортогональности $\Phi_{P_r}, \Phi_{Q_r}, \Phi_{X_r}, \Phi_{Y_r}$ не ко всем $n+1$, лишь к первым n представляющим функциям (8.27), т. е. полагать в (8.30) $i=0, 1, 2, \dots, n-1$. Тогда $(4m+1)n$ уравнений (8.30) и $4m+1$ уравнений (8.29) образуют систему с числом уравнений, равным числу неизвестных коэффициентов.

Развернутая форма уравнений (8.30) очень громоздка, и мы не будем ее здесь приводить. Заметим лишь, что это будут квадратные уравнения с коэффициентами при неизвест-

ных типа $\int_0^1 \lambda_i \psi_i \psi_j ds$ или $\int_0^1 \nu_i \psi_i \psi_j \psi_k ds$ и т. д.

Рассмотрим кратко процесс решения системы квадратных или вообще любых нелинейных (алгебраических или трансцендентных уравнений)

$$f_i(y_1, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.31)$$

Корнем этой системы называется совокупность n чисел, подстановка которых в качестве $y_1, \dots, y_n$ в уравнения системы обращает эти уравнения в тождества. Отыскание корней нелинейной системы есть итерационный процесс. Пусть найдено приближенное значение какого-либо вещественного простого корня $y_1^*, \dots, y_n^*$. Точное значение корня будет

$$y_1^* + \varepsilon_1, \dots, y_n^* + \varepsilon_n, \quad (8.32)$$

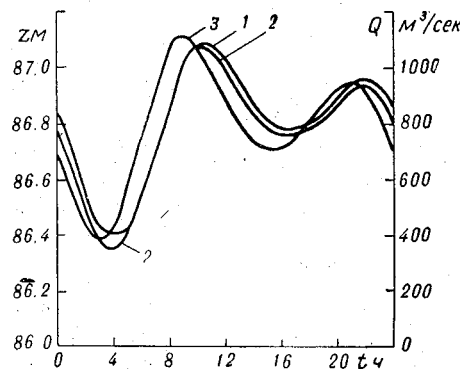
где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — погрешность корня. Подставляя числа (8.32) в систему (8.31) и разлагая левые части уравнений этой

системы в ряд Тейлора, получим

$$f_i(y_1^*, \dots, y_n^*) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_k} f_i(y_1^*, \dots, y_n^*) \varepsilon_k + R_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.33)$$

где R_i — совокупность членов порядков ε^2 и высших. Если эти члены отбросить, то система (8.33) обратится в линейную относительно $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, из которой можно найти приближенные значения поправок, и, вычислив числа (8.32), найти уточненное значение корня, после чего все операции повторяются

и т. д. Этот способ носит название Ньютона. Обоснование способа Ньютона и доказательство сходимости итераций при достаточно широких предположениях о функциях f_i , которые в нашем случае всегда удовлетворяются, имеются в руководствах по вычислительной математике. Для вычисления интересующего нас корня системы (8.31) необходимо иметь исходное приближение, хотя бы самое грубое. Такое приближенное решение может быть получено решением методом Бубнова — Галерки-



Фиг. 5. Расходы (график № 1) и уровни в створе ГЭС.

1 — уровни по линейному приближению, 2 — уровни по квадратичному приближению, 3 — расходы.

на линеаризованных уравнений (7.15) и (7.16) при тех же краевых условиях. Нетрудно проверить, что при этом получается точно такая же система линейных уравнений, в какую вырождается наша система (8.29) и (8.30), если в уравнениях (8.30) отбросить все члены, содержащие степени и произведения неизвестных.

Таким образом, решение сводится к выполнению следующих операций:

1) вычислению определенных интегралов — коэффициентов уравнений (8.30);

2) решению системы уравнений (8.29) и (8.30), сводящихся к последовательности итераций, каждая из которых требует решения системы линейных уравнений;

3) суммированию рядов (8.28);

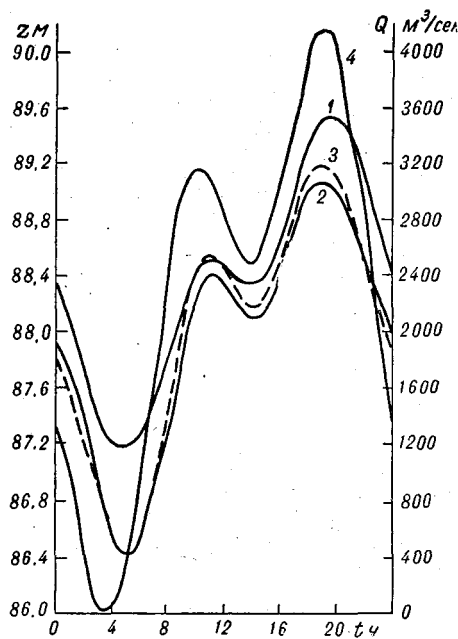
4) суммированию рядов (8.16) и в случае необходимости (8.17).

Для всех цифровых вычислительных машин имеются стандартные программы выполнения операций такого рода. Поэтому общая программа решения задачи есть последовательность стандартных подпрограмм, объединенных командами перехода.

Для примера на фиг. 5—7 даются результаты расчетов периодического режима в нижнем бьефе Горьковской ГЭС, выполненные М. Г. Гутсоном [18] по изложенной выше теории. В этих расчетах было принято $m=3$, $n=2$. Системы линейных уравнений, которые при этом приходится решать, имеют 39-й порядок.

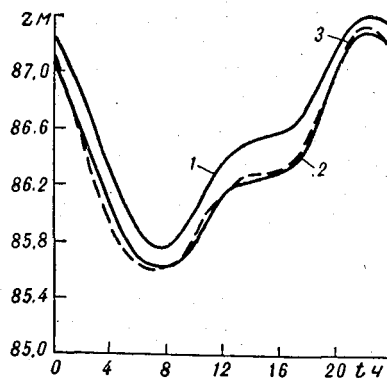
Заметим, что смещение графиков уровней при переходе от линейного приближения к квадратичному, особенно заметное на фиг. 6, связано главным образом с тем, что для квадратичного приближения $X_0 \neq 0$, что отмечалось уже выше.

При желании учесть не только режим будничных дней, но и воскресный провал графика нагрузки можно использовать этот же метод, но здесь мы должны считать за период не сутки, а неделю, что при заданной точности аппроксимации потребует, очевидно, значительно большего числа гармоник.



Фиг. 6. Расходы (график № 2) и уровни в створе ГЭС.

1—уровни по линейному приближению, 2—уровни по квадратичному приближению после первой итерации, 3—то же, после второй итерации, 4—расходы.



Фиг. 7. Уровни на расстоянии 25 км от ГЭС при графике № 2 расхода ГЭС.

1—по линейному приближению, 2—по квадратичному приближению после первой итерации, 3—по квадратичному приближению после второй итерации.

§ 9. Движение волны паводка

Если в неустановившемся движении речного потока, вызываемом суточным регулированием на ГЭС, силы инерции могут играть заметную роль, то на движении паводковой волны, характеризующемся значительно более медленным изменением уровней и расходов, эти силы практически не сказываются и в расчетах паводков их обычно не учитывают. Это значит, что в уравнении (7.17) следует отбросить члены, содержащие μ_0 и μ_1 , и что движение паводка описывается следующей системой уравнений:

$$\lambda_1(s)h + 2\lambda_0(s)u + \frac{\partial h}{\partial s} + \lambda_2(s)h^2 + 2\lambda_1(s)hu + \lambda_0(s)u^2 = 0, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + v_0(s)\frac{\partial h}{\partial \tau} + v_1(s)h\frac{\partial h}{\partial \tau} = 0. \quad (9.2)$$

За установившееся движение, от которого отсчитываются изменения уровней и расходов (см. фиг. 2), мы всегда будем считать межень, предшествующую паводку.

Каковы бы ни были краевые условия рассматриваемой задачи (их мы рассмотрим ниже), решение ее так же, как и в § 8, следует искать в виде рядов по τ с коэффициентами, зависящими от s ,

$$h = X_0\varphi_0(\tau) + X_1\varphi_1(\tau) + \dots, \quad u = Y_0\varphi_0(\tau) + Y_1\varphi_1(\tau) + \dots \quad (9.3)$$

Подставляя эти ряды в (9.1) и (9.2) и применяя метод Бубнова—Галеркина, мы приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая повторным применением метода Бубнова—Галеркина может быть сведена к системе алгебраических уравнений так же, как это было сделано в § 8.

Однако можно поступить и иначе, а именно, сразу искать решение уравнений (9.1) и (9.2) в виде двойных рядов по s и τ с постоянными коэффициентами a_{ik} и b_{ik} :

$$h = [a_{00}\psi_0(s) + a_{01}\psi_1(s) + \dots]\varphi_0(\tau) + [a_{10}\psi_0(s) + a_{11}\psi_1(s) + \dots]\varphi_1(\tau) + \dots, \quad (9.4)$$

$$u = [b_{00}\psi_0(s) + b_{01}\psi_1(s) + \dots]\varphi_0(\tau) + [b_{10}\psi_0(s) + b_{11}\psi_1(s) + \dots]\varphi_1(\tau) + \dots \quad (9.5)$$

Здесь $\psi_0, \psi_1, \dots$ и $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ — некоторые полные системы функций. Конкретное выражение этих функций для нас пока безразлично, но систему $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ будем считать ортонормированной в промежутке $0 \leq \tau < \theta$. Аппроксимируя h и u пер-

выми m членами этих рядов по s и первыми n членами по τ , напомним вместо выражений (9.4) и (9.5):

$$\begin{aligned} h &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau), \\ u &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Левые части уравнений (9.1) и (9.2) после подстановки в них h и u из (9.6) будут соответственно:

$$\begin{aligned} G_1 &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} [\lambda_1(s) \psi_k(s) + \psi'_k(s)] \varphi_i(\tau) + \\ &+ 2\lambda_0(s) \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) + \lambda_2(s) \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) \right\}^2 + \\ &+ \lambda_0(s) \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) \right\}^2 + \\ &+ 2\lambda_1(s) \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) \right\} \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} v_0(s) \psi_k(s) \varphi'_i(\tau) + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} \psi'_k(s) \varphi_i(\tau) + \\ &+ v_1(s) \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) \right\} \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(s) \varphi'_i(\tau) \right\}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

По методу Бубнова — Галеркина, добьемся ортогональности G_1 и G_2 к функции $\varphi_p(\tau)$ в промежутке $0 \leq \tau \leq \theta$ и к функции $\psi_q(s)$ в промежутке $0 \leq s \leq S$ (величины θ и S определяются из конкретных условий задачи, о чем мы скажем ниже). Учитывая, что система $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ ортонормирована, получим:

$$\begin{aligned} f_{pq}^{(1)} &= \int_0^\theta \int_0^S G_1 \varphi_p(\tau) \psi_q(s) ds d\tau = \sum_{k=0}^m (A_{kq} a_{pk} + B_{kq} b_{pk}) + \\ &+ \int_0^\theta \int_0^S \left\{ \lambda_2(s) \left[\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) \right]^2 + \right. \\ &+ \lambda_0(s) \left[\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) \right]^2 + 2\lambda_1(s) \left[\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) \right] \times \\ &\times \left. \left[\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) \right] \right\} \varphi_p(\tau) \psi_q(s) ds d\tau = 0, \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned}
f_{pq}^{(2)} = & \int_0^\theta \int_0^S G_2 \varphi_p(\tau) \psi_q(s) ds d\tau = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m C_{kq} D_{ip} a_{ik} + \sum_{k=0}^m E_{kq} b_{pk} + \\
& + \int_0^\theta \int_0^S v_1(s) \left[\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(s) \varphi_i(\tau) \right] \times \\
& \times \left[\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(s) \varphi'_i(\tau) \right] \varphi_p(\tau) \psi_q(s) ds d\tau = 0. \quad (9.10)
\end{aligned}$$

Здесь

$$A_{kq} = \int_0^S [\lambda_1(s) \psi_k(s) + \psi'_k(s)] \psi_q(s) ds,$$

$$B_{kq} = 2 \int_0^S \lambda_0(s) \psi_k(s) \psi_q(s) ds,$$

$$C_{kq} = \int_0^S v_0(s) \psi_k(s) \psi_q(s) ds,$$

$$D_{ip} = \int_0^\theta \varphi'_i(\tau) \varphi_p(\tau) d\tau,$$

$$E_{qk} = \int_0^S \psi'_k(s) \psi_q(s) ds.$$

Для составления систем итерационных уравнений (8.33) потребуются также выражения производных $f_{pq}^{(1)}$ и $f_{pq}^{(2)}$ по неизвестным коэффициентам:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{pq}^{(1)}}{\partial a_{jl}} &= \delta_{pj} A_{jq} + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m N_{ijp} (F_{klq} a_{ik} + H_{klq} b_{ik}), \\
\frac{\partial f_{pq}^{(1)}}{\partial b_{jl}} &= \delta_{pj} B_{jq} + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m N_{ijp} (H_{klq} a_{ik} + M_{klq} b_{ik}), \\
\frac{\partial f_{pq}^{(2)}}{\partial a_{il}} &= C_{iq} D_{jp} + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m P_{ijp} Q_{klq} a_{ik}, \quad \frac{\partial f_{pq}^{(2)}}{\partial b_{jl}} = \delta_{pj} E_{jq}. \quad (9.11)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 F_{klq} &= \int_0^s \lambda_2(s) \psi_k(s) \psi_l(s) \psi_q(s) ds, \\
 H_{klq} &= \int_0^s \lambda_1(s) \psi_k(s) \psi_l(s) \psi_q(s) ds, \\
 M_{klq} &= \int_0^s \lambda_0(s) \psi_k(s) \psi_l(s) \psi_q(s) ds, \\
 N_{ijp} &= \int_0^{\theta} \varphi_i(\tau) \varphi_j(\tau) \varphi_p(\tau) d\tau, \\
 P_{ijp} &= \int_0^{\theta} [\varphi_i(\tau) \varphi_j'(\tau) + \varphi_j(\tau) \varphi_i'(\tau)] \varphi_p(\tau) d\tau, \\
 Q_{klq} &= \int_0^s \nu_1(s) \psi_k(s) \psi_l(s) \psi_q(s) ds.
 \end{aligned}$$

В формулах (9.11) через δ_{pj} обозначен обычный символ Кронекера ($\delta_{pj}=0$ при $j \neq p$, $\delta_{pp}=1$).

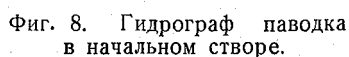
Члены, содержащие квадраты и произведения сумм в формулах (9.9) и (9.10), можно развернуть и тогда они выражаются через четырехкратные суммы и интегралы типа A_{kq} , B_{kq} и т. д., не содержащие неизвестных коэффициентов, которые могут быть вычислены заблаговременно. Но такое представление очень громоздко и неудобно для программирования задачи. Целесообразнее непосредственно вычислять двойные интегралы, входящие в уравнения (9.9) и (9.10), по квадратурным формулам для каждой итерации коэффициентов a_{ik} и b_{ik} .

Зависимости (9.9) — (9.11) — общие для всех задач распространения паводков. Краевые же условия для каждой задачи индивидуальные. Ниже рассматриваются наиболее характерные задачи.

1. Пусть в створе $x=0$ задан гидрограф паводка, а в створе $x=x_0$ река впадает в море. Требуется найти функции $h(s, \tau)$ и $u(s, \tau)$ для всего участка $0 < x \leq x_0$, предполагая, что боковая приточность отсутствует. В данном случае удобно положить $L=x_0$ (т. е. $S=1$), а за T принять время от начала паводка до максимума расхода в начальном створе $x=0$. За z_0 можно принять произвольно назначаемую величину, имеющую порядок ожидаемого максимального подъема уровня на рассматриваемом участке. Краевые условия будут:

$$u(0, \tau) = v(\tau), \quad h(1, \tau) = 0, \quad (9.12)$$

практически не играет никакой роли для результатов вычислений. Но для удобства выкладок и вычислений целесообразно принять, что эта функция асимптотически стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ (фиг. 8). Тогда ее можно разложить в ряд по функциям Лягерра. Это обстоятельство подсказывает, что за систему функций



зывает, что за систему функций

где коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ вычисляются по обычным формулам;

Если разложения по τ аппроксимируются первыми $n+1$ -ми членами, то вместо (9.13) следует написать

В качестве системы функций $\psi_0, \psi_1, \dots$ возьмем полиномы Лежандра, но не от s , а от $2s-1$. Тогда они в соответствии с уравнением (7.7) образуют ортонормированную систему в промежутке $0 \leq s \leq 1$.

$$\begin{aligned} b_{00}\psi_0(0) + b_{01}\psi_1(0) + \dots + b_{0m}\psi_m(0) &= \alpha_0, \\ b_{10}\psi_0(0) + b_{11}\psi_1(0) + \dots + b_{1m}\psi_m(0) &= \alpha_1, \\ &\vdots \\ b_{n0}\psi_0(0) + b_{n1}\psi_1(0) + \dots + b_{nm}\psi_m(0) &= \alpha_n. \end{aligned} \quad (9.15)$$
$$\begin{aligned} & \alpha_{00} \psi_0(1) + \alpha_{01} \psi_1(1) + \dots + \alpha_{0m} \psi_m(1) = 0, \\ & \alpha_{10} \psi_0(1) + \alpha_{11} \psi_1(1) + \dots + \alpha_{1m} \psi_m(1) = 0, \\ & \vdots \\ & \alpha_{n0} \psi_0(1) + \alpha_{n1} \psi_1(1) + \dots + \alpha_{nm} \psi_m(1) = 0. \end{aligned} \quad (9.16)$$

В нашей задаче фигурирует $2(n+1)(m+1)$ неизвестных коэффициентов a_{ik} и b_{ik} . Краевые условия дают $2(n+1)$ уравнений (9.15) и (9.16) для их определения. Остальные $2(n+1)(m+1) - 2(n+1) = 2(nm+m)$ уравнений дают условия ортогональности (9.9) и (9.10), в которых следует брать все комбинации индексов p и q , содержащиеся в первых n строках и первых m столбцах следующей таблицы:

0	0	0	1	...	0, $m-1$	0, m
1	0	1	1	...	1, $m-1$	1, m
...	...	...	...	...	...	...
$n-1$, 0	$n-1$, 1	...	$n-1$, $m-1$		$n-1$, m	
n , 0	n , 1	...	n , $m-1$		n , m	

и еще m любых комбинаций из $n+1$ -й (последней) строки и $m+1$ -го (последнего) столбца. Наилучшие результаты получаются, по-видимому, если брать комбинации в начале $n+1$ -й строки и в начале $m+1$ -го столбца.

В качестве исходного приближения здесь так же, как и в § 8, можно взять коэффициенты a_{ik} и b_{ik} , отвечающие линейной идеализации. Они определяются по уравнениям (9.15), (9.16) и (9.9), (9.10), в которых надлежит отбросить все члены, содержащие степени и произведения сумм.

Пусть a_{ik} и b_{ik} — значения неизвестных коэффициентов в суммах (9.6) после некоторого приближения, а Δa_{ik} и Δb_{ik} — поправки, которые нужно добавить соответственно к этим значениям, чтобы получить следующее приближение. Эти поправки определяются в общем виде по уравнениям (8.33). Последние уравнения, отвечающие уравнениям (9.15) и (9.16), будут:

$$\sum_{k=0}^m \Delta b_{ik} \psi_k(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (9.17)$$

$$\sum_{k=0}^m \Delta a_{ik} \psi_k(1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (9.18)$$

а отвечающие уравнениям (9.9) и (9.10), будут:

$$f_{pq}^{(r)} + \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{\partial f_{pq}^{(r)}}{\partial a_{jl}} \Delta a_{jl} + \frac{\partial f_{pq}^{(r)}}{\partial b_{jl}} \Delta b_{jl} \right) = 0, \quad r = 1, 2. \quad (9.19)$$

Здесь комбинации индексов p и q берутся в соответствии со сказанным выше. С учетом формул (9.11) уравнения (9.19)

могут быть представлены так:

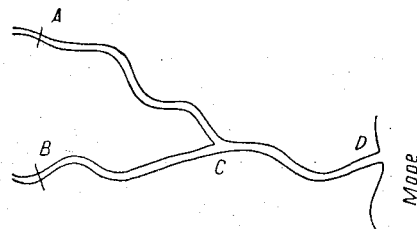
$$\begin{aligned} f_{pq}^{(1)} + \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^m \left\{ \left[\delta_{pj} A_{jq} + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m N_{ijp} (F_{klq} a_{ik} + H_{klq} b_{ik}) \right] \Delta a_{jl} + \right. \\ \left. + \left[\delta_{pj} B_{jk} + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m N_{ijp} (H_{klq} a_{ik} + M_{klq} b_{ik}) \right] \Delta b_{jl} \right\} = 0, \quad (9.20) \end{aligned}$$

$$f_{pq}^{(2)} + \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^m \left\{ \left[C_{lq} D_{jp} + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m P_{ijp} Q_{klq} a_{ik} \right] \Delta a_{jl} + \delta_{pj} E_{jq} \Delta b_{jl} \right\} = 0. \quad (9.21)$$

2. Пусть по-прежнему в створе $x=0$ задан гидрограф паводка и нас интересует прохождение паводка на некотором участке $0 < x \leq x_0$, причем характеристики русла имеются от створа $x=0$ до створа $x_1 > x_0$, за которым река простирается еще на достаточно большое расстояние. В этом случае имею-

щаяся информация, строго говоря, недостаточна для решения задачи.

Однако можно воспользоваться тем, что если x_1 значительно (в 1,5—2 раза) превосходит x_0 , то характеристики русла при $x > x_1$ не могут заметно влиять на течение в пределах участка $0 < x \leq x_0$, если, конечно, нет оснований считать, что

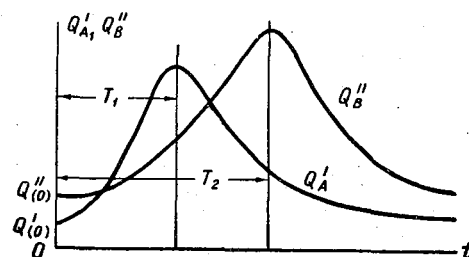


Фиг. 9. Простейшая речная система.

они очень сильно отличаются от характеристик в пределах $0 < x \leq x_1$, например, создают большой подпор вследствие резкого сужения русла при $x > x_1$. Исключая из рассмотрения эти необычные случаи, примем, что при $x > x_1$ русло призматическое и имеет такие же характеристики, как в створе $x = x_1$. Далее, если река простирается достаточно далеко за створом $x = x_1$, то ее можно считать бесконечно длинной. Но при $x \rightarrow \infty$ должно быть $h \rightarrow 0$, так как на бесконечной длине паводок должен полностью распластаться. Здесь можно принять $L = x_0$, рассматривать течение на участке $0 < s < \infty$, т. е. полагать $S = \infty$, а в качестве представляющих функций $\psi_0, \psi_1, \dots$ взять функции Лягерра. Тогда краевое условие при $s = \infty$ будет выполнено при любых значениях коэффициентов a_{ik} и b_{ik} , ибо все функции Лягерра стремятся к нулю при бесконечном возрастании их аргумента. Поэтому данная задача сводится к предыдущей с той лишь разницей, что функции $\psi_0, \psi_1, \dots$ здесь иные и не будет уравнений (9.16), а значит и второй группы уравнений (9.17) и (9.18), следовательно, будет соответственно больше уравнений (9.19).

3. Рассмотрим речную систему, представленную на фиг. 9. Пусть гидрографы паводков для створов A и B заданы (фиг. 10), требуется изучить прохождение паводка на участках AC , BC , CD . Величины, относящиеся к этим участкам, обозначим соответственно индексами $(')$, $('')$, $(''')$.

В данном случае удобно принять z'_0 , z''_0 и z'''_0 одинаковыми и равными некоторой величине z_0 ; время T' , T'' , T''' одинаковыми и равными $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, а расходы Q'_0 , Q''_0 , Q'''_0 равными соответствующим расходам начального установившегося режима $Q'(0)$, $Q''(0)$, $Q'''(0) = Q'(0) + Q''(0)$. За L' , L'' ,



Фиг. 10. Гидрографы паводка в начальных створах простейшей речной системы.

L''' примем длины участков AC , AB и CD , а расстояния будем отмерять вниз от начальных створов.

Краевые условия будут следующие:

для створов A и B

$$u'(0, \tau) = v'(\tau), \quad u''(0, \tau) = v''(\tau), \quad (9.22)$$

где v' и v'' — заданные функции времени;

для точки слияния C

$$\beta u'(1, \tau) + (1 - \beta) u''(1, \tau) = u'''(0, \tau),$$

$$h'(1, \tau) = h''(1, \tau) = h'''(0, \tau), \quad (9.23)$$

где $\beta = Q'_0/Q'''_0$;

для устья D

$$h'''(1, \tau) = 0. \quad (9.24)$$

Положим, в соответствии с формулой (9.6),

$$h' = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a'_{ik} \psi_k(s') \varphi_i(\tau), \quad (9.25)$$

$$u' = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n b'_{ik} \psi_k(s') \varphi_i(\tau).$$

Аналогичные выражения будут и для h'' , u'' , h''' , u''' . Как и в случае 1, за функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ примем функции Лягерра, а за функции $\psi_0, \psi_1, \dots$ — полиномы Лежандра. Функции v' и v'' представим в соответствии с формулой (9.14) в виде:

$$v'(\tau) = \sum_{i=0}^n \alpha'_i \varphi_i(\tau), \quad v''(\tau) = \sum_{i=0}^n \alpha''_i \varphi_i(\tau). \quad (9.26)$$

Как и в случае 1, из краевых условий получаются следующие уравнения:

$$\sum_{k=0}^m b'_{ik} \psi_k(0) = \alpha'_i, \quad \sum_{k=0}^m b''_{ik} \psi_k(0) = \alpha''_i, \quad (9.27)$$

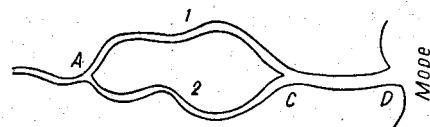
$$\sum_{k=0}^m \{ [\beta b'_{ik} + (1 - \beta) b''_{ik}] \psi_k(1) - b'''_{ik} \psi_k(0) \} = 0, \quad (9.28)$$

$$\sum_{k=0}^m [a'_{ik} \psi_k(1) - a'''_{ik} \psi_k(0)] = 0, \quad \sum_{k=0}^m [a''_{ik} \psi_k(1) - a'''_{ik} \psi_k(0)] = 0, \quad (9.29)$$

$$\sum_{k=0}^m a'''_{ik} \psi_k(1) = 0, \quad (9.30)$$

в которых $i=0, 1, \dots, n$.

Таким образом, краевые условия дают $6(n+1)$ уравнений для определения $6(n+1)(m+1)$ неизвестных коэффициентов.



Фиг. 11. Речная система с замкнутым контуром.

Недостающие уравнения необходимо получить из уравнений (9.9) и (9.10), которые следует написать для участков AC , BC и CD . Для каждого участка возможны $2(n+1)(m+1)$ комбинаций индексов p и q , причем из них, как и в случае 1, нужно

взять только $2(nm+m)$ комбинаций, в соответствии с тем, что было сказано по поводу таблицы, приведенной на стр. 81. Уравнения для поправок составляются так же, как и в случае 1.

4. Рассмотрим речную систему с замкнутым контуром (фиг. 11), что может встретиться, например, в дельтовых частях рек. Гидрограф паводка задан в створе перед точкой разветвления A .

Сохраним обозначения предыдущего случая 3. В точках C и D краевые условия будут такие же, как в случае 3, т. е. мы получим уравнения (9.28), (9.29), (9.30). Напишем краевые условия в точке A :

$$\beta u'(0, \tau) + (1 - \beta) u''(0, \tau) = v(\tau), \quad h'(0, \tau) = h''(0, \tau). \quad (9.31)$$

они дадут уравнения:

$$\sum_{k=0}^m [\beta b'_{ik} + (1 - \beta) b''_{ik}] \psi_k(0) = a_i, \quad \sum_{k=0}^m (a'_{ik} - a''_{ik}) \psi_k(0) = 0. \quad (9.32)$$

Как видим, этот случай отличается от предыдущего только тем, что $2(n+1)$ уравнений (9.27) нужно заменить $2(n+1)$ уравнениями (9.32).

5. Четыре рассмотренные задачи имели между собой то общее, что краевые условия во всех этих случаях были линейны. Нелинейные краевые условия создают определенную специфику. Примером задачи с нелинейным краевым условием может служить задача о трансформации паводка водохранилищем.

Мы будем предполагать, что водохранилище имеет вытянутую форму и что к нему применима одномерная модель течения. Вода из водохранилища пропускается через турбины ГЭС и водосбросы плотины, при этом расход воды, поступающей в нижний бьеф плотины, есть функция отметки уровня перед плотиной и времени. Зависимость этого расхода от времени связана с режимом наполнения водохранилища, в процессе которого могут изменяться нагрузка ГЭС (от значения, обеспечиваемого транзитным пропуском меженного расхода, до значения, определяемого ограничениями по турбинам и генераторам) и открытие щитов плотины. Не вдаваясь в детали чисто энергетической задачи построения этой зависимости, будем считать, что она так или иначе задана. Рассматриваемый случай совпадает со случаем 1 во всем, кроме того, что в створе $s=1$ река не впадает в море, а перегорожена плотиной, в соответствии с чем краевое условие в этом створе есть не второе условие (9.12), а условие

$$\Phi\{\tau, u(1, \tau), h(1, \tau)\} = 0. \quad (9.33)$$

Заметим, что функция Φ не будет гладкой при некоторых значениях своих аргументов. Например, она имеет излом при значении $h(1, \tau)$, соответствующем положению, при котором уровень воды достигнет гребня водослива плотины. Мы же будем предполагать, что фактическая функция Φ может быть заменена гладкой функцией при всех возможных значениях своих аргументов так, что при этом получается хорошая аппроксимация Φ . Поэтому обращаться с функцией Φ мы будем как с функцией, гладкой по обоим аргументам u и h .

Обозначим через W результат подстановки u и h из формул (9.6) в (9.33)

$$W = \Phi\left\{\tau, \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} \psi_k(1) \varphi_i(\tau), \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(1) \varphi_i(\tau)\right\}. \quad (9.34)$$

Величина W не может быть тождественно равна нулю, ибо ряды (9.6) это не точное решение рассматриваемой задачи и поэтому выражение (9.34) само по себе никаких уравнений не дает. Чтобы получить из этого выражения уравнения, связывающие коэффициенты a_{ik} и b_{ik} , используем все ту же идею метода Бубнова — Галеркина и потребуем ортогональности выражения (9.34) к представляющим функциям $\varphi_0, \dots, \varphi_n$. В результате получим

$$\int_0^1 \Phi \left\{ \tau, \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} \psi_k(1) \varphi_i(\tau), \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \psi_k(1) \varphi_i(\tau) \right\} \varphi_j(\tau) d\tau = 0, \quad (9.35)$$

где $j=0, 1, \dots, n$. Чтобы получить систему уравнений, определяющих коэффициенты a_{ik} и b_{ik} в рассматриваемой задаче, нужно в системе для случая 1 заменить $n+1$ уравнений (9.16) $n+1$ уравнениями (9.35). Все же остальные уравнения останутся без изменения. Составить по уравнениям (9.35) уравнения, отвечающие уравнению (8.33), вместо второй группы уравнений (9.18) не представляет затруднений. Останавливаться на этой операции мы не будем.

Следует заметить, что, как легко проверить, уравнения, получаемые из линейных краевых условий, также могут рассматриваться как результат применения идеи метода Бубнова — Галеркина, которая, таким образом, оказывается универсальной.

Если краевое условие (9.33) разрешимо в явной форме относительно u , т. е. если оно имеет вид

$$u(1, \tau) = \chi[\tau, h(1, \tau)],$$

то удобно использовать второй вариант метода Бубнова — Галеркина. Для этого достаточно положить

$$u(s, \tau) = v(\tau) + \{\chi[\tau, h(1, \tau)] - v(\tau)\} s + w(s, \tau),$$

тогда краевые условия будут

$$w(0, \tau) = w(1, \tau) = 0.$$

В качестве системы функций ψ_k здесь можно принять

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = s, \quad \psi_2 = s(1-s), \quad \dots, \quad \psi_k = s^{k-1}(1-s)^{k-1}, \quad \dots$$

и приравнять нулю коэффициенты b_{i0} и b_{i1} (в противном случае краевые условия удовлетворяться не будут).

В случае 1 было принято $h(s, 0) = h(s, \infty) = 0$. В данном случае $h(s, 0) = 0$, а вообще говоря, $h(s, \infty) \neq 0$. Поэтому представление системы $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ системой функций Лягерра здесь в общем случае невозможно. Но следует иметь в виду, что практический интерес представляет в данной задаче

только тот промежуток времени τ_0 , в течение которого $h(1, \tau)$ достигает максимума. Поэтому достаточно выбрать промежуток интегрирования по θ так, чтобы было заведомо $\theta \geq \tau_0$, но чтобы θ не на много превышало τ_0 . Тогда функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ достаточно выбрать такими, чтобы они давали хорошую аппроксимацию в промежутке $0 \leq \tau \leq \theta$, поведение же их при $\tau \rightarrow \infty$ не играет никакой роли.

Из рассмотренных примеров видно, что метод Бубнова — Галеркина как средство решения задач неустановившегося движения обладает большой гибкостью и позволяет сводить составление уравнений для сложных случаев к выполнению нескольких совершенно стандартных операций.

В заключение данной главы необходимо сказать несколько слов о вероятностном аспекте задачи о движении паводка. Задавать гидрограф паводка детерминистически, как это имелось в виду всюду выше, строго говоря, можно только тогда, когда речь идет о прошлом, т. е. когда нужно восстановить картину паводка по наблюдениям в одном створе или (в случае речной системы) в нескольких. Для прогнозов на будущее детерминистическая постановка означает схематизацию задачи: гидрограф паводка есть случайная функция времени и нужно ставить вопрос не о том, каков будет этот гидрограф (или ход уровней) в ниже лежащих створах, если он известен для какого-то вышележащего створа, а о том, каковы будут вероятностные характеристики потока, если известны его вероятностные характеристики в начальном створе. Под вероятностными характеристиками потока подразумеваются функции распределения вероятностей расходов и уровней, или их статистические моменты.

В вероятностном случае гидрограф во входном створе также может быть задан разложением (9.13), но коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ этого разложения будут теперь не определенными числами, а случайными. Совместное распределение вероятностей этих случайных величин будет зависеть от выбора представляющих (не случайных) функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ (в вероятностных задачах эти функции называют координатными функциями), который может быть сделан бесчисленным множеством способов, даже если наложить требование, чтобы случайные величины $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ были не коррелированы. Представляющие функции однозначно определяются только в случае, если потребовать, чтобы случайные величины $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ были стохастически независимы в совокупности, т. е. чтобы их совместная функция распределения вероятностей была произведением функций распределения этих величин, взятых в отдельности. Такой выбор координатных функций наиболее удобен для вычислений, но он не необходим принципиально. Принципиально необходимо лишь знать совместную функцию

распределения вероятностей случайных величин $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ в представлении (9.14). Построение этой функции есть задача, которая сама по себе достаточно сложна. Но большие трудности заключаются также и в том, чтобы по этой функции, разложению (9.14), уравнению течения и краевым условиям при $x=x_0$ найти функции распределения вероятностей паводковых расходов (или уровней) для произвольного створа в промежутке $0 < x < x_0$ или статистические моменты этих расходов. На основе метода Бубнова — Галеркина можно получить уравнения для этих моментов. Однако задача может быть решена также методом Монте-Карло, хотя в вычислительном отношении это решение неудобно тем, что требует очень больших затрат машинного времени. Суть его состоит в том, что по разложению (9.14) и функции распределения вероятностей случайного вектора $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ можно разыграть большое количество реализаций гидрографа паводка в начальном створе, а затем произвести расчет движения паводка для каждой из этих реализаций, например, так, как это было изложено для разных случаев выше. Это дает ансамбль реализаций паводка для любого створа $0 < x \leq x_0$. Статистической обработкой этого ансамбля можно получить любые вероятностные характеристики паводка для всех створов в указанном интервале. Однако не следует, конечно, стремиться к тому, чтобы строить функции распределения вероятностей паводковых расходов непосредственно по результатам расчетов: необходимое для этого количество расчетов по различным реализациям начального гидрографа требует совершенно нереального машинного времени. Количество таких расчетов нужно ограничить числом, необходимым для вычисления параметров искомой функции распределения вероятностей, аналитическое выражение которой должно быть принято из тех или иных соображений, как обычно для гидрологии.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 10. Общие замечания

Обратными задачами называются те, которые заключаются в получении информации по причинам и следствиям, порожаемым этими причинами. Понятие обратной задачи чисто физическое. В математике оно имеет только относительный смысл. Например, операции дифференцирования и интегрирования обратны одна по отношению к другой, но на вопрос о том, которая из них обратна в абсолютном значении, нельзя дать содержательный ответ.

Обратные задачи распространены в самых разнообразных областях науки и практики гораздо шире, чем это принято думать. Древнейшей обратной задачей является, по-видимому, медицинская диагностика. Весьма рельефным примером обратной задачи может служить теория внутреннего строения звезд, выясняющая это строение (т. е. причину) по единственному его следствию, доступному наблюдению — по излучению звезд. Уже эти примеры говорят о том, что постановка обратных задач есть результат естественных запросов, а не каких-либо искусственных построений. Этим и объясняется то внимание, которое уделяется в последние годы математическим проблемам, связанным с обратными задачами.

В интересующей нас области (учении о реках) прямые задачи, рассматривавшиеся в предыдущей главе, определяются как задачи, в которых нужно найти следствие — решение уравнений неустановившегося движения по порождающим его причинам, т. е. по краевым и начальным условиям или условиям периодичности, заменяющим начальные условия. Все остальные задачи относятся к категории обратных. Характерный признак любой обратной задачи заключается в том, что в ней предполагается заданной та или иная (не обязательно исчерпывающая) информация о решении уравнений неустановившегося движения, в частности, в виде ограничений, которым это решение удовлетворяет.

Особенностями обратных задач, которые всегда следует иметь в виду, являются два следующих обстоятельства.

1. Из существования решения прямой задачи не вытекает существование решения соответствующей обратной задачи. В частности, если заданы физически мыслимые начальные и краевые условия, то соответствующее решение уравнений неустановившегося движения всегда может быть найдено, но обратное утверждение несправедливо: далеко не для всяких функций x и t , рассматриваемых как решение уравнений неустановившегося движения, можно найти краевые условия, даже если эти функции непрерывны и имеют непрерывные производные всех порядков, в том числе смешанные. Это ясно из того, что далеко не всякая физически мыслимая форма кривой свободной поверхности потока осуществима путем воздействия на поток в тех его створах, в которых задаются краевые условия.

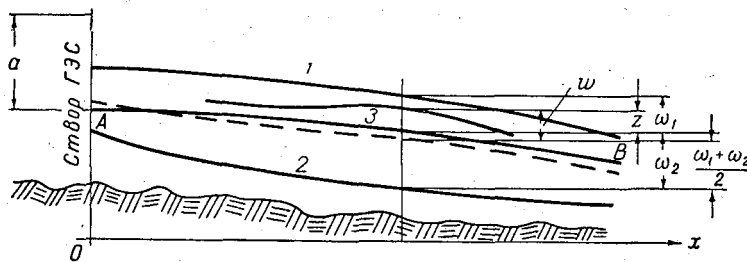
2. Большинство обратных задач суть задачи некорректные, т. е. такие, в которых сколь угодно малые изменения начальных данных могут повлечь за собой немалые изменения результатов решения задачи. Рассмотрим следующую обратную задачу: по заданному решению уравнений неустановившегося движения (например, полученному экспериментально, путем замеров) и заданным краевым условиям требуется найти коэффициенты уравнений движения, т. е. морфометрические и гидрометрические характеристики русла. В решении соответствующей прямой задачи резко колеблющиеся по длине русла морфометрические характеристики сглаживаются и осредняются, причем результаты расчета неустановившегося движения практически не зависят от деталей этого сглаживания и осреднения (по крайней мере в достаточно широких пределах), т. е. оказываются почти одинаковыми при достаточно большой разнице в локальных особенностях характеристик русла. Иными словами, большой разнице в характеристиках русла соответствуют очень малые изменения в решениях уравнений движения и, наоборот, малым изменениям исходных данных, т. е. решений уравнений движения, соответствуют немалые изменения искомых характеристик. Некорректные задачи приобретают смысл, если их решение подчинено некоторым дополнительным требованиям, вытекающим не из самой задачи, а привносимым извне, например, выводимым из тех или иных соображений о цели, с которой будет использоваться решение задачи. Подробнее об этом будет сказано в § 12.

В гидрологии изучение обратных задач сейчас только начинается и то, что будет изложено в данной главе следует рассматривать отнюдь не как развитую теорию обратных задач, а лишь как самые первые шаги в этой области.

§ 11. Оптимизационная задача и график попусков, обеспечивающий неперевышение заданных пределов колебаний уровня в русле ниже водохранилища

В различных случаях суточного и недельного регулирования речного стока приходится выяснять, какой график пусков из водохранилища следует принять, если требуется, чтобы колебания уровня воды в реке ниже водохранилища происходили в заданных пределах. Иными словами, по ограничениям, которым должно удовлетворять решение уравнений неустановившегося движения, нужно найти ограничения, какие следует наложить на краевые условия.

На практике эта задача решается в настоящее время путем проб. Этот способ дает, конечно, правильные, но не исчерпывающие результаты: найдя тот или иной график попуска,



Фиг. 12. Линии ограничения колебаний уровня в нижнем бьефе ГЭС.

удовлетворяющий требуемым ограничениям, нельзя утверждать, что не существует другого графика, который удовлетворяя тем же ограничениям, является более совершенным с точки зрения той цели, с которой предпринимается пуск. Полное математическое решение данной задачи встречает очень серьезные трудности. Единственный способ их преодоления, который может считаться реальным в настоящее время, состоит в том, чтобы поставить задачу в оптимизационном аспекте и использовать метод штрафных функций.

Будем иметь в виду суточное регулирование стока водохранилищем ГЭС, которая работает параллельно с тепловыми электростанциями. Необходимо найти такой график нагрузки ГЭС, чтобы были выполнены следующие требования:

- 1) количество воды, пропущенной за время T (например, за сутки) через турбины ГЭС, должно быть равно заданной величине V ;
- 2) колебания уровня нижнего бьефа не должны выходить за пределы полосы, ограниченной кривыми 1 и 2 на фиг. 12;

3) при соблюдении первых двух условий ГЭС и тепловые станции должны покрыть суммарный график нагрузки энергетической системы с минимальными затратами денежных средств на топливо для тепловых электростанций (потери энергии в электрических сетях в данной работе, естественно, не учитываются).

Первое из этих требований записывается так:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} Q(0, t) dt = V, \quad (11.1)$$

где $Q(0, t)$ — расход в створе ГЭС при $x=0$. Третье требование математически формулируется следующим образом. Стоимость B топлива, расходуемого тепловыми станциями в единицу времени, есть функция суммарной нагрузки P этих станций (предполагается, что нагрузка P распределяется между тепловыми станциями наивыгоднейшим образом), т. е. $B=B(P)$. Нагрузка P есть разность между нагрузкой системы $S(t)$ и нагрузкой ГЭС N , которая определяется характеристикой ГЭС как функция расхода ГЭС $Q(0, t)$ и ее напора $H=a-Z(0, t)$, где a — отметка уровня верхнего бьефа ГЭС, отсчитываемая от того же уровня, от которого отсчитывается $Z(0, t)$.

Таким образом,

$$B=B\{S(t)-N[Q(0, t), a-Z(0, t)]\} \quad (11.2)$$

и третье требование записывается так:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} B\{S(t)-N[Q(0, t), a-Z(0, t)]\} dt = \min. \quad (11.3)$$

Чтобы не отвлекаться в сторону вопросов, не имеющих прямого отношения к неустановившемуся движению в речном русле, будем предполагать, что ГЭС имеет водохранилище, допускающее не только суточное или недельное, но и сезонное или многолетнее регулирование речного стока и что поэтому в пределах тех промежутков времени, какие приходится рассматривать при суточном регулировании, можно пренебречь изменениями наполнения водохранилища и считать $a=\text{const}$.

Обратимся теперь ко второму требованию. Пусть AB на фиг. 12 есть свободная поверхность потока при установившемся режиме с расходом Q_0 , от которой отсчитываются уровни Z неустановившегося режима. Обозначим через ω_1 разности ординат кривой I и линии AB , а через ω_2 разности

ординат кривой AB и линии 2. Линия 3 есть линия средних уровней между линиями 1 и 2. Легко проверить, что

$$Z(x, t) = \frac{1}{2} [\omega_1(x) - \omega_2(x)] + w(x, t).$$

Метод штрафных функций заключается в том, что отклонение уровня воды в русле в любую сторону от линии 3 рассматривается как денежный ущерб (штраф), выражающийся штрафной функцией R , равной ущербу в единицу времени в результате отклонения w от нуля на единице длины. Эту функцию можно принять, например, в виде

$$R = E \left\{ w : \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right\}^{2\kappa} = E [\rho_1(x) + \rho_2(x) Z(x, t)]^{2\kappa}, \quad (11.4)$$

где $E = \text{const}$, κ — достаточно большое натуральное число.

$$\rho_1(x) = -\frac{\omega_1(x) - \omega_2(x)}{\omega_1(x) + \omega_2(x)},$$

$$\rho_2(x) = \frac{2}{\omega_1(x) + \omega_2(x)}.$$

Нетрудно видеть, что при таком выборе штрафной функции ущерб будет незначительным, пока свободная поверхность потока находится в пределах полосы между кривыми 1 и 2, и будет резко возрастать с выходом свободной поверхности из этой полосы. При $\kappa \rightarrow \infty$ ущерб будет равен нулю в полосе между кривыми 1 и 2 и будет возрастать до бесконечности при пересечении этих кривых кривою свободной поверхности. Суммарный ущерб за время T на участке реки длиной L , для которого заданы краевые условия, будет равен

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^L R dx dt.$$

Очевидно, что если мы найдем такую функцию $Q(0, t)$, которая будет обеспечивать выполнение требования

$$\int_{t_0}^{t_0+T} B[S(t) - N[Q(0, t), a - Z(0, t)]] dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^L R[x, Z(x, t)] dx = \min, \quad (11.5)$$

а затем в полученном решении перейдем к пределу при $x \rightarrow \infty$, то мы придем к решению поставленной задачи: кривая свободной поверхности при неустановившемся движении нигде не будет выходить за пределы полосы между кривыми 1 и 2 (в противном случае фиктивные издержки возрастут до бесконечности) и при этом будет выполнено условие (11.3).

Условие (11.5) заменяет краевое условие при $x=0$ для системы уравнений (1.23) и (1.25). Краевое условие при $x=L$ имеет вид

$$f[Q(L, t), Z(L, t)] = 0, \quad (11.6)$$

что охватывает и условия при $x=L$, фигурировавшие в гл. III.

Рассматриваемая задача есть частный случай общей задачи минимизации интеграла

$$W = \int_{t_0}^{t_0+T} \left\{ F[t, u(0, t), v(0, t)] + \int_0^L R[x, v(x, t)] dx \right\} dt, \quad (11.7)$$

когда функции $u=u(x, t)$ и $v=v(x, t)$ подчинены уравнениям в частных производных:

$$\varphi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}\right) = 0, \quad (11.8)$$

$$\psi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}\right) = 0 \quad (11.9)$$

и условиям

$$\int_{t_0}^{t_0+T} u(0, t) dt = V, \quad f[u(L, t), v(L, t)] = 0. \quad (11.10)$$

При этом предполагается, что функции F, φ, ψ, f удовлетворяют требуемым дальнейшими построениями условиям гладкости. В отношении F эти требования сводятся к существованию частных производных по $u(0, t)$ и $v(0, t)$. Характеристики электростанций имеют изломы и разрывы, поэтому в рассматриваемой нами задаче F не есть, строго говоря, гладкая функция. Но, как известно из энергетической литературы, эту трудность можно обойти, спрямляя определенным образом графики производных вблизи указанных особенностей. Этот прием является хотя и приближенным, но совершенно строгим. Принимая его, мы в дальнейшем будем обращаться с F как с функцией, имеющей производные при всех $u(0, t)$ и $v(0, t)$.

Разобьем интервал $(0, L)$ на n равных частей и заменим уравнение (11.8) соответствующим ему уравнением в конечных разностях по x

$$\Phi_i = \Phi \left\{ \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, t, \frac{u_i + u_{i-1}}{2}, \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dt} + \frac{du_{i-1}}{dt} \right), \right. \\ \left. \frac{v_i + v_{i-1}}{2}, \frac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \frac{1}{2} \left(\frac{dv_i}{dt} + \frac{dv_{i-1}}{dt} \right) \right\} = 0, \quad (11.11)$$

где
$$x_i = i \frac{L}{n} \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$u_i = u(x_i, t), \quad v_i = v(x_i, t).$$

Аналогичную операцию можно проделать и с уравнением (11.9), а интеграл по x в формуле (11.7) можно аппроксимировать конечной суммой, и тогда рассматриваемая задача сведется к обычной вариационной задаче с неголономными связями. В этом случае условный экстремум функционала W достигается на тех же кривых, что и безусловный экстремум потенциала

$$W_* = \int_{t_0}^{t_0+T} F_* dt,$$

где

$$F_* = F(t, u_0, v_0) + \sum_{i=1}^n R \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \frac{v_i + v_{i-1}}{2} \right) \times \\ \times (x_i - x_{i-1}) + \beta f(u_n, v_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \eta_i \Phi_i + \\ + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \xi_i \Psi_i + \lambda u_0, \quad (11.12)$$

а $\lambda, \beta, (x_i - x_{i-1}) \eta_i, (x_i - x_{i-1}) \xi_i$ — неопределенные множители Лагранжа, зависящие, вообще говоря, от t .

Чтобы получить решение первоначальной задачи, нужно в формуле (11.12) перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, дело сводится к отысканию безусловного экстремума функционала

$$W_{**} = \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi dt,$$

где

$$\begin{aligned}\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} F_* = F[t, u(0, t), v(0, t)] + \\ + \int_0^L R[x, v(x, t)] dx + \lambda u(0, t) + \\ + \beta f[u(L, t), v(L, t)] + \int_0^L \eta(x, t) \varphi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \right. \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t}, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}\right) dx + \int_0^L \zeta(x, t) \times \\ \times \psi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}\right) dx. \quad (11.13)\end{aligned}$$

Найдем первую вариацию этого функционала. Если вариации u и v суть δu и δv , то с точностью до малых высших порядков будем иметь (u_x, u_t, v_x, v_t — частные производные от u и v по x и t)

$$\begin{aligned}\delta W_{**} = \int_{t_0}^{t_0+T} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \lambda \right) \delta u(0, t) + \right. \\ + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v(0, t) + \beta \left[\frac{\partial f}{\partial u} \delta u(L, t) + \frac{\partial f}{\partial v} \delta v(L, t) \right] \Big\} dt + \\ + \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^L \frac{\partial R}{\partial v} \delta v dx dt + \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^L \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} \delta u_x + \right. \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \delta v + \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial \varphi}{\partial v_t} \delta v_t \Big) dx dt + \\ + \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^L \zeta \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \psi}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial \psi}{\partial u_t} \delta u_t + \right. \\ + \frac{\partial \psi}{\partial v} \delta v + \frac{\partial \psi}{\partial v_x} \delta v_x + \frac{\partial \psi}{\partial v_t} \delta v_t \Big) dx dt. \quad (11.14)\end{aligned}$$

Освободимся от вариаций производных δu_x и т. д. Имеем

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^L \eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} \delta u_x dx dt = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^L \eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx = \\ = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \left\{ \left(\delta u \eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} \right)_{x=L} - \left(\delta u \eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} \right)_{x=0} - \int_0^L \delta u \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} \right) dx \right\}.\end{aligned}$$

Остальные члены формулы (11.14) преобразуются совершенно аналогично. В результате получим

$$\begin{aligned}
\delta W_{**} = & \int_{t_0}^{t_0+T} dt \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial u} + \lambda - \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_x} \right)_{x=0} \right] \times \right. \\
& \times \delta u(0, t) + \left[\frac{\partial F}{\partial v} - \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_x} \right)_{x=0} \right] \times \\
& \times \delta v(0, t) + \left[\beta \frac{\partial f}{\partial u} + \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_x} \right)_{x=L} \right] \delta u(L, t) + \\
& + \left[\beta \frac{\partial f}{\partial v} + \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_x} \right)_{x=L} \right] \delta v(L, t) \left. \right\} + \\
& + \int_0^L dx \left\{ \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_t} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_t} \right)_{t=t_0+T} \delta u(x, t_0+T) - \right. \\
& - \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_t} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_t} \right)_{t=t_0} \delta u(x, t_0) + \\
& + \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_t} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_t} \right)_{t=t_0+T} \delta v(x, t_0+T) - \\
& - \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_t} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_t} \right)_{t=t_0} \delta v(x, t_0) \left. \right\} + \\
& + \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^L dx dt \left\{ \left[\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_t} \right) + \right. \right. \\
& + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_t} \right) \left. \right] \delta u + \\
& + \left[\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_t} \right) + \right. \\
& + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_t} \right) + \frac{\partial R}{\partial v} \left. \right] \delta v \left. \right\}. \quad (11.15)
\end{aligned}$$

Рассмотрим два случая.

1. Задача с начальными условиями, т. е. с заданными функциями $u(x, t_0)$ и $v(x, t_0)$. В этом случае $\delta u(x, t_0) = \delta v(x, t_0) = 0$ и условия реализации экстремума функционала W_{**} , т. е. удовлетворения равенства $\delta W_{**} = 0$, заключаются в удовлетворении дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_t} \right) + \\
+ \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_t} \right) = 0, \quad (11.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial v} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_t} \right) + \\
+ \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_t} \right) = 0 \quad (11.17)
\end{aligned}$$

и краевых условий:

а) при $x=0$

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \lambda - \eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} - \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v} - \eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} - \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_x} = 0, \quad (11.18)$$

б) при $x=L$

$$\beta \frac{\partial f}{\partial u} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_x} = 0, \quad \beta \frac{\partial f}{\partial v} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_x} = 0, \quad (11.19)$$

или после исключения множителя β , который не входит ни в какие условия и уравнения, кроме (11.19),

$$\frac{\partial f}{\partial u} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_x} \right) = \frac{\partial f}{\partial v} \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_x} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_x} \right), \quad (11.20)$$

в) при $t=t_0+T$

$$\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_t} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_t} = 0, \quad \eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_t} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_t} = 0. \quad (11.21)$$

2. Задача с условиями периодичности $u(x, t_0) = u(x, t_0+T)$, $v(x, t_0) = v(x, t_0+T)$. В этом случае $\delta u(x, t_0) = \delta u(x, t_0+T)$, $\delta v(x, t_0) = \delta v(x, t_0+T)$, условия реализации экстремума W_{**} заключаются также в удовлетворении уравнений (11.16) и (11.17) и краевых условий (11.18) и (11.20), но вместо условий (11.21) теперь будут условия:

$$\left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_t} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_t} \right)_{t=t_0} = \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u_t} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial u_t} \right)_{t=t_0+T},$$

$$\left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_t} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_t} \right)_{t=t_0} = \left(\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v_t} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial v_t} \right)_{t=t_0+T}.$$

Если функции φ и ψ периодичны по t с периодом T (или, в частности, не зависят явно от t) — а задача с условиями периодичности корректна только в этом случае, — то эти условия выполняются автоматически как следствие периодичности функций η и ζ по t с периодом T .

Вернемся к конкретным условиям рассматриваемой задачи. Из формул (1.23) и (1.25) имеем:

$$\varphi = -I + \frac{Q^2}{K^2} + \frac{2Q}{gF^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{gF} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad (11.22)$$

$$\psi = \frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Z}{\partial t} = 0. \quad (11.23)$$

Так как ограничения, как правило, бывают достаточно жесткими, т. е. допускают только достаточно малые колебания уровня нижнего бьефа ГЭС (по сравнению с его глубиной), то уравнения (11.22) и (11.23) обычно можно линеаризовать. Именно этим случаем мы для простоты и ограничимся, причем будем иметь в виду задачу с условиями периодичности. За Q_0 примем средний за период T расход ГЭС $Q_0 = V/T$, а за линию AB на фиг. 12 — свободную поверхность

установившегося режима при расходе Q_0 . Результат линеаризации уравнений (11.22) и (11.23) здесь удобно записать не в безразмерной форме, как в гл. III, а в виде:

$$\varphi = 2I \left(\frac{\Delta Q}{Q_0} - \frac{K'_{*0}}{K_{*0}} Z \right) + \frac{2Q_0}{gF_0} \cdot \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + \frac{1}{gF_0} \cdot \frac{\partial \Delta Q}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$$

$$\psi = \frac{\partial \Delta Q}{\partial x} + B_0 \frac{\partial Z}{\partial t} = 0,$$

или, возвращаясь к прежнему обозначению $Q = Q_0 + \Delta Q$,

$$\varphi = 2I \left(\frac{Q}{Q_0} - \frac{K'_{*0}}{K_{*0}} Z - 1 \right) + \frac{2Q_0}{gF_0} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{gF_0} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad (11.24)$$

$$\psi = \frac{\partial Q}{\partial x} + B_0 \frac{\partial Z}{\partial t} = 0. \quad (11.25)$$

Уравнения (11.16) и (11.17) будут соответственно:

$$\frac{2I}{Q_0} \eta - \frac{2Q_0}{gF_0} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{gF_0} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad (11.26)$$

$$2I \frac{K'_{*0}}{K_{*0}} \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} + B_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} R(x, Z) = \Gamma(x, Z), \quad (11.27)$$

а краевые условия (11.18) и (11.20) приобретают соответственно вид:

а) при $x=0$

$$b - (\lambda - \xi) q = 0, \quad bp + \eta = 0,$$

где $q = \partial Q(0, t) / \partial N$, $p = \partial N / \partial H$, $b = dB/dP$,

б) при $x=L$ (функция f принята линейной)

$$\eta = D\xi.$$

Наряду с уравнениями (11.26) и (11.27) и перечисленными краевыми условиями должны, разумеется, удовлетворяться условие (11.1), уравнения (11.24) и (11.25), а также условия периодичности $Q(x, t_0) = Q(x, t_0 + T)$, $Z(x, t_0) = Z(x, t_0 + T)$. Последние соответствуют периодическому повторению от суток к суткам или от недели к неделе одного и того же графика нагрузки системы.

Заметим, что как в задаче с начальными условиями, так и в задаче с условиями периодичности $\lambda = \text{const}$. Нужно отметить, что затруднения в использовании этого решения для оперативных целей вызываются не только громоздкостью численного решения системы уравнений (11.1), (11.2), (11.22), (11.23), но и трудностью задания начальных условий — мгновенного профиля свободной поверхности и мгновенного распределения расходов по длине бьефа в начальный момент t_0 .

Этим еще более усиливается практическое значение периодических решений, не требующих задания начальных условий по длине бьефа.

Переход к пределу при $\kappa \rightarrow \infty$ в формуле (11.4) приводит к неопределенности в (11.27). Теоретически рассуждая, этот переход должен быть сделан не в уравнениях задачи, а в их решении. Однако, поскольку последнее возможно только в числах, то не остается ничего другого, как просто принять для κ достаточно большое значение, например, $\kappa=4$.

Рассмотрим периодический случай, применяя для этого метод Бубнова—Галеркина. За Q_0 примем средний за период T расход ГЭС. Так как средний за период расход одинаков во всех створах нижнего бьефа, то расход $Q(s, \tau)$ в любом створе может быть представлен двойным рядом

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (c_{jk} \cos 2\pi j\tau + d_{jk} \sin 2\pi j\tau) \psi_k(s). \quad (11.28)$$

А так как уравнения (11.24) и (11.25) линейны, то представление аналогичным рядом уровней $Z(s, \tau)$, в соответствии с § 8, не будет содержать нулевой гармоники

$$Z = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (a_{jk} \cos 2\pi j\tau + b_{jk} \sin 2\pi j\tau) \psi_k(s). \quad (11.29)$$

В формулах (11.28) и (11.29) по-прежнему $s=x/L$, $\tau=t/T$. Условия периодичности при таком представлении Q и Z выполняются автоматически. Подставляя Q и Z из формул (11.28) и (11.29) в (11.24) и (11.25) и приравнявая нулю коэффициенты при гармониках, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(2Ic_{jk} + \frac{2\pi j}{gF_0 T} d_{jk} - \frac{K'_{*0}}{K_{*0}} a_{jk} \right) \psi_k(s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{L} \left(\frac{2Q_0}{gF_0} c_{jk} + a_{jk} \right) \psi'_k(s) \right\} = 0, \quad (11.30)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(2Id_{jk} - \frac{2\pi j}{gF_0 T} c_{jk} - \frac{K'_{*0}}{K_{*0}} b_{jk} \right) \psi_k(s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{L} \left(\frac{2Q_0}{gF_0} d_{jk} + b_{jk} \right) \psi'_k(s) \right\} = 0, \quad (11.31)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{c_{jk}}{L} \psi'_k(s) + \frac{2\pi j B_0}{T} b_{jk} \psi_k(s) \right\} = 0, \quad (11.32)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{d_{jk}}{L} \psi'_k(s) - \frac{2\pi j B_0}{T} a_{jk} \psi_k(s) \right\} = 0. \quad (11.33)$$

Условие (11.6) при линейной функции f дает точно так же

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c_{jk} - Da_{jk}) \psi_k(1) = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (d_{jk} - Db_{jk}) \psi_k(1) = 0. \quad (11.34)$$

При этом в формулах (11.30) — (11.34) индекс j пробегает значения $j=1, 2, \dots$

Положим далее $\vartheta = \zeta - \lambda$. Тогда, учитывая, что $\lambda = \text{const}$, можно придать уравнениям (11.26), (11.27) и краевым условиям при $s=0$ такой вид:

$$\frac{2I}{Q_0} \eta - \frac{2Q_0}{gF_0} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{gF_0} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \quad (11.35)$$

$$2I \frac{K'_{*0}}{K_{*0}} \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} + B_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \Gamma(s, Z) = 0, \quad (11.36)$$

$$b + \vartheta q = 0, \quad bp + \eta = 0 \quad (s=0). \quad (11.37)$$

Таким образом, в данном случае неизвестная λ исключена. Положим далее

$$\eta = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{jk} \cos 2\pi j\tau + \beta_{jk} \sin 2\pi j\tau) \psi_k(s), \quad (11.38)$$

$$\vartheta = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_{jk} \cos 2\pi j\tau + \delta_{jk} \sin 2\pi j\tau) \psi_k(s). \quad (11.39)$$

Из уравнения (11.35) при этом получается

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2 \left(\frac{I}{Q_0} \alpha_{jk} - \frac{\pi j}{gF_0 T} \beta_{jk} \right) \psi_k(s) - \frac{1}{L} \left(\frac{2Q_0}{gF_0} \alpha_{jk} + \gamma_{jk} \right) \psi'_k(s) \right\} = 0, \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (11.40)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2 \left(\frac{I}{Q_0} \beta_{jk} + \frac{\pi j}{gF_0 T} \alpha_{jk} \right) \psi_k(s) - \frac{1}{L} \left(\frac{2Q_0}{gF_0} \beta_{jk} + \delta_{jk} \right) \psi'_k(s) \right\} = 0, \quad j=1, 2, \dots \quad (11.41)$$

Условие же $\eta(1, \tau) = D\vartheta(1, \tau)$ дает

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{jk} - D\gamma_{jk}) \psi_k(1) = 0, \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (11.42)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\beta_{jk} - D\delta_{jk}) \psi_k(1) = 0, \quad j=1, 2, \dots \quad (11.43)$$

Умножая уравнения (11.30) — (11.33), (11.40) и (11.41) на $\psi_i(s)$ и интегрируя в пределах $0 \leq s \leq 1$, получим, предполагая, что система функций $\psi_0, \psi_1, \dots$ ортонормирована;

$$2Ic_{ji} + \frac{2\pi j}{gF_0 T} d_{ji} - \frac{K'_{*0}}{K_{*0}} a_{ji} + \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ik} \left(\frac{2Q_0}{gF_0} c_{jk} + a_{jk} \right) = 0, \quad (11.44)$$

$$2Id_{ji} - \frac{2\pi j}{gF_0 T} c_{jk} - \frac{K'_{*0}}{K_{*0}} b_{jk} + \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ik} \left(\frac{2Q_0}{gF_0} d_{jk} + b_{jk} \right) = 0, \quad (11.45)$$

$$\frac{2\pi j B_0}{T} b_{ji} + \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ik} c_{jk} = 0, \quad (11.46)$$

$$\frac{2\pi j B_0}{T} a_{ji} - \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ik} d_{jk} = 0, \quad (11.47)$$

$$2 \left(\frac{I}{Q_0} a_{ji} - \frac{\pi j}{gF_0 T} \beta_{ji} \right) - \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ik} \left(\frac{2Q_0}{gF_0} a_{jk} + \gamma_{jk} \right) = 0, \quad (11.48)$$

$$2 \left(\frac{I}{Q_0} \beta_{ji} + \frac{\pi j}{gF_0 T} a_{ji} \right) - \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ik} \left(\frac{2Q_0}{gF_0} \beta_{jk} + \delta_{jk} \right) = 0. \quad (11.49)$$

При этом в формуле (11.48) $j=0, 1, 2, \dots$, в остальных уравнениях $j=1, 2, \dots$ и

$$\sigma_{ik} = \int_0^1 \psi_i(s) \psi'_k(s) ds. \quad (11.50)$$

Уравнения (11.34), (11.39) — (11.46) суть уравнения линейной части системы. Они не приближенны, а совершенно точны до тех пор, пока бесконечные ряды (11.28), (11.29), (11.38) и (11.39) не заменяются конечными рядами.

Обратимся теперь к нелинейной части — уравнению (11.36) и краевым условиям (11.37). Имеем

$$b = b(P) = b[S(t) - N[Q(0, t), a - Z(0, t)]],$$

или сокращенно

$$b = b[\tau, Q(0, \tau), Z(0, \tau)],$$

и аналогично

$$q = q[Q(0, \tau), Z(0, \tau)], \quad p = p[Q(0, \tau), Z(0, \tau)]$$

Теперь условия (11.37) записываются так:

$$b[\tau, Q(0, \tau), Z(0, \tau)] + \vartheta(0, \tau) q[Q(0, \tau), Z(0, \tau)] = 0, \quad (11.51)$$

$$b[\tau, Q(0, \tau), Z(0, \tau)] p[Q(0, \tau), Z(0, \tau)] + \eta(0, \tau) = 0. \quad (11.52)$$

Ограничимся в рядах (11.28), (11.29), (11.38) и (11.39) гармониками по n -ю включительно и представляющими функциями ψ_k по m -ю. Подставим после этого Z , η и ϑ из этих рядов в формулу (11.36) и потребуем ортогональности его левой части к представляющим функциям, получим:

$$2I \frac{K'_{*0}}{K_{*0}} \alpha_{ji} + \frac{B_0 \pi j}{T} \delta_{ji} + \frac{1}{L} \sum_{k=0}^m \sigma_{ik} \alpha_{jk} = \\ = 2 \int_0^1 \int_0^1 \Gamma(s, Z) \cos 2\pi j \tau \psi_i(s) d\tau ds, \quad (11.53)$$

$$2I \frac{K'_{*0}}{K_{*0}} \beta_{ji} - \frac{B_0 \pi j}{T} \gamma_{ji} + \frac{1}{L} \sum_{k=0}^m \sigma_{ik} \beta_{jk} = \\ = 2 \int_0^1 \int_0^1 \Gamma(s, Z) \sin 2\pi j \tau \psi_i(s) d\tau ds. \quad (11.54)$$

Требование ортогональности результата подстановки Z , Q , ϑ , η в формулы (11.51) и (11.52) к $\cos 2\pi j \tau$ и $\sin 2\pi j \tau$ дает уравнения:

$$\int_0^1 b[\tau, Q(0, \tau), Z(0, \tau)] \cos 2\pi j \tau d\tau + \\ + \int_0^1 \vartheta(0, \tau) q[Q(0, \tau), Z(0, \tau)] \cos 2\pi j \tau d\tau = 0, \quad (11.55)$$

$$\int_0^1 b[\tau, Q(0, \tau), Z(0, \tau)] \sin 2\pi j \tau d\tau + \\ + \int_0^1 \vartheta(0, \tau) q[Q(0, \tau), Z(0, \tau)] \sin 2\pi j \tau d\tau = 0, \quad (11.56)$$

$$2 \int_0^1 b[\tau, Q(0, \tau), Z(0, \tau)] p[Q(0, \tau), Z(0, \tau)] \cos 2\pi j \tau d\tau + \\ + \sum_{k=0}^m \alpha_{jk} \psi_k(0) = 0, \quad (11.57)$$

$$2 \int_0^1 b[\tau, Q(0, \tau), Z(0, \tau)] p[Q(0, \tau), Z(0, \tau)] \sin 2\pi j \tau d\tau + \\ + \sum_{k=0}^m \beta_{jk} \psi_k(0) = 0. \quad (11.58)$$

При этом в уравнениях (11.55) и (11.57) $j=0, 1, \dots, n$, а в (11.56) и (11.58) $j=1, \dots, n$. В уравнениях (11.53) — (11.58)

$$Z = \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^m (a_{lk} \cos 2\pi l\tau + b_{lk} \sin 2\pi l\tau) \psi_k(s),$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 + \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^m (c_{lk} \cos 2\pi l\tau + d_{lk} \sin 2\pi l\tau) \psi_k(s),$$

$$\Phi = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m (\gamma_{lk} \cos 2\pi l\tau + \delta_{lk} \sin 2\pi l\tau) \psi_k(s).$$

Теперь нами получены все необходимые уравнения.

Нетрудно подсчитать, что общее число неизвестных коэффициентов и имеющихся уравнений будет следующим:

Коэффициент		Уравнение		
обозначение	число	характеристика	номер	число
a_{lk}	$n(m+1)$	1. Русло Линейные уравнения	(11.44)	$n(m+1)$
b_{lk}	$n(m+1)$		(11.45)	$n(m+1)$
c_{lk}	$n(m+1)$		(11.46)	$n(m+1)$
d_{lk}	$n(m+1)$		(11.47)	$n(m+1)$
α_{lk}	$(n+1)(m+1)$		(11.48)	$(n+1)(m+1)$
β_{lk}	$n(m+1)$		(11.49)	$n(m+1)$
γ_{lk}	$(n+1)(m+1)$		(11.53)	$(n+1)(m+1)$
δ_{lk}	$n(m+1)$		(11.54)	$n(m+1)$
Всего: $2(4n+1)(m+1)$		2. Краевые условия при $s=1$ (линейные)	(11.34)	$2n$
			(11.42)	$n+1$
			(11.43)	n
		3. Краевые условия при $s=0$ (нелинейные)	(11.55)	$n+1$
			(11.56)	n
			(11.57)	$n+1$
			(11.58)	n
		Всего: $2(4n+1)(m+1) + 8n + 3$		

Таким образом, лишних уравнений оказывается $8n+3$. На это количество необходимо уменьшить число линейных уравнений русла за счет отбрасывания (по возможности одинакового под каждым номером) уравнений с высшими значениями

индексов i и j . Тогда этих уравнений останется $(6n+1)(m+1) - 8n - 3$.

Точность расчета повышается с увеличением чисел m и n . Эти числа определяются возможностями стандартной программы для решения системы линейных уравнений, к которому сводятся последовательные итерации при вычислении неизвестных коэффициентов. Порядок этой системы равен числу неизвестных коэффициентов, т. е. $2(4n+1)(m+1)$. Если стандартная программа допускает решение системы порядка $\leq N$, то числа m и n суть наибольшие целые числа, удовлетворяющие неравенству

$$2(4n+1)(m+1) \leq N.$$

Для машины М-20 в настоящее время имеется стандартная программа для $N=114$. При этом N возможны следующие комбинации:

n	m	$2(4n+1)(m+1)$
2	5	108
3	3	104
4	2	102

В задачах предыдущей главы, при том же числе членов разложения, число неизвестных коэффициентов меньше, чем в данном случае примерно в 2 раза для периодического режима и в 4 раза для движения волн паводков. Поэтому нет необходимости в том, чтобы, не увеличивая N , увеличить число членов разложения. Здесь же такая необходимость может возникнуть. Для увеличения чисел m и n в рамках той же стандартной программы можно применить следующий прием. Разделим все уравнения на две части: в первую из них включим $(4n+1)(m+1)$ линейных уравнений русла, а во вторую — остальные $(4n+1)(m+1)$ уравнений. Первая часть уравнений позволит выразить $(4n+1)(m+1)$ неизвестных коэффициентов (любых) в виде линейных функций от остальных $(4n+1) \times (m+1)$ коэффициентов. Для этого придется решить систему $(4n+1)(m+1)$ линейных уравнений только один раз для каждого значения Q_0 . Исключая эти $(4n+1)(m+1)$ коэффициентов из второй части уравнений, мы придем к системе $(4n+1)(m+1)$ уравнений с таким же количеством неизвестных, среди которых будет $(2n+1)(m+1) + 4n + 2$ нелинейных. Эту систему надо решать уже с помощью итераций. Теперь получается следующая таблица (при $N=114$):

n	m	$(4n+1)(m+1)$
2	11	108
3	7	104
4	5	102
5	4	105
6	3	100

Этот прием можно развить и решить систему не в два, а в большее число приемов. Можно, например, выделить все линейные уравнения и затем, разбив их на несколько групп, последовательно исключить все неизвестные коэффициенты, кроме $(2n+1)(m+1)+4n+2$, по числу нелинейных уравнений. Тогда придется решать итерациями только нелинейные уравнения и соответствующая таблица будет:

n	m	$(2n+1)(m+1)+4n+2$
4	10	109
5	8	111
6	6	105
7	5	106
8	4	103

В этом последнем случае можно получить хорошую точность не только для суточного, но и для недельного цикла.

Расписывать подробно все эти операции и составлять уравнения для поправок имеет смысл только при конкретном программировании и не в обычных символах, а в операторах программы. Мы не будем здесь останавливаться на этих вопросах, излагаемых в руководствах по вычислительной математике.

Выбор исходного приближения можно осуществить, например, так. Распределим нагрузку системы между тепловыми станциями и ГЭС без учета колебаний уровней нижнего бьефа. Это — тривиальная задача, она хорошо описана в энергетической литературе. По полученному при этом графику расходов ГЭС можно рассчитать периодический режим нижнего бьефа по линейным уравнениям без учета ограничений. Это даст исходное приближение для коэффициентов $a_{lk}, b_{lk}, c_{lk}, d_{lk}$, если, конечно, полученный при этом режим не сопровождается сильными нарушениями ограничений. Если же имеются большие нарушения, расчет надо повторить, несколько выровняв (на глаз) график расходов ГЭС. В качестве исходных приближений можно принять, что $\eta=0$, а $\Phi(s, \tau) = \text{const}$ и имеет

то значение, какое получится для $\Phi(0, \tau)$ в расчете без учета колебаний уровня нижнего бьефа (это значение постоянно).

Изложенное здесь решение задачи, основывающееся на идеях вариационного исчисления, применимо, конечно, и в том случае, когда уравнения Сен-Венана не линеаризуются. Однако, когда эта линеаризация допустима, возможен иной путь, не связанный с идеями вариационного исчисления.

Пусть краевые условия заданы в створе ГЭС, т. е. при $x=0$, в виде требования (11.5) а при $x=\infty$ $Z(\infty, \tau)=0$, $Q(\infty, \tau)=Q_0$. За L в данном случае можно принять некоторую длину, на которой неустановившееся движение заметно затухает (например, определенную из наблюдений). Движение опять будем считать периодическим с периодом T и будем рассматривать его в безразмерных независимых переменных $s=x/L$, $\tau=t/T$.

Здесь удобно (хотя и не обязательно) положить:

$$Z(s, \tau) = Z(0, \tau) \psi_0(s) + v(s, \tau), \quad (11.59)$$

$$Q(s, \tau) = Q_0 + [Q(0, \tau) - Q_0] \psi_0(s) + u(s, \tau), \quad (11.60)$$

где $\psi_0(s)$ — некоторая функция, равная единице при $s=0$ и равная нулю при $s=\infty$. Краевые условия для функций $v(s, \tau)$ и $u(s, \tau)$ суть

$$v(0, \tau) = v(\infty, \tau) = u(0, \tau) = u(\infty, \tau) = 0.$$

Эти условия будут удовлетворены, если положить

$$v(s, \tau) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_{jk} \cos 2\pi j\tau + b_{jk} \sin 2\pi j\tau) \psi_k(s), \quad (11.61)$$

$$u(s, \tau) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (c_{jk} \cos 2\pi j\tau + d_{jk} \sin 2\pi j\tau) \psi_k(s), \quad (11.62)$$

$$Z(0, \tau) = \sum_{j=1}^n (A_j \cos 2\pi j\tau + B_j \sin 2\pi j\tau), \quad (11.63)$$

$$Q = Q_0 + \sum_{j=1}^n (C_j \cos 2\pi j\tau + D_j \sin 2\pi j\tau) \quad (11.64)$$

и принять $\psi_k(s) = s^k l_k(s)$, где l_k — функция Лягерра. Подставим после этого Z и Q из (11.59) и (11.60) в (11.24) и (11.25). Будем считать, что коэффициенты A_j , B_j , C_j , D_j известны. Уравнения (11.24) и (11.25) решим методом Бубнова — Галеркина. В результате мы получим $4mn$ линейных уравнения, связывающих $4mn$ коэффициента a_{jk} , b_{jk} , c_{jk} , d_{jk} и $4n$ коэффициента A_j , B_j , C_j , D_j . Но применяя метод Бубнова — Галеркина, можно, по его идее, требовать ортогональности результата подстановки Z и Q в левые части уравнений (11.24) и

(11.25) по отношению не к m , а к $m+1$ функциям $\psi_1, \dots, \psi_m, \psi_{m+1}$ и тогда мы получим не $4mn$, а $4mn+4n$ уравнений. Из этих уравнений отбросим $2n$, отвечающих индексу $m+1$ и высшим значениям индекса j . Из оставшихся $4mn+2n$ уравнений можно выразить коэффициенты $a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, d_{jk}, A_j, B_j$ через $2n$ коэффициентов C_j, D_j . Эти последние — единственные коэффициенты, которыми можно управлять непосредственно, изменяя график попуска через турбины. Тогда после подстановки Z и Q из уравнений (11.59) — (11.64) в (11.5) левая часть этого выражения также окажется функцией только коэффициентов C_j и D_j , которые нужно подобрать так, чтобы было выполнено требование (11.5).

Таким образом, задача свелась к отысканию минимума функции $2n$ переменных C_j и D_j , которое может быть выполнено любым из методов, применяемых для этой цели в вычислительной математике.

§ 12. Об определении исходных характеристик русла

Расчет волнового режима требует предварительного задания характеристик русла, т. е. функций $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \mu_1, v_0, v_1$ в уравнениях § 7, 8, 9. Если известны такие характеристики русла, как F, B, K , то построение указанных функций сводится к подбору таких коэффициентов в аппроксимирующих выражениях:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 Z + \lambda_2 Z^2, & \mu &= \mu_0 + \mu_1 Z, \\ v &= v_0 + v_1 Z,\end{aligned}$$

которые давали бы наилучшее (например, в смысле способа наименьших квадратов) приближение к кривым $\lambda(Z), \mu(Z), v(Z)$ для различных створов. По этим данным нетрудно построить искомые графики зависимости $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \mu_1, v_0, v_1$ от s .

Однако вопрос о том, что именно представляют собой характеристики F, B, K для речного русла неправильной формы, не так прост, как кажется с первого взгляда, если, конечно, не иметь в виду только искусственные каналы или гидрометрические створы, специально выбираемые на таких участках реки, где русло близко к призматическому. Этот вопрос, связанный с выводом уравнений движения потока в русле неправильной формы, не может быть решен вполне строго из-за того, что гидравлическая идеализация для таких русел более груба, чем для русел с плоскостью симметрии, течение в которых обладает значительно меньшим количеством особенностей, не охватываемых гидравлической идеализацией. В главе I на форму русла было наложено ограничение, состоявшее в том, что русло имеет вертикальную плоскость

симметрии. В таких руслах динамическая ось потока и линия центров тяжести сечений лежат в указанной плоскости симметрии. В дальнейшем уравнения, полученные для симметричных русел, переносились, без специальных оговорок, на речные русла неправильной формы (в тех случаях, когда не учитывалось влияние кривизны струй в вертикальной плоскости). Такой перенос означает прежде всего, что не учитывается также и влияние кривизны струй в горизонтальной плоскости. Однако не учитывается еще и другое обстоятельство, существенное для рассматриваемого вопроса.

Рассмотрим русло, образованное движением некоторой симметричной кривой (образующей, см. фиг. 1) по другой кривой (направляющей) так, что плоскость образующей всегда нормальна к направляющей, ось симметрии образующей всегда лежит в вертикальной плоскости, а вершина скользит по направляющей. При этом предполагается, что радиус кривизны направляющей всегда больше, чем $B/2$. Если динамическая ось потока в таком русле лежала бы на

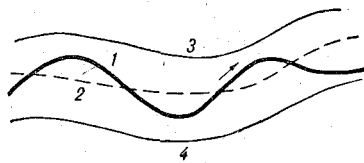


Фиг. 13. Фарватер и динамическая ось в русле с симметричной неизменной по длине формой русла.

поверхности описываемой осью симметрии образующей (в плане — линия AB на фиг. 13, т. е. фарватер), то, очевидно, распространяя на такой поток уравнения, выведенные для потока с вертикальной плоскостью симметрии без членов, зависящих от кривизны линий тока осредненных скоростей, мы не сделаем ошибки ни в уравнении неразрывности, ни в динамическом уравнении. Справедливость этого утверждения в пределах, в которых приемлемы предположения об отсутствии влияния сил, вызываемых кривизной струй, и о горизонтальности сечения свободной поверхности потока плоскостью образующей, вытекает из теорем Гульдена об объеме и поверхности тел вращения. Течение в таком русле будет (в пределах действия указанных предположений) таким же, каким оно было бы в русле той же длины и уклона с направляющей, расположенной в вертикальной плоскости.

Но в действительности динамическая ось потока не лежит на поверхности, образуемой осью симметрии образующей, она отклоняется в сторону вогнутого берега (линия CD на фиг. 13). Поэтому возникает вопрос, как правильнее отсчитывать длины — по линии AB или по линии CD , а значит и определять сечение потока, которое должно быть нормально к линии отсчета длин. В случае правильного русла результаты расчета мало зависят от того, какой из этих линий отдать предпочтение.

С переходом к речным руслам, которые всегда имеют неправильную форму, также надо отсчитывать длины по линии фарватера. Однако здесь возникает осложнение: если в русле с неизменяющимся по длине сечением выпуклой формы линия фарватера всегда достаточно точно определяет направление течения, то в руслах неправильной формы такого положения может не быть. В реках с широкими поймами стрежень и фарватер в межень направлены в общем одинаково (фиг. 14, линия 1), в паводок же фарватер остается прежним (если пренебречь деформациями русла), а стрежень (линия 2) сильно спрямляется. Поэтому если в паводок отсчитывать расстояния по фарватеру, а сечения брать нормально к стрежню, не внося при этом никаких поправок в получающиеся таким путем характеристики русла, то мы рискуем получить преувеличение русловых емкостей, и как следствие, неправильный результат. Дело осложняется тем, что очерта-



Фиг. 14. Фарватер и стрежень в речном русле.
1 — меженное русло, 2 — линия стрежня в паводок, 3, 4 — границы пойменного русла.

ния линии стрежня при различных наполнениях русла различны, следовательно, будет различна и поправка для ликвидации указанного эффекта.

Рассмотрим два варианта описания паводка уравнениями гидравлической идеализации:

1) когда расстояния отмеряются по стрежню,

$$i_c - \frac{\partial H_c}{\partial x_c} = \frac{Q_c^2}{K_c^2} + \frac{U_c}{g} \cdot \frac{\partial U_c}{\partial x_c} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial U_c}{\partial t_c},$$

$$\frac{\partial Q_c}{\partial x_c} + \frac{\partial F_c}{\partial t_c} = 0;$$

2) когда расстояния отмеряются по фарватеру,

$$i_\phi - \frac{\partial H_\phi}{\partial x_\phi} = \frac{Q_\phi^2}{K_\phi^2} + \frac{U_\phi}{g} \cdot \frac{\partial U_\phi}{\partial x_\phi} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial U_\phi}{\partial t_\phi},$$

$$\frac{\partial Q_\phi}{\partial x_\phi} + \frac{\partial F_\phi}{\partial t_\phi} = 0.$$

Каждому из этих вариантов соответствуют свои характеристики русла.

Второй вариант можно рассматривать как модель первого, выполненную с искажением масштаба, т. е. так, что продоль-

ный масштаб не равен масштабу в плоскости поперечного сечения. Для этого положим:

$$\begin{aligned} H_{\phi} &= \beta_H H_c, & Q_{\phi} &= \beta_Q Q_c, & F_{\phi} &= \beta_H^2 F_c, \\ x_{\phi} &= \beta_x x_c, & K_{\phi} &= \beta_K K_c, & U_{\phi} &= \frac{\beta_Q}{\beta_H^2} U_c, \\ i_{\phi} &= \beta_i i_c, & t_{\phi} &= \beta_t t_c, \end{aligned}$$

где β — масштабные коэффициенты. Подставляя эти значения в уравнения второго варианта, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_i \beta_x}{\beta_H} i - \frac{\partial H_c}{\partial x_c} &= \frac{\beta_x \beta_Q^2}{\beta_H \beta_K^2} \cdot \frac{Q_c}{K_c^2} + \frac{\beta_Q^2}{\beta_H^5} \cdot \frac{U_c}{g} \cdot \frac{\partial U_c}{\partial x_c} + \frac{\beta_x \beta_Q}{\beta_i \beta_H} \cdot \frac{\partial U_c}{\partial t_c}, \\ \frac{\partial Q_c}{\partial x_c} + \frac{\beta_x \beta_H^2}{\beta_i \beta_Q} \cdot \frac{\partial F_c}{\partial t_c} &= 0. \end{aligned}$$

Для подобия нужно, чтобы эти уравнения совпали с уравнениями первого варианта, т. е. чтобы было

$$\frac{\beta_i \beta_x}{\beta_H} = \frac{\beta_x \beta_Q^2}{\beta_H \beta_K^2} = \frac{\beta_Q^2}{\beta_H^5} = \frac{\beta_x \beta_Q}{\beta_i \beta_H^3} = \frac{\beta_x \beta_H^2}{\beta_i \beta_Q} = 1.$$

Так как расходы и наполнения русла в обоих вариантах одинаковы, то $\beta_Q = \beta_H = 1$ и, следовательно,

$$\frac{\beta_i \beta_x}{\beta_H} = \frac{\beta_x}{\beta_K^2} = \frac{\beta_x}{\beta_t} = 1,$$

или

$$\beta_t = 1/\beta_x, \quad \beta_i = \beta_x, \quad \beta_K = \sqrt{\beta_x}.$$

Первые два соотношения указывают автоматически получающиеся масштабы уклона и времени: для более длинного русла время течет быстрее, чем для более короткого, ибо одни и те же явления в соответственных сечениях обоих вариантов наступают одновременно. Последнее же из этих соотношений указывает, что для соблюдения тождественности протекания процессов при переходе от одного варианта к другому фактическую пропускную способность русла нужно изменить в $\sqrt{\beta_x}$ раз.

Определение масштабного коэффициента β_x нужно производить по участкам (лучше всего скользящим вдоль линии стрежня), для различных наполнений русла, что дает возможность построить исправленные кривые пропускной способно-

сти K . Как видим, для других характеристик русла поправок не получается.

Разумеется, все описанное построение содержит в себе элемент неопределенности, связанный с тем, что линия стержня никогда не бывает точно известна, и ее приходится наносить несколько условно, сообразуясь с очертанием пойменного русла. Но эта неопределенность в рамках гидравлической идеализации совершенно неизбежна.

В условиях проектирования характеристики русла могут быть найдены только из топографических и гидрометрических изыскательских данных.

Для эксплуатирующейся ГЭС данные изысканий могут быть сильно устаревшими или их может вовсе не оказаться, а производство новых изысканий является трудоемкой, дорогостоящей и не всегда выполнимой операцией. Это объясняется тем, что гидрометрические методы построения кривых связи уровней с расходами, по которым строятся кривые пропускной способности русла K , предполагают выполнение измерений в условиях установившегося режима, которого в нижнем бьефе эксплуатирующейся ГЭС практически никогда не бывает и который может быть создан только искусственным переводом ГЭС в базис графика нагрузки на все время производства измерений. Все это заставляет искать иных путей определения исходных характеристик. Кроме того, нужно иметь в виду, что косвенные пути могут оказаться предпочтительнее, ибо определение исходных характеристик из материалов изысканий далеко не так надежно, как это принято думать. Дело в том, что уравнения Сен-Венана не учитывают наличия в естественном русле ветвлений на рукава, наличия застойных зон и зон обратных течений и аккумулирующего влияния пойм, связанного с гидрогеологической структурой и проявляющегося в аккумуляции части воды грунтом поймы при подъеме уровня и возврате этой воды в русло при спаде с некоторым отставанием от падения уровня. Геометрические характеристики речного русла (площадь сечения, ширина зеркала и т. д.) обычно очень резко колеблются по длине русла, и учесть все эти изменения в расчетах технически невозможно, поэтому геометрические характеристики неизбежно осредняются по тем или иным правилам, вытекающим не из существа дела, а из общих соображений, в конечном счете не очень обоснованных.

Исходные топографические и гидрометрические данные по руслу приурочены к определенному периоду выполнения изыскательских работ и не учитывают последующих деформаций русла, которые могут быть значительными. Гидрометрические данные по руслу представляются кривыми связи горизонтов с расходами, приуроченными к установившемуся режиму. Ме-

жду тем сопротивления русла в установившемся и неустановившемся режимах, вообще говоря, различны, и поэтому использование в расчетах нестационарных режимов кривых связи, относящихся к установившимся режимам, вносит определенные ошибки в результат. Для зимних же условий, когда река покрыта льдом, кривые связи вообще не могут быть построены с необходимой надежностью.

Можно принять гипотезу — влияние всех этих факторов может быть учтено надлежащим изменением коэффициентов уравнений Сен-Венана. Поскольку внести соответствующие коррективы в коэффициенты уравнений Сен-Венана расчетным путем, очевидно, невозможно, то остается только один путь — экспериментальный, заключающийся в определении этих коэффициентов на основании непосредственных замеров какого-либо определенного неустановившегося режима в натуре. При таком способе влияние всех перечисленных факторов на обобщенные характеристики русла учитывается автоматически, а необходимые полевые работы оказываются гораздо более простыми и требующими во много раз меньше времени, сил и средств, чем обычные изыскательские работы. Последнее особенно важно для расчета паводков, охватывающих речные участки очень большой протяженности.

Но значение рассматриваемой задачи не ограничивается только указанной ситуацией. Она представляет значительный интерес и как средство оценки тех предположений, которые принимаются при вычислении характеристик русла из топографических и гидрометрических материалов, где есть много неясных моментов, таких, например, как определение линии стрежня, о чем уже говорилось.

Излагаемое ниже никак не претендует на полное решение проблемы определения характеристик русла из наблюдений над неустановившимся режимом и должно рассматриваться лишь как характеристика возможного пути подхода к ее решению.

Напишем уравнения (7.17) и (7.18), причем будем пренебрегать для простоты инерционными членами

$$\lambda_1(s)h + 2\lambda_0(s)u + \frac{\partial h}{\partial s} + \lambda_2(s)h^2 + 2\lambda_1(s)hu + \lambda_0(s)u^2 = 0, \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + v_0(s)\frac{\partial h}{\partial \tau} + v_1(s)h\frac{\partial h}{\partial \tau}. \quad (12.2)$$

Пусть на основании непосредственных измерений колебаний уровня по длине L бьефа за время T получена функция $h(s, \tau)$ в виде семейства кривых, или в виде таблиц, или, наконец, в виде аналитической аппроксимации, а также функция $u(0, \tau)$. Требуется по этим данным определить коэффи-

коэффициенты $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, v_0, v_1$ уравнений (12.1) и (12.2). Из уравнения (12.2) имеем

$$u(s, \tau) = u(0, \tau) - \int_0^s [v_0(l) + v_1(l)h(l, \tau)] \frac{\partial h(l, \tau)}{\partial \tau} dl. \quad (12.3)$$

Обозначим через Φ результат подстановки $u(s, \tau)$ из формулы (12.3) в левую часть (12.1)

$$\begin{aligned} \Phi = & \lambda_1(s)h(s, \tau) + \lambda_2(s)h^2(s, \tau) + \frac{\partial h(s, \tau)}{\partial s} + 2[\lambda_0(s) + \\ & + \lambda_1(s)h(s, \tau)] \left\{ u(0, \tau) - \int_0^s [v_0(l) + v_1(l)h(l, \tau)] \frac{\partial h(l, \tau)}{\partial \tau} dl \right\} + \\ & + \lambda_0(s) \left\{ u(0, \tau) - \int_0^s [v_0(l) + v_1(l)h(l, \tau)] \frac{\partial h(l, \tau)}{\partial \tau} dl \right\}^2. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Если $u(0, \tau)$ и $h(s, \tau)$ заданы экспериментально, то Φ не будет тождественным нулем ни при каких $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, v_0, v_1$. Поэтому эти функции следует выбрать так, чтобы функция Φ как можно меньше уклонялась от нуля в том или ином смысле. Наиболее простые результаты получаются, если требовать наименьшего отклонения от нуля в смысле способа наименьших квадратов, т. е. если выдвинуть требование

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \Phi^2 ds d\tau = \min. \quad (12.5)$$

Как уже указывалось в § 10, рассматриваемая задача некорректна и поэтому на ее решение следует наложить дополнительные условия, вытекающие из смысла задачи. Так как нас интересуют сглаженные осредненные характеристики русла, то можно потребовать аналитичности решения. Можно пойти еще дальше и искать решение не в классе аналитических функций, а в более узком классе полиномов от s некоторой степени n , т. е. полагать, что оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_i(s) &= a_{i0} + a_{i1}s + \dots + a_{in}s^n, & i=0, 1, 2, \\ v_i(s) &= b_{i0} + b_{i1}s + \dots + b_{in}s^n, & i=0, 1. \end{aligned}$$

Тогда все дело сводится к определению коэффициентов a_{ij} и b_{ij} , обеспечивающих выполнение условия (12.5), т. е. к

решению системы алгебраических уравнений:

$$\int_0^1 \int_0^1 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}} ds d\tau = 0, \quad i=0, 1, 2; \quad j=0, 1, \dots, n,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial b_{ij}} ds d\tau = 0, \quad i=0, 1; \quad j=0, 1, \dots, n.$$

Мы рассмотрели простейший вариант задачи об определении исходных характеристик русла по наблюдениям над неустановившимся режимом. Более сложные ее варианты, например определение коэффициентов полных уравнений Сен-Венана, а не уравнений второго приближения, как это сделано здесь, решаются принципиально тем же путем. Однако на нынешней стадии изученности проблемы постановка более сложных задач вряд ли целесообразна. К ней можно будет перейти только после того, как рассмотренный простейший вариант будет всесторонне опробован на объекте, по которому будут иметься, с одной стороны, исчерпывающие морфометрические и гидрометрические данные, а с другой, результаты тщательных измерений неустановившегося движения в условиях специально поставленного эксперимента. Возможно, что такой объект целесообразно не искать в природе, а создать в лаборатории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кучмент Л. С. Об использовании электронных вычислительных машин непрерывного действия для расчета гидрографа стока. Метеорология и гидрология, № 12, 1962.
2. Франкль Ф. И. К теории движения взвешенных наносов. Тр. физ.-мат. фак-та Киргизского гос. ун-та, вып. 3, Фрунзе, 1955.
3. Хаскинд М. Д. К теории наносов. О движении тяжелой частицы в турбулентном потоке. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1956.
4. Михайлова Н. А. Перенос твердых частиц турбулентными потоками воды. Гидрометеиздат, Л., 1966.
5. Головин А. М., Левич В. Г., Толмачев В. В. Гидродинамика системы пузырей в жидкости малой вязкости. Журнал прикладной механики и технической физики, № 2, 1966.
6. Войнович В. А., Шварц А. И. Равномерное движение аэрированных водных потоков. Изв. НИИГ, т. 31, 1946.
7. Ведерников В. В., Мостицкий Н. В., Потапов М. В. Неустойчившееся движение водного потока в открытом русле. Изд. АН СССР, 1947.
8. Iwasa Y. The criterion for instability of steady uniform flows in open channels. Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ., 16, № 4, 1954.
9. Прандтль Л. Гидроаэродинамика. ИИЛ, 1949.
10. Исаченко Н. Б. Влияние шероховатости водосбросной поверхности на степень воздухомытия открытого потока. Изв. ВНИИГ, т. 78, 1965.
11. Гончаров В. Н. Основы динамики русловых потоков. Гидрометеиздат, 1954.
12. Федоров Е. П. Результаты натурных исследований катящихся волн на быстротоках. Тр. координационных совещаний по гидротехнике, вып. 7, Госэнергоиздат, 1963.
13. Образовский А. С. Применение степенной зависимости к построению модели структурного механизма открытого турбулентного потока. ВОДГЭО. Тр. гидравлической лаборатории, вып. 4, 1955.
14. Гавриленко В. А. Распределение осредненных скоростей в турбулентных равномерных потоках жидкости. Изв. НИИГ, т. 19, 1936.
15. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. ГТТИ, 1957.
16. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Изд. «Наука», М., 1966.
17. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ГТТИ, 1949.
18. Гутсон М. Г. Расчет неустойчившегося режима в нижнем бьефе гидроэлектростанции на быстродействующей цифровой машине. Тр. ВНИИЭ, т. 13, Госэнергоиздат, 1961.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Экспериментальная проверка критерия (4.18)

№ п/п	Облицовка	L	t	b м	m	H м	U м/сек.	$\frac{1}{\lambda^2}$	μ	α'	Ω			Знак
											$\alpha=1$	$\alpha=\alpha'$	$\alpha=2\alpha'-1$	
1	Брусчатка	150	0,603	2,50	1,5	0,04	10,00	0,003	1,609	1,010	0,372	0,35	0,330	+
2	Бетон и хорошая штукатурка	60	0,243	1,80	1,5	0,12	17,90	0,003	1,553	1,010	0,307	0,28	0,270	+
3	То же	1158	0,123	4,00	1,0	0,12	8,85	0,013	1,538	1,027	0,330	0,277	0,214	+
4	»	200	0,136	2,60	1 и 0	0,12	8,65	0,015	1,585	1,017	0,290	0,257	0,224	*
5	»	200	0,136	1,25	1 и 0	0,06	5,00	0,023	1,612	1,020	0,361	0,32	0,280	+
6	Каменная кладка	115	0,133	0,95	1,5	0,13	8,00	0,020	1,576	1,013	0,375	0,31	0,260	+
7	То же	212	0,203	0,95	1,5	0,10	5,15	0,023	1,576	1,023	0,332	0,28	0,230	+
8	Бетон и поврежденная штукатурка	670	0,046	4,00	1,14	0,06	6,57	0,022	1,547	1,017	0,332	0,29	0,254	+
9	Бетон, поврежденная штукатурка и водоросли	220	0,055	1,42	1,5	0,04	2,37	0,065	1,597	1,030	0,357	0,29	0,208	*
10	Бетон и поврежденная штукатурка	480	0,034	1,45	1,5	0,09	3,95	0,052	1,524	1,030	0,275	0,22	0,150	+
11	То же	680	0,023	1,55	1,5	0,12	3,25	0,109	1,623	1,030	0,357	0,29	0,230	+
12	»	100	0,053	1,90	1,0	0,22	5,10	0,078	1,577	1,027	0,333	0,27	0,214	+
						0,32	6,05	0,079	1,553	1,023	0,307	0,26	0,216	*
						0,10	2,50	0,147	1,564	1,120	0,318	0,07	-0,190	-
						0,15	3,23	0,127	1,519	1,070	0,270	0,13	-0,010	-
						0,14	1,85	0,355	1,564	1,080	0,318	0,15	-0,020	-
						0,15	1,50	0,490	1,562	1,080	0,317	0,15	-0,020	-
						0,10	3,30	0,086	1,583	1,040	0,340	0,26	0,170	+
						0,15	4,30	0,075	1,550	1,040	0,302	0,22	0,140	+

13	»	460	0,029	1,70	1,3	0,12	1,70	0,372	1,606	1,047	0,368	0,267	0,154	—
14	Бетон и поврежденная штукатурка	950	0,032	2,30	1,5	0,20	2,10	0,390	1,547	1,033	0,300	0,24	0,165	—
15	Каменная кладка	90	0,104	0,5	1,5	0,42	5,45	0,114	1,454	1,070	0,207	0,08	—0,050	—
16	То же	176,5	0,068	0,5	1,5	0,060	3,00	0,064	1,476	1,05	0,227	0,13*	0,04	—
17	Бетонные плиты	240	0,035	0,5	1,5	0,140	4,13	0,062	1,415	1,05	0,172	0,08*	—0,01	—
18	То же	490	0,0145	0,5	1,5	0,060	2,87	0,070	1,463	1,05	0,215	0,12*	0,02	—
19	Каменная кладка	30	0,017	0,5	1,5	0,160	4,00	0,075	1,397	1,05	0,158	0,07	—0,02	—
20	Бетонные плиты	93	0,043	0,5	1,5	0,080	2,83	0,083	1,442	1,05	0,196	0,10*	0,01	—
21	Бетон и поврежденная штукатурка	120	0,0108	0,4	1	0,140	3,47	0,089	1,394	1,05	0,156	0,06	—0,02	—
22	Бетон и поврежденная штукатурка	600	0,148	1,9	1 и 0	0,100	2,13	0,190	1,401	1,05	0,161	0,08	—0,02	—
23	Бетон	1160	0,212	1,8	0	0,180	2,68	0,185	1,369	1,05	0,136	0,06	—0,04	—
24	Бетон	1240	0,025	2,90	1,25	0,150	2,26	0,223	1,391	1,05	0,153	0,07	—0,02	—
						0,280	2,85	0,235	1,358	1,05	0,128	0,04	—0,04	—
						0,100	3,30	0,079	1,408	1,05	0,167	0,07	—0,02	—
						0,240	4,04	0,102	1,363	1,05	0,132	0,05	—0,04	—
						0,088	1,07	0,640	1,459	1,05	0,211	0,12	—0,02	—
						0,154	1,38	0,620	1,404	1,06	0,163	0,06	—0,05	—
						0,107	6,69	0,023	1,574	1,04	0,330	0,25	0,16	—
						0,150	6,91	0,030	1,546	1,03	0,298	0,23	0,17	—
						0,162	7,98	0,024	1,539	1,023	0,290	0,24	0,196	—
						0,300	9,00	0,036	1,522	1,033	0,273	0,21	0,140	—
						0,390	10,30	0,035	1,486	1,033	0,236	0,17	0,110	—
						0,390	5,14	0,122	1,483	1,021	0,235	0,190*	0,150*	—
25	Бетон и поврежденная штукатурка	48	0,101	0,5	53,5	0,052	2,45	0,054	1,431	1,057	0,186	0,077*	—0,025	—
26	То же	88	0,045	0,39	61	0,069	2,82	0,056	1,445	1,073	0,198*	0,063*	—0,075	—
27	Неровный бетон	255	0,050	2,5	77	0,082	2,45	0,092	1,422	1,070	0,178*	0,050	—0,080	—
					88	0,109	2,98	0,084	1,415	1,047	0,172*	0,087*	—0,005	—
					70	0,340	5,53	0,0785	1,463	1,053	0,215*	0,110*	0,010	—
					74,5	0,400	5,95	0,0785	1,455	1,047	0,207*	0,117*	0,030	—

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Правая часть критерия (6.10) $f(m, \alpha, \eta)$

η	m							
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3

$\alpha = 1,0$

0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,01	3,340	3,334	3,332	3,334	3,339	3,346	3,394	3,453
0,02	3,074	3,063	3,059	3,062	3,070	3,091	3,164	3,264
0,03	2,965	2,949	2,944	2,947	2,957	2,972	3,084	3,215
0,04	2,916	2,894	2,886	2,889	2,901	2,919	3,055	3,213
0,05	2,897	2,869	2,858	2,861	2,874	2,895	3,051	3,230
0,06	2,896	2,862	2,848	2,850	2,864	2,887	3,160	3,255
0,07	2,907	2,866	2,849	2,850	2,864	2,889	3,076	3,284
0,08	2,926	2,879	2,858	2,857	2,872	2,898	3,096	3,314
0,09	2,952	2,897	2,872	2,870	2,884	2,911	3,118	3,343
0,10	2,983	2,921	2,890	2,886	2,900	2,927	3,142	3,371
0,12	3,057	2,977	2,936	2,927	2,939	2,966	3,185	3,422
0,14	3,141	3,042	2,990	2,974	2,983	3,009	3,233	3,465
0,16	3,234	3,113	3,048	3,024	3,029	3,053	3,274	3,500
0,18	3,333	3,188	3,109	3,177	3,077	3,098	3,311	3,529
0,20	3,437	3,267	3,172	3,131	3,124	3,141	3,344	3,561
0,22	3,545	3,348	3,236	3,184	3,171	3,183	3,373	3,569
0,24	3,657	3,430	3,300	3,237	3,217	3,224	3,399	3,582
0,26	3,773	3,513	3,364	3,288	3,360	3,362	3,520	3,591
0,28	3,891	3,597	3,427	3,339	3,303	3,298	3,439	3,597
0,30	4,013	3,681	3,490	3,388	3,343	3,333	3,455	3,601
0,32	4,137	3,765	3,551	3,436	3,382	3,365	3,468	3,602
0,34	4,263	3,849	3,612	3,482	3,519	3,395	3,480	3,602
0,36	4,391	3,933	3,671	3,527	3,453	3,423	3,489	3,600
0,38	4,522	4,016	3,729	3,569	3,587	3,450	3,496	3,597
0,40	4,654	4,099	3,785	3,610	3,518	3,474	3,502	3,593
0,42	4,789	4,181	3,940	3,750	3,547	3,496	3,506	3,587
0,44	4,925	4,262	3,893	3,688	3,575	3,517	3,510	3,581
0,46	5,064	4,342	3,945	3,730	3,702	3,537	3,512	3,675
0,48	5,204	4,421	3,996	3,759	3,626	3,555	3,513	3,568
0,50	5,345	4,500	4,045	3,792	3,750	3,572	3,513	3,560
0,52	5,489	4,577	4,093	3,823	3,672	3,587	3,512	3,553
0,54	5,634	4,654	4,139	3,853	3,692	3,601	3,511	3,545
0,56	5,780	4,729	4,183	3,882	3,712	3,614	3,509	3,536
0,58	5,928	4,803	4,226	3,909	3,730	3,626	3,507	3,528
0,60	6,078	4,876	4,268	3,935	3,747	3,637	3,504	3,519
0,62	6,229	4,947	4,308	3,960	3,762	3,647	3,501	3,511
0,64	6,382	5,018	4,347	3,984	3,777	3,657	3,498	3,502
0,66	6,536	5,087	4,385	4,006	3,791	3,665	3,494	3,593
0,68	6,692	5,155	4,421	4,027	3,804	3,672	3,489	3,484
0,70	6,848	5,222	4,456	4,048	3,816	3,679	3,485	3,576
0,72	7,007	5,287	4,490	4,067	3,827	3,685	3,480	3,467
0,74	7,166	5,351	4,522	4,085	3,837	3,691	3,476	3,458
0,76	7,328	5,414	4,554	4,102	3,847	3,696	3,471	3,449
0,78	7,490	5,476	4,584	4,119	3,856	3,700	3,465	3,447

Продолжение

η	m							
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
0,80	7,654	5,536	4,613	4,134	3,864	3,704	3,460	3,432
0,82	7,819	5,596	4,641	4,149	3,872	3,708	3,455	3,424
0,84	7,985	5,654	4,668	4,163	3,879	3,711	3,449	3,415
0,86	8,152	5,710	4,694	4,176	3,886	3,713	3,444	3,407
0,88	8,321	5,766	4,719	4,188	3,891	3,715	3,438	3,398
0,90	8,491	5,920	4,743	4,200	3,897	3,717	3,432	3,390
0,92	8,663	5,873	4,766	4,211	3,902	3,718	3,427	3,382
0,94	8,836	5,925	4,788	4,221	3,906	3,719	3,421	3,374
0,96	9,009	5,976	4,809	4,831	3,911	3,720	3,415	3,366
0,98	9,184	6,026	4,830	4,241	3,914	3,721	3,409	3,358
1	9,360	6,074	4,849	4,249	3,918	3,721	3,403	3,350

$\alpha = 1,02$

η	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$\pm$
0,01	3,537	3,531	3,529	3,532	3,537	3,545	3,601	3,670
0,02	3,260	3,249	3,245	3,249	3,259	3,272	3,370	3,486
0,03	3,151	3,134	3,129	3,133	3,146	3,164	3,296	3,452
0,04	3,104	3,081	3,073	3,078	3,093	3,115	3,277	3,466
0,05	3,089	3,060	3,049	3,054	3,071	3,097	3,285	3,501
0,06	3,093	3,067	3,044	3,049	3,067	3,095	3,305	3,544
0,07	3,111	3,068	3,051	3,054	3,074	3,104	3,334	3,591
0,08	3,138	3,087	3,066	3,068	3,088	3,121	3,367	3,639
0,09	3,172	3,113	3,087	3,088	3,108	3,142	3,402	3,686
0,10	3,211	3,143	3,113	3,112	3,132	3,167	3,438	3,731
0,12	3,303	3,216	3,174	3,168	3,187	3,223	3,510	3,813
0,14	3,408	3,399	3,345	3,232	3,248	3,384	3,579	3,886
0,16	3,523	3,389	3,321	3,300	3,312	3,347	3,643	3,947
0,18	3,647	3,586	3,500	3,370	3,378	3,410	3,703	4,000
0,20	3,777	3,586	3,483	3,442	3,443	3,472	3,756	4,044
0,22	3,914	3,789	3,566	3,514	3,508	3,532	3,904	4,080
0,24	4,057	3,795	3,651	3,585	3,571	3,590	3,848	4,110
0,26	4,205	3,903	3,735	3,656	3,633	3,746	3,886	4,134
0,28	4,359	4,013	3,820	3,725	3,692	3,700	3,920	4,153
0,30	4,518	4,124	3,904	3,794	3,751	3,750	3,951	4,168
0,32	4,682	4,236	3,987	3,860	3,807	3,798	3,977	4,180
0,34	4,851	4,349	4,070	3,925	3,860	3,844	4,000	4,189
0,36	5,025	4,462	4,151	3,988	3,911	3,887	4,021	4,195
0,38	5,204	4,576	4,232	4,049	3,960	3,927	4,038	4,198
0,40	5,388	4,690	4,311	4,108	4,007	3,966	4,053	4,200
0,42	5,577	4,804	4,388	4,165	4,052	4,002	4,066	4,200
0,44	5,772	4,918	4,464	4,221	4,094	4,035	4,077	4,199
0,46	5,972	5,031	4,539	4,274	4,135	4,067	4,086	4,196
0,48	6,178	5,145	4,611	4,325	4,173	4,097	4,094	4,193
0,50	6,389	5,258	4,683	4,375	4,210	4,125	4,100	4,189
0,52	6,606	5,371	4,752	4,422	4,244	4,151	4,105	4,183
0,54	6,829	5,483	4,820	4,468	4,277	4,175	4,104	4,178
0,56	7,059	5,595	4,886	4,512	4,308	4,198	4,112	4,171
0,58	7,295	5,706	4,961	4,554	4,338	4,219	4,113	4,164
0,60	7,538	5,816	5,014	4,595	4,365	4,239	4,114	4,157

Продолжение

η	m							
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
0,62	7,788	5,925	5,075	4,633	4,392	4,257	4,115	4,150
0,64	8,045	7,200	5,134	4,670	4,416	4,274	4,114	4,142
0,66	8,310	6,141	5,192	4,706	4,440	4,290	4,113	4,134
0,68	8,583	6,247	5,248	4,740	4,462	4,304	4,111	4,125
0,70	8,865	6,353	5,302	4,772	4,483	4,318	4,109	4,117
0,72	9,156	6,457	5,355	4,803	4,502	4,390	4,106	4,108
0,74	9,456	6,560	5,506	4,833	4,521	4,342	4,103	4,100
0,76	9,765	6,662	5,456	4,861	4,538	4,353	4,100	4,091
0,78	10,086	6,763	5,504	4,888	4,554	4,362	4,096	4,082
0,80	10,417	6,862	5,550	4,914	4,569	4,371	4,092	4,074
0,82	10,760	6,960	5,595	4,938	4,583	4,379	4,088	4,065
0,84	11,160	7,057	5,639	4,962	4,597	4,387	4,084	4,056
0,86	11,485	7,152	5,680	4,984	4,609	4,394	4,079	4,047
0,88	11,868	7,246	5,721	5,005	4,621	4,400	4,074	4,038
0,90	12,267	7,339	5,760	5,025	4,632	4,403	4,069	4,030
0,92	12,681	7,430	5,798	5,044	4,642	4,410	4,064	4,021
0,94	13,114	7,520	5,935	5,062	4,651	4,415	4,059	4,012
0,96	13,565	7,608	5,870	5,080	4,660	4,419	4,053	4,004
0,98	14,036	7,695	5,904	5,096	4,668	4,422	4,048	3,995
1,00	14,530	7,784	5,936	5,113	4,676	4,425	4,042	3,987

$\alpha = 1,04$

0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,01	3,772	3,766	3,765	3,768	3,775	3,784	3,852	3,932
0,02	3,485	3,473	3,471	3,476	3,486	3,504	3,621	3,761
0,03	3,376	3,358	3,354	3,360	3,376	3,398	3,559	3,749
0,04	3,333	3,309	3,302	3,310	3,329	3,357	3,556	3,790
0,05	3,325	3,294	3,284	3,293	3,315	3,347	3,581	3,853
0,06	3,338	3,299	3,287	3,295	3,320	3,356	3,621	3,927
0,07	3,365	3,319	3,302	3,310	3,337	3,377	3,670	4,005
0,08	3,403	3,348	3,327	3,335	3,363	3,406	3,723	4,083
0,09	3,448	3,384	3,359	3,365	3,394	3,440	3,780	4,161
0,10	3,501	3,426	3,396	3,400	3,430	3,478	3,837	4,237
0,12	3,621	3,524	3,482	3,481	3,5011	3,563	3,953	4,379
0,14	3,757	3,634	3,578	3,571	3,600	3,653	4,066	4,509
0,16	3,908	3,755	3,682	3,668	3,693	3,746	4,174	4,626
0,18	4,070	3,884	3,792	3,767	3,789	3,841	4,276	4,729
0,20	4,244	4,020	3,906	3,870	3,885	3,935	4,370	4,971
0,22	4,429	4,162	4,024	3,974	3,982	4,027	4,459	4,901
0,24	4,625	4,309	4,143	4,078	4,078	4,118	4,540	4,971
0,26	4,832	4,461	4,265	4,183	4,172	4,207	4,615	5,132
0,28	5,050	4,617	4,388	4,287	4,266	4,293	4,684	5,085
0,30	5,280	4,778	4,513	4,391	4,357	4,377	4,747	5,131
0,32	5,522	4,943	4,638	4,493	4,446	4,458	4,805	5,171
0,34	5,778	5,112	4,763	4,595	4,534	4,535	4,857	5,204
0,36	6,047	5,285	4,889	4,695	4,619	4,610	4,905	5,233
0,38	6,332	5,462	5,015	4,794	4,701	4,682	4,948	5,258
0,40	6,633	5,642	5,141	4,891	4,781	4,751	4,988	5,278
0,42	6,952	5,826	5,267	4,987	4,859	4,817	5,124	5,295

Продолжение

η	m							
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
0,44	7,292	6,014	5,392	5,080	4,934	4,880	5,056	5,309
0,46	7,653	6,206	5,517	5,172	5,007	4,941	5,085	5,321
0,48	8,039	6,402	5,641	5,262	5,007	4,998	5,111	5,330
0,50	8,452	6,601	5,765	5,350	5,145	5,000	5,135	5,336
0,52	8,896	6,804	5,887	5,435	5,210	5,105	5,156	5,341
0,54	9,376	7,011	6,009	5,519	5,332	5,155	5,176	5,345
0,56	9,897	7,222	6,130	5,600	5,333	5,202	5,191	5,346
0,58	10,466	7,437	6,249	5,680	5,391	5,247	5,206	5,347
0,60	11,090	7,655	6,367	5,757	5,447	5,290	5,219	5,346
0,62	11,780	7,878	6,484	5,832	5,500	5,330	5,230	5,344
0,64	12,551	8,105	6,600	5,905	5,552	5,369	5,240	5,342
0,66	13,421	8,336	6,714	5,975	5,601	5,505	5,248	5,338
0,68	14,413	8,572	6,827	6,044	5,648	5,439	5,256	5,334
0,70	15,565	8,811	6,938	6,111	5,693	5,472	5,262	5,329
0,72	16,926	9,055	7,047	6,175	5,736	5,502	5,267	5,324
0,74	18,574	9,304	7,155	6,237	5,777	5,531	5,271	5,318
0,76	20,638	9,557	7,260	6,298	5,816	5,559	5,274	5,312
0,78	23,340	9,914	7,365	6,356	5,854	5,584	5,277	5,305
0,80	27,127	10,077	7,467	6,412	5,890	5,609	5,278	5,298
0,82	33,059	11,344	7,568	6,466	5,924	5,732	5,279	5,291
0,84	44,684	10,616	7,666	6,519	5,956	5,653	5,279	5,283
0,86	93,642	10,893	7,763	6,569	5,987	5,673	5,279	5,275
0,88	—	11,175	7,858	6,618	6,016	5,692	5,278	5,267
0,90	—	11,463	7,951	6,665	6,044	5,710	5,277	5,259
0,92	—	11,755	8,041	6,710	6,071	5,726	5,275	5,251
0,94	—	13,053	8,130	6,753	6,096	5,742	5,273	5,242
0,96	—	12,357	8,217	6,795	6,120	5,756	5,270	5,234
0,98	—	13,667	8,301	6,835	6,142	5,770	5,267	5,225
1	—	12,982	8,384	6,873	6,163	5,782	5,264	5,216

$\alpha = 1,06$

0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,01	4,063	4,056	4,056	4,060	4,069	4,086	4,162	4,261
0,02	3,764	3,751	3,750	3,758	3,773	3,793	3,939	4,113
0,03	3,657	3,638	3,635	3,645	3,666	3,694	3,897	4,140
0,04	3,622	3,596	3,591	3,604	3,629	3,665	3,921	4,226
0,05	3,625	3,592	3,584	3,598	3,628	3,670	3,976	4,340
0,06	3,751	3,709	3,599	3,614	3,748	3,796	4,049	4,468
0,07	3,694	3,643	3,629	3,644	3,682	3,736	4,133	4,604
0,08	3,748	3,688	3,669	3,685	3,726	3,786	4,225	4,744
0,09	3,813	3,741	3,718	3,733	3,777	3,842	4,320	4,885
0,10	3,886	3,802	3,774	3,788	3,834	3,903	4,419	5,027
0,12	4,052	3,941	3,900	3,911	3,960	4,038	4,623	5,307
0,14	4,242	4,099	4,041	4,047	4,099	4,182	4,828	5,580
0,16	4,454	4,273	4,196	4,194	4,245	4,334	5,034	5,843
0,18	4,687	4,462	4,361	4,349	4,399	4,491	5,237	6,096
0,20	4,943	4,664	4,535	4,511	4,557	4,652	5,437	6,337
0,22	5,222	4,880	4,719	4,679	4,720	4,815	5,633	6,567
0,24	5,527	5,110	4,911	4,853	4,886	4,980	5,823	6,784

Продолжение

η	m							
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
0,26	5,860	5,355	5,112	5,031	5,156	5,14	6,009	6,991
0,28	6,226	5,616	5,321	5,215	5,227	5,314	6,190	7,185
0,30	6,629	5,892	5,538	5,403	5,401	5,582	6,365	7,369
0,32	7,076	6,187	5,764	5,596	5,577	5,650	6,535	7,543
0,34	7,576	6,502	6,000	5,793	5,755	5,819	6,699	7,706
0,36	8,140	6,839	6,245	5,994	5,934	5,987	6,857	7,859
0,38	8,784	7,301	6,500	6,200	6,116	6,155	7,010	8,003
0,40	9,529	7,590	6,765	6,410	6,298	6,323	7,157	8,138
0,42	10,407	8,012	7,042	6,625	6,482	6,490	7,299	8,264
0,44	11,468	8,470	7,331	6,844	6,667	6,657	7,435	8,383
0,46	12,790	8,971	7,633	7,068	6,853	6,822	7,566	8,493
0,48	14,512	9,523	7,950	7,297	7,041	6,987	7,602	8,597
0,50	16,904	10,604	8,182	7,531	7,229	7,151	7,813	8,693
0,52	20,601	10,824	8,631	7,769	7,418	7,314	7,929	8,783
0,54	27,643	11,604	8,998	8,013	7,608	7,475	8,040	8,867
0,56	53,540	12,501	9,386	8,263	7,799	7,636	8,116	8,945
0,58	—	13,551	9,797	8,518	7,990	7,795	8,247	9,018
0,60	—	14,808	10,233	8,778	8,183	7,952	8,344	0,085
0,62	—	17,355	10,698	9,145	8,375	8,108	8,437	9,148
0,64	—	18,338	11,194	9,318	8,568	8,262	8,526	9,206
0,66	—	21,025	11,727	9,597	8,762	8,415	8,610	9,260
0,68	—	25,002	12,302	9,884	8,956	8,566	8,691	9,310
0,70	—	31,906	13,926	10,177	9,150	8,715	8,767	9,356
0,72	—	49,596	13,605	10,478	9,345	8,862	8,840	9,399
0,74	—	—	15,351	10,786	9,539	9,008	8,910	9,438
0,76	—	—	15,177	11,102	9,733	9,151	8,976	9,474
0,78	—	—	16,098	11,427	9,928	9,292	9,139	9,507
0,80	—	—	17,138	11,760	10,122	9,431	9,099	9,538
0,82	—	—	18,326	12,103	11,316	9,568	9,156	9,566
0,84	—	—	19,706	12,456	10,509	9,702	9,209	9,591
0,86	—	—	21,338	12,818	11,703	9,935	9,260	9,615
0,88	—	—	23,319	13,192	10,895	9,964	9,308	9,636
0,90	—	—	25,803	13,576	11,087	10,092	9,354	9,656
0,92	—	—	29,6064	13,373	11,278	10,217	9,397	9,673
0,94	—	—	33,644	15,382	11,468	10,340	9,538	9,689
0,96	—	—	40,834	14,804	11,657	10,460	9,477	9,703
0,98	—	—	55,922	15,240	11,846	10,578	9,514	9,716
1	—	—	11,329	15,691	12,033	10,693	9,548	9,727

$\alpha = 1,08$

0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,01	4,432	4,425	4,426	4,432	4,444	4,459	4,563	4,689
0,02	4,123	4,110	4,110	4,121	4,142	4,169	4,358	4,588
0,03	4,023	4,003	4,002	4,018	4,046	4,084	4,355	4,685
0,04	4,002	3,975	3,973	3,992	4,028	4,077	4,421	4,851
0,05	4,024	3,988	3,984	4,007	4,050	4,110	4,539	5,075
0,06	4,073	4,028	4,021	4,047	4,098	4,167	4,676	5,321
0,07	4,142	4,086	4,076	4,105	4,162	4,242	4,833	5,591
0,08	4,227	4,159	4,145	4,175	4,240	4,330	5,004	5,883

Продолжение

η	m							
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
0,09	4,324	4,243	4,225	4,257	4,388	4,428	5,188	6,196
0,10	4,434	4,338	4,314	4,348	4,425	4,536	5,384	6,532
0,12	4,685	4,564	4,517	4,552	4,642	4,773	5,811	7,279
0,14	4,980	4,805	4,749	4,783	4,885	5,038	6,286	8,149
0,16	5,319	5,088	5,008	5,040	5,153	5,329	6,816	9,186
0,18	5,710	5,408	5,397	5,323	5,447	5,647	7,409	11,476
0,20	6,160	5,768	5,617	5,633	5,769	5,994	8,083	12,152
0,22	6,686	6,173	5,972	5,974	6,120	6,374	8,861	15,511
0,24	7,307	6,635	6,366	6,949	6,505	6,791	9,778	18,301
0,26	8,056	7,164	6,807	6,765	6,931	7,352	10,891	26,382
0,28	8,986	7,781	7,309	7,230	7,404	7,766	12,293	12,317
0,30	10,186	8,513	7,881	7,752	7,934	8,346	14,160	—
0,32	11,830	9,402	8,545	8,348	8,537	9,008	16,864	—
0,34	14,308	10,519	9,331	9,037	9,330	9,778	21,400	—
0,36	18,778	11,992	10,284	9,849	10,045	10,691	32,091	—
0,38	31,949	14,076	11,481	10,831	11,023	11,805	—	—
0,40	—	17,406	13,056	12,058	12,236	13,214	—	—
0,42	—	24,252	15,283	13,661	13,806	15,096	—	—
0,44	—	65,552	18,833	15,905	15,907	17,817	—	—
0,46	—	—	26,085	19,420	19,271	22,347	—	—
0,48	—	—	67,143	26,305	25,382	32,673	—	—
0,50	—	—	—	55,462	45,088	—	—	—
0,52	—	—	—	—	—	—	—	—

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Уравнения неустановившегося потока в гидравлической идеализации	7
§ 1. Неаэрированный поток	—
§ 2. Гидродинамические уравнения аэрированного потока	17
§ 3. Гидравлические уравнения аэрированного потока	25
Глава II. Устойчивость установившегося течения	40
§ 4. Гидравлические концепции теории устойчивости. Устойчивость неаэрированного потока	—
§ 5. Критерий затухания бегущих волн в аэрированном потоке	48
§ 6. Анализ критерия затухания бегущих волн	53
Глава III. Прямые методы в речной гидравлике	58
§ 7. Общая характеристика методов решения задач неустановившихся потоков	—
§ 8. Периодические движения	65
§ 9. Движение волны паводка	76
Глава IV. Некоторые обратные задачи	89
§ 10. Общие замечания	—
§ 11. Оптимизационная задача и график попусков, обеспечивающий непревышение заданных пределов колебаний уровня в русле ниже водохранилища	91
§ 12. Об определении исходных характеристик русла	108
Литература	116
Приложения	117
I. Экспериментальная проверка критерия (4.18)	118
II. Правая часть критерия (6.10)	120

Картвелишвили Николай Арчилович

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ОТКРЫТЫЕ ПОТОКИ

Редактор З. М. Кожина

Худож. редактор В. А. Евтихийев

Художник Ю. С. Детинкин

Техн. редактор Г. В. Ивкова

Корректор Н. И. Оршер

Сдано в набор 24/X 1967 г.
Подписано к печати 29/III 1968 г.
Бум. тип № 1 60X90^{1/8}
Бум. л. 4. Печ. л. 8. Уч.-изд. л. 8,23.
Тираж 1100 экз.
М-21791 Индекс ГЛ-164

Гидрометеорологическое издательство.
Ленинград, В-53. 2-я линия, д. № 23.
Заказ № 946. Цена 52 к.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО**
• готовит к выпуску в 1968 г. монографии
по гидрологии

Железняков Г. В., проф., д-р техн. наук.

Теоретические основы гидрометрии. 15 л. 95 коп. III кв. 2-9-6.

В книге обобщены и развиты вопросы теории гидрометрии. Большое внимание уделяется гидравлическому обоснованию способов производства гидрометрических работ на реках, а также каналах. Дан гидромеханический анализ показаний приборов для измерения скоростей движения воды, в том числе и в условиях нестационарных течений жидкости.

Рассчитана на специалистов в области гидрологии, гидравлики, гидротехники, строительства мостов и тоннелей, а также на аспирантов и студентов старших курсов высших учебных заведений.

Знаменская Н. С., канд. техн. наук.

Грядовое движение речных наносов. 10 л. 60 коп. II кв. 2-9-6.

В монографии устанавливаются основные закономерности движения гряд, предлагается классификация микроформ, которая увязывается с типизацией средних форм и типизацией руслового процесса. Количественные критерии этой классификации позволили связать форму гряд с гидравлической формой потока и характеристиками наносов, а также придать гидравлический аспект типизации руслового процесса. Использование этой зависимости позволило по-иному решить ряд практических задач, среди которых: расход донных наносов, потери энергии, деформации русла и моделирование на размываемых моделях. Монография рассчитана на инженеров-гидрологов, гидравликов, гидротехников и научных сотрудников, работающих в области руслового процесса, а также на студентов указанных специальностей.

Ковзель А. Г., канд. техн. наук.

Исследования по программе Международного гидрологического десятилетия в СССР. 3 л. 35 коп. III кв. 2-9-6.

Обзор содержит краткие резюме предварительных итогов исследовательских гидрологических работ, выполненных различными гидрологическими научно-исследовательскими, проектными и учебными учреждениями СССР по программе МГД в первые три года Гидрологического десятилетия.

Рассчитан на гидрологов.

Корзун В. И., канд. геогр. наук.

Сток и потери талых вод на склонах полевых водосборов. 7 л. 55 коп. II кв. 2-9-6.

Рассмотрено влияние малоизученных факторов — длины и экспозиции склона — на формирование, ход и величины стока талых вод на склонах (необлесенных) водосборов.

В работе использованы материалы наблюдений и экспериментальных исследований Валдайской научно-исследовательской гидрологической лаборатории ГГИ за 1950—1964 гг.

Рассчитана на гидрологов и агрометеорологов.

*Заказы на эти книги просим направлять по адресу:
г. Ленинград, П-101, Большой пр., дом 57, магазин № 15 Ленкниги.*

ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ