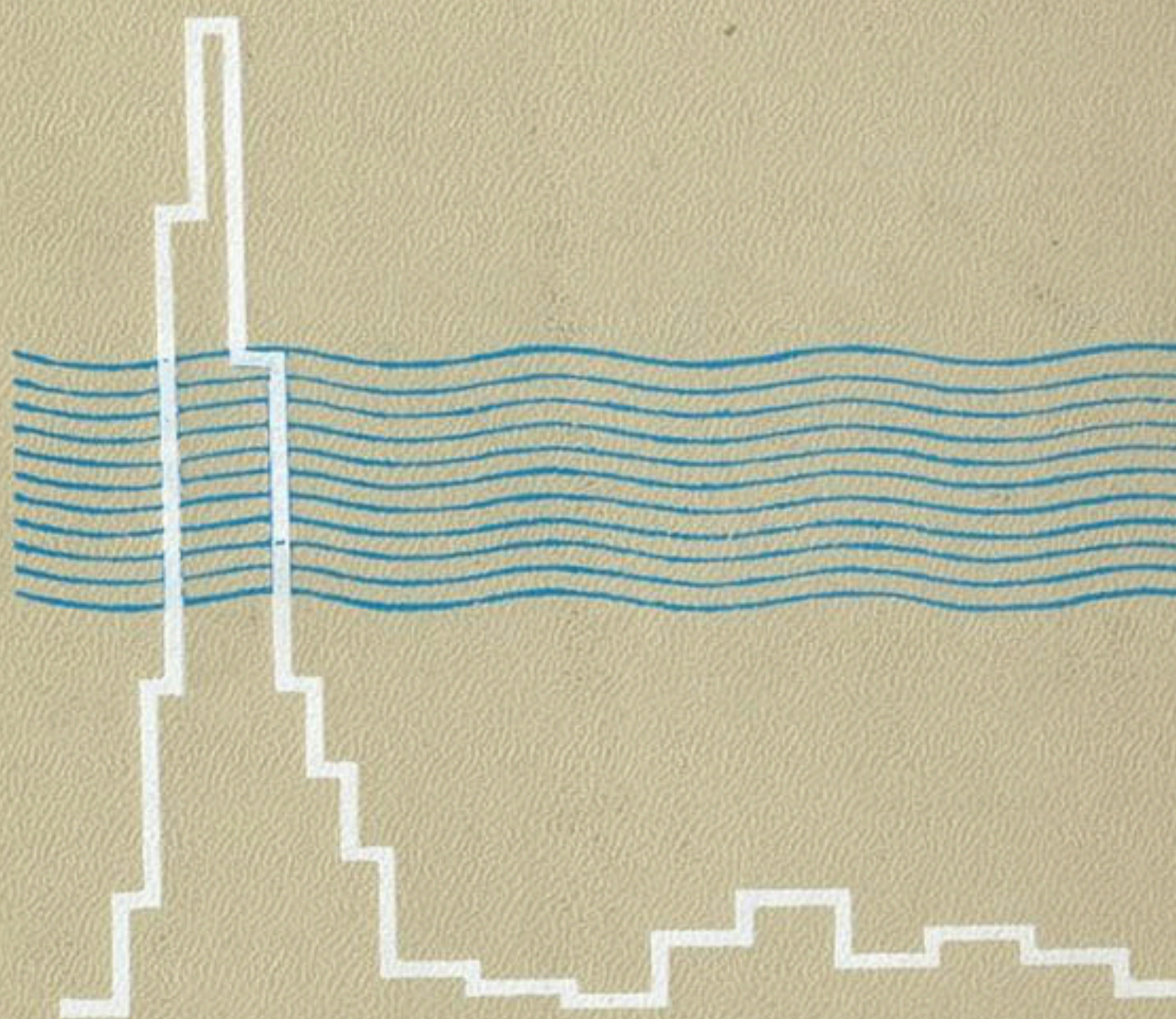


**ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ
РАСЧЕТЫ
МЕТОДОМ
МОНТЕ-КАРЛО**



2 МИНИСТЕРСТВО ЭНЕРГЕТИКИ
И ЭЛЕКТРИФИКАЦИИ СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПРОЕКТНО-ИЗЫСКАТЕЛЬСКИЙ И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ИНСТИТУТ ЭНЕРГОСЕТЬПРОЕКТ

ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Под редакцией А. Ш. РЕЗНИКОВСКОГО



«ЭНЕРГИЯ»

МОСКВА 1969

Книга написана авторским коллективом под руководством А. Ш. Резниковского. Отдельные разделы написали: С. П. Гладкова — § 4-4, 4-5, В. В. Зубарев — § 2-3, С. Г. Костина — § 1-3, 1-5, 1-6, 2-4, 3-3, приложение II, Л. А. Малкина — § 1-2, 1-4, 5-3, приложения III и IV, Л. А. Мошкович — § 5-1, А. Ш. Резниковский — § 1-1, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, гл. 2, 3, 4, § 5-1, 5-2, 5-4, 5-5, 6-1, гл. 7, М. И. Рубинштейн — § 4-3, 5-1, гл. 6, И. Ю. Соловьева — § 1-2, 2-2, 3-4, 4-3, 7-2, 7-4, приложение I.

В книге приведены результаты исследований по применению метода Монте-Карло с использованием ЭЦВМ для водноэнергетических, водохозяйственных и гидрологических расчетов.

Рассмотрены вопросы выбора теоретических законов распределения вероятностей, оценки основных статистических параметров и схем математического описания процесса речного стока. Разработаны способы применения метода Монте-Карло и ЭЦВМ для моделирования искусственных гидрологических рядов и проведения по ним расчетов регулирования речного стока в простых и сложных водохозяйственных и энергетических системах с помощью ЭЦВМ.

Особое внимание уделено разработке методологии учета динамики развития систем при проведении водноэнергетических и водохозяйственных расчетов. Разработаны методологические основы, стандартные элементы программ и общие схемы проведения водноэнергетических расчетов на ЭЦВМ. Приведены алгоритмы и программы получения на ЭЦВМ коррелированных случайных чисел с различными законами распределения вероятностей.

Книга рассчитана на проектировщиков, эксплуатационников и научных работников, работающих в области гидроэнергетики, общей энергетики, водного хозяйства и гидрологии. Она также представит интерес для преподавателей, аспирантов и студентов высших учебных заведений и широкого круга специалистов указанного профиля.

ПРЕДИСЛОВИЕ

При проектировании отдельных гидроэлектростанций или каскадов гидроэлектростанций, предназначенных для работы в крупных водохозяйственных и объединенных энергетических системах, существенное место занимают водноэнергетические и водохозяйственные расчеты. Эти расчеты проводятся для выявления оптимальных параметров и режимов работы ГЭС и их водохранилищ в системах с целью определения водноэнергетических и водохозяйственных показателей гидроузлов.

Проведение водноэнергетических и водохозяйственных расчетов в сложных системах с помощью обычных методов и вычислительных средств стало в последнее время затруднительным. С укрупнением и усложнением систем эти расчеты требуют все больших затрат времени проектировщиков и эксплуатационников на проведение многочисленных, достаточно сложных, однообразных и утомительных вычислений. Механизация водноэнергетических и водохозяйственных расчетов, перевод их на современные электронные цифровые вычислительные машины в настоящее время необходимы.

ЭЦВМ начали применяться при проведении различных видов расчетов регулирования речного стока более 10 лет назад. В настоящее время ЭЦВМ используются почти во всех видах гидрологических, водноэнергетических и водохозяйственных расчетов. Применение ЭЦВМ позволило существенно облегчить и значительно ускорить вычисления при проектировании и эксплуатации ГЭС.

Однако ускорение расчетов не является единственной мерой эффективности использования ЭЦВМ. Не менее важно и то, что вследствие ускорения расчетов с помощью ЭЦВМ удастся существенно углубить проектные проработки, т. е. рассмотреть большее число вариантов, вести расчеты с большей точностью и т. п. Это позволяет выбрать более экономичные решения, что окупает

затраты на программирование и проведение расчетов на ЭЦВМ. Немаловажным представляется и высвобождение большого числа специалистов-проектировщиков и эксплуатационников от однообразных и утомительных вычислений для творческой работы.

Применение вычислительных машин в расчетах регулирования речного стока внесло серьезные качественные изменения в процессы водохозяйственного проектирования и эксплуатации. Увеличивается количество новых, как правило более точных или более обоснованных методов расчетов, которые без применения ЭЦВМ не использовались не только при проектировании и эксплуатации, но даже в научно-исследовательских работах в области водноэнергетических и водохозяйственных расчетов. Появление вычислительных машин явилось мощным толчком к оживлению научных исследований в области теории регулирования речного стока и внедрению результатов этих исследований в практику проектирования и эксплуатации водохозяйственных и энергетических систем.

В частности, применение ЭЦВМ позволило значительно расширить и углубить исследования закономерностей колебаний речного стока. Только с помощью ЭЦВМ стало возможным математическое моделирование процесса речного стока методом Монте-Карло. Искусственные гидрологические ряды большой продолжительности явились базой нового, прогрессивного и уже внедряющегося в проектирование гидроузлов метода расчета регулирования речного стока водохранилищами. Широкое распространение получили ЭЦВМ для проведения расчетов оптимизации и диспетчеризации режимов работы водохранилищ гидроэлектростанций в развивающихся энергетических и хозяйственных системах и т. п.

В предлагаемой книге изложены основные результаты и выводы работ, выполненных в научно-исследовательской лаборатории применения вычислительных машин в гидроэнергетике института Энергосетьпроект. Авторы не ставили своей целью дать широкое обобщение и анализ всех выполненных работ в данной области и практические рекомендации по всем рассмотренным вопросам. Рекомендации и выводы отдельных глав книги отражают в основном точку зрения авторов и являются в большей части лишь следствием их собственных проработок. Поэтому их следует считать в извест-

ной мере предварительными, а некоторые даже дискуссионными. Авторы, однако, надеются, что эта публикация будет способствовать внедрению ЭЦВМ и метода Монте-Карло в гидрологические и водохозяйственные исследования, выполняемые в процессе проектирования и эксплуатации энергетических и водохозяйственных систем.

Авторы выражают благодарность А. Б. Авакяну, В. А. Баранову, А. А. Бесчинскому, Е. Г. Блохинову, А. Л. Великанову, И. П. Дружинину, Н. А. Картвелишвили, С. Н. Крицкому, М. Ф. Менкелю, В. И. Обрезкову, Д. Я. Ратковичу, Г. Г. Сванидзе, В. Г. Сраговичу, М. П. Фельдману и Е. В. Цветкову за консультации и ценные советы, а также А. Е. Асарину и Е. В. Цветкову, выполнившим научное редактирование работы.

В составлении примеров и оформлении работы принимали участие сотрудники отдела гидроэнергетики института Энергосетьпроект А. Л. Адамов, О. Л. Биллер, С. М. Китайгородская и В. В. Смирнова, за что авторы им глубоко благодарны.

Замечания и пожелания просьба направлять в издательство «Энергия» по адресу: Москва, Ж-114, Шлюзовая наб., 10.

Авторы

Глава первая

ГИДРОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ И ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

1-1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Гидрологической основой любого водохозяйственного или водноэнергетического расчета являются данные гидрометрических наблюдений. Для гидрологической характеристики реки в створе, в котором проектируется гидроузел, могут служить как данные непосредственных наблюдений за стоком реки, так и соответствующим образом трансформированные данные наблюдений в другом пункте на рассматриваемой или близлежащей реке с аналогичными природными условиями [Л. 15, 53, 96].

Гидрометрическая информация представляет собой некоторый временной, или, как его обычно называют, календарный ряд.

В практике проектирования получили распространение два способа использования исходной гидрометрической информации: 1) путем непосредственного применения календарного ряда для проведения водохозяйственных и водноэнергетических расчетов с последующей статистической обработкой их результатов и 2) путем предварительной статистической обработки стоковых данных, на основании которой создается математическая модель процесса речного стока, которая используется затем для проведения водохозяйственных расчетов.

Первый из указанных способов предполагает, что используемые для расчета данные наблюдений отражают все сложные закономерности процесса стока. Однако небольшая длина рядов наблюдений иногда приводит к значительным погрешностям при определении водноэнергетических и водохозяйственных показателей или характеристик (см. ниже).

Второй способ основывается на использовании обобщенных статистических характеристик стока, получае-

мых в результате обработки гидрологических рядов. Эти характеристики позволяют получать более надежные, чем непосредственно по ряду наблюдений, решения некоторых водохозяйственных задач. Схематизация процесса стока при принятии упрощенных моделей может привести в свою очередь к определенным погрешностям. С этой точки зрения предпочтительнее строгие способы математического описания процесса стока. Следует, однако, отметить, что, как правило, чем сложнее способ описания, тем большее количество статистических характеристик для него требуется, точность же этих характеристик сравнительно невысока. Таким образом, при недостаточной по длительности исходной информации усложнение описания ведет к увеличению погрешности участвующих в вычислениях характеристик и соответственно к увеличению погрешностей водохозяйственных и водноэнергетических расчетов.

Проведение расчетов при наличии математической модели процесса речного стока может быть осуществлено двумя способами. Первый из них получил название аналитического, второй можно назвать календарно-статистическим. Обзор литературы и краткое изложение основ каждого из этих методов будут даны ниже.

Общим для названных способов являются существенное усложнение и увеличение трудоемкости водохозяйственных и водноэнергетических расчетов при принятии более сложных форм математического описания процесса стока. Поэтому в практических приложениях необходимо такое математическое описание процесса стока, для которого достаточно имеющаяся информация и которое требовало бы при достаточной строгости приемлемых затрат труда и времени на производство водохозяйственных и водноэнергетических расчетов. В отдельных главах данной книги под этим углом зрения будет рассмотрено несколько простых и сложных способов математического описания процесса речного стока. В § 1-3 будет сделана попытка дать достаточно общее и строгое описание процесса, частными случаями которого являются все более простые способы описания, приводимые в настоящей работе.

Одним из основных вопросов, возникающих при математическом описании процесса стока, является выбор наиболее подходящего для данного процесса теоретического закона распределения вероятностей. Результаты

некоторых проработок по оценке соответствия эмпирических данных различным теоретическим кривым приводятся в § 1-2.

При рассмотрении кривых распределений важнейшая задача состоит в определении их характеристик (параметров). Для получения характеристик процесса стока имеется небольшое конечное число независимых наблюдений, называемых выборкой из генеральной совокупности. Под генеральной совокупностью понимаются неизвестные нам данные о протекании процесса за бесконечный (или очень большой конечный) отрезок времени до и после периода, когда производились выборочные наблюдения. Ввиду того что объем выборки ограничен, необходимые характеристики процесса приходится оценивать приближенно и они получаются существенно случайными.

Очевидным является стремление проводить оценку характеристик наилучшим образом. Для этого, во-первых, мы должны быть уверены в репрезентативности (представительности) выборки. В применении к гидрологическим рядам это требование сводится к соблюдению однородности наблюдений и исключению влияния хозяйственной деятельности человека на результаты наблюдений (заборы воды на орошение и пр.). Во-вторых, необходимо находить наилучшие оценки искомых характеристик и иметь суждения о их точности и надежности [Л. 29]. Исследовав качество той или иной оценки, мы можем судить о достоверности полученных на основе выборки характеристик.

Одним из методов исследования выборочных оценок характеристик сложных распределений является метод Монте-Карло. Этот метод подробно рассмотрен в § 1-4 и широко использован во всей работе. При отсутствии аналитического решения с помощью метода Монте-Карло можно эмпирически сопоставлять различные оценки тех или иных характеристик, выбирать наилучшую или вводить необходимые поправки. Результаты таких исследований для параметров некоторых распределений рассмотрены в § 1-5 и 1-6.

1-2. ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ГОДОВОГО СТОКА РЕК

С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель в работах [Л. 52, 57] показали, что теоретическая функция распределения, ис-

пользуемая для описания годового стока рек, должна удовлетворять следующим двум условиям:

1) область, в которой функция распределения $F(x)$ отлична от нуля, есть интервал $(0, \infty)$;

2) функция распределения годового стока рек должна быть трехпараметрической, т. е. допускать возможность произвольного задания первых трех моментов распределения.

В работах [Л. 52, 53] С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель предложили в качестве закона распределения годового стока рек использовать функцию

$$F(x, \bar{x}, \gamma, b) = \begin{cases} \left[\frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\frac{\gamma}{b}} \frac{1}{\Gamma(\gamma) \bar{x} b} \int_0^x e^{-\left[\frac{\Gamma(\gamma + b)t}{\Gamma(\gamma)\bar{x}} \right]^{\frac{1}{b}}} \left(\frac{t}{x} \right)^{\frac{\gamma}{b} - 1} dt & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (1-1)$$

которая удовлетворяет поставленным условиям.

Однако в практике гидрологических расчетов наибольшее распространение в качестве закона распределения вероятностей получила функция

$$F(x, \bar{x}, \gamma, 1) = \begin{cases} \frac{\gamma^{\gamma}}{\Gamma(\gamma) \bar{x}} \int_0^x e^{-\gamma \frac{t}{\bar{x}}} \left(\frac{t}{x} \right)^{\gamma-1} dt & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (1-2)$$

которая является частным случаем (1-1) при $b=1$.

Распределение (1-2) называется распределением Пирсона III типа и является двухпараметрическим, т. е. допускает возможность выбора лишь первого и второго моментов распределения, а третий оказывается связанным с первыми двумя соотношением

$$C_s = 2C_v, \quad (1-3)$$

где

$$C_v = \frac{\mu_2}{\mu_1^2}; \quad C_s = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}; \quad \mu_i - i\text{-й момент распределения.}$$

В этом распределении четвертый момент (показатель эксцесса), вычисление которого даже по длинным гидрологическим рядам связано с большими ошибками, равен $1,5 C_s^2$ (или $6C_v^2$). Соответствие этого соотношения эм-

пидическому материалу никогда не проверялось. Более того, соотношение (1-3), вытекающее из закона распределения (1-2), оказывается для многих рек далеко не верным. Оно было выбрано лишь потому, что среднее отношение C_s/C_v по некоторой группе рек оказалось близким к 2 и что только при этом соотношении нижним пределом стока является нуль.

Итак, функция распределения (1-2), которая в настоящее время имеет большое распространение в гидрологии, удовлетворяет только первому из основных условий, поставленных С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем.

Среди двухпараметрических распределений, удовлетворяющих первому условию С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля, кроме (1-2), нужно также назвать лог-нормальное распределение, описываемое функцией

$$\varphi(x, a, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_0^x e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}} dt & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (1-4)$$

Из этого закона вытекает равенство

$$C_s = 3C_v + C_v^3. \quad (1-5)$$

Показатель эксцесса равен $E = C_v^8 + 6C_v^6 + 15C_v^4 + 16C_v^2$.

Расчеты для годового стока, проведенные в ГГИ и Энергосетьпроекте по совокупности групп рек (по каждой реке в отдельности C_s достоверно вычислить нельзя ввиду малого объема выборки), показали, что для рек с небольшими C_v (до 0,5) и большими коэффициентами корреляции между смежными членами ряда¹ (от $r=0,3$) соотношение (1-5) ближе к истине, чем соотношение (1-3). Эти соображения, а также простота использования распределения (1-4) для самых сложных водохозяйственных расчетов в каскадах ГЭС определили целесообразность проверки соответствия имеющихся гидрологических рядов гипотезам распределения (1-4) и (1-2). Это соответствие проверялось с помощью критериев χ^2 и Колмогорова.

¹ Ниже в § 1-6 будет показано, что в моментной оценке коэффициента асимметрии имеется систематическая отрицательная погрешность, которая по абсолютной величине возрастает с увеличением коэффициента корреляции между смежными членами ряда.

Для статистической проверки соответствия эмпирического материала теоретическому распределению с помощью критерия χ^2 всю область изменения годового стока реки необходимо разбить на l интервалов: $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_l$. В качестве меры расхождения данных выборки с гипотетическим распределением служит величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (1-6)$$

где p_i — вероятность того, что рассматриваемая случайная величина ξ при данном распределении $F(x)$ принадлежит i -му интервалу; m_i — число значений ξ , попавших в Δ_i ; n — объем выборки.

Если проверяемая гипотеза верна, то критерий χ^2 (1-6) имеет распределение, пределом которого при $n \rightarrow \infty$ является распределение χ^2 с $(l-c-1)$ степенями свободы (c — число выборочно оцениваемых параметров, равное в нашем случае 2).

Методика применения критерия χ^2 сводится к сравнению выборочного значения χ^2 (1-6) с табличным [Л. 18] верхним пределом χ^2_q , соответствующим выбранному критерию надежности q и числу степеней свободы, равному $l-3$. В случаях, когда χ^2 оказывается превосходящим этот предел, гипотеза отвергается. При разбиении области на l интервалов необходимо соблюдение условия

$$np_i \geq 10 \quad (1-7)$$

для всех i .

Полученные результаты для десяти рек при $q=5\%$ приведены в табл. 1-1. Они показывают, что для рр. Бии, Сухоны, Вуоксы, Тобола, Сыр-Дарьи данные наблюдений в меньшей степени соответствуют кривой Пирсона III типа, чем логнормальному закону распределения. Для рр. Днепра, Туры и Нарына данные наблюдений больше соответствуют кривой Пирсона III типа. Для рр. Сожи и Урала данные наблюдений не соответствуют ни тому, ни другому закону распределения. Следует заметить, что, за исключением Сыр-Дарьи и Тобола, все указанные выше реки имеют существенную естественную зарегулированность, т. е. приближаются к озерным рекам. Для остальных рассмотренных в данной работе рек (их число равно 71) как первая, так и вторая гипотезы при $q=5\%$

Результаты проверки соответствия эмпирических данных гипотезам (1-4) и (1-2) с помощью критерия Колмогорова в данной работе не приведены. Можно, однако, отметить, что они свидетельствуют о том, что для одних рек более предпочтительным является логнормальный закон, для других — кривая Пирсона III типа, но для большинства рек пригодны обе гипотезы.

Проведенные проработки и имеющиеся литературные данные позволяют сделать предварительный вывод о возможности использования как логнормального закона, так

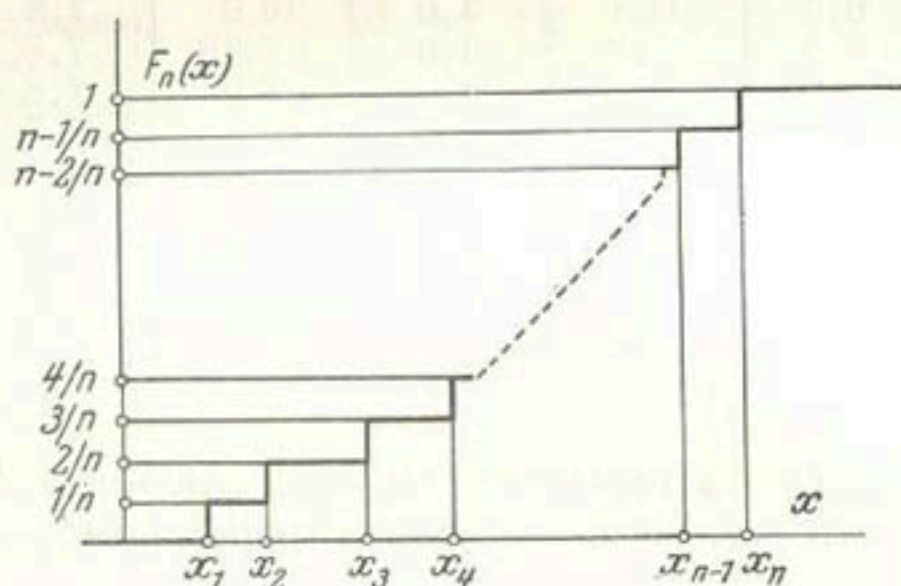


Рис. 1-1. К построению эмпирической функции распределения $F_n(x)$.

и кривой Пирсона III типа в качестве закона распределения вероятностей годового стока большого числа рек Советского Союза. Окончательное решение вопроса о выборе теоретического закона распределения вероятностей требует, видимо, более глубоких проработок и, в частности, проведения анализа по группам рек, расположенных в близких физико-географических условиях.

1-3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА РЕЧНОГО СТОКА

Изменения речного стока во времени могут быть иллюстрированы рядом примеров (рис. 1-2). На рис. 1-2,а можно отметить некоторые периодически повторяющиеся спады и подъемы водности. Наличие одного ежегодного подъема водности соответствует гидрографам крупных рек Средней Азии с ледниково-снеговым питанием. Некоторые равнинные реки европейской и азиатской территорий Союза имеют по два ежегодных подъема водности, из которых первый обычно соответствует

весеннему таянию снегов, а второй — периоду осенних дождей. Для рек с ливневым питанием (реки Черноморского побережья, Карпат и др.) характерен пилообразный характер изменения стока во времени (рис. 1-2,б). На рис. 1-2,б отсутствует периодичность в появлении ежегодных подъемов водности. Другим крайним случаем в данной классификации являются реки засушливых районов Казахстана, которые пересыхают в жаркое время года. У этих рек базисный сток практически отсут-

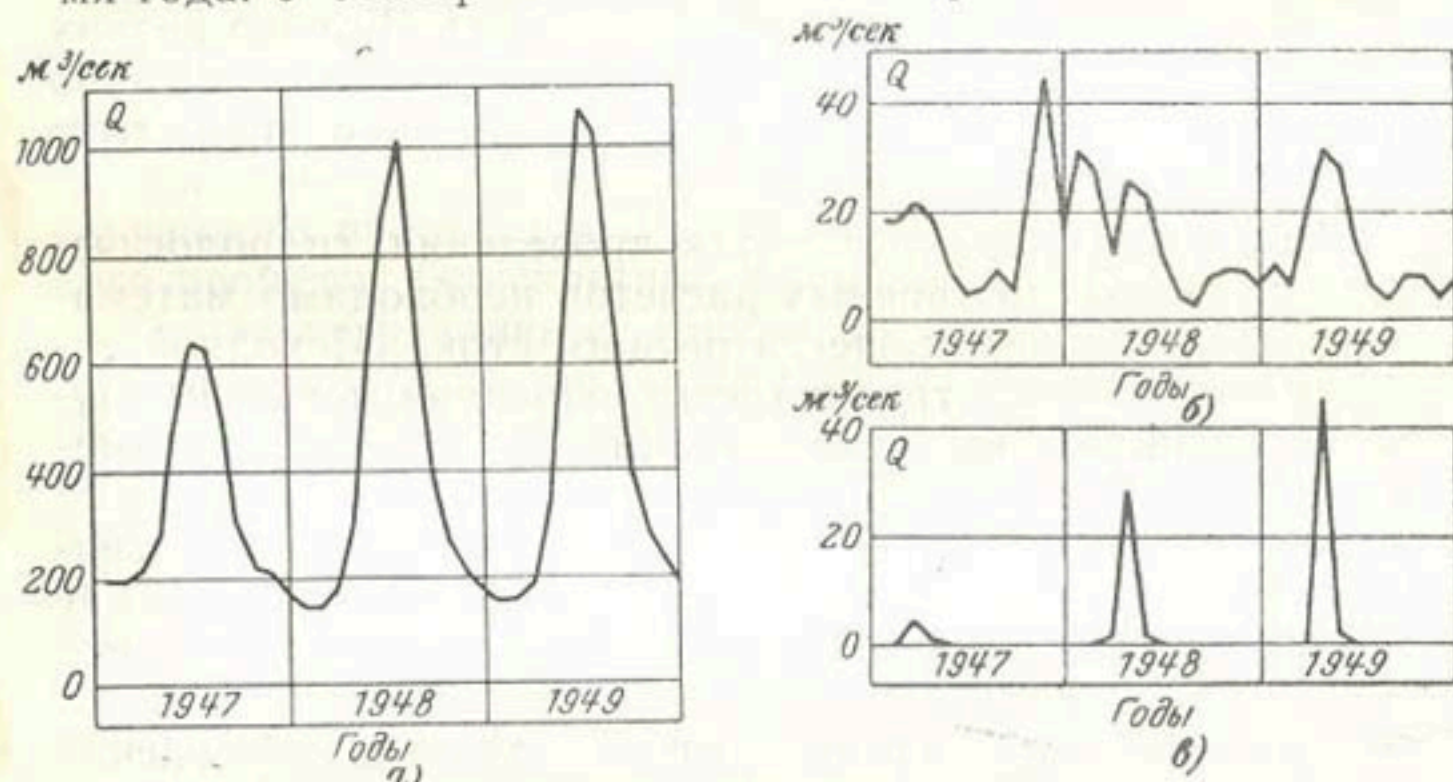


Рис. 1-2. Гидрографы.

а — р. Нарын (Уч-Курган); б — р. Сочинка (г. Сочи); в — р. Джезды (1,5 км выше устья).

вует, имеются лишь ежегодные весенние подъемы водности (рис. 1-2,в). Наличие или отсутствие периодических ежегодных подъемов водности рек обуславливается условиями стокообразования в их бассейнах и влиянием на колебания речного стока вращения Земли вокруг Солнца. В колебаниях речного стока прослеживается также многолетняя цикличность различной продолжительности, которая объясняется влиянием на сток рек различных циклически изменяющихся гелио- и геофизических процессов, а также регулирующим влиянием водосборов (озера, запасы подземных вод, запасы «вечных» снегов и ледников в бассейне реки).

Случайный характер процесса стока во времени можно объяснить большим количеством влияющих на него случайных факторов. В настоящее время невозможно точно установить количественное влияние многих из этих

факторов. Однако даже в тех случаях, когда оно известно, надежно предсказать поведение того или иного стокообразующего фактора, как правило, оказывается также невозможно, так как он сам является результатом случайных причин. Большинству стокообразующих факторов в значительной степени присуща многолетняя и внутригодовая цикличность.

Сток большинства рек СССР является непрерывным случайным процессом, включающим те или иные достаточно сложные циклические компоненты. В более редких случаях такие циклические компоненты отсутствуют либо (крайне редко) сток является прерывным процессом с циклической компонентой.

Как отмечалось выше, для проведения гидрологических и водохозяйственных расчетов необходимо математическое описание процесса речного стока. Исходной информацией для построения этого описания могли бы служить в каждом рассматриваемом створе реки непрерывные зависимости расхода воды от времени за достаточно длительный период времени. Однако на большинстве гидрометрических постов СССР непрерывные наблюдения не только за расходами воды, но и за уровнями воды в реке не ведутся. В современных гидрологических ежегодниках обычно приводятся среднесуточные данные наблюдений за стоком рек. Следует отметить, что для подавляющего большинства рек, представляющих интерес для водохозяйственного и энергетического использования, разница между мгновенными расходами воды в реке в пределах суток и соответствующими среднесуточными расходами очень мала [Л. 38]. Исключение составляют реки со значительной долей интенсивного, но кратковременного ливневого питания и высокогорные реки с ледниковым питанием, зависящим от суточного хода температуры воздуха и интенсивности солнечной радиации.

В гидрологической и водохозяйственной практике для различных видов расчетов используются разные интервалы осреднения расходов реки, выбираемые из соображений минимальной трудоемкости при сохранении необходимой точности. Наибольшее распространение получили суточные, декадные, месячные и годовые интервалы осреднения.

При проведении расчетов сезонного регулирования стока обычно достаточно месячное, реже — декадное осреднение, так как колебания стока за меньшие интер-

валы времени практически не оказывают влияния на результаты расчетов регулирования. В расчетах пропуска паводков при проектировании мероприятий по борьбе с наводнениями или расчетах по определению необходимой пропускной способности водосбросных сооружений требуется суточное, а иногда и более краткосрочное (до нескольких часов) осреднение.

Практика проектирования показывает, что в разных водохозяйственных расчетах не только допустимы, но и целесообразны различные величины временного осреднения исходных данных. Поэтому для решения большинства водохозяйственных задач целесообразно отказаться от описания колебаний речного стока как непрерывного случайного процесса и представлять его в виде случайного процесса с дискретным временем.

Принятие различных временных интервалов осреднения при исследовании колебаний стока рек и разных форм его математического описания определяется также различной природой многолетних, внутригодовых и внутрисезонных колебаний стока рек и влияющих на эти колебания факторов. Расчленив колебания речного стока, видимо, можно глубже выявить физическую сущность рассматриваемых явлений и значительно упростить математическое описание процесса стока в целом.

Таким образом, исходным положением является задание статистического материала о колебаниях речного стока в виде некоторого временного ряда с определенным интервалом осреднения, т. е. в виде последовательности наблюдений, полученных в равноотстоящие моменты времени. Для описания колебаний речного стока используется вероятностная модель, называемая случайным процессом с дискретным временем. Эта модель применительно к сколь угодно сложной водохозяйственной системе¹ представляет собой семейство случайных величин Q_t , принимающих только действительные и положительные значения, где t пробегает множество целых чисел. Термин «с дискретным временем» разъясняет природу множества значений параметра t . Слово «случайный» подчеркивает, что результаты наблюдений не вполне детерминированы и включают случайные элементы [Л. 98].

¹ Под водохозяйственной системой подразумевается система водохранилищ и установок на одной или нескольких реках.

Величины расходов воды, притекающих к каждому водохранилищу и составляющих указанное выше семейство случайных величин, рассматриваются как случайный вектор, компоненты которого стохастически связаны в силу некоторой общности ландшафтных и климатических условий стокообразования. Однако эти компоненты не подчинены никаким дополнительным условиям в виде неравенства $Q_1 \geq Q_2 \geq \dots \geq Q_n$, так как в наших построениях используются не расходы воды в створе реки, а боковые притоки между створами.

Рассмотренная выше вероятностная модель охватывает очень широкий круг явлений и представляется достаточно общей. В зависимости от того, какой из рассмотренных выше типов рек является объектом исследования, а также от того, какая величина временного осреднения достаточна для проведения расчета, можно ограничиться более или менее простым подклассом случайных процессов и тем самым упростить задачу математического описания процесса речного стока и использования его в водохозяйственных расчетах.

В первых главах настоящей работы подробно рассматриваются расчеты многолетнего регулирования стока. Основное значение для этого класса расчетов имеют многолетние колебания стока, для которых ниже детально излагаются способы математического описания.

Важно отметить, что при годовом временном интервале осреднения практически отсутствует какое-либо различие между реками трех охарактеризованных выше типов (рис. 1-3).

К настоящему времени наиболее разработанными являются стационарные случайные процессы [Л. 14], протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. В отличие от них нестационарные процессы имеют определенную тенденцию развития во времени. Характеристики нестационарного процесса зависят от времени.

Если рассмотреть рис. 1-2 с точки зрения принадлежности того или иного типа колебаний стока рек к указанным классам случайных процессов, то даже визуально можно отметить, что колебания стока рек, представленных на рис. 1-2, а и в, скорее всего могут быть отне-

сены к классу нестационарных случайных функций, а колебания стока рек на рис. 1-2,б, видимо, могут рассматриваться как стационарная случайная функция.

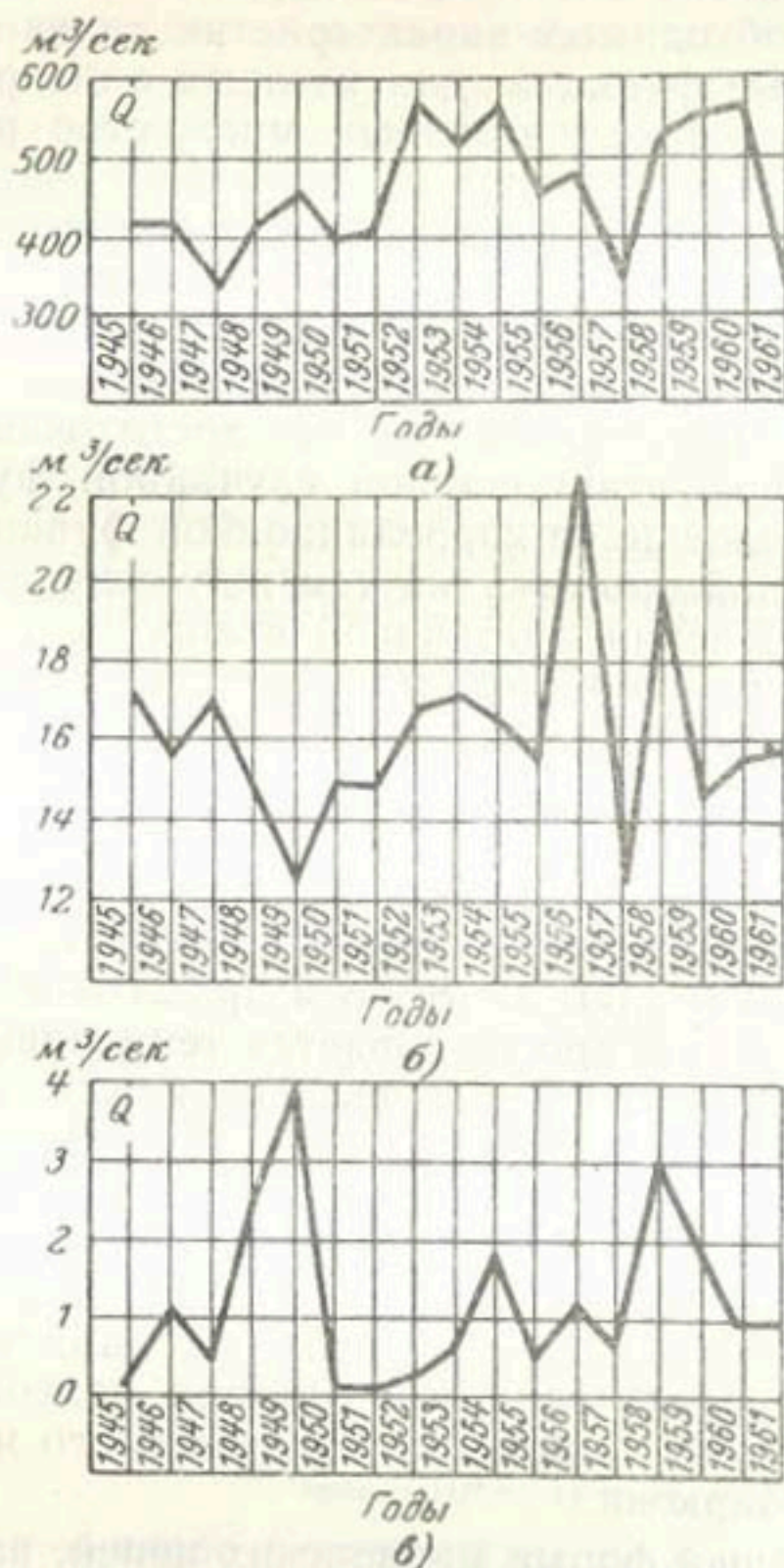


Рис. 1-3. Графики колебаний годового стока рек.

а — р. Нарын; б — р. Сочиника; в — р. Джезды.

На рис. 1-3 многолетние колебания стока рассмотренных рек визуально могут быть отнесены к колебаниям, описываемым стационарными случайными функциями.

Следует отметить, что, рассматривая ряды среднегодовых величин стока, мы по существу вынуждены иметь

дело с одной реализацией случайного процесса. Однако ввиду того что стационарный случайный процесс протекает во времени достаточно однородно, эта единственная реализация может служить исходным материалом для получения необходимых характеристик случайной функции. Случайные функции, для которых одна реализация при обработке может заменить множество реализаций той же продолжительности, называют эргодичными. Сформулированное математически, эргодическое свойство случайной функции заключается в том, что для нее среднее по времени (на достаточно большом участке наблюдений) приближенно равно среднему по множеству наблюдений. Можно доказать, что достаточным условием эргодичности стационарной случайной функции является приближение ее корреляционной функции к нулю при возрастании промежутка τ между сечениями. Более строгие определения эргодичной стационарной в широком смысле случайной функции, а также доказательства применяемых ниже положений теории стационарных случайных функций с дискретным временем даны в работе Э. Хеннана [Л. 98].

Продолжая рассматривать годовой интервал временного осреднения, можно отметить, и это было показано во многих работах [Л. 4, 28, 53 и др.], что в колебаниях годового стока рек прослеживается тенденция к образованию группировок лет с повышенной или пониженной водностью. Однако в чередовании этих группировок трудно уловить отчетливо выраженную периодическую закономерность, а генетические причины образования их не представляются достаточно ясными. Поэтому в практике водохозяйственных расчетов получило широкое распространение представление многолетних колебаний стока рек как случайного процесса, описываемого математически цепями Маркова.

В простейшей форме марковских цепей, наиболее часто используемых в настоящее время в водохозяйственных расчетах, учитывается коррелятивная связь только между непосредственно смежными членами гидрологического ряда. Эта связь имеет достаточно ясный физический смысл. Она характеризует «инерцию» в колебаниях стока рек, являющуюся следствием зависимости годового стока от наличия на водосборе реки запасов воды, образующих более или менее значительные остатки, переходящие от года к году.

Рассмотрим, достоверны ли оценки тесноты коррелятивной связи между смежными членами рядов годового стока рек и нельзя ли считать годовой сток рек в смежные годы независимыми величинами. Некоторые способы проверки гипотезы о независимости стока рек в смежные годы (по количеству серий членов выборки, по информационному отношению и др.) указаны в работе [Л. 28]. Приведенные в [Л. 28] данные показывают, что для большинства рек СССР гипотеза о независимости стока в смежные годы должна быть отвергнута. Для некоторых рек эта гипотеза не отвергается.

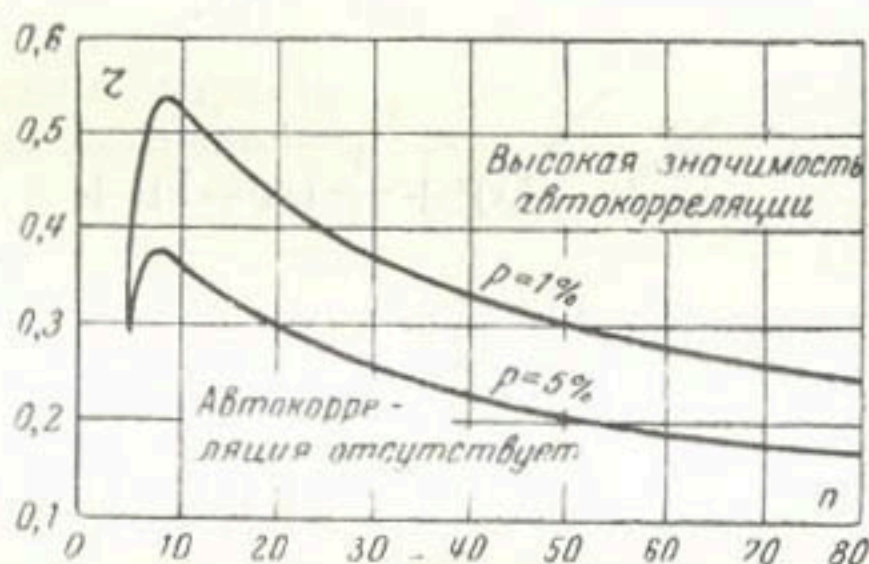


Рис. 1-4. Уровни вероятности существования автокорреляции по Андерсону (n — число членов в выборке).

Обычно для оценки степени связности гидрологических рядов используется коэффициент корреляции между смежными членами ряда (коэффициент автокорреляции)

$$r^* = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_i)(x_{i+1} - \bar{x}_{i+1})}{\sigma_i \sigma_{i+1} [(n-1) - 1]}. \quad (1-11)$$

Здесь: n — число членов ряда; x_i, x_{i+1} — члены ряда; σ_i, σ_{i+1} — стандартные отклонения соответственно рядов $x_i \div x_{n-1}$ и $x_{i+1} \div x_n$; $\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}$ — нормы тех же рядов.

Вычислив коэффициент автокорреляции ряда, в первую очередь необходимо убедиться в статистической значимости самого факта существования автокорреляции. Для этой цели можно воспользоваться рис. 1-4, где приведены вычисленные Андерсоном [Л. 31] 1%- и 5%-ные уровни вероятности существования коэффициента положительной автокорреляции.

Другим, более точным и пригодным для любых распределений способом оценки значимости существования автокорреляции является отношение Неймана [Л. 98], которое представляет собой отношение среднего квадрата последовательных разностей к дисперсии:

$$\frac{\delta^2}{s^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} (x_{t+1} - x_t)^2 \bigg/ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2.$$

Это выражение можно преобразовать:

$$\frac{\delta^2}{s^2} = \frac{2n}{n-1} \{1 - r_a\},$$

где

$$r_a = 1 - \frac{\frac{1}{2}(x_1 - \bar{x})^2 + \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2 + \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2 + \sum_{t=2}^n (x_t - \bar{x})(x_{t-1} - \bar{x})}{\dots} \dots \rightarrow$$

На рис. 1-5 приведены 1%- и 5%-ные уровни вероятности существования автокорреляции по отношению Неймана δ^2/s^2 . Сравнение 1%-ных пределов значимости распределения r_a с соответствующими пределами для обычной корреляции с поправками среднего при $n+3$ наблюдениях показывает [Л. 98], что для $n \geq 20$ статистика r_a не отличается от обычной корреляции для $n+3$ наблюдений. При меньших n более точным является распределение δ^2/s^2 , хотя уже для $n=10$ 1%-ные пределы отличаются сравнительно мало.

Установив значимость факта существования автокорреляции в рассматриваемом ряду наблюдений, следует перейти к оценке абсолютной величины ее и возможных погрешностей.

Для анализа точности оценки коэффициента автокорреляции и установления возможного диапазона нахождения его истинного значения с различным уровнем вероятностей может быть использовано следующее выражение для среднеквадратической ошибки коэффициента корреляции, которое обычно называется формулой Пир-

сона, выведенной для коэффициента корреляции между двумя рядами с нормальным распределением:

$$\sigma_r^* = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n - 1}}. \quad (1-12)$$

В качестве объектов исследования были выбраны 83 реки. В их число входили пять озерных рек Советского Союза, шесть крупных рек мира с длинными рядами наблюдений, 25 рек Казахстана, Средней Азии и Западной Сибири, 41 река европейской территории Союза и 6 рек Восточной Сибири и Дальнего Востока. Основные характеристики использованных рядов даны в приложении 2. Длительность наблюдений на рассмотренных реках была неодинакова; она изменялась от 21 до 150 лет при среднем значении 66 лет.

Для каждого из рассмотренных рядов по уравнениям (1-11) и (1-12) были вычислены коэффициенты корреляции между смежными членами и их стандартные ошибки (эти данные также приведены в приложении 2). На отдельных реках коэффициенты принимали значения от $0,014 \pm 0,127$ (р. Дон) до $0,74 \pm 0,059$ (р. Ангара), причем отрицательным оказался только один коэффициент. Максимальное значение стандартной ошибки имело место на р. Илек, на которой ряд наблюдений был самым коротким ($n=21$ год): $\sigma_r=0,217$ ($r^*=0,098$). Средняя величина всех вычисленных стандартов равнялась 0,115.

Гипотеза об отсутствии автокорреляции при 5%-ном уровне значимости должна быть принята в 17 из 83 рассмотренных рядов. В 66 рядах должна быть принята гипотеза о существовании автокорреляции, причем в 44 рядах — при 1%-ном уровне значимости, т. е. в этих рядах существование коэффициента автокорреляции весьма значимо.

Однако приведенные в приложении 2 данные показывают, что утроенная стандартная ошибка вычисления

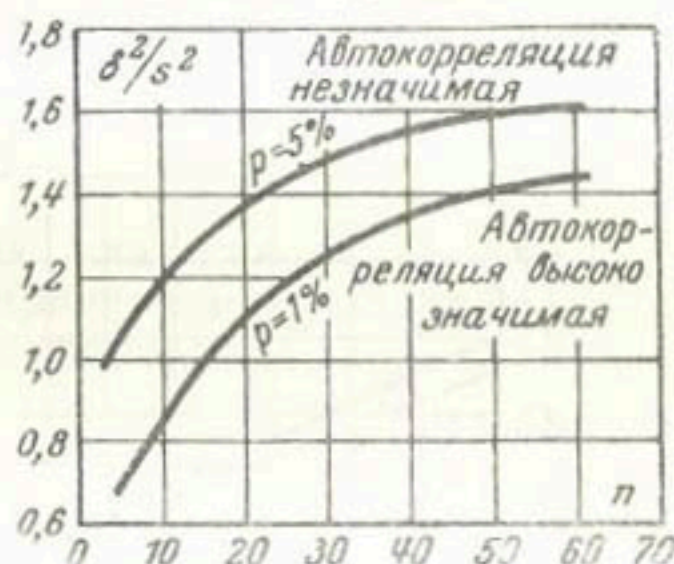


Рис. 1-5. Отношение Неймана δ^2/σ^2 для выявления значимости автокорреляции (n — число членов в выборке).

коэффициента корреляции между смежными членами большого количества рассмотренных рядов соизмерима или даже превосходит абсолютное значение самого коэффициента, т. е. индивидуальная выборочная оценка коэффициента корреляции для большого числа рек не является достаточной для суждения о степени связности гидрологических рядов. Поэтому применим для указанной оценки групповой анализ. Для этой цели, рассматривая значения коэффициента корреляции как случайные величины, построим кривую распределения этого коэффициента (рис. 1-6) и найдем ее статистические параметры.

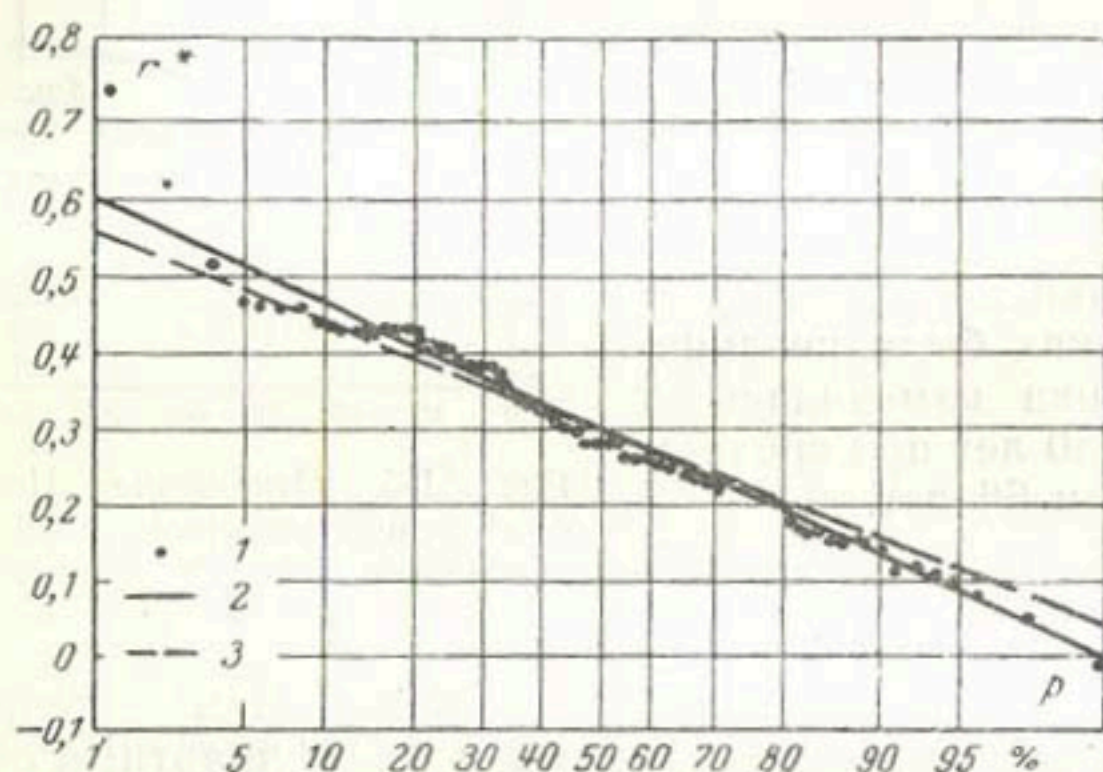


Рис. 1-6. Распределение коэффициентов корреляции между смежными членами 83 рек СССР и мира.

1 — точки эмпирического распределения; 2 — теоретическая нормальная кривая с параметрами эмпирического распределения; 3 — то же с параметрами теоретического распределения.

Представленное на рис. 1-6 распределение достаточно близко к нормальному (см. сплошную линию). Среднее этого распределения равно 0,298, а стандартное отклонение 0,129.

Считая, что средний коэффициент корреляции соответствует истинному значению, по уравнению (1-12) при длине ряда n , равной средней длине рядов наблюдений для рассматриваемой группы рек, найдем теоретическое стандартное отклонение коэффициента корреляции: $\sigma_T = 0,112$. Соответствующую ему кривую распределения нанесем на рис. 1-6 пунктиром. Расхождение этой тео-

ретической кривой с эмпирическими точками имеет место для больших коэффициентов корреляции, соответствующих озерным рекам. Ошибку теоретического стандарта оценим обычным уравнением

$$\epsilon_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = 0,010. \quad (1-13)$$

Сопоставим теперь полученное выше эмпирическое стандартное отклонение с найденным теоретическим. Эмпирический стандарт больше теоретического на 15%, однако это расхождение находится в пределах

$$\sigma_T - 2\epsilon_{\sigma} < \sigma < \sigma_T + 2\epsilon_{\sigma}. \quad (1-14)$$

Таким образом, несмотря на некоторое различие между теоретическим и эмпирическим стандартами, рассеяние оценок коэффициента корреляции, видимо, происходит в значительной степени за счет случайных причин, а не за счет различий этих коэффициентов для разных рек.

Отметим, что различные коэффициенты корреляции были вычислены по выборкам различной длины и имеют неодинаковую стандартную ошибку, зависящую в основном от длины периода наблюдений. При вычислении группового среднего и стандартного отклонений распределения коэффициентов корреляции необходимо это учесть.

Для вычисления взвешенных по длине ряда n в группе из N рядов средних и стандартных отклонений используются следующие уравнения [Л. 120]:

$$\bar{r}_{взв} = \frac{\sum_{j=1}^N n_j r_j}{\sum_{j=1}^N n_j}; \quad (1-15)$$

$$\sigma_{взв} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N n_j (r_j - \bar{r}_{взв})^2}{\sum_{j=1}^N n_j}}. \quad (1-16)$$

В наших расчетах взвешенный по длине рядов средний коэффициент корреляции между смежными членами $\bar{r}_{взв} = 0,294$, а взвешенное стандартное отклонение $\sigma_{взв} = 0,130$, т. е. практически эти величины при учете разной длины гидрологических рядов не изменились.

Приведенные данные несколько отличаются от результатов исследований В. М. Евджевича [Л. 120], который проводил аналогичные расчеты по 140 рекам США и мира. Величина среднего взвешенного коэффициента корреляции в [Л. 120] была получена равной $\bar{r}_{взв} = 0,184$, а взвешенного стандартного отклонения $\sigma_{взв} = 0,192$. Несовпадение результатов, видимо, свидетельствует о том, что на оценки существенно влияют состав и количество

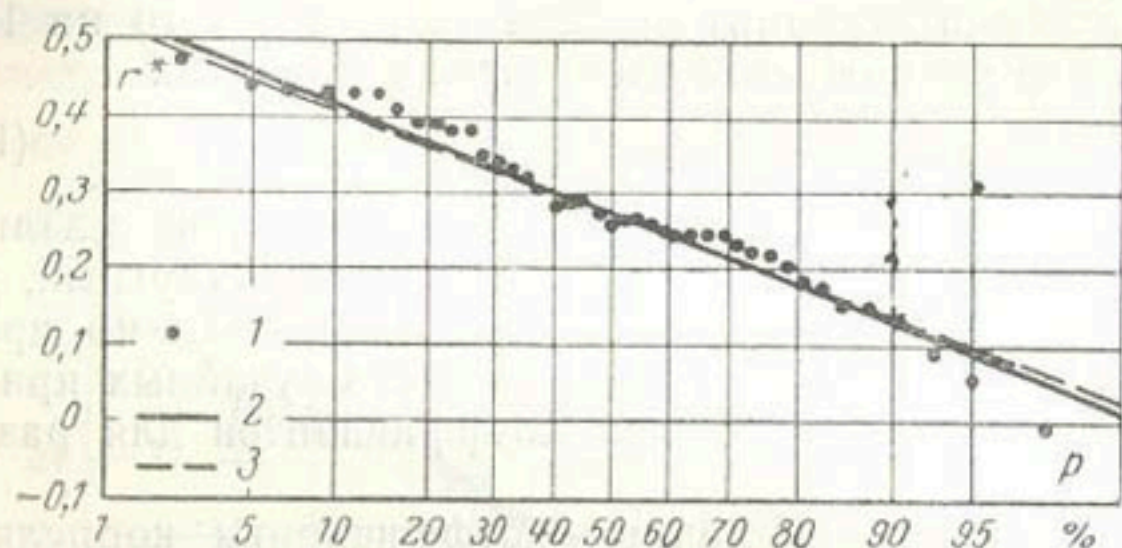


Рис. 1-7. Распределение коэффициентов корреляции между смежными членами группы рек европейской территории СССР.

1 — точки эмпирического распределения; 2 — теоретическая нормальная кривая с параметрами эмпирического распределения; 3 — то же с параметрами теоретического распределения.

исследуемых рек. Объединение для проведения описываемых расчетов в одну совокупность рек, расположенных в разных физико-географических районах и имеющих различную зарегулированность, может вызвать определенные возражения. Не исключено, что только такое объединение является причиной столь существенного стандартного отклонения, полученного в наших расчетах и работе [Л. 120]. Проведенная с помощью критерия χ^2 проверка однородности рассмотренной выборки коэффициентов корреляции [Л. 61] показала, что при 5%-ном уровне значимости ее нельзя считать однородной. Поэтому была предпринята попытка выделить достаточно большие группы рек, расположенных на сравнительно небольшом расстоянии друг от друга и не отличающихся большим разнообразием условий стокообразования. Оказалось возможным выделить две группы рек, выборки коэффициентов корреляции которых являются статистически однородными (при $\chi_q = 5\%$):

а) 41 река европейской территории Союза (без озерных); назовем эту группу европейской. Средняя длина ряда в этой группе 72 года;

б) 25 рек Казахстана, Средней Азии и прилегающей к ним части Западной Сибири; назовем эту группу казахстанской. Средняя длина ряда в этой группе 46 лет.

Для обеих групп рек были проведены указанные выше исследования.

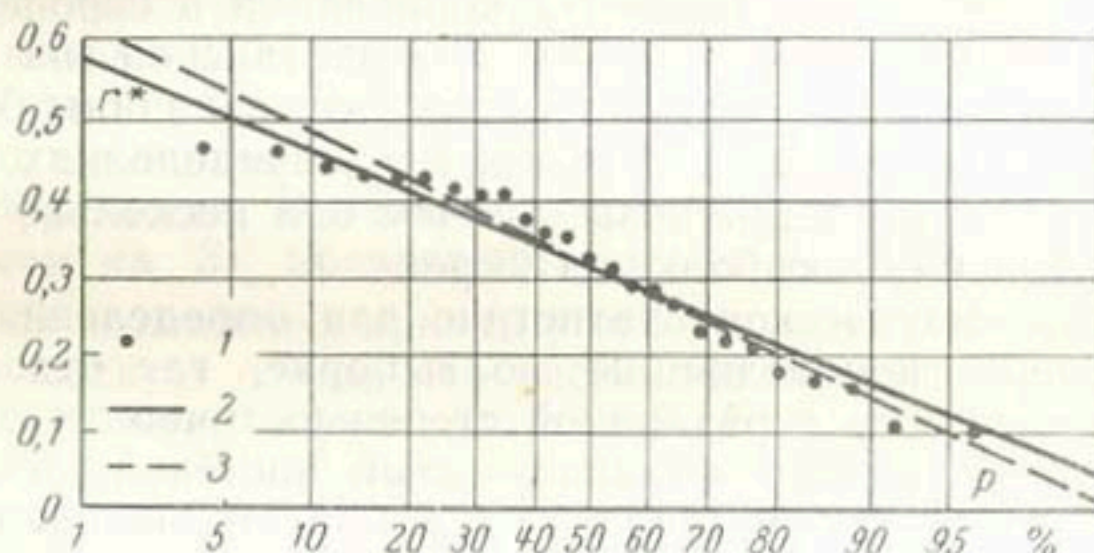


Рис. 1-8. Распределение коэффициентов корреляции между смежными членами рек Средней Азии и Казахстана.

1 — точки эмпирического распределения; 2 — теоретическая нормальная кривая с параметрами эмпирического распределения; 3 — то же с параметрами теоретического распределения.

Эмпирическая кривая распределения коэффициентов корреляции между смежными членами представлена для европейской группы рек на рис. 1-7, для казахстанской — на рис. 1-8. Параметры этих распределений и приведен-

Таблица 1-2

Параметры	Обычные оценки			Оценки, взвешенные по n			Оценки, взвешенные по $1/\sigma^2$		
	83 реки	европейские реки	казахстанские реки	83 реки	европейские реки	казахстанские реки	83 реки	европейские реки	казахстанские реки
$\bar{r}$	0,298	0,277	0,312	0,294	0,276	0,310	0,329	0,292	0,325
σ_r	0,129	0,112	0,115	0,130	0,114	0,108	0,154	0,114	0,108
$\sigma_{\bar{r}}$	0,43	0,41	0,37	0,44	0,41	0,35	0,47	0,39	0,33
$\sigma_{\bar{r}^2}$	—	—	—	—	—	—	0,017	0,018	0,022
$\sigma_{\bar{r}^3}$	0,112	0,108	0,133	0,112	0,108	0,133	0,110	0,107	0,131
$\sigma_{\bar{r}^4}$	0,010	0,009	0,014	0,010	0,009	0,014	0,010	0,009	0,014

чего выше распределения всех 83 рассмотренных рек даны в табл. 1-2. Там же приведены средневзвешенные оценки среднего коэффициента корреляции и стандартного отклонения распределения, построенного по каждой группе рек.

Полученные данные свидетельствуют о том, что распределение коэффициента корреляции в каждой группе рек близко к нормальному. Среднее и средневзвешенное по n значения коэффициента корреляции в европейской группе несколько меньше, чем в казахстанской (на 12%), однако и в той, и в другой группах эти величины близки к 0,3. Стандартные отклонения в распределениях обеих групп примерно одинаковы, причем они несколько меньше отклонений в выборке из 83 рек.

В математической статистике для определения наиболее вероятной величины по выборке, где отдельные члены получены с различной степенью точности, характеризуемой средней квадратической ошибкой, рекомендуется вычисление средней взвешенной величины по формуле

$$\bar{r}'_{\text{взв}} = \frac{\sum_{j=1}^N \omega_j r_j}{\sum_{j=1}^N \omega_j}, \quad (1-17)$$

где ω — некоторые числа, обратно пропорциональные квадратам соответствующих средних квадратических ошибок.

Для наших рядов эти величины оказались (табл. 1-2) несколько большими, чем величины, указанные выше. Соответствующие взвешенные стандартные отклонения также увеличились.

Исходя из приведенных данных, можно подтвердить вывод о том, что выборочное значение коэффициента корреляции для отдельных рек определяется недостаточно точно. Действительно, утроенный стандарт рассмотренных нами распределений превосходит среднее этих распределений.

Найденные для всех рассмотренных случаев теоретические стандарты и их ошибки также приведены в табл. 1-2. Эти данные показывают, что расхождения между теоретическим и эмпирическими стандартами для

европейской и казахстанской групп рек меньше удвоенной ошибки вычисления их при любом способе взвешивания оценок. Последнее означает, что ошибки в вычислении отдельных коэффициентов корреляции можно с достаточной точностью отнести за счет случайных причин. Кривые распределения, соответствующие теоретическим стандартам, нанесены на рис. 1-7 и 1-8 пунктиром. Соответствие эмпирических точек теоретическим кривым можно считать удовлетворительным.

Несколько иной вывод можно сделать относительно группы из 83 рек при использовании оценок, взвешенных обратно пропорционально дисперсиям оценок коэффициента корреляции. В этом случае эмпирический стандарт более чем на 3ϵ , превосходит стандарт теоретический. Одной из возможных причин этого расхождения, которое свидетельствует о том, что рассеяние оценок коэффициента корреляции порождено частично различием их для разных рек, можно считать включение в рассматриваемую группу озерных рек. Природные условия многолетних колебаний стока на этих реках резко отличаются от таковых на других реках, не имеющих многолетних регуляторов (на озерных реках наблюдаются максимальные коэффициенты корреляции между смежными членами ряда).

Таблица 1-3

Параметры	Обычные оценки	Оценки, взвешенные по n	Оценки, взвешенные по $1/\sigma^2$
$\bar{r}$	0,282	0,282	0,289
σ	0,111	0,112	0,114
C_v	0,39	0,40	0,39
ϵ_r	—	—	0,013
σ_T	0,114	0,114	0,114
ϵ_σ	0,010	0,010	0,010

Исключим озерные реки из рассматриваемой группы. Тогда в ней останется лишь 78 рек со средней длиной рядов 65 лет. Расчеты показали, что коэффициенты корреляции рек этой группы являются однородной выборкой (при $\chi_q = 5\%$). Все рассмотренные выше характеристики были вычислены и для последней группы рек; они приведены в табл. 1-3.

Данные табл. 1-3 для 78 рек (без озерных) свидетельствуют о том, что теоретические стандарты, вычисленные

по уравнению (1-12) при n , равном средней длине рассмотренных выборок, и r , равном среднему значению их, практически равны эмпирическим стандартам. Это свидетельствует о том, что ошибки в вычислении отдельных коэффициентов корреляции в этой группе рек являются следствием случайных причин.

Рассмотрим теперь вопрос об определении среднего коэффициента корреляции по группе рек. В математической статистике для оценки наиболее вероятной ошибки вычисления взвешенной средней рекомендуется выражение

$$\varepsilon_r = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N \omega_j (r_j - \bar{r}'_{\text{взв}})^2}{(N-1) \sum_{j=1}^N \omega_j}}. \quad (1-18)$$

Оценка, проведенная по этому уравнению, показывает, что в наших выборках средняя взвешенная величина коэффициента корреляции определяется довольно точно $\varepsilon_r = 0,013 \div 0,022$. Если взять утроенную ошибку, то наиболее вероятный диапазон нахождения среднего коэффициента корреляции для выборки из 78 членов будет $r_{\text{взв}} \pm 3\varepsilon_r = 0,282 \pm 0,039$, т. е. коэффициент корреляции лежит в пределах от 0,24 до 0,32 со средним значением 0,28. Для европейской и казахстанской групп рек указанные величины соответственно равны 0,24—0,35 и 0,26—0,39, т. е. диапазон изменений коэффициента корреляции в группах несколько больше при примерно такой же средней величине.

Аналогичные расчеты (по 29 рекам) были проведены П. А. Ефимовичем [Л. 30]. Им были получены близкие результаты: при среднем значении $r = 0,33$ изменения лежат в диапазоне от 0,21 до 0,45.

Таким образом, проведенные расчеты показали, что:

а) использование группового анализа позволяет довольно точно оценивать среднее значение коэффициента корреляции между смежными членами ряда; б) эти значения для разных групп рек, лежащих в близких физико-географических районах, различаются незначительно; в) индивидуальные оценки коэффициента корреляции между смежными членами ряда имеют значительно меньшую точность, и ошибки оценки являются результа-

том случайных причин; г) при включении в группу озерных рек последний вывод не подтверждается, т. е. различия коэффициентов корреляции неозерных и озерных рек определяются не только случайными причинами.

В § 1-5 более детально рассмотрены вопросы пригодности уравнений (1-11) и (1-12) для выборочной индивидуальной оценки коэффициента корреляции между смежными членами гидрологических рядов с биномиальным законом распределения вероятностей. Это исследование проведено с помощью метода Монте-Карло. В следующем параграфе приводятся краткие сведения о методе Монте-Карло вообще и о применении его к моделированию гидрологических рядов в частности. При этом пока описывается лишь использование метода Монте-Карло для моделирования рядов, подчиняющихся закономерностям простых цепей Маркова.

1-4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло сравнительно недавно начали применять для решения научных и инженерных задач самого различного характера. Этот метод особенно целесообразен тогда, когда алгоритмы решения задач являются настолько сложными, что аналитическое решение их практически не представляется возможным.

Под методом Монте-Карло обычно понимается совокупность приемов, позволяющих получать решения математических задач с помощью многократных случайных испытаний [Л. 25]. Оценки искомой величины выводятся статистическим путем и носят вероятностный характер.

Таким образом, в методе Монте-Карло вместо аналитического решения экспериментально, путем математического моделирования, определяются значения искомых вероятностей или математических ожиданий.

Применительно к гидрологии и регулированию стока основная идея метода статистических испытаний заключается в создании искусственного гидрологического ряда, соответствующего закономерностям моделируемого процесса — процесса колебаний речного стока. Основными критериями подобия моделируемого и исходного рядов принимается соответствие их функций распределения вероятностей годовых величин стока и некоторых других характеристик, о которых будет сказано ниже.

Следует заметить, что термин моделирование ни в какой мере не следует отождествлять с термином прогнозирование. Смоделировать гидрологический ряд длиной в 1 000 лет, не означает вовсе, что полученные в результате моделирования величины расходов воды и последовательность появления их повторятся в будущем. Статистические испытания дополняют календарный ряд наблюдений, т. е. один из возможных вариантов чередования маловодных и многоводных лет и сезонов, множеством других вариантов, возможных при принятых законах колебания стока рек.

Основной целью использования искусственных гидрологических рядов является всесторонний анализ будущего режима работы проектируемой сложной системы, который невозможен при использовании только календарного ряда наблюдений. Метод Монте-Карло в водохозяйственных и водноэнергетических расчетах дает возможность выявить точность проведения такого расчета по календарному ряду наблюдений.

Первые попытки использовать построения, аналогичные методу Монте-Карло, в гидрологии и водохозяйственных расчетах относятся еще к 1927 г. Они были сделаны в работе Садлера [Л. 126]. Позже С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель [Л. 55] смоделировали годовой ход уровней Каспийского моря. Затем в 1959 г. Моран [Л. 125] показал целесообразность использования этого метода для расчетов регулирования стока.

В наиболее полном виде аппарат метода Монте-Карло применительно к расчетам многолетнего регулирования стока был использован Г. Г. Сванидзе [Л. 84—88]. В его статьях и монографии [Л. 87] обобщены и всесторонне исследованы возможности применения метода Монте-Карло в теории регулирования речного стока, в водноэнергетических и водохозяйственных расчетах. Разработана оригинальная методика моделирования искусственных гидрологических рядов с учетом основных стохастических закономерностей стока при делении года на любое число временных интервалов и на ее основе новые статистико-вероятностные методы расчета водохранилищ регулирующих гидроэлектростанций, в том числе универсальный обобщенный метод расчета, позволяющий рассматривать речной сток как единый процесс без искусственного деления полезной емкости водохранилища на многолетнюю и сезонную составляющие. Метод

Монте-Карло открыл путь к вероятностному решению задач, связанных с регулированием стока системой (каскадом) водохранилищ, что имеет исключительно важное значение для дальнейшего развития теории регулирования речного стока.

Предложенные методы послужили основой для создания новых приемов расчета. В институте Энергосетьпроект они доведены до инженерных решений с применением при необходимости современных ЭЦВМ.

В работах Г. Г. Сванидзе в качестве закона распределения вероятностей годового стока применялась кривая Пирсона III типа, а все практические способы расчета даны для описания процесса стока простой цепью Маркова. Несколько позже в США появились работы Томаса [Л. 67] и Фиринга [Л. 113], где моделирование гидрологических рядов, образующих простую марковскую цепь, рекомендуется проводить не для среднегодовых величин стока, а для среднемесячных и в качестве закона распределения вероятностей принят нормальный закон.

В работе В. П. Захарова и В. Я. Кима [Л. 34] также рекомендуется производить моделирование среднемесячных расходов, образующих простую цепь Маркова, но с биномиальным законом распределения вероятностей.

Позднее в СССР и США появилось значительное число работ, в которых предлагаются новые схемы моделирования гидрологических рядов и применения их в различных водохозяйственных, водноэнергетических и гидрологических расчетах и исследованиях. Ниже эти работы будут детально рассмотрены.

Следует также отметить работу С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля [Л. 56], где предложено несколько новых и весьма важных для дальнейшего изложения аспектов использования метода Монте-Карло в гидрологических и водохозяйственных расчетах.

Для моделирования любого заданного случайного процесса с помощью метода Монте-Карло необходимо воспроизводить последовательности случайных чисел, соответствующие некоторым законам распределения. Обычно [Л. 11, 12, 19, 79] для того, чтобы получить значение случайной величины с заданным законом распределения, используются равномерно распределенные случайные числа.

Проблема получения на ЭЦВМ равномерно распределенных случайных чисел может быть решена различными методами.

Первым методом, применение которого затруднено из-за ограниченного объема оперативной памяти наиболее распространенных ЭЦВМ, является ввод таблиц равномерно распределенных случайных чисел в память машины.

Второй метод получения равномерных случайных чисел заключается в использовании специальных датчиков, формирующих случайные величины путем физического моделирования некоторых случайных процессов (шумы электронных ламп и др.).

К недостаткам последнего метода относятся некоторая неустойчивость датчиков и невозможность повторения и контроля процесса вычислений.

Наибольшее распространение в настоящее время получил третий метод — генерирование псевдослучайных (или квазислучайных) равномерно распределенных последовательностей. Псевдослучайные числа получаются в ЭЦВМ по специальной программе с помощью некоторого рекуррентного соотношения. Это означает, что каждое последующее число ξ_{i+1} образуется из предыдущего ξ_i (или группы предыдущих чисел) путем применения некоторого алгоритма, состоящего из арифметических и логических операций. Если такая последовательность чисел удовлетворяет системе принятых статистических критериев проверки «случайности», то, хотя входящие в эту последовательность числа по существу взаимно зависимы, она может быть использована для практических целей в качестве равномерной и независимой.

В указанном методе получения псевдослучайных чисел отсутствуют некоторые недостатки двух других, однако и он не является совершенным. Так, выработанные программным способом последовательности случайных чисел являются периодическими. Кроме того, распределение таких чисел несколько отличается от теоретического. Последнее расхождение, несущественное для одномерной задачи, начинает оказывать серьезное влияние на результаты расчета в случае многомерной задачи [Л. 19].

В настоящее время существует большое количество способов, позволяющих устранить указанные дефекты. Как правило, это достигается за счет увеличения времени расчета. Поэтому программы выработки случайных чисел должны давать последовательности, отвечающие установленным критериям «случайности», а количество операций, необходимых для получения одного числа, должно быть по возможности минимальным.

В настоящей работе первоначально была использована ЭЦВМ «Стрела-3», а затем основные расчеты были произведены на ЭЦВМ «Урал-2».

На первой из указанных ЭЦВМ применялась для выработки случайных чисел трехкомандная программа Д. И. Голенко, подробно описанная в его книге [Л. 19], на второй ЭЦВМ — программа, приведенная в книге А. Ю. Биркмана и Г. П. Воскресенского [Л. 6].

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равномерно распределенных в интервале $(0; 1)$ случайных чисел соответственно равны:

$$M_{\xi} = 0,5; \quad \sigma_{\xi} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,28868.$$

Для программы, приведенной в [Л. 6], при длине ряда $n = 1\,000$ экспериментально получены следующие характеристики:

$$\bar{\xi} = 0,49708; \quad \sigma^*_{\xi} = 0,28846.$$

При этом оказалось, что коэффициент корреляции между смежными членами ряда $r^* = 0,00146$. Таким образом, при наиболее упо-

требительной длине ряда характеристики распределения его близки к теоретическим и связность между смежными членами ряда практически отсутствует. Авторы программы [Л. 6] произвели более полное исследование равномерности распределения псевдослучайных чисел, их периодичности и случайности и нашли, что рекомендуемая ими программа генерирует псевдослучайные числа, которые при достаточно большом объеме выборки удовлетворяют системе принятых статистических критериев проверки равномерности и случайности. Так, например, повторное появление исходного случайного числа не было обнаружено в первых 400 000 членах ряда.

Следует, однако, заметить, что по свидетельству Д. И. Голенко применение статистических критериев согласия не решает задачу оценки распределения псевдослучайных чисел до конца. Соответствие статистическому критерию означает лишь то, что у нас нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что распределение псевдослучайных чисел равномерно. Но это отнюдь не является гарантией истинности этой гипотезы [Л. 19].

В настоящее время разработано и рекомендуется несколько практических приемов улучшения качества случайных чисел при получении их программным способом на ЭЦВМ.

В частности, в [Л. 20] рекомендуется следующий простой алгоритм получения равномерных случайных чисел. Пусть имеется k -разрядное двоичное число

$$\xi_i = \varepsilon_1 2^{-1} + \varepsilon_2 2^{-2} + \dots + \varepsilon_k 2^{-k},$$

где ξ_i — нуль или единица.

Образует из ξ_i путем сдвига два новых числа:

$$\xi_{i1} = \varepsilon_{p+1} 2^{-1} + \varepsilon_{p+2} 2^{-2} + \dots + \varepsilon_k 2^{k-p};$$

$$\xi_{i2} = \varepsilon_1 2^{-(l+1)} + \varepsilon_2 2^{-(l+2)} + \dots + \varepsilon_{k-l} 2^{-k}.$$

Число

$$\xi_{i+1} = \begin{cases} \xi_{i1} + \xi_{i2} & \text{при } \xi_{i1} + \xi_{i2} < 1 \\ \xi_{i1} + \xi_{i2} - 1 + 2^{-k} & \text{при } \xi_{i1} + \xi_{i2} \geq 1 \end{cases}$$

принимается за следующее случайное число. При $k=36$, $p=6$, $l=12$ отрезок аperiodичности составил 2 000 000. В соответствии с этим алгоритмом Г. А. Крыловым была составлена программа генерирования равномерно распределенных в интервале $(-1 \div +1)$ случайных чисел для ЭЦВМ «Урал-2». В институте Энергосеть-проект эта программа была модифицирована для интервала $(0; 1)$ и использовалась в дальнейшем для исследований, требующих повышенной степени точности. Для всех остальных случаев, в том числе для проектных проработок, использовалась программа, приведенная в [Л. 6].

Как указывалось, принятию закона распределения вероятностей годовых стоков той или иной группы рек должна предшествовать специальная статистическая обработка исходных гидрологических данных. При любом принятом законе распределения вероятностей годовых объемов (или расходов) стока для моделирования их может быть использовано основное соотношение, свя-

зываются случайные числа с любым заданным законом распределения и числа, имеющие равномерное распределение в интервале (0; 1). Чтобы получить такое соотношение, можно воспользоваться известным положением [Л. 11, 12] о том, что если случайная величина μ имеет плотность распределения $f(x)$, то распределение случайной величины

$$\eta = \int_0^{\mu} f(x) dx \quad (1-19)$$

является равномерным в интервале (0; 1). Процедура преобразования равномерно распределенных в интервале (0; 1) случайных чисел ξ_i в случайные числа x_i с заданным законом распределения $f(x)$ сводится к решению относительно x_i уравнения

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx = \xi_i. \quad (1-20)$$

Необходимо отметить, что в большинстве практически важных случаев уравнение (1-20) аналитически не решается относительно x_i (в том числе и в случае нормального распределения). Поэтому в практических приложениях обычно используются приближенные приемы указанного преобразования случайных чисел. К ним относятся:

1) решение уравнения (1-20) посредством аппроксимации подынтегральной функции полиномами или другими функциями, обеспечивающими удобство преобразования случайных чисел; 2) случайная выборка из таблиц, содержащих заблаговременно рассчитанные решения уравнения (1-20) (так называемое «перемешивание таблиц») и 3) численное решение уравнения (1-20) в процессе преобразования случайных чисел, а также некоторые другие методы, которые ниже будут кратко описаны.

Использование первого приема в моделировании гидрологических рядов до сих пор не производилось. Наибольшее распространение в проектной практике в настоящее время получил второй прием. Этому способствовало наличие широко распространенной в гидрологии таблицы отклонений ординат кривой обеспеченности от середины при среднем и стандарте, равных единице. Как уже указывалось в § 1-2, гамма-распределение (и,

в частности, кривая Пирсона III типа) получило наибольшее распространение в гидрологии. Указанная выше таблица была составлена Фостером и Рыбкиным много лет назад, а затем неоднократно проверялась и расширялась различными авторами.

Ординаты кривой обеспеченности представляют собой решения уравнения кривой распределения вероятностей превышения $p(x \geq x_i)$. Для кривой Пирсона III типа имеем:

$$p(x \geq x_i) = 1 - \frac{\gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{x_i} x^{\gamma-1} e^{-\gamma x} dx, \quad (1-21)$$

где $\gamma = 1/C_v^2$ и $\Gamma(\gamma)$ — символ гамма-функции.

В таблице ординат K_p кривой Пирсона III типа два входа: p_i (обеспеченность) и C_v (коэффициент вариации стока) — $K_p = f(p_i C_v)$. Таблица ординат построена для $C_s = 2C_v$. Для трехпараметрического гамма-распределения, рекомендуемого С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем [Л. 53] (подробнее об этих кривых см. § 1-2), имеются рассчитанные таблицы ординат. Они составлены для разных значений отношения C_s/C_v от 1 до 6.

Если годовые величины стока реки считать независимыми событиями, то использование указанных таблиц ординат для моделирования искусственного стокового ряда окажется чрезвычайно простым. Для этого, приравняв последовательно каждое случайное равномерное число ξ_i обеспеченности p_i при заданных норме стока $\bar{Q}$, коэффициентах вариации C_v и асимметрии C_s , по соответствующей таблице можно получить последовательность расходов Q_i . Каждый член моделируемой последо-

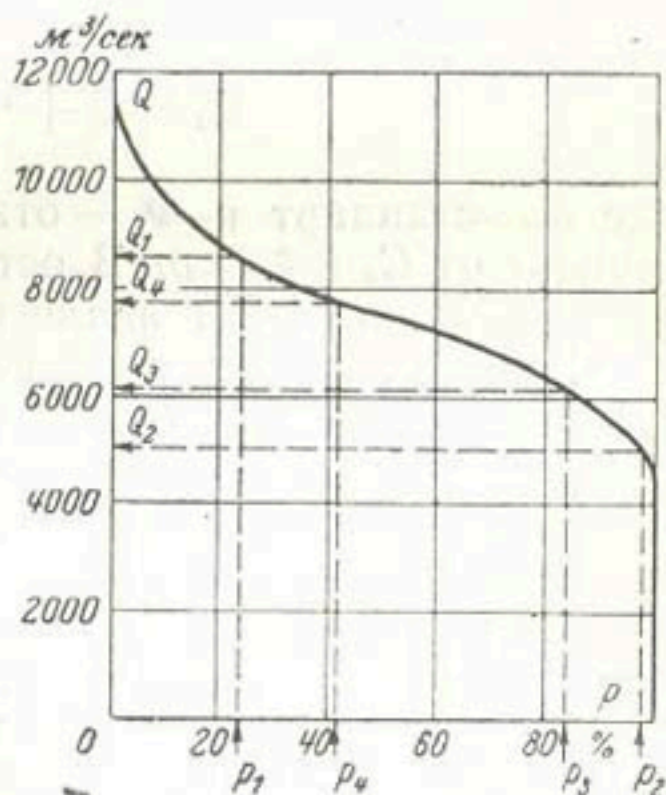


Рис. 1-9. Кривая обеспеченности среднегодовых расходов р. Волги у г. Куйбышева (1881—1940 гг.).

вательности определяется с помощью следующего выражения:

$$Q_i = \bar{Q} K_{p_i}(\xi_i, C_v). \quad (1-22)$$

Процесс получения величин K_{p_i} и Q_i показан на рис. 1-9. Кривая обеспеченности строится по данным таблицы при принятых исходных параметрах $\bar{Q}$, C_s и C_v . Исходные параметры получаются путем статистической обработки ряда наблюдений или каким-либо другим способом. Если длина ряда наблюдений достаточно велика, то указанную кривую можно строить непосредственно по эмпирическим данным.

Таблица значений обеспеченности для кривой Пирсона III типа ($C_s = 2C_v$) во многих учебных пособиях и гидрологических справочниках приводится в виде отклонений ординат кривой обеспеченности от середины. Таблица отклонений ординат кривой обеспеченности от середины имеет на входе p и C_s , поэтому расчетное уравнение для моделирования (1-22) при использовании ее несколько изменяется:

$$Q_i^* = \bar{Q} + \Phi_i(\xi_i, C_s) \sigma, \quad (1-23)$$

где σ — стандарт и Φ_i — отклонение ординаты, которое зависит от C_s и $\xi_i = p_i$. В остальном моделирование ряда по уравнению (1-23) аналогично указанному выше.

Следует заметить, что, используя одну строку таблицы отклонений для $C_s = 0$, можно по уравнению (1-23) производить моделирование величин, подчиняющихся нормальному закону распределения вероятностей. Если же вместо величин расходов использовать логарифмы их, то можно моделировать ряды с логнормальным законом распределения вероятностей.

Численное решение уравнения (1-20) в процессе преобразования случайных чисел использовалось для моделирования несвязных гидрологических рядов. Так, в институте Гидропроект Б. Х. Хазановым и А. Г. Говбергом [Л. 7] для целых значений γ интеграл уравнения (1-20) был представлен в следующем виде:

$$\xi_i = e^{-\gamma x_i} \sum_{k=0}^{\gamma-1} \frac{\gamma^k x_i^k}{k!}. \quad (1-24)$$

Здесь, как и прежде, $\gamma = 1/C_v^2$.

Решив уравнение (1-24) относительно x_{it} и принимая

$$Q_{it} = \bar{Q}_{x_{it}}, \quad (1-25)$$

получим гидрологический ряд с $C_v = \sqrt[3]{1/\gamma}$.

Для $C_v = 1$ и $\gamma = 1$ уравнение (1-24) превращается в

$$\xi_{it} = e^{-x_{it}}. \quad (1-26)$$

Для $C_v = 0,5$ и $\gamma = 4$ уравнение (1-24) превращается в

$$\xi_{it} = e^{-4x_{it}} \left(1 + 4x_{it} + 8x_{it}^2 + \frac{32}{3}x_{it}^3 \right) \quad (1-27)$$

и т. д.

Этот метод пригоден для моделирования рядов с C_v , соответствующими целым γ . Зависимости C_v от целых γ даются ниже (табл. 1-4).

Таблица 1-4

γ	1	2	3	4	5	6	7
C_v	1,000	0,706	0,578	0,500	0,447	0,408	0,378

Продолжение

γ	8	9	10	11	12	13	14	15
C_v	0,354	0,333	0,316	0,302	0,289	0,278	0,268	0,258

Продолжение

γ	16	17	18	19	20	21	22
C_v	0,250	0,243	0,236	0,230	0,224	0,218	0,214

Продолжение

γ	23	24	25	26	27	28	44	100
C_v	0,208	0,204	0,200	0,197	0,193	0,190	0,150	0,100

Для гидрологических рядов с коэффициентами вариации, не соответствующими целым γ , моделирование может осуществляться путем интерполирования между ближайшими C_v , соответствующими целым γ . Как видно из приведенной таблицы и формулы (1-24), с уменьшением C_v шаг таблицы уменьшается. Это означает, что

интерполирование может осуществляться с большей точностью. Однако в соответствии с (1-24) чем меньше C_v , тем больше вычислений необходимо сделать для того, чтобы получить искусственный ряд. Таким образом, с уменьшением C_v трудоемкость метода моделирования резко возрастает.

Рассмотрим еще два способа моделирования несвязных гидрологических рядов с гамма-распределением. Первый из них предложен В. Г. Сраговичем для гамма-распределения (1-1). Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — совокупность n нормально распределенных независимых величин с математическим ожиданием, равным нулю, и единичным стандартным отклонением. Образует из них случайную величину

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^2 = \chi_n^2. \quad (1-28)$$

Тогда величина

$$\eta(n, \gamma, b) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2^b \Gamma(\gamma + b)} = (\chi_n^2)^b \quad (1-29)$$

будет иметь плотность распределения

$$p(x, \gamma, b) = \left[\frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\frac{\gamma}{b}} \frac{1}{|b| \Gamma(\gamma)} x^{\frac{\gamma}{b} - 1} e^{-\left[\frac{x \Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\frac{1}{b}}}. \quad (1-30)$$

Математическое ожидание η равно 1. Для получения величин с математическим ожиданием x_0 находим:

$$\eta^*(n, \gamma, b) = \frac{\Gamma(\gamma) x_0 (\chi_n^2)^b}{2^b \Gamma(\gamma + b)}. \quad (1-31)$$

Плотность распределения η^*

$$p(x, x_0, \gamma, b) = \left[\frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\gamma/b} \frac{1}{|b| \Gamma(\gamma) x_0^{\gamma/b}} \times \\ \times x^{\frac{\gamma}{b} - 1} e^{-\left[\frac{\Gamma(\gamma + b)x}{\Gamma(\gamma)x_0} \right]^{\frac{1}{b}}}. \quad (1-32)$$

Приведенный вывод справедлив лишь для

$$\frac{\gamma}{b} = \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{1}{b} + b, \text{ т. е. } \gamma = \frac{n}{2} - 1 + b^2.$$

Для более простого случая $b=1$, т. е. для кривой Пирсона III типа имеем:

$$\eta^*(n, \gamma, x_0) = \frac{\gamma x_0}{2} (\chi_n^2) \quad (1-33)$$

с плотностью распределения

$$p(\gamma, x_0) = \frac{\gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma) x_0^\gamma} x^{\gamma-1} e^{-\frac{\gamma x}{x_0}}. \quad (1-34)$$

Эти уравнения справедливы для $\gamma = n/2$, т. е. если γ есть целое или полуцелое.

Напомним, что $\gamma = 1/C_v^2$, откуда $C_v^2 = \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{n}$, т. е. этот алгоритм справедлив лишь для C_v^2 следующего вида:

$$C_v^2 = 2; 1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{1}{3}. \quad (1-35)$$

Второй алгоритм предложен Л. Н. Большевым. Он пригоден для целых γ . Если, как и в первом алгоритме, $\frac{n}{2} = \frac{1}{C_v^2}$ (где n — целые числа) для случая, когда n четные ($n = 2m$), то, приняв $nK_i = z = 2mK_i$, получим:

$$1 - \theta = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^z x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx, \quad (1-36)$$

где θ — равномерно распределенные случайные числа в интервале $((0; 1))$. Приведенное выражение представляет собой χ^2 -распределение.

Следовательно, если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, распределенные по закону $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, то функция распре-

деления величины $\eta_n = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$ будет χ^2 -распределением.

При $n = 2$ из (1-36) получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^z e^{-\frac{x}{2}} dx = 1 - e^{-\frac{z}{2}}, \quad (1-37)$$

т. е. $\theta = e^{-\frac{z}{2}}$, или $z = -2 \ln \theta$.

Выражение (1-37) является χ^2 -распределением, которое имеет величина η_2 . Следовательно,

$$\eta_2 = -2 \ln \theta. \quad (1-38)$$

Когда $n = 2m$, можно написать:

$$\eta_{2m} = \eta_2^{(1)} + \eta_2^{(2)} + \dots + \eta_2^{(m)}, \quad (1-39)$$

где η_{2m} имеет также χ^2 -распределение.

После подстановки получим:

$$\eta_{2m} = -2 (\ln \theta_1 + \ln \theta_2 + \dots + \ln \theta_m) = 2mK_i, \quad (1-40)$$

или

$$K_i = -\frac{\ln \theta_1 + \dots + \ln \theta_m}{m}, \quad (1-41)$$

где K_i — случайная величина с гамма-распределением (кривая Пирсона III типа).

Приведенные алгоритмы при уменьшении C_v требуют значительного увеличения времени расчета. Для больших коэффициентов вариации моделирование рядов возможно лишь для небольшого количества значений C_v , соответствующих целым γ ; в связи с этим в ряде случаев интерполяция должна производиться между значениями, существенно отличающимися друг от друга.

При использовании логнормального закона распределения наиболее удобным является следующий алгоритм получения независимых величин. Если случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x, \sigma, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1-42)$$

т. е. логнормальное распределение, то величина $\eta = \ln \xi$ распределена нормально с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 .

Найдем функцию распределения $\Phi(x)$ величины η :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= p(\eta < x) = p(\ln \xi < x) = \\ &= p(\xi < e^x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_0^{e^x} \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}} dt. \end{aligned} \quad (1-43)$$

Произведем замену переменных в интеграле по формуле $\ln t = y$. Тогда

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy, \quad (1-44)$$

т. е. величина η имеет нормальное распределение. Исходя из этого, очевиден следующий способ моделирования логнормальной случайной величины с параметрами a и σ : а) получение нормальной случайной величины η с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 ; б) по-

лучение логнормальной случайной величины ξ по формуле

$$\xi = e^{\eta}. \quad (1-45)$$

Необходимо заметить, что параметры a и σ , входящие в логнормальное распределение, не являются математическим ожиданием и стандартным отклонением величины ξ .

Если требуется моделировать логнормальную величину с математическим ожиданием M и дисперсией D , то параметры a и σ находят по формулам:

$$a = \ln \frac{M}{\sqrt{1 + \frac{D}{M^2}}}; \quad (1-46)$$

$$\sigma = \sqrt{\ln \left(1 + \frac{D}{M^2} \right)}. \quad (1-47)$$

Эти формулы легко доказать, исходя из определений математического ожидания и дисперсии случайной величины.

Для моделирования простых цепей Маркова с помощью случайной выборки из таблиц ординат применяется уравнение линейной нормальной регрессии. При этом допускается, что условные функции имеют распределения того же вида, что и безусловные.

Уравнение для моделирования записывается следующим образом:

$$Q_i = [\bar{Q} + r(Q_{i-1} - \bar{Q})] K_{pi}(\xi_i, C_{vi}^{усл}). \quad (1-48)$$

Здесь: r — коэффициент корреляции между смежными членами ряда; Q_{i-1} — расход за предыдущий год; K_{pi} — как и прежде, ордината кривой обеспеченности, которая определяется по таблице ординат в зависимости от случайного равномерно распределенного числа ξ_i и условного коэффициента вариации, определяемого в свою очередь из уравнения

$$C_{vi}^{усл} = \frac{\sigma \sqrt{1 - r^2}}{\bar{Q} + r(Q_{i-1} - \bar{Q})}, \quad (1-49)$$

где σ — безусловный стандарт ряда; остальные обозначения давались выше.

При использовании таблиц отклонений, уравнение (1-48) преобразуется следующим образом:

$$Q_i = \bar{Q} + r(Q_{i-1} - \bar{Q}) + \Phi_i(\xi_i, C_{\text{усл}}^{\text{усл}}) \sigma \sqrt{1-r^2}, \quad (1-50)$$

где для $C_s = 2C_v$ принимаем:

$$C_{\text{усл}}^{\text{усл}} = \frac{2\sigma \sqrt{1-r^2}}{\bar{Q} + r(Q_{i-1} - \bar{Q})}. \quad (1-51)$$

При использовании для моделирования таблиц требуется интерполяция (обычно линейная или квадратичная) между рассчитанными значениями ординат или отклонений. Остальные расчеты при моделировании с помощью таблиц по уравнениям (1-48) — (1-51) достаточно просты. В приложении 5 работы [Л. 87] опубликована программа моделирования гидрологических рядов на ЭЦВМ «Стрела-3» по таблице отклонений, разработанная в Энергосетьпроекте. В программе используется линейная интерполяция в таблице с двумя входами. Моделирование 1 000-летнего ряда требует около 2 мин машинного времени.

Как уже указывалось, другие способы моделирования случайных чисел с гамма-распределением, описанные в данном параграфе, были разработаны только для независимых последовательностей.

Для моделирования гидрологических рядов, образующих простую марковскую цепь с логнормальным распределением, можно рекомендовать следующий способ, разработанный в институте Энергосетьпроект.

Пусть необходимо построить величину ξ с логнормальным распределением и коэффициентом корреляции ρ между смежными членами. Для этого сначала моделируют значение нормально распределенной величины η с параметрами a и σ и коэффициентом корреляции r между смежными членами, который связан с ρ соотношением

$$r = \frac{\ln [1 + \rho (e^{\sigma^2} - 1)]}{\sigma^2} \quad (1-52)$$

(способ получения η описан ниже в приложении III); а затем искомая величина ξ с коэффициентом корреляции ρ между смежными членами находится по формуле (1-45). Доказательство правомерности способа вместе

с программой получения коррелированных величин, распределенных в соответствии с логнормальным законом, см. в приложении III.

Рассмотрим следующую достаточно общую схему моделирования связных рядов с любым заданным законом распределения, в основе которой лежит построение случайной величины ξ с равномерным в интервале $(0; 1)$ распределением и заданным коэффициентом корреляции ρ между смежными членами (т. е. между рядами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ и $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+1}, \dots$, где ξ_i — значения случайной величины ξ).

Пусть имеется датчик случайных независимых и распределенных по нормальному закону чисел x_i с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда величина η , значения η_i которой вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= x_1; \\ \eta_i &= r\eta_{i-1} + \sqrt{1-r^2} x_i,\end{aligned}\quad (1-53)$$

будет распределена нормально с функцией распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1-54)$$

и коэффициент корреляции между смежными членами будет равен r . Для перехода к равномерной величине положим

$$r = 2 \sin \frac{\pi}{6} \rho. \quad (1-55)$$

Тогда величина ξ , значения ξ_i которой вычисляются по формуле

$$\xi_i = \Phi(\eta_i), \quad (1-56)$$

будет равномерно распределена в интервале $(0; 1)$ и коэффициент корреляции между смежными членами будет равен ρ . Доказательство последнего утверждения см. в приложении III.

В [Л. 87] описан другой упрощенный способ получения случайных равномерных чисел с заданной корреляцией между смежными членами, названный автором «методом разрывных функций».

Имея равномерно распределенную величину ξ с заданным коэффициентом корреляции между смежными

членами, можно построить величину η с необходимой функцией распределения $F(x)$ по формуле $\eta = F^{-1}(\xi)$, где $F^{-1}(x)$ — функция, обратная $F(x)$. При этом вопрос о связи коэффициентов корреляции между смежными членами величин η и ξ остается открытым. Поэтому для каждой функции $F(x)$ нужно определять свою функциональную связь между соответствующими коэффициентами корреляции. Если эту зависимость не удастся найти аналитическим путем, то можно использовать эмпирический способ: моделирование достаточно длинных рядов величин $\eta = F^{-1}(\xi)$ для разных коэффициентов корреляции ρ между смежными членами величины ξ и получение выборочных оценок соответствующих коэффициентов корреляции r .

Следует отметить вычислительные трудности моделирования связных рядов с заданным законом распределения как при нахождении зависимости между r и ρ , так и при построении η по формуле $\eta = F^{-1}(\xi)$.

1-5. ОЦЕНКА ТЕСНОТЫ СВЯЗИ МЕЖДУ СМЕЖНЫМИ ЧЛЕНАМИ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ

Исследования начнем с эмпирического отыскания наилучших оценок одного из статистических параметров, а именно коэффициента корреляции между смежными членами ряда. Как указывалось в § 1-3, уравнение (1-11) пригодно, строго говоря, для вычисления коэффициента корреляции между смежными членами рядов, имеющих не любые распределения.

В данном исследовании будем исходить из следующего:

В качестве закона распределения вероятностей используется кривая Пирсона III типа с $C_s = 2C_v$ и $\bar{Q} = 1$.

В гидрологических рядах учитывается только коэффициент корреляции между их смежными членами, т. е. ряды являются простыми цепями Маркова с зависимостью между первым r и последующими r_τ членами корреляционной функции

$$r_\tau = r^\tau.$$

При моделировании гидрологических рядов используется способ «перемешивания таблиц», описанный выше.

При указанных исходных предпосылках исследование методом Монте-Карло выборочных оценок коэффициента корреляции между смежными членами ряда проводится следующим образом:

1. Задаемся некоторыми значениями исходных данных:

- а) коэффициента корреляции $r=0; 0,3; 0,5$;
- б) коэффициента вариации $C_v=0,25; 0,50; 1,00$;
- в) длины выборки $n=25; 50$.

2. Для каждого сочетания исходных данных моделируется по 500 выборок. Всего моделируется, таким образом, 18 гидрологических рядов длиной по $500 \times n$ членов.

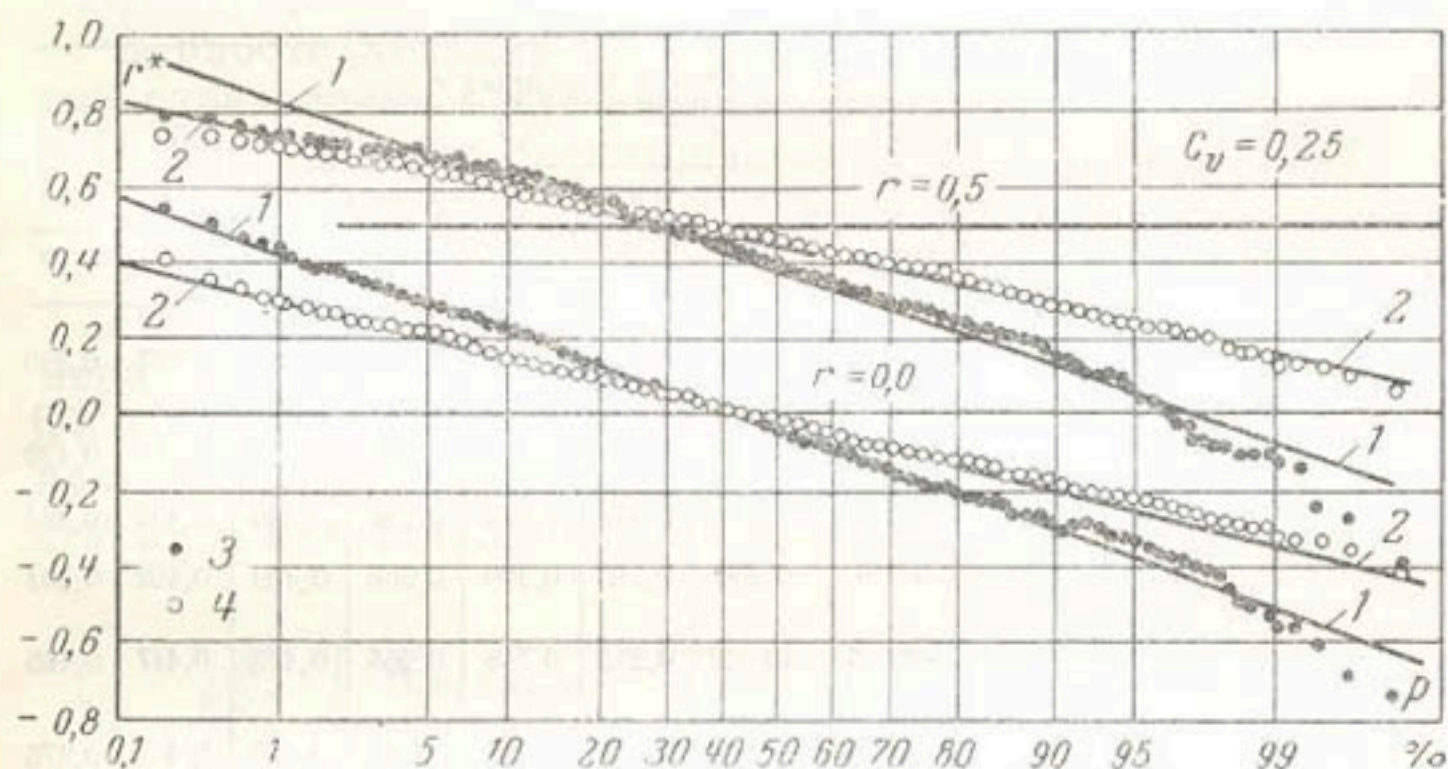


Рис. 1-10. Распределения коэффициентов корреляции между смежными членами совокупности случайных выборок.

1 — теоретическая нормальная кривая с параметрами эмпирического распределения при $n=25$; 2 — то же при $n=50$; 3 — точки эмпирического распределения при $n=25$; 4 — то же при $n=50$.

3. По каждой выборке вычисляется в соответствии с уравнением (1-11) выборочный коэффициент корреляции между смежными членами ряда. Полученные в каждом случае 500 коэффициентов рассматриваются как некоторая совокупность случайных величин. По ним строятся распределения коэффициентов корреляции и вычисляются статистические параметры этих распределений.

Характер полученных распределений иллюстрируется рис. 1-10. Математические ожидания всех 18 распределений представлены в табл. 1-5.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что распределения выборочного коэффициента корреляции между смежными членами ряда при небольшой абсолютной величине его близко к нормальному. По сравнению с истинным значением коэффициента его математическое ожидание (выборочное среднее) имеет некоторое отрицательное смещение. Величина смещения зависит от длины выборки, истинного значения самого коэффициента корреляции и — в меньшей степени — от коэффициента вариации ряда.

Таблица 1-5

n	Параметры	$\bar{r}^*$ при исходных r								
		0,0			0,3			0,5		
		и коэффициенте вариации C_v								
		0,25	0,50	1,00	0,25	0,50	1,00	0,25	0,50	1,0
25	Выборочный коэффициент корреляции	-0,048	-0,043	-0,043	0,210	0,215	0,225	0,381	0,387	0,399
	То же с поправкой (1-58)	-0,008	-0,006	-0,003	0,250	0,255	0,265	0,421	0,427	0,439
	То же с поправкой (1-57)	-0,014	-0,016	-0,020	0,267	0,272	0,282	0,446	0,452	0,464
	То же с поправкой (1-60)	0,009	0,008	0,006	0,298	0,299	0,306	0,489	0,492	0,501
50	Выборочный коэффициент корреляции	-0,027	-0,025	-0,023	0,255	0,258	0,265	0,443	0,447	0,455
	То же с поправкой (1-58)	-0,007	-0,005	-0,003	0,275	0,278	0,285	0,463	0,467	0,475
	То же с поправкой (1-57)	-0,001	+0,001	0,003	0,282	0,285	0,292	0,475	0,479	0,487
	То же с поправкой (1-60)	0,003	0,003	0,006	0,302	0,303	0,308	0,501	0,503	0,509

Ввиду важности вопроса о смещенности оценки (1-11) остановимся на нем подробнее. Наличие систематической погрешности в оценке (1-11) коэффициента корреляции между смежными членами ряда можно объяснить, во-первых, тем, что в оценке (1-11) не учитывается связность ряда, и, во-вторых, тем, что она выведена для рядов с нормальным распределением.

Для связанных нормальных рядов, образующих простую цепь Маркова, С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем в [Л. 55] было выведено уравнение для определения коэффициента корреляции r по его выборочной оцен-

ке r^* . Здесь в указанном уравнении устранены некоторые опечатки:

$$r^{*2} = \frac{r^2 - \frac{2r}{n(n-1)(1-r)} \left(n - \frac{1-r^n}{1-r} \right)}{1 - \frac{2r}{n(n-1)(1-r)} \left(n - \frac{1-r^n}{1-r} \right)}. \quad (1-57)$$

Уравнение (1-57) решается подбором; из-за сложности оно не получило распространения на практике. Кроме того, оно не позволяет, как показали наши расчеты, полностью ликвидировать указанную систематическую погрешность вычисления r в гидрологических рядах с гамма-распределением.

В работе Хеннана [Л. 98] для ликвидации смещения при определении r для рядов с нормальным распределением предлагается следующая простая формула:

$$r = r^* + \frac{1}{n}. \quad (1-58)$$

По свидетельству [Л. 127] использование ее правомерно только при $n \geq 50$. Для рядов с $n < 50$ в работе [Л. 127] предложено весьма сложное выражение для поправки к оценке коэффициента корреляции в зависимости от n и r (табл. 1-6). В рядах с гамма-распреде-

Т а б л и ц а 1-6

Коэффи- циент кор- реляции	Поправка к оценке коэффициента корреляции при значениях n						
	6	8	10	15	50	100	500
0,2	0,046	0,038	0,032	0,023	0,008	0,004	0,001
0,4	0,090	0,076	0,064	0,046	0,015	0,008	0,002
0,6	0,132	0,111	0,095	0,069	0,023	0,012	0,002
0,8	0,167	0,143	0,123	0,090	0,031	0,016	0,003
1,0	0,189	0,160	0,137	0,100	0,034	0,019	0,004

нием данная поправка оказывается также недостаточной. Обозначим разность между истинным коэффициентом корреляции и средним выборочным в наших расчетах через

$$\Delta r = r - \bar{r}^*. \quad (1-59)$$

Зависимость Δr от величин $\bar{r}^*$, C_v и n представлена на рис. 1-11. По этим данным было подобрано [Л. 72] следующее эмпирическое уравнение, которое позволяет довольно точно определять истинное значение коэффи-

циента корреляции между смежными членами ряда с гамма-распределением:

$$\hat{r} = r^* + \frac{1 + \frac{0,7}{1 + C_v} + 3r^*}{n}. \quad (1-60)$$

Проверка этой поправки была произведена для нескольких сочетаний исходных параметров рядов (для $C_v=1$ и $n=10, 25$ и 50). Результаты проверки приведены в табл. 1-7.

Таблица 1-7

Параметры	Коэффициенты корреляции при значениях n		
	10	25	50
r	0,300	0,00	0,300
$\bar{r}^*$	0,117	-0,043	0,225
$\hat{r}$	0,289	0,005	0,306

Как видно из приведенных данных, использование поправки (1-60) хорошо ликвидирует смещенность оценки (1-11) в рядах с разными исходными параметрами. Кроме того, на рис. 1-12 представлено сопоставление

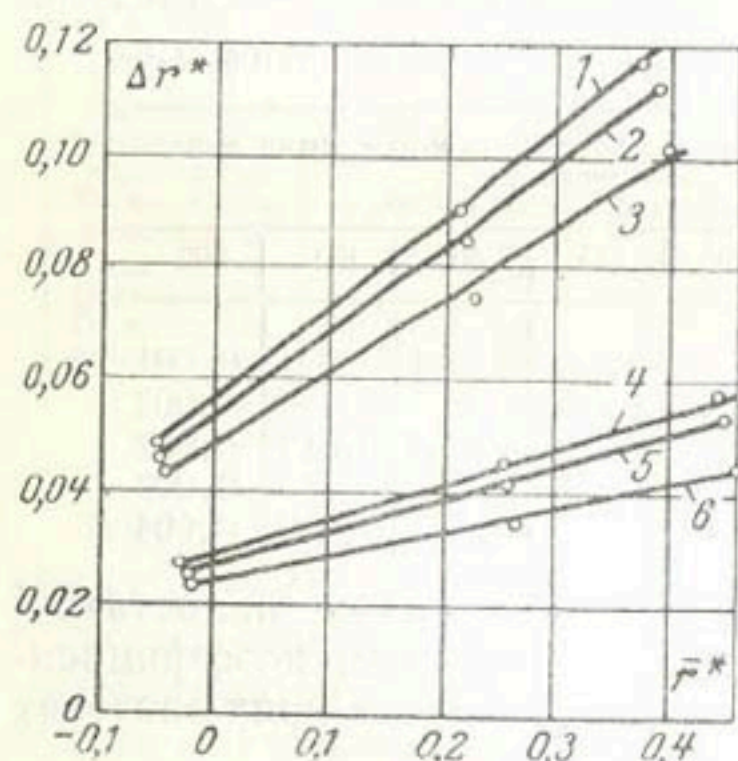


Рис. 1-11. Зависимость Δr^* от среднего выборочного значения коэффициента корреляции $\bar{r}^*$ для различных значений C_v и n .

1 — $n=25$; $C_v=0,25$; 2 — $n=25$; $C_v=0,5$; 3 — $n=25$; $C_v=1,0$; 4 — $n=50$; $C_v=0,25$; 5 — $n=50$; $C_v=0,5$; 6 — $n=50$; $C_v=1,0$.

для рядов с $C_v=0,25$; $n=25$ и $r=0,0$; $0,3$; $0,5$) истинных коэффициентов корреляции с выборочными средними без учета поправок и с учетом различных отмечавшихся выше поправок (1-57), (1-58) и (1-60). Приведенные данные показывают, что предпочтение должно быть отдано поправке (1-60). Аналогичные сопоставления были проведены и для других рассмотренных в этой работе рядов. Эти материалы, приведенные в табл. 1-5, также показали, что эмпирическая поправка

(1-60) может быть предварительно рекомендована для ликвидации систематической погрешности в уравнении (1-11). В дальнейшем должны быть проведены более надежные теоретические проработки данного вопроса.

Таблица 1-8

Наименование	Коэффициент вариации C_v	Стандартные отклонения при значениях r						
		0,0		0,3		0,5		
		и длине выборки n						
		25	50	10	25	50	25	50
По формуле Пирсона и выборочному — среднему $\bar{r}^*$	0,25	0,199	0,141	—	0,192	0,133	0,171	0,114
	0,50	0,199	0,141	—	0,191	0,133	0,170	0,114
	1,00	0,199	0,141	0,314	0,190	0,132	0,167	0,113
То же по истинному r	—	0,200	0,142	0,289	0,182	0,129	0,150	0,106
Фактическое стандартное отклонение r^*	0,25	0,200	0,136	—	0,200	0,131	0,193	0,123
	0,50	0,199	0,135	—	0,198	0,130	0,191	0,122
	1,00	0,192	0,132	0,291	0,192	0,128	0,185	0,120
Фактическое стандартное отклонение r несмещенной оценки по выражению (1-60)	1,00	0,214	—	0,378	0,215	0,135	0,277	—

В табл. 1-8 даны стандартные отклонения приведенных эмпирических распределений и стандартная ошибка выборочного среднего, вычисленная по уравнению (1-12). Эти данные свидетельствуют о том, что формула Пирсона для связанных рядов несколько занижает величину стандартной ошибки, причем расхождение между фактическим стандартным отклонением и ошибкой по формуле Пирсона тем больше, чем выше коэффициент корреляции, короче ряд и меньше коэффициент вариации ряда. Максимальное расхождение в наших расчетах составило 13%. Для несвязных

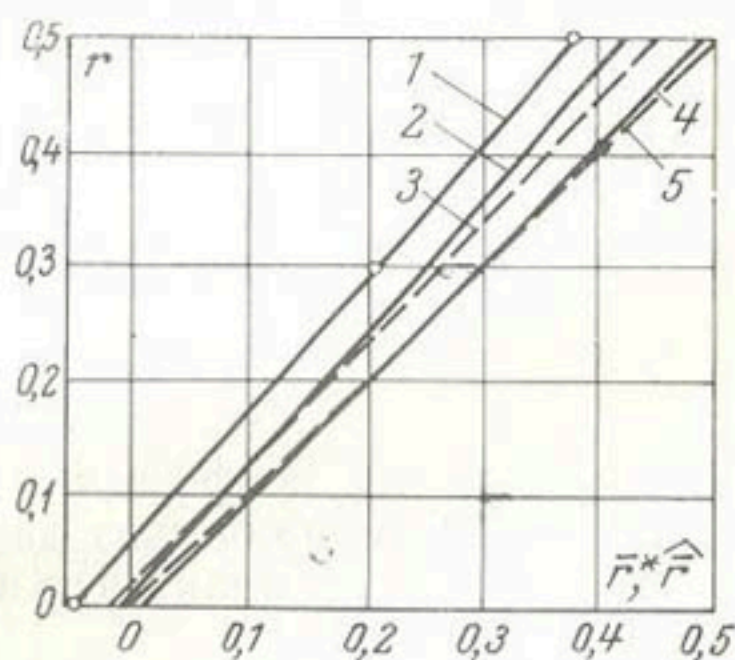


Рис. 1-12. Связь истинных коэффициентов корреляции и выборочных средних с учетом различных теоретических и эмпирических поправок на смещенность.

1 — выборочные средние; 2 — то же с поправкой (1-58); 3 — то же с поправкой (1-57); 4 — то же с поправкой (1-60); 5 — истинные значения.

рядов совпадение фактического и теоретического стандартов получилось достаточно хорошим, однако для больших C_v и n оценка по формуле Пирсона оказалась несколько завышенной.

Если в формуле Пирсона использовать не выборочные средние коэффициента корреляции, а его истинные значения, то расхождения между фактическим стандар-

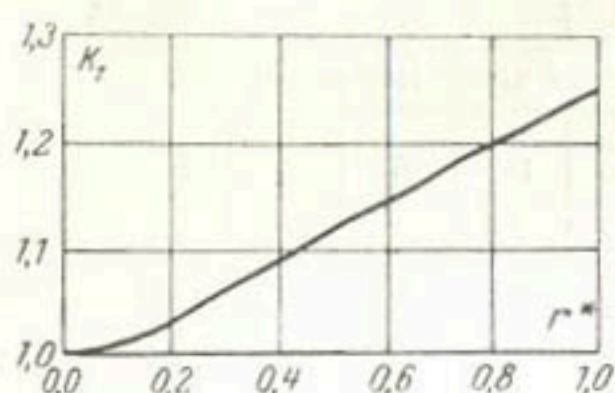


Рис. 1-13. Зависимость поправки K_1 к стандартной ошибке r на связность ряда от выборочного среднего коэффициента корреляции r^* .

том и ошибкой, вычисленной по формуле Пирсона, будут еще больше (максимальное расхождение для связных рядов в наших расчетах получилось для $r=0,5$, $C_v=0,25$ и $n=25$ равным 29%). Для ликвидации расхождения фактического и теоретического стандартов в связных рядах может быть использована поправка к формуле Пирсона, предложенная Е. Е. Слуцким [Л. 93]. Од-

нако использование поправки Е. Е. Слуцкого, включающей моменты высоких порядков, связано с очень трудоемкими расчетами. Поэтому эту поправку в первом приближении можно заменить подобранной по нашим данным эмпирической поправкой следующего вида:

$$\sigma = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}} \sqrt{1 + \frac{2,2r^2}{(1+r)^2}}, \quad (1-61)$$

или, обозначив выражение поправки через K_1 , получим:

$$\sigma = \frac{(1-r^2)K_1}{\sqrt{n-1}}. \quad (1-62)$$

Зависимость коэффициента K_1 от r представлена на рис. 1-13. В эмпирических данных C_v и n влияют на поправку K_1 , но в практических расчетах этим, видимо, можно пренебречь¹.

¹ В последнее время Е. Г. Блохиновым и О. В. Сармановым теоретическим путем было получено следующее выражение для стандарта коэффициента корреляции между смежными членами ряда с гамма-распределением [Л. 10]:

$$\sigma_1(r) = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{r(4+r)}{(1+r)^2} C_v^2}.$$

Если для выборочной оценки коэффициента корреляции использовать приведенные выше оценки, ликвидирующие смещение r [выражения (1-57), (1-58) и (1-60)], то фактическое стандартное отклонение для связанных рядов увеличится и расхождение его с ошибкой, вычисленной по формуле Пирсона, станет еще большим. Для некоторых из рассмотренных нами случаев при использовании только поправки (1-60) эти данные приведены в табл. 1-8. Они свидетельствуют о том, что указанные расхождения тем больше, чем меньше длина ряда и больше коэффициент корреляции. Для обычных в гидрологической и водохозяйственной практике параметров ($n \geq 25$; $r \leq 0,3$) специальную поправку, видимо, можно не вводить.

Следует отметить, что хотя за счет введения поправки на смещенность r^* стандарт его несколько увеличивается по сравнению со смещенной оценкой, однако C_r распределения r за счет ликвидации смещенности даже снижается (для малых n и умеренных r , отличающихся от нуля). Для больших r и малых n проведенного исследования недостаточно. Представляется более правильным использовать не эмпирические, а теоретические проработки.

Таким образом, проведенный анализ показал, что в водохозяйственных и гидрологических расчетах коэффициент корреляции между смежными членами связанного ряда лучше всего оценивать уравнением (1-60), а стандартную ошибку его — уравнением (1-61). Оценка (1-60) практически несмещенная для вычисления коэффициента корреляции в пределах от 0 до 0,5, а в стандартной ошибке (1-61) приближенно учитывается связность ряда.

Проверим теперь, как изменятся выводы § 1-3, если вычисление коэффициента корреляции рядов наблюдений вести с учетом приведенных проработок.

Распределения коэффициентов корреляции между смежными членами, исправленные для рассмотренных выше групп рек в соответствии с уравнением (1-60), представлены на рис. 1-14 и 1-15, а параметры этих распределений даны в табл. 1-9, где также приведены оцен-

Для рядов с умеренными C_r (до 0,5—0,6) поправка Е. Г. Блохинова и О. В. Сарманова близка к поправке K_1 , однако для рядов с большими C_r она значительно выше K_1 . Для таких рядов поправка Е. Г. Блохинова и О. В. Сарманова, видимо, более эффективна, чем выражение (1-61).

Таблица 1-9

Параметры	Обычные оценки				Оценки, взвешенные по $1/\sigma^2$			
	78 рек (без озер- ных)	83 реки	европей- ские реки	казахстан- ские реки	78 рек	83 реки	европей- ские реки	казахстан- ские реки
$\hat{r}_H$	0,323	0,340	0,312	0,372	0,331	0,383	0,329	0,386
σ	0,122	0,139	0,118	0,127	0,114	0,172	0,114	0,117
C_v	0,38	0,41	0,38	0,34	0,34	0,45	0,35	0,30
ε_r	—	—	—	—	0,013	0,019	0,018	0,024
σ_T	0,111	0,109	0,106	0,127	0,110	0,105	0,105	0,125
ε_σ	0,010	0,009	0,009	0,013	0,010	0,009	0,009	0,013

ки, взвешенные по дисперсиям. Приведенные данные свидетельствуют о том, что стандартные отклонения европейской и казахстанской групп рек значительно меньше стандартного отклонения группы из всех 83 рек. Ошибка

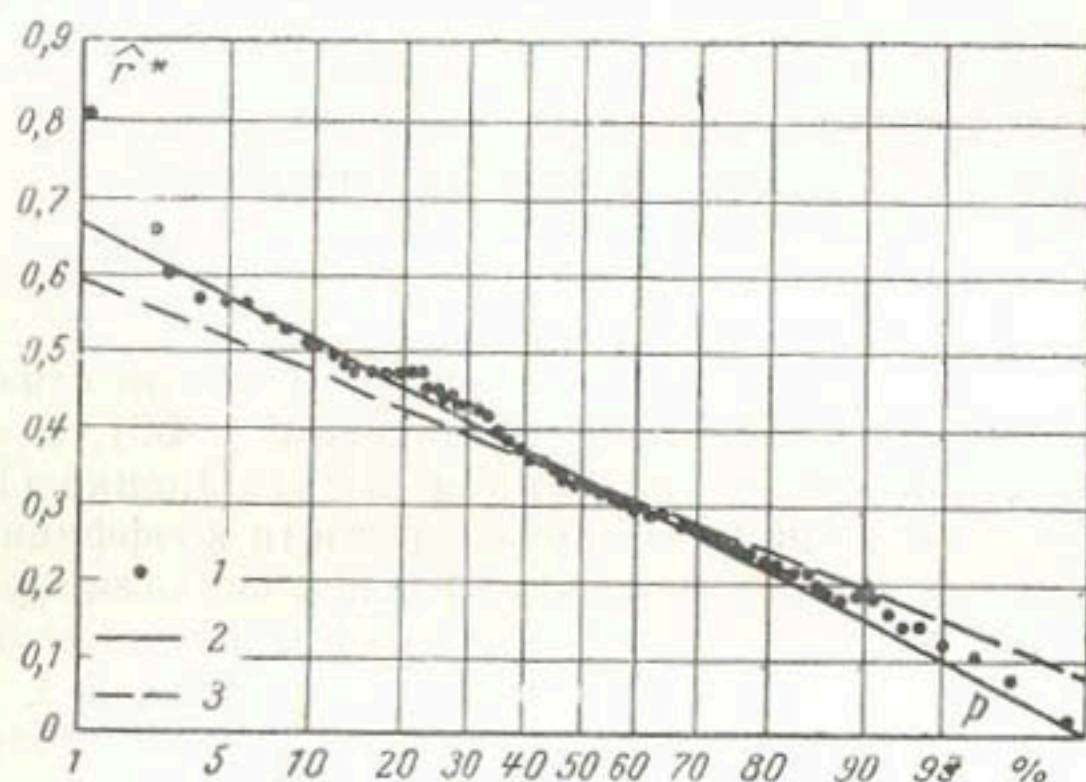


Рис. 1-14. Распределение несмещенных коэффициентов корреляции между смежными членами (83 реки СССР и мира).

1 — точки эмпирического распределения; 2 — теоретическая нормальная кривая распределения с параметрами эмпирического распределения; 3 — то же с параметрами теоретического распределения.

определения среднего коэффициента корреляции для всех групп очень мала.

В европейской группе рек и в группе из 78 рек (без озерных) оценка среднего коэффициента корреляции между смежными членами ряда равна 0,33 при диапазо-

не изменений $3\epsilon_r$ 0,29—0,37; в казахстанской группе 0,39 при диапазоне изменений 0,31—0,46 и в целом по всем 83 рекам 0,33 при диапазоне изменений 0,32—0,43.

Сопоставление теоретических стандартов, также приведенных в табл. 1-9, с эмпирическими показывает, что для европейской и казахстанской групп рек, а также для 78 рек (без озерных) расхождения стандартов не превышают для обычных оценок $2\epsilon_o$, а для взвешенных $1\epsilon_o$.

Таким образом, для указанных групп рек ошибки в вычислении отдельных коэффициентов корреляции можно полностью отнести за счет случайных причин.

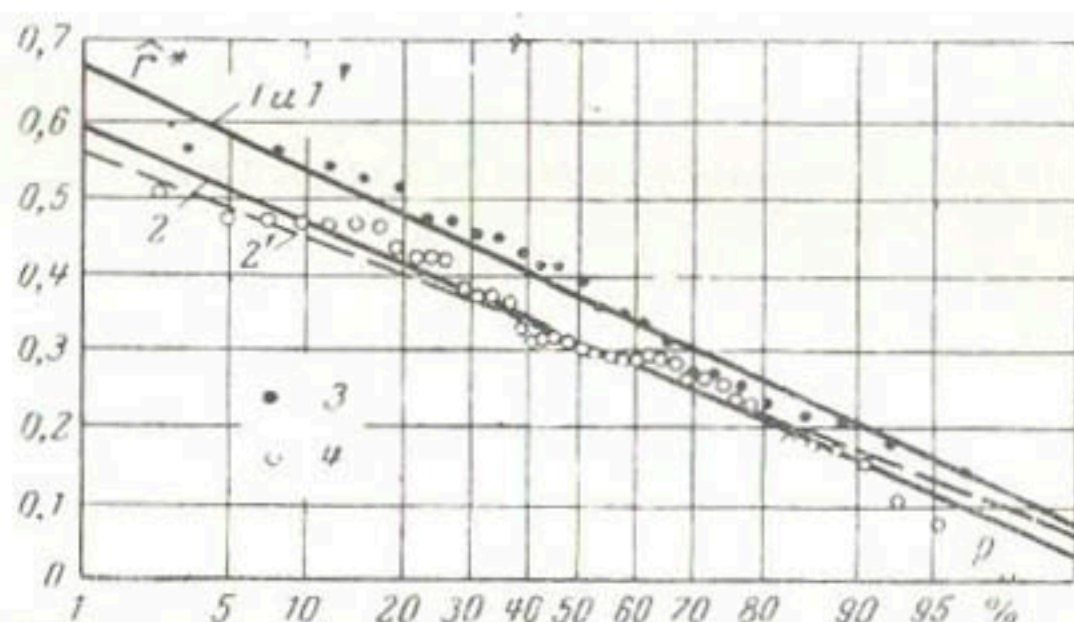


Рис. 1-15. Распределения несмещенных коэффициентов корреляции между смежными членами европейской и среднеазиатской групп рек СССР.

1 — теоретическая нормальная кривая с параметрами эмпирического распределения для $n=25$; 1' — то же с теоретическими параметрами; 2 — теоретическая кривая с эмпирическими параметрами для $n=41$; 2' — то же с теоретическими параметрами; 3 — точки эмпирического распределения для $n=25$; 4 — то же для $n=41$.

Противоположный вывод имеет место для группы, включающей все 83 реки. Здесь эмпирический стандарт в 1,64 раза превосходит теоретический (по взвешенным оценкам), т. е. эти расхождения происходят не только за счет случайных причин, но частично (на 37%) и за счет различия коэффициентов корреляции для рек с разными условиями естественного регулирования стока.

На основании проведенных в § 1-3 и 1-5 проработок можно сделать следующие выводы, которые будут, видимо, полезны в практических приложениях:

1. Между смежными членами гидрологических рядов рек СССР и некоторых рек мира подтверждается нали-

ние положительной, в среднем по группе рек сравнительно мало отличающейся для разных районов коррелятивной связи.

2. Определение показателя этой связи с помощью индивидуальной оценки для большого числа рек со сравнительно малыми рядами наблюдений имеет недостаточную точность. При этом выявленное в работе соотношение между случайными погрешностями и действительным различием коэффициентов корреляции, обусловленных разными условиями стокообразования и т. п., таково, что лишь при объединении в группу рек, достаточно однородных по условиям естественной зарегулированности стока, можно получить некоторое уточнение среднего показателя связи.

3. Обычно используемые в гидрологии выражения для определения коэффициента корреляции между смежными членами ряда (1-11) и его стандарта (1-12) не учитывают связность ряда, что приводит к некоторым систематическим погрешностям. Для ликвидации этих погрешностей могут быть использованы эмпирические поправки (1-60) и (1-61).

1-6. ВЛИЯНИЕ СТЕПЕНИ СВЯЗНОСТИ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ НА ВЫБОРОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим теперь, как изменяются обычно используемые в гидрологии выборочные оценки статистических параметров гидрологических рядов (норма $\bar{Q}$, стандарт σ , коэффициент вариации C_v , коэффициент асимметрии C_s , отношение двух последних коэффициентов C_s/C_v) при наличии связности между смежными членами ряда. Это исследование проведем по тем же смоделированным методом Монте-Карло выборкам, которые использовались в предыдущем параграфе. По указанным выборкам с помощью обычных в гидрологии формул произведем выборочные оценки параметров, 500 значений которых будут рассмотрены как некоторая совокупность их, пригодная для построения распределения данного параметра.

Анализ оценок параметров функций распределения стока теоретически возможен и на основе метода наибольшего правдоподобия. Однако в данной работе этот метод использован не будет.

Рассмотрим распределения каждого параметра с точки зрения их смещенности; оценки их рассеяния; их асимметричности; влияния на все предыдущие характе-

ристики степени связности ряда, т. е. коэффициента корреляции между смежными членами гидрологического ряда.

Норма стока. Средняя величина выборки, или норма стока гидрологического ряда обычно определяется выражением

$$\bar{x}^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Данный прием оценки не зависит от закона распределения вероятностей и показателя связности ряда. В наших расчетах для всех 18 совокупностей математическое ожидание средней оказалось практически равным единице. Только для рядов с очень большими исходными

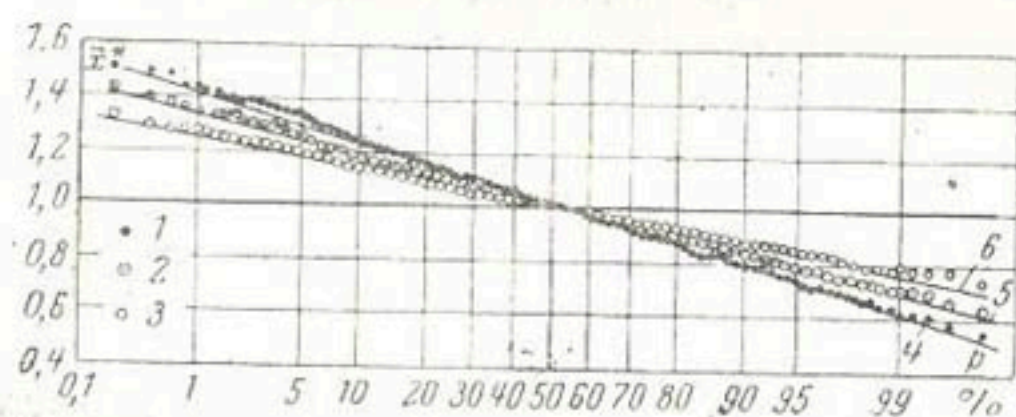


Рис. 1-16. Распределения нормы стока $\bar{x}^*$, вычисленные по совокупности случайных выборок длиной $n=25$ при $C_v=0,5$.

1 — точки эмпирического распределения при $r=0,5$; 2 — то же при $r=0,3$; 3 — то же при $r=0,0$; 4 — теоретическая нормальная кривая с параметрами эмпирического распределения при $r=0,5$; 5 — то же при $r=0,3$; 6 — то же при $r=0,0$.

коэффициентами вариации и корреляции были отмечены небольшие расхождения фактической нормы с исходной. Однако максимальное расхождение не превышало 2,5% истинной величины нормы.

Для иллюстрации зависимости кривой распределения выборочных средних от величины коэффициента корреляции между смежными членами ряда на рис. 1-16 и 1-17 представлены распределения, полученные в наших расчетах для $C_v=0,5$, $n=25$ и $n=50$. Величина коэффициента корреляции в этих расчетах изменялась от 0 до 0,5. Из приведенных данных видно, что распределения выборочных средних фактически несмещенные.

Асимметричность рассмотренных распределений характеризуется данными, приведенными в табл. 1-10. Эти данные (см. также рис. 1-16 и 1-17) свидетельствуют

Таблица 1-10

C_v	r	$C_s(\bar{x}^*)$ при значениях n		$C_s/C_v(\bar{x}^*)$ при значениях n	
		25	50	25	50
0,25	0,0	0,09	0,08	1,70	2,24
	0,3	0,07	0,05	0,97	1,09
	0,5	0,05	0,04	0,61	0,59
0,50	0,0	0,20	0,15	1,94	2,14
	0,3	0,18	0,12	1,33	1,26
	0,5	0,16	0,09	0,92	0,75
1,00	0,0	0,46	0,33	2,22	2,30
	0,3	0,46	0,31	1,68	1,58
	0,5	0,47	0,29	1,36	1,20

о том, что для несвязных рядов распределения нормы стока близки к биномиальному с $C_s(\bar{x}^*) \approx 2C_v(\bar{x}^*)$. Для связных рядов с увеличением коэффициента корреляции асимметричность распределений уменьшается и они при-

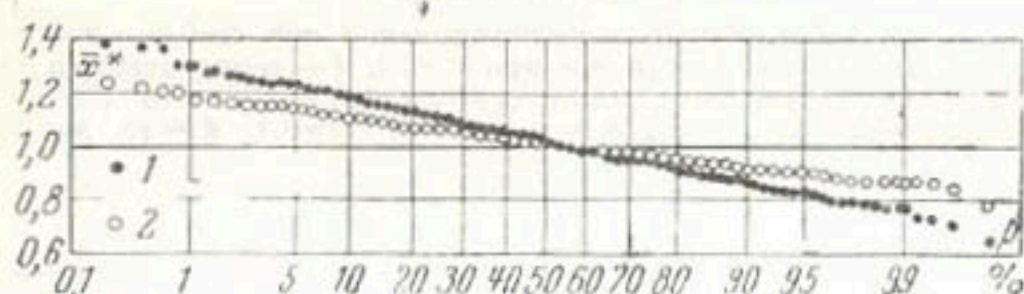


Рис. 1-17. Распределения нормы стока $\bar{x}^*$, вычисленные по совокупности случайных выборок длиной $n=50$ при $C_v=0,5$.

1 — точки эмпирического распределения при $r=0,5$; 2 — то же при $r=0$.

ближаются к нормальным (зависимость $C_s/C_v(\bar{x}^*)$ от r представлена на рис. 1-18). Величина рассеяния рассмотренных распределений тем больше, чем выше исходный коэффициент корреляции между смежными членами ряда. Стандарт среднего, определяемый теоретически точно, для связных рядов, образующих простую цепь

Маркова, вычисляется по выражению, приведенному в [Л. 55]:

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1 + \frac{2r}{n(1-r)} \left(n - \frac{1-r^n}{1-r} \right)}{1 - \frac{2r}{n(n-1)(1-r)} \left(n - \frac{1-r^n}{1-r} \right)}}. \quad (1-63)$$

Это выражение можно представить в виде:

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{K_{\bar{x}} \sigma}{\sqrt{n}}, \quad (1-64)$$

где $K_{\bar{x}}$ — поправка на связность. Поправка $K_{\bar{x}}$ зависит практически только от величины r ; в графической форме она приведена на рис. 1-19. Для несвязных рядов поправка $K_{\bar{x}}$ равна единице и зависимость (1-64) превращается в обычно используемое в гидрологии уравнение [Л. 9, 53].

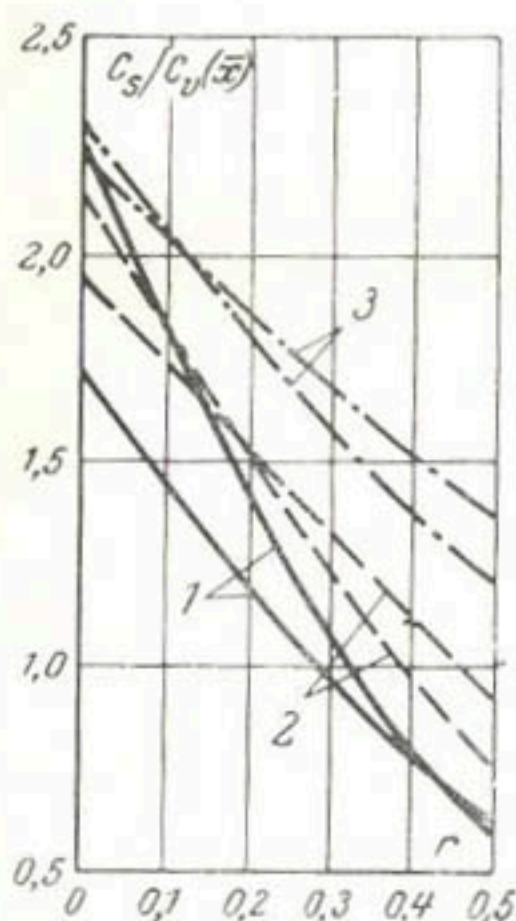


Рис. 1-18. Зависимости C_s/C_v распределений оценки $\bar{x}^*$ от коэффициента корреляции между смежными членами. 1 — для $C_v = 0,25$; 2 — для $C_v = 0,5$; 3 — для $C_v = 1,00$.

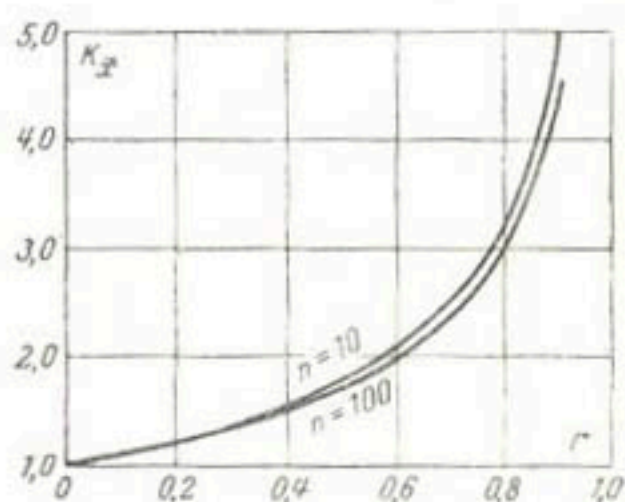


Рис. 1-19. Зависимость поправки на связность $K_{\bar{x}}$ к стандартной ошибке среднего $\bar{x}$ от коэффициента корреляции.

Сопоставление теоретических стандартов, вычисленных по выражению (1-64), с фактическими, полученными по 18 рассмотренным нами совокупностям средних выборок, представлено в табл. 1-11. Эта таблица показывает практически полное совпадение фактических данных с теоретиче-

скими, что, видимо, является косвенным подтверждением отсутствия каких-либо погрешностей в материалах по моделированию случайных выборок и их обработке.

Таблица 1-11

n	Параметры	Теоретические и фактические стандарты при значениях r								
		0,0			0,3			0,5		
		и коэффициенте вариации C _v								
		0,25	0,50	1,00	0,25	0,50	1,00	0,25	0,50	1,00
25	$\sigma_{\Phi}(\bar{x})$	0,051	0,102	0,209	0,068	0,138	0,282	0,083	0,173	0,355
	$\sigma_{\text{теор}}(\bar{x})$	0,050	0,100	0,200	0,067	0,135	0,270	0,088	0,175	0,350
50	$\sigma_{\Phi}(\bar{x})$	0,033	0,072	0,146	0,048	0,098	0,199	0,061	0,123	0,252
	$\sigma_{\text{теор}}(\bar{x})$	0,035	0,071	0,142	0,047	0,097	0,192	0,052	0,125	0,250

Стандартное отклонение и коэффициент изменчивости. Для выборочной оценки стандартного отклонения и коэффициента вариации обычно используются следующие выражения:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}; \quad (1-65)$$

$$C_v^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}^2 (n-1)}}. \quad (1-66)$$

Строго говоря, эти оценки смещены как для связанных, так и для несвязных рядов. Смещение отрицательное, возрастающее с увеличением исходного коэффициента изменчивости. Однако величина смещения сравнительно невелика. В наших расчетах и в работе [Л. 7] она не превышала 3—4%, поэтому по свидетельству [Л. 7 и 8] практического значения поправка на смещенность здесь не имеет. Иллюстрацией кривых распределения выборочных значений коэффициента изменчивости могут служить рис. 1-20 и 1-21, где даны распределения для $C_v=1$; $r=0$; 0,3; 0,5 и $n=25$ и 50.

Асимметричность приведенных и других рассмотренных в данной работе распределений характеризуется коэффициентами асимметрии и отношением их к коэф-

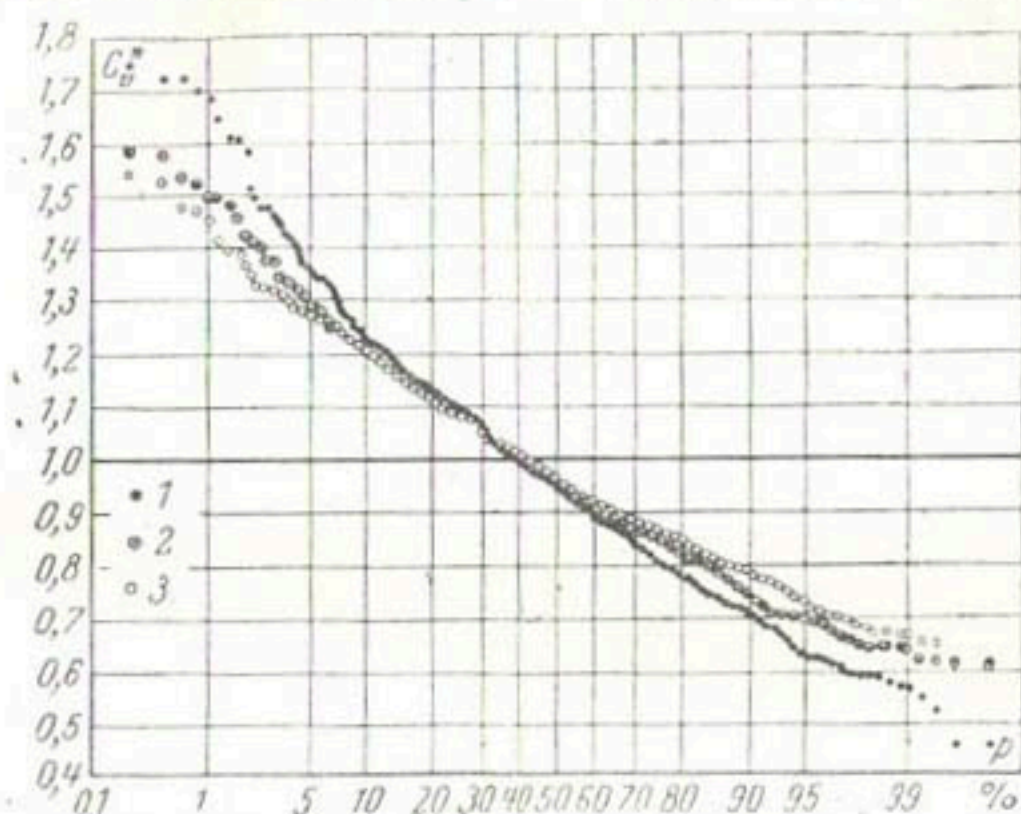


Рис. 1-20. Распределения оценки C_v^* для различных значений r , вычисленные по совокупности случайных выборок длиной $n=25$ при $C_v=1$.

1 — точки эмпирического распределения для $r=0,5$; 2 — то же для $r=0,3$; 3 — то же для $r=0,0$.

фициентам вариации. Эти эмпирические данные для распределений выборочных стандартов приведены в табл. 1-12.

Данные табл. 1-12 свидетельствуют о том, что распределения выборочных стандартов присуща асимме-

Таблица 1-12

C_v	r	$C_s (\sigma^*)$ при значениях n		$C_s/C_v (\sigma^*)$ при значениях n	
		25	50	25	50
0,25	0,0	0,41	0,41	2,59	3,62
	0,3	0,50	0,47	2,96	3,94
	0,5	0,55	0,48	2,90	3,63
0,50	0,0	0,67	0,59	3,56	4,33
	0,3	0,75	0,64	3,77	4,54
	0,5	0,75	0,61	3,49	4,05
1,00	0,0	0,99	0,78	3,57	3,90
	0,3	1,06	0,86	3,55	4,04
	0,5	1,14	0,89	3,52	3,92

тричность, несколько превышающая асимметричность исходных кривых распределений (кривые Пирсона III типа при $C_s = 2C_v$).

Аналогичные закономерности имеют место и в распределениях моментных оценок коэффициента изменчивости. Коэффициенты асимметрии распределений C_v возрастают с увеличением исходного коэффициента корреляции между смежными членами ряда.

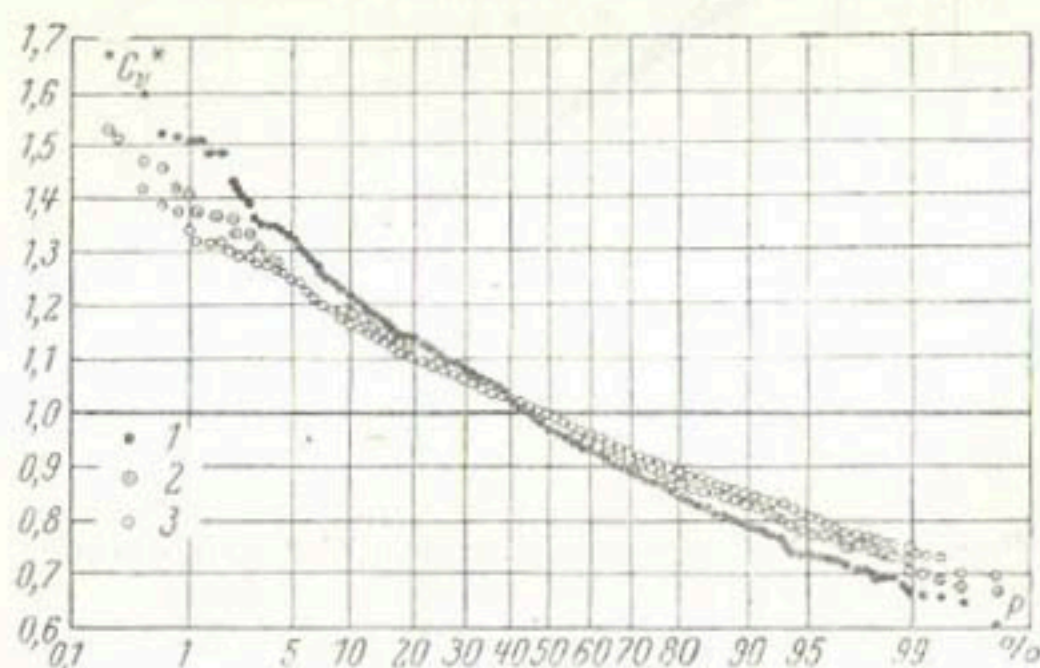


Рис. 1-21. Распределения оценки C_v^* для различных значений r , вычисленные по совокупности случайных выборок длиной $n=50$ при $C_v=1$.

1 — точки эмпирического распределения для $r=0.5$;
2 — то же для $r=0.3$; 3 — то же для $r=0.0$.

Влияние связности ряда на указанные оценки для простых цепей Маркова было исследовано С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем [Л. 55]. Ими была выведена теоретическая поправка на связность для стандарта. Она равна:

$$K_\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r}{n(n-1)(1-r)} \left(n - \frac{1-r^n}{1-r} \right)}}. \quad (1-67)$$

На рис. 1-22 нанесены зависимости $K_\sigma = f(n, r)$, из которых видно, что эта теоретическая поправка становится существенной только при очень высоких исходных значениях коэффициента корреляции и очень малых длинах выборок.

Сопоставление исходных стандартов с фактическими средними, полученными по 18 рассмотренным нами совокупностям, показало, что действительно фактические средние стандарты тем больше отличаются от исходных, чем выше коэффициент корреляции между смежными членами ряда и короче длина выборок. Использование теоретической поправки на связность K_σ (1-67) практически полностью ликвидирует указанные расхождения фактических средних с исходными стандартами. Эта же поправка пригодна для ликвидации смещения в моментной оценке коэффициента вариации.

Для несвязных рядов характеристика рассеяния в распределении стандарта σ определяется выражением [Л. 53]

$$\sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + 3C_\sigma^2}. \quad (1-68)$$

Совпадение этого теоретического выражения с фактической ошибкой в наших расчетах достаточно хорошее; оно характеризуется данными табл. 1-13.

Таблица 1-13

n	Величины σ_σ при значениях C_σ					
	0,25		0,50		1,0	
	теоретическая	фактическая	теоретическая	фактическая	теоретическая	фактическая
25	0,037	0,040	0,094	0,095	0,282	0,276
50	0,027	0,029	0,066	0,069	0,200	0,202

В связных рядах, рассмотренных нами, фактическая ошибка значения стандарта σ тем более отличается от ошибки, вычисленной по формуле (1-68), чем выше коэф-

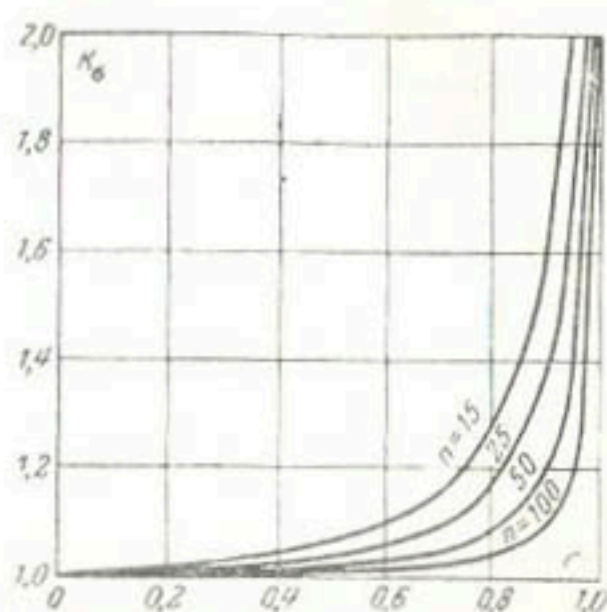


Рис. 1-22. Зависимости теоретической поправки на связность ряда для стандартной ошибки $K_\sigma = f(n, r)$ от коэффициента корреляции r .

коэффициент корреляции между смежными членами ряда. Максимальные превышения фактической ошибки над теоретической достигали 20—22% величины ошибки, вычисленной по формуле (1-68).

Для ликвидации указанных расхождений к формуле (1-68) может быть предложена простейшая эмпирическая поправка, учитывающая тесноту связи между смежными членами ряда:

$$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \sqrt{(1 + 3C_v^2) \left(1 + \frac{r}{1+r}\right)}. \quad (1-69)$$

При $r=0$ уравнение (1-69) превращается в (1-68). В табл. 1-14 приводится сопоставление фактических ошибок с ошибками, вычисленными по формуле (1-69).

Таблица 1-14

n	r	Величины σ_s при значениях C_v					
		0,25		0,50		1,00	
		по формуле (1-69)	фактическая	по формуле (1-69)	фактическая	по формуле (1-69)	фактическая
25	0,3	0,041	0,042	0,104	0,099	0,312	0,291
	0,5	0,043	0,045	0,108	0,103	0,324	0,308
50	0,3	0,030	0,030	0,073	0,071	0,222	0,213
	0,5	0,031	0,033	0,076	0,074	0,230	0,225

Совпадение ошибок, вычисленных по формуле (1-69), с фактическими ошибками удовлетворительное.

Характеристика рассеяния моментной оценки коэффициента изменчивости для несвязных рядов определяется асимптотической формулой [Л. 9]

$$\sigma(C_v) \approx \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + C_v^2}. \quad (1-70)$$

Таблица 1-15

n	Величины $\sigma(C_v)$ при значениях C_v								
	0,25			0,50			1,0		
	теоретическая	фактическая	с поправкой	теоретическая	фактическая	с поправкой	теоретическая	фактическая	с поправкой
25	0,037	0,038	0,037	0,079	0,078	0,076	0,200	0,164	0,173
50	0,026	0,027	0,026	0,056	0,056	0,055	0,141	0,129	0,130

Сопоставление $\sigma(C_v)$, вычисленной по формуле (1-70), и фактических стандартов, полученных эмпирически по нашим рядам, произведено в табл. 1-15.

Приведенные данные показывают, что в рядах с небольшими исходными C_v расхождений между теоретическими и фактическими стандартами практически не наблюдается, однако при $C_v=1$ эти расхождения становятся существенными (до 18% $\sigma_{\text{теор}}$). Это обстоятельство было отмечено Е. Г. Блохиновым [Л. 7], который предложил для ликвидации указанного расхождения эмпирическую поправку

$$\sigma(C_v) = \frac{n}{n + 4C_v^2} \cdot \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + C_v^2}. \quad (1-71)$$

При учете этой поправки теоретические стандарты в рассмотренных нами рядах практически совпадают с фактическими. Стандарты, вычисленные по формуле (1-71), также приведены в табл. 1-15.

Для рассмотренных связанных рядов при прочих равных условиях фактическая ошибка значения стандарта C_v тем более отличается от ошибки, вычисленной по формулам (1-70) и (1-71), чем выше коэффициент корреляции между смежными членами ряда. Максимальные превышения фактической ошибки над ошибкой, вычисленной по формуле (1-71), достигали 25—35% ее величины. Для ликвидации указанных расхождений к формуле (1-71) может быть предложена достаточно простая эмпирическая поправка, учитывающая тесноту связи между смежными членами ряда:

$$\sigma(C_v) = \frac{n}{n + 4C_v^2} \cdot \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{(1 + C_v^2) \left(1 + \frac{3C_v r^2}{1 + r}\right)}. \quad (1-72)$$

Т а б л и ц а 1-16

n	r	Величины $\sigma(C_v)$ при значениях C_v					
		0,25		0,50		1,0	
		по формуле (1-72)	фактическая	по формуле (1-72)	фактическая	по формуле (1-72)	фактическая
25	0,3	0,038	0,038	0,078	0,080	0,190	0,180
	0,5	0,040	0,043	0,085	0,091	0,212	0,218
50	0,3	0,027	0,028	0,056	0,060	0,143	0,143
	0,5	0,028	0,032	0,062	0,070	0,159	0,174

При $r=0$ уравнение (1-72) превращается в (1-71). В табл. 1-16 приводится сопоставление фактических ошибок с ошибками, вычисленными по формуле (1-72).

Как видно из приведенных данных, поправка (1-72) дает стандарты, достаточно близко совпадающие с фактическими в наших расчетах.

Коэффициент асимметрии. Для выборочной оценки коэффициента асимметрии обычно используется следующее выражение:

$$C_s = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^3 n}{\sigma^3 (n-1) (n-2)}. \quad (1-73)$$

Как показали проработки [Л. 7, 9, 56, 63] для несвязных рядов и наши расчеты для связных, эта оценка дает существенно смещенные распределения. Для иллюстрации этого смещения на рис. 1-23

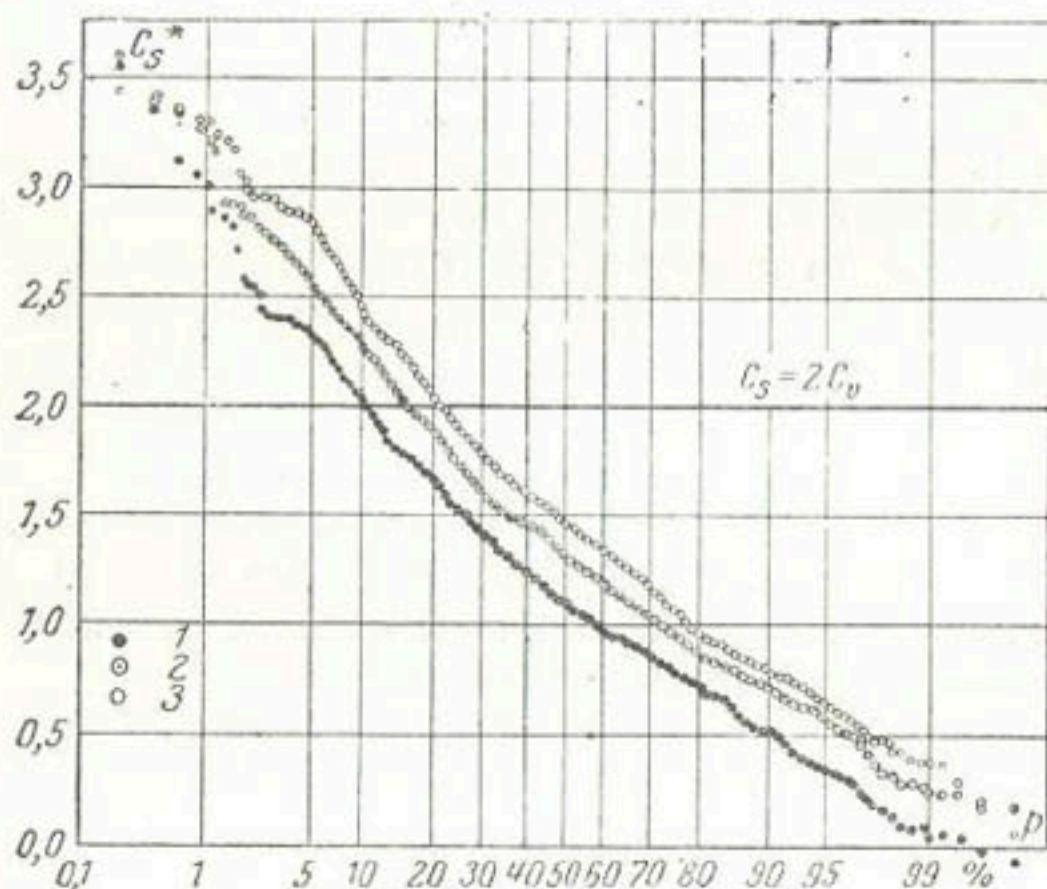


Рис. 1-23. Распределения оценки C_s^* для различных значений r , вычисленные по совокупности случайных выборок длиной $n=25$ при $C_v=1$.

1 — точки эмпирического распределения для $r=0,5$; 2 — то же для $r=0,3$; 3 — то же для $r=0,0$.

приведены распределения выборочной оценки C_s^* для гидрологических рядов с $C_v=1,0$; $n=25$ и $r=0,0$; $0,3$; $0,5$.

В табл. 1-17 для несвязных и связных рядов, рассмотренных нами, приведены истинные значения C_s и фактические математические ожидания $\bar{C}_s^*$ в наших распределениях.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что смещение отрицательное, а величина его существенно возрастает: во-первых,

Таблица 1-17

C_s	Величины C_s^* при значениях n					
	25			50		
	и коэффициентах корреляции					
	0,0	0,3	0,5	0,0	0,3	0,5
0,5	0,43	0,35	0,25	0,49	0,41	0,31
1,0	0,82	0,70	0,53	0,92	0,80	0,62
2,0	1,53	1,40	1,19	1,73	1,58	1,35

с уменьшением числа членов ряда, во-вторых, с увеличением абсолютного значения C_s (т. е. с увеличением исходного C_v ряда при заданном соотношении $C_s = 2C_v$) и, в-третьих, с увеличением коэффициента корреляции между смежными членами ряда. Максимальное смещение C_s в наших расчетах достигло 50% истинной величины.

Для ликвидации смещения C_s в несвязных рядах американскими гидрологами и Е. Г. Блохиновым [Л. 7] были предложены следующие поправки.

Поправка американских гидрологов:

$$\hat{C}_s^* = \left(1 + \frac{8,5}{n}\right) C_s^*; \quad (1-74)$$

поправка Е. Г. Блохинова:

$$\hat{C}_s^* = \frac{n + 5 + 2C_v(1 + C_v^2)}{n} C_s^*. \quad (1-75)$$

Сопоставление фактических выборочных средних с учетом приведенных выше поправок с истинными коэффициентами асимметрии произведено в табл. 1-18.

Таблица 1-18

C_s	Величины C_s^* при значениях n					
	25	50	25	50	25	50
	фактические		с поправкой (1-74)		с поправкой (1-75)	
0,5	0,43	0,49	0,58	0,57	0,52	0,54
1,0	0,82	0,92	1,10	1,08	1,02	1,03
2,0	1,53	1,73	2,05	2,02	2,08	2,04

Приведенные данные свидетельствуют о том, что выборочный средний коэффициент асимметрии с поправками (1-74) и (1-75) несколько превышает истинное значение его. Однако эти превышения столь малы, что практического значения не имеют, особенно при использовании поправки (1-75). Поэтому последнюю, видимо,

следует принимать для ликвидации смещения в моментной оценке коэффициента асимметрии для несвязных рядов.

Для связанных рядов (рис. 1-24) поправка (1-75) оказывается недостаточной. Для учета связности ряда к формуле (1-75) может быть предложена следующая эмпирическая поправка, практически ликвидирующая указанную смещенность оценки (1-73) как для связанных, так и для несвязных рядов:

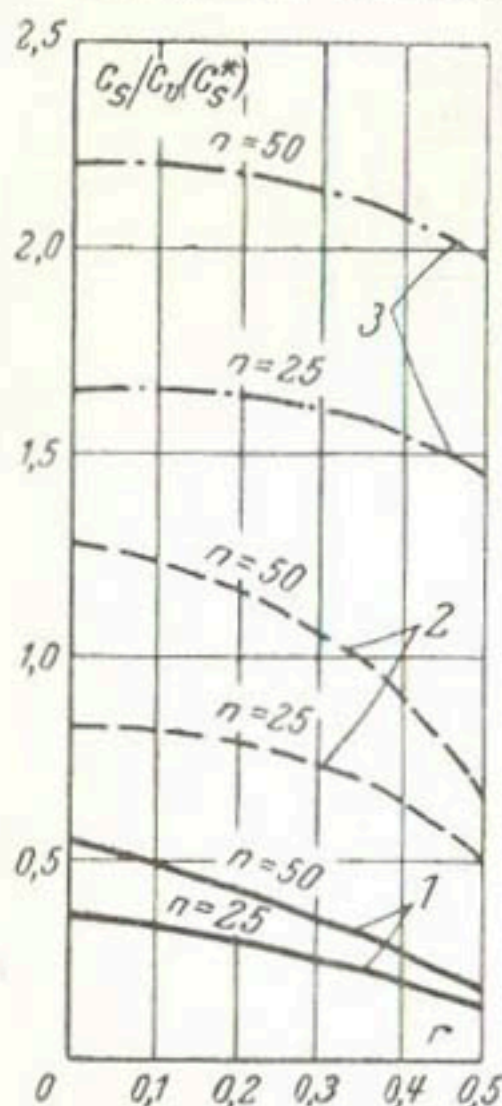


Рис. 1-24. Зависимости C_s/C_v распределений оценки C_s^* от коэффициента корреляции.

1 — для $C_v = 0,25$; 2 — для $C_v = 0,5$; 3 — для $C_v = 1,00$.

$$\hat{C}_s^* = \frac{[n + 4 + 4C_v](1 + 2r^2)}{n} C_s^* \quad (1-76)$$

Следует, однако, заметить, что как формулы (1-74) и (1-75), так и формула (1-76), получены, исходя из предположения, что истинное отношение $C_s/C_v = 2$. На самом деле истинная величина этого отношения нам неизвестна; при других соотношениях C_s/C_v величины поправок к оценке C_s , как показано в работе [Л. 7], должны быть иными; установление их вида затруднительно. Поэтому в дальнейшем должны быть, видимо, использованы другие приемы для получения оценок коэффициента асимметрии как для несвязных, так и для связанных рядов.

Указанные выше формулы (1-75) и (1-76), а также все последующие построения данной работы исходят из достаточно распространенного в гидрологии предположения, что за истинное соотношение между коэффициентами асимметрии и изменчивости гидрологических рядов может быть принято $C_s/C_v = 2$.

Рассмотрим теперь вопрос об асимметричности распределений коэффициента C_s и величине стандартной ошибки определения его.

Асимметричность распределений C_s характеризуется табл. 1-19 и рис. 1-24. Эти данные показывают, что с увеличением исходного коэффициента корреляции асимметричность распределений уменьшается, а с увеличением

исходного коэффициента изменчивости она возрастает.

Для рядов с умеренной изменчивостью эти распределения близки к нормальному.

Стандартная ошибка коэффициента асимметрии для несвязных рядов определяется уравнением

$$\sigma(C_s) = \sqrt{\frac{6}{n}} \sqrt{1 + 6C_v^2 + 5C_v^4} \quad (1-77)$$

В табл. 1-20 приведено сопоставление значений $\sigma(C_s)$, вычисленных по (1-77), со значениями $\sigma(C_s)$, найденными в наших расчетах по эмпирическим распределениям C_s .

Приведенные данные свидетельствуют о том, что фактический стандарт распределений C_s значительно меньше, чем его теоретическое значение, вычисленное по уравнению (1-77). Расхождения

Таблица 1-19

C_v	r	$C_s(C_s^*)$ при значениях n		$C_s/C_v(C_s^*)$ при значениях n	
		25	50	25	50
0,25	0,0	0,39	0,41	0,36	0,54
	0,3	0,33	0,30	0,26	0,34
	0,5	0,25	0,21	0,14	0,18
0,50	0,0	0,52	0,60	0,82	1,27
	0,3	0,51	0,53	0,74	1,05
	0,5	0,44	0,41	0,50	0,65
1,00	0,0	0,60	0,77	1,43	2,20
	0,3	0,71	0,77	1,61	2,15
	0,5	0,73	0,80	1,45	1,98

между (1-77) и фактическими данными увеличиваются для рядов с большими исходными C_v и r , а также при уменьшении длины выборки. При $C_v=1$ преувеличение стандарта, вычисленного по

Таблица 1-20

Наименование	r	Величины $\sigma(C_s)$ при значениях n					
		25			50		
		и коэффициенте вариации C_v					
		0,25	0,50	1,0	0,25	0,50	1,00
По выражению (1-77)	—	0,58	0,82	1,69	0,41	0,58	1,20
Фактические данные	0,0	0,47	0,52	0,64	0,37	0,44	0,61
	0,3	0,45	0,48	0,61	0,36	0,40	0,57
	0,5	0,45	0,46	0,60	0,36	0,39	0,54
По выражению (1-78)	—	0,50	0,55	0,69	0,36	0,39	0,49

уравнению (1-77), над фактическим достигало 250 и более процентов последнего. Объясняется это, по-видимому, тем [Л. 7], что при выводе уравнения (1-77) использовались соотношения, основанные на разложении функции в ряд Тейлора, ограниченный лишь пер-

выми членами. При больших C_v отклонения становятся одного порядка со значением оценки. Уравнение (1-77) становится грубым приближением, так как члены более высоких степеней становятся соизмеримыми с первыми членами. Учет же дополнительных членов разложения осложнен техническими трудностями.

Таблица 1-20 свидетельствует также о том, что связность ряда в очень незначительной степени влияет на фактический стандарт C_s (имеется лишь тенденция снижения σ_{C_s} с ростом r).

Таким образом, существовавшие в гидрологии представления о большой погрешности выборочного определения C_s несколько преувеличены (это отмечалось и в [Л. 7]). Учет связности рядов дает при прочих равных условиях еще более благоприятные результаты (меньшие стандарты), чем в рядах несвязных.

Достаточное приближение к фактическим данным дает следующая простая эмпирическая формула для стандарта коэффициента асимметрии:

$$\sigma(C_s) = \sqrt{\frac{6}{n} (1 + C_v^2)} \quad (1-78)$$

Влиянием связности ряда в первом приближении, видимо, можно пренебречь. Сопоставление фактических стандартов C_s со стандартами, вычисленными по уравнению (1-78), дано в табл. 1-20.

Отношение коэффициентов асимметрии и вариации. В заключение рассмотрим вопрос о влиянии корреляции между смежными членами ряда на оценку отношения коэффициентов асимметрии и вариации. Как и в предыдущем параграфе, это исследование проведем на примере рядов с исходным соотношением $C_s/C_v=2$.

Зависимость средних значений C_s/C_v , найденных по рассмотренным нами распределениям, от величины r при разных n и C_v , а также сопоставление их с истинным значением этого отношения $C_s/C_v=2$ представлены на рис. 1-25. Эта зависимость характеризует смещенность рассмотренных распределений и показывает, что с увеличением коэффициента корреляции и уменьшением числа членов в выборке величина отрицательного смещения повышается. При этом для малых n и C_v и больших r выборочная средняя оценка C_s/C_v не достигает даже 50% истинной величины. Для ликвидации этого смещения можно было бы ввести соответствующую эмпирическую поправку, которая, однако, была бы верна только для рассмотренного исходного соотношения $C_s/C_v=2$. Так как истинное соотношение C_s/C_v нам неизвестно, то такая поправка пока, видимо, не смогла бы быть использована в технических приложениях и поэтому не приводится. Подробнее об этом см. в [Л. 7].

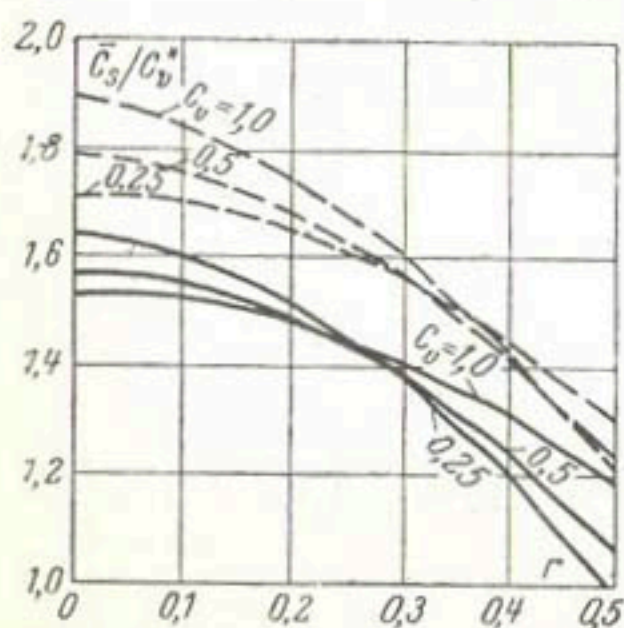


Рис. 1-25. Зависимости средних значений $\bar{C}_s/\bar{C}_v^*$ от коэффициента корреляции при разных n и C_v .

— — — для $n=25$; — — — — для $n=50$.

Рассмотрим также кратко вопрос о погрешности вычисления отношения C_s/C_v . В гидрологической литературе для стандарта отношения рекомендуется следующее выражение:

$$\sigma(C_s/C_v^*) = \frac{1}{C_v \sqrt{n}} \sqrt{6 + 26C_v^2 + 24C_v^4}. \quad (1-79)$$

Зависимость этого стандарта от величины C_v представлена на рис. 1-26 для двух значений длины выборки n . На рис. 1-26 нанесены также эмпирические данные о стандартах распределений C_s/C_v . Как видно из рис. 1-26, в зоне небольших n и больших C_v расхождения между теоретической кривой и эмпирическими данными весьма велики. Теоретическая формула (1-79) в наших расчетах давала преувеличение эмпирического стандарта более чем в 3 раза. Аналогичные результаты для несвязных рядов были получены Е. Г. Блохиновым [Л. 7].

Для связанных рядов указанные выше несовпадения теоретических и эмпирических стандартов полностью подтверждаются. Следует заметить, что существенной зависимости стандарта C_s/C_v от степени связности ряда не наблюдается, т. е. в практических расчетах для оценки $\sigma(C_s/C_v^*)$ влиянием коэффициента корреляции между смежными членами ряда можно пренебречь.

Для оценки стандарта C_s/C_v^* можно использовать следующую эмпирическую формулу, которая дает хорошее совпадение рассмотренных распределений с эмпирическими данными:

$$\sigma(C_s/C_v^*) = \frac{\sqrt{6}}{C_v \sqrt{n}}. \quad (1-80)$$

Сопоставления стандартов, вычисленных по формулам (1-79) и (1-80), с эмпирическими в наших расчетах и расчетах Е. Г. Блохинова, приведены в табл. 1-21.

В заключение рассмотрим вопрос об асимметричности распределений отношений C_s/C_v^* . Характеристики этой асимметричности представлены в табл. 1-22. Приведенные данные показывают, что асимметричность распределений C_s/C_v^* сравнительно невелика; она увеличивается с повышением коэффициента вариации исходного ряда, но существенно снижается с повышением коэффициента корреляции между смежными членами ряда. В практических расчетах эти распределения с достаточной степенью точности можно принимать нормальными.

Рассмотренные распределения выборочных оценок параметров искусственных рядов позволили выявить зависимость математических ожиданий и стандартов ука-

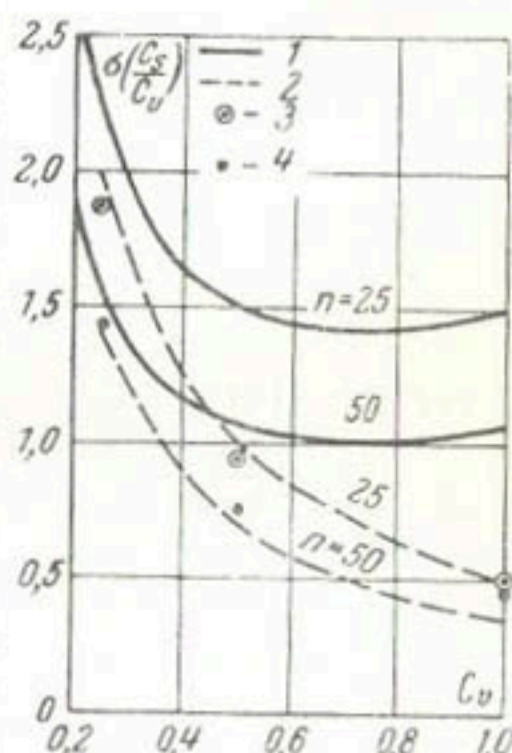


Рис. 1-26. Теоретические и эмпирические зависимости стандартной ошибки C_s/C_v^* от величины C_v ряда.

1 — по формуле (1-79); 2 — по формуле (1-80); 3 — по фактическим данным для $n=25$; 4 — то же для $n=50$.

Таблица 1-21

Наименование	Величины σ при коэффициенте вариации C_v					
	0,25		0,50		1,00	
	и длине ряда n					
	25	50	25	50	25	50
По формуле (1-79)	2,22	1,56	1,50	1,06	1,50	1,06
По данным Блохинова	1,92	1,46	1,00	0,80	0,51	0,47
При $r = 0,0$	1,87	1,42	0,94	0,76	0,49	0,46
При $r = 0,3$	1,89	1,38	0,92	0,71	0,47	0,41
При $r = 0,5$	1,98	1,45	0,98	0,72	0,45	0,39
По формуле (1-80)	1,96	1,38	0,98	0,69	0,49	0,35

занных оценок от степени связности гидрологических рядов и внести эмпирические поправки в обычно используемые в гидрологии формулы. Кроме того, сделаны выводы об асимметричности распределений рассмотренных оценок. Предложенные в работе зависимости могут быть использованы в гидрологической и водохозяйственной практике для выборочной оценки статистических параметров распределений связных гидрологических рядов.

Таблица 1-22

C_v	r	$C_s(C_s/C_v^*)$ при значениях n		$C_s/C_v(C_s/C_v^*)$ при значениях n	
		25	50	25	50
0,25	0,0	0,29	0,31	0,25	0,42
	0,3	0,21	0,13	0,15	0,19
	0,5	0,06	0,03	0,03	0,03
0,50	0,0	0,32	0,47	0,54	1,10
	0,3	0,36	0,35	0,54	0,78
	0,5	0,15	0,19	0,17	0,32
1,00	0,0	0,38	0,70	1,18	2,62
	0,3	0,39	0,66	1,18	2,49
	0,5	0,09	0,54	0,25	1,84

Проведем групповой анализ оценок C_v , C_s , C_s/C_v гидрологических рядов наблюдений, аналогичный выполненному для оценки r в § 1-3 и 1-5. В качестве объекта исследования возьмем те же реки, что и в указанных па-

раграфах, с такой же разбивкой их на группы. При этом априори будем считать, что распределение рассматриваемых рядов соответствует кривой Пирсона III типа.

Коэффициент изменчивости. Параметры распределений коэффициента изменчивости для рассматриваемых групп рек представлены в табл. 1-23. Там же приведены теоретические стандарты, вычисленные при $C_v = \bar{C}_v^*$, $n = \bar{n}$ и $r = \hat{r}^*$ по выражению (1-72) и их ошибки.

Т а б л и ц а 1-23

Параметры	83 реки	78 рек	европейские реки	казахстанские реки
$\bar{C}_v^*$	0,321	0,330	0,270	0,493
$\sigma(C_v)$	0,222	0,226	0,078	0,341
$C_v(C_v)$	0,69	0,69	0,29	0,69
σ_T	0,030	0,030	0,023	0,058
ε_σ	0,003	0,003	0,002	0,006

Как видно из приведенных данных, для всех групп рек эмпирический стандарт в несколько (3—7) раз превосходит стандарт теоретический. Это означает, что несовпадение коэффициентов вариации на отдельных реках объясняется не случайными причинами, а есть результат различия самих рек. Индивидуальные оценки коэффициентов изменчивости точнее групповых, и только ими следует пользоваться в практических приложениях.

Т а б л и ц а 1-24

Параметры	83 реки	78 рек	европейские реки	казахстанские реки
$\bar{C}_s^*$	0,537	0,546	0,379	0,884
$\sigma(C_s^*)$	0,438	0,445	0,287	0,496
$C_v(C_s^*)$	0,82	0,82	0,76	0,56
σ_T	0,095	0,101	0,093	0,128
ε_σ	0,008	0,009	0,008	0,013

Коэффициент асимметрии. Параметры распределений коэффициента асимметрии для рассмотренных групп рек представлены в табл. 1-24. Там же приведены теоретические стандарты, вычисленные при $C_v = \bar{C}_v^*$ и $n = \bar{n}$ по выражению (1-78), и их ошибки ε_σ .

Приведенные данные свидетельствуют о том, что несовпадения коэффициентов асимметрии на отдельных реках объясняются не случайными причинами, а являются следствием различия самих рек. Аналогичный вывод может быть получен и по выборке несмещенных оценок коэффициентов асимметрии.

Отношение коэффициентов асимметрии и вариации. Параметры распределений C_s^*/C_v для рассмотренных групп рек представлены в табл. 1-25. Там же приведены теоретические стандарты, вычисленные при $C_v = \bar{C}_v^*$ и $n = \bar{n}$ по выражениям (1-79) и (1-80), и их ошибки ε_σ .

Таблица 1-25

Параметры	83 реки	78 рек	европейские реки	казахстанские реки
$\bar{C}_s^*/\bar{C}_v$	1,74	1,72	1,41	2,20
$\sigma(C_s^*/C_v)$	1,43	1,43	1,04	1,58
$C_v(C_s^*/C_v)$	0,82	0,83	0,74	0,72
σ_T по (1-79)	1,13	1,13	1,22	1,10
ε_σ	0,10	0,10	0,14	0,16
σ_T по (1-80)	0,94	0,92	1,07	0,73
ε_σ	0,08	0,08	0,09	0,08

Приведенные данные свидетельствуют о том, что при использовании в качестве теоретического стандарта выражения (1-79) различие отношений C_s^*/C_v можно считать во всех группах рек результатом случайных причин. При использовании выражения (1-80) такой вывод можно сделать только для европейской группы рек; для остальных — различие C_s^*/C_v на отдельных реках, видимо, объясняется различной асимметрией распределений годового стока этих рек.

Как указывалось выше, в моментных оценках коэффициента асимметрии связанных рядов, распределенных по кривой Пирсона III типа, имеет место отрицательная смещенность, которая может быть приближенно ликвидирована с помощью поправки (1-76). Результаты расчетов для отдельных рек даны в приложении II. Рассмотрим, как изменятся сделанные выше выводы при

использовании указанной поправки. Характеристики соответствующих эмпирических распределений и теоретический стандарт приведены в табл. 1-26.

Т а б л и ц а 1-26

Параметры	83 ре- ки	78 рек	европей- ские реки	казахстан- ские реки
$\hat{C}_s^*/C_v$	2,38	2,28	1,73	3,08
$\sigma(\hat{C}_s^*/C_v)$	1,96	1,82	1,26	2,08
$C_v(\hat{C}_s^*/C_v)$	0,827	0,80	0,73	0,68
σ_T по (1-79)	1,13	1,13	1,22	1,10
ϵ_σ	0,10	0,10	0,14	0,16

Как видно из приведенных данных, средние из рассмотренных распределений увеличились и для европейской группы рек стали близкими к 2, т. е. принятая исходная гипотеза подтверждается.

Для казахстанской группы среднее отношение C_s^*/C_v приближается к 3, т. е. гипотеза не подтверждается. Соотношение между эмпирическим и теоретическим стандартами таково, что групповая оценка его не дает сколько-нибудь существенного уточнения.

Глава вторая

РАСЧЕТЫ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА ОДНИМ ВОДОХРАНИЛИЩЕМ ПРИ ОПИСАНИИ ПРОЦЕССА СТОКА ПРОСТОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА

2-1. КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ РАСЧЕТА МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА РЕК

Многолетнее регулирование стока обеспечивает наиболее полное использование водных ресурсов. В маловодные годы используются запасы воды, накопленные в водохранилище за счет избытков стока многоводных лет. Многолетнее регулирование стока становится необходимым в тех случаях, когда потребности в воде или энергии не могут быть удовлетворены с необходимой степенью надежности за счет только внутригодового перераспределения стока реки в расчетный маловодный год. Однако создание крупных водохранилищ весьма часто сопровождается значительными затоплениями земель и требует больших капитальных вложений в подпорные сооружения гидроузлов. Ограничение емкости водохранилища при некоторой определенной величине отдачи его может привести к глубоким и длительным перебоям в снабжении водой и энергией потребителей, что нередко приводит к значительным ущербам. Поэтому выбор емкости водохранилища и назначение отдачи его, соответствующей определенной степени надежности (обеспеченности), является сложной технико-экономической задачей. Решение ее опирается на получаемые в результате расчетов регулирования стока зависимости отдачи установки от величины емкости водохранилища при определенной степени обеспеченности. Проведение расчетов многолетнего регулирования стока по календарному ряду далеко не всегда дает правильные результаты, потому что критический период сработки водохранилища может представлять весьма длительную последовательность маловодных лет. Гидрологический ряд наблюдений содержит относительно малое число группировок маловодных и многоводных лет, как правило недостаточное для суждения о повторяемости различных сочетаний их. При проведении аналогичных расчетов для каскадов ГЭС и объединений их задача определения совместной отдачи рассматриваемых ГЭС еще больше усложняется необходимостью оценить повторяемость различных сочетаний водности на разных реках или их притоках.

Для надежной оценки обеспеченности отдачи гидроузла необходимо либо иметь достаточно длинный гидрологический ряд, либо исследовать каким-либо способом повторяемость различных теоретически возможных сочетаний годовых объемов стока. Различные

авторы в разные годы предлагали компенсировать отсутствие длинных гидрологических рядов объединением нескольких рядов наблюдений за стоком различных рек. Повторяемость различных теоретически возможных сочетаний водности оценивалась путем применения в расчетах регулирования стока некоторых положений теории вероятностей и математической статистики. Первой в этом направлении была работа А. Хазена [Л. 117], которая сыграла значительную роль в развитии теории многолетнего регулирования стока. Последующей работой в этой области является работа Садлера [Л. 126], в которой была предложена идея математического моделирования искусственных гидрологических рядов. Не останавливаясь на достоинствах и недостатках этих и других ранних работ по теории многолетнего регулирования стока, мы отсылаем для подробного анализа литературы по этому вопросу к монографии Г. Г. Сванидзе [Л. 87] и реферату И. В. Гуглия [Л. 24]. Здесь мы отметим лишь некоторые более поздние работы, которые потребуются нам при последующем изложении.

Одной из первых советских работ, в которой теория вероятностей была применена к расчетам многолетнего регулирования стока, явилась работа С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля [Л. 59]. Используя методы, предложенные в [Л. 59], С. И. Рыбкин составил номограммы для расчета многолетней емкости водохранилищ [Л. 81]. Названные и некоторые другие работы этого периода характеризуются использованием приближенных приемов расчета, которые впоследствии были заменены более строгими методами, не потерявшими своего значения до настоящего времени. К ним в первую очередь нужно отнести метод С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля (1935 г., [Л. 54]), который основан на графо-аналитической композиции функций распределения вероятностей суммы по функциям распределения слагаемых. Для облегчения практических расчетов этим весьма трудоемким методом Я. Ф. Плешковым [Л. 66] были составлены номограммы для определения необходимого объема водохранилища при заданных отдаче, обеспеченности ее и коэффициенте вариации стока реки. Эти номограммы составлены для кривых Пирсона III типа при отсутствии коррелятивной связи между объемами стока смежных лет.

Среди работ, учитывающих стохастическую связь между водностью смежных лет, большое значение для теории многолетнего регулирования стока имеет работа С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля [Л. 58]. В проектной практике наибольшее распространение получил прием, предложенный в указанной статье. Этому способствовало появление графических обобщенных зависимостей для определения многолетней составляющей емкости водохранилища, построенных на основании указанного метода И. В. Гуглием [Л. 23].

Следует указать также на обобщенный метод расчета многолетнего регулирования речного стока, предложенный В. П. Захаровым и Ш. Ч. Чокиным [Л. 35], основанный на построении предельных кривых обеспеченности наполнения водохранилищ. Авторами этого метода также составлены расчетные номограммы, не получившие, однако, широкого распространения в проектной практике.

Построение зависимостей при проведении простейших расчетов многолетнего регулирования стока было произведено рядом авторов на основе объединения в общий длинный ряд различных гидрологических данных наблюдений. В этих работах осредняются весьма различные гидрологические условия. Последние номограммы ука-

занного типа были составлены Д. Маматкановым и И. П. Дружининым [Л. 60].

Ряд зарубежных работ [Л. 111, 118, 119 и др.] посвящен установлению эмпирических зависимостей, связывающих необходимую емкость водохранилища с параметрами стока и величиной гарантированной отдачи. Эмпирическая ограниченность этих работ ставит под сомнение целесообразность использования их в проектной практике.

Другое направление работ, начало которого положено статьей А. Д. Саваренского [Л. 82], заключается в построении безусловной кривой распределения вероятностей наполнения водохранилища, не зависящей от начальных условий. Такой подход к решению задачи дает возможность учета переменного режима потребления. Для упрощения расчетов по этому методу построены номограммы, связывающие характеристики стока с параметрами регулирования [Л. 83].

В 1954 г. австралийский математик Моран [Л. 124] предложил несколько отличный от всех указанных выше аналитический способ решения задачи. В этом способе безусловное распределение вероятностей наполнения устанавливается решением системы линейных уравнений, которые определяют координаты точек искомой кривой распределения. При этом принимается статистическая независимость величин стока за отдельные годы.

В 1956 г. в работе Н. А. Картвелишвили [Л. 40] было предложено распространение аналитического приема на коррелятивно связанные величины годового стока, образующие простую цепь Маркова. В этом случае задача сводится к решению системы интегральных уравнений. В указанной и более поздних работах Н. А. Картвелишвили и его последователей [Л. 41, 42 и др.] дана общая математическая формулировка задачи по регулированию стока и изложены общие принципы описания речного стока как стохастического процесса. В монографии [Л. 42] систематизированы достижения указанного направления решения задачи. Поэтому в дальнейшем эти вопросы здесь рассматриваться не будут.

Все рассмотренные методы и приемы расчета многолетнего регулирования стока наиболее разработаны применительно к системам, состоящим из одного водохранилища. Библиография работ указанного направления достаточно велика, и список литературы в конце книги не претендует на полноту.

Более поздние попытки распространить те или иные из указанных методов на случай хотя бы двух водохранилищ, как правило, не были осуществлены в проектной практике из-за вычислительной сложности и фактической невозможности учета многообразия требований различных участников водохозяйственного комплекса к регулированию стока рек в водохранилищах. Поэтому во всех сложных случаях регулирования стока (многоступенчатые каскады водохранилищ и несколько участников водохозяйственного комплекса) в проектной практике до последнего времени использовался только календарный метод расчета. Использование календарного ряда в качестве гидрологической основы расчетов регулирования стока ставило под сомнение определяемые величины отдачи водохранилища многолетнего регулирования стока.

Как уже указывалось, практическое решение рассматриваемой задачи в простых и сложных случаях регулирования стока дает

применение метода Монте-Карло. Основы этого метода для гидрологических рядов, подчиняющихся закономерностям простых цепей Маркова, были изложены в предыдущей главе.

2-2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ В ПРОСТЕЙШИХ ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ РАСЧЕТАХ

Рассмотрим некоторые вопросы применения искусственных гидрологических рядов в простейших расчетах многолетнего регулирования стока.

1. Необходимым условием применимости искусственных гидрологических рядов, смоделированных методом Монте-Карло, для расчетов многолетнего регулирования стока является соблюдение принятой схемы математического описания процесса стока и, в частности, близость статистических параметров исходных и искусственных рядов. Совпадение параметров исходных и искусственных рядов в значительной степени зависит от длины последних. Поэтому выбор достаточной длины искусственных гидрологических рядов при проведении расчетов многолетнего регулирования приобретает существенный практический интерес. Этот вопрос рассматривался в работах [Л. 27, 87, 125 и др.].

Соответствие параметров искусственных рядов исходным при различных длинах их иллюстрируется табл. 2-1. В ней представлены параметры, вычисленные для смоделированных восьми 250-летних, двух 1 000-летних и одного 2 000-летнего рядов притока к оз. Байкал. Там же приведены отклонения этих величин от исходных. Как показывают данные табл. 2-1, максимальное отклонение среднего стока в 250-летних рядах от исходного не превышает 4%, то же для коэффициента вариации достигает 15%, а для коэффициента корреляции между смежными членами 37%.

При длине искусственных рядов 1 000 лет указанные отклонения уменьшаются в рассмотренном примере соответственно до 0,3, 1 и 5%, а при длине их 2 000 лет отклонения практически равны нулю.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что для практических целей достаточны ряды длиной в 1 000 лет, а ряды длиной в 250 лет не дают удовлетворительного соответствия параметров искусственных и исходных рядов. К аналогичному выводу приходит и Моран [Л. 125], который исследовал ряды длиной в 100, 500 и 1 000 лет. Моран указывает, что в практических расчетах «...вряд

Построения рис. 2-1 хорошо известны и специальных пояснений не требуют. Для определения зависимости $\alpha = f(\beta, p)$ по смоделированным рядам могут быть использованы алгоритмы, приведенные в монографии Г. Г. Сванидзе [Л. 87] и статье М. Фиринга [Л. 113].

Обозначим средний за данный интервал времени приток воды к водохранилищу Q , а запас воды в водохранилище на начало рассматриваемого интервала z ; тогда располагаемый объем воды установки в течение данного интервала времени будет:

$$W_t = Q_t + z_t. \quad (2-1)$$

Зададимся следующими правилами регулирования стока в водохранилище: отдача воды из водохранилища y_t будет зависеть от величины W_t

$$y_t = \begin{cases} \alpha & \text{при } W_t \geq \alpha; \\ W_t & \text{при } W_t < \alpha. \end{cases} \quad (2-2)$$

Наполнение или запас воды в водохранилище на конец данного интервала времени z зависит от W_t , α и β :

$$z_{t+1} = \begin{cases} 0 & \text{при } W_t \leq \alpha; \\ W_t - \alpha & \text{при } \alpha \leq W_t < \alpha + \beta; \\ \beta & \text{при } W_t \geq \alpha + \beta. \end{cases} \quad (2-3)$$

Наконец, величина холостого сброса U_t определяется так:

$$U_t = \begin{cases} 0 & \text{при } W_t \leq \alpha + \beta; \\ W_t - (\alpha + \beta) & \text{при } W_t > \alpha + \beta. \end{cases} \quad (2-4)$$

Схема расчетов следующая: моделируется 1 000-летний ряд (или ряд любой другой длительности) и по зависимостям (2-2) — (2-4) проводятся расчеты регулирования стока, в результате которых подсчитывается число перебоев нормальной отдачи m . Обеспеченность отдачи p определяется по формуле

$$p = \frac{1\,000 - m}{1\,000} \cdot 100\%. \quad (2-5)$$

При необходимости может быть подсчитана также обеспеченность холостых сбросов. Проведение расчетов по смоделированному ряду для нескольких значений α и β позволяет, во-первых, определить обеспеченность отдачи водохранилища, полученных по календарному ряду,

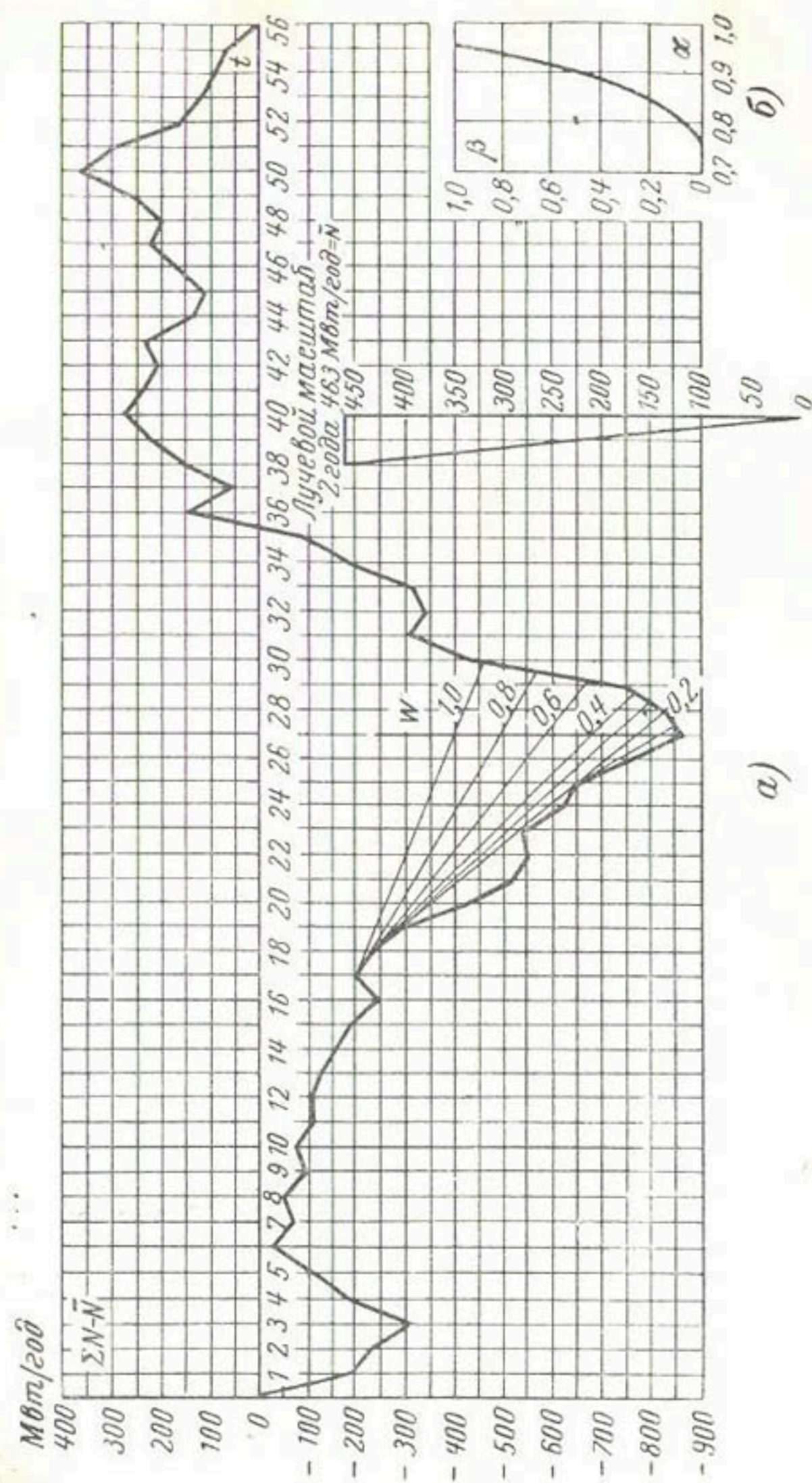


Рис. 2-1.

а — интегральная кривая энергии притока к Иркутской ГЭС; б — зависимость $\alpha = f(\beta)$.

и, во-вторых, находить отдачи при заданных обеспеченности и емкости водохранилища.

Ниже приводятся результаты иллюстративных расчетов, выполненных на примере расчета Иркутского водохранилища.

Таблица 2-3

$$p = f(\alpha, \beta)$$

α	Обеспеченность p % при значениях β					
	0,0	0,15	0,30	0,60	0,90	3,00
0,5	100,0	—	—	—	—	—
0,6	98,1	100,0	—	—	—	—
0,7	94,2	99,1	100,0	100,0	—	—
0,8	83,8	93,7	97,9	99,9	100,0	—
0,9	69,5	83,0	89,9	95,9	98,6	100,0
1,0	47,3	61,2	69,2	78,3	83,5	95,2
1,2	16,0	18,5	21,1	22,8	23,3	24,2

В табл. 2-3 даны рассчитанные по искусственному ряду длиной в 1000 лет значения обеспеченности p для притока к Иркутскому водохранилищу ($C_e=0,196$; $r=0,34$) при различных заданных величинах отдачи α и многолетней емкости водохранилища β .

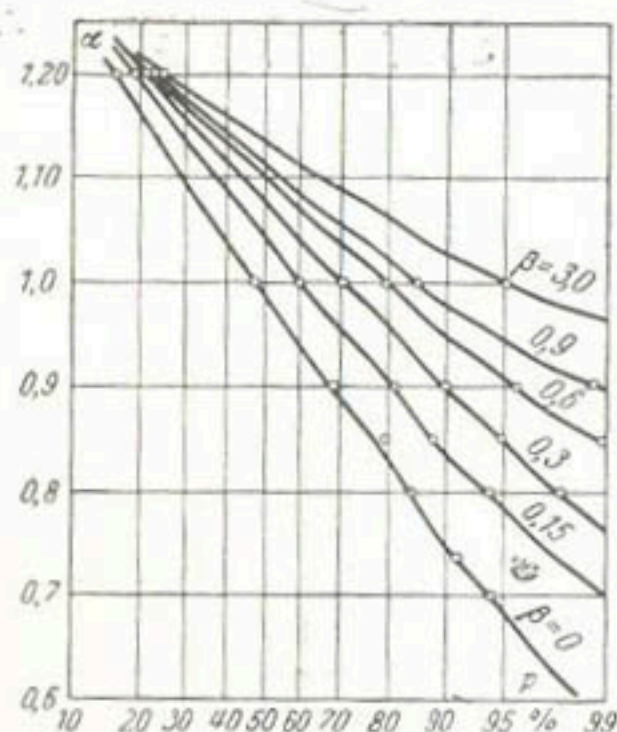


Рис. 2-2. Зависимости величины отдачи от обеспеченности при постоянной емкости водохранилища [$\alpha = f(p)$ при $\beta = \text{const}$].

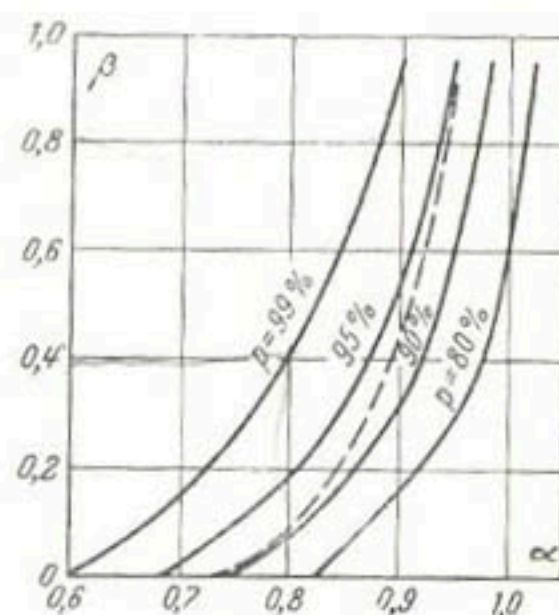


Рис. 2-3. Зависимости $\beta = f(\alpha)$ при $p = \text{const}$.

— по 1000-летнему ряду;
--- по наблюдаемому ряду.

По данным табл. 2-3 на рис. 2-2 построены на клетчатке вероятностей кривые зависимости $\alpha = f(p)$ при $\beta = \text{const}$. Ниже эти кривые перестроены (рис. 2-3) в координатах α и β для некоторых величин $p = \text{const}$. На рис. 2-3 нанесена также кривая $\alpha = f(\beta)$, по-

лученная по календарному ряду (см. рис. 2-1). Рисунок 2-3 свидетельствует о том, что обеспеченность, полученная расчетом по календарному ряду, зависит от величины многолетней емкости водохранилища и изменяется для рассматриваемого примера от 90 до 95%.

Приведенные данные иллюстрируют лишь технику расчетов и не предназначены для количественной оценки обеспеченности отдач Иркутского водохранилища, так как в них не учтены сезонные колебания стока.

В институте Энергосетьпроект в соответствии с изложенными выше правилами составлена программа расчетов на ЭЦВМ «Урал-2». Она включает подпрограмму моделирования гидрологических рядов и предусматривает возможность проведения расчетов по определению обеспеченности p одновременно для восьми значений коэффициентов вариации, четырех значений коэффициентов корреляции между смежными членами ряда, десяти величин отдач α и четырех значений многолетней составляющей емкости водохранилища β . Указанная программа позволила провести массовые расчеты регулирования стока по искусственным рядам, что дало возможность построить на их основе обобщенные графики для расчета водохранилищ многолетнего регулирования стока.

В специальной литературе по вопросам теории регулирования речного стока известны многочисленные попытки разработать обобщенные графики, позволяющие по известным характеристикам гидрологического ряда определять необходимую величину многолетней составляющей полезной емкости водохранилища, которая с определенной степенью надежности обеспечивала бы заданную водоотдачу. Некоторые из таких графиков упоминались в § 2-1. Особенно широкое распространение в проектной практике получили графики Я. Ф. Плешкова, построенные для $r=0$ с использованием кривой Пирсона III типа при $C_s=2C_v$, а также графики И. В. Гуглия, построенные для $r=0,3$ и того же типа распределения вероятностей.

Применение к расчетам многолетнего регулирования стока метода Монте-Карло, а также использование для проведения расчетов быстродействующих вычислительных машин позволили построить указанные зависимости для значительно большего диапазона значений коэффициента корреляции между смежными членами ряда и соотношений между C_s и C_v .

Построение с помощью ЭЦВМ обобщенных зависимостей для определения многолетней составляющей емкости водохранилища возможно не только на основании расчетов по искусственным гидрологическим рядам, но и с помощью аналитического метода С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля. Программа такого расчета была состав-

лена Н. А. Мещериновой. По этой программе на ЭЦВМ «Стрела-4» были выполнены расчеты для двух значений коэффициента корреляции между стоком смежных лет ($r=0$ и $r=0,3$) (см. Труды Гидропроекта, сб. 12, 1964).

Рассмотрим способы построения номограммы упомянутых выше видов и проведем некоторый анализ полученных зависимостей. В обработке результатов расчетов и построении некоторых из приводимых ниже номограмм принимали участие сотрудники Грузинского энергетического института (Г. Г. Сванидзе и др.).

2-3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ПРИ ПОСТРОЕНИИ НОМОГРАММ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОЛЕТНЕЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ЕМКОСТИ ВОДОХРАНИЛИЩ

Для построения номограмм по кривым Пирсона III типа при $C_s=2C_v$ были смоделированы гидрологические ряды со следующими значениями коэффициентов вариации и корреляции:

$C_v=0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5;$

$r=0,0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6.$

Общее количество смоделированных рядов составило 98. Длина искусственного ряда для большей надежности номограмм принималась равной $n=2000$ лет. Для каждого из рядов были проведены расчеты регулирования стока для следующих 10 значений α и 16 значений β :

$\alpha=0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0.$

$\beta=0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2; 2,4; 2,6; 2,8; 3,0.$

На основании расчетов регулирования стока определялись величины обеспеченности p . На клетчатке вероятностей были построены графики $p=f(\alpha, \beta)$. Затем для значений $p=70, 75, 80, 85, 90, 95, 96, 97, 98$ и 99% были построены графики $\alpha=f(\beta)$ для различных сочетаний C_v и r и с их помощью окончательные графики $F(C_v, r, \alpha, \beta, p)=0$, которые сгруппированы для семи значений коэффициента корреляции между смежными членами ряда и частично приведены на рис. 2-4—2-10. Часть этих графиков была опубликована в [Л. 71]. Они несколько отличаются от графиков, приведенных в [Л. 42, 87, 89, 105], так как построены для значительно большего диапазона коэффициентов вариации.

При $r=0$ указанные графики совпадают с упоминавшимися номограммами Плешкова, а при $r=0,3$ — с но-

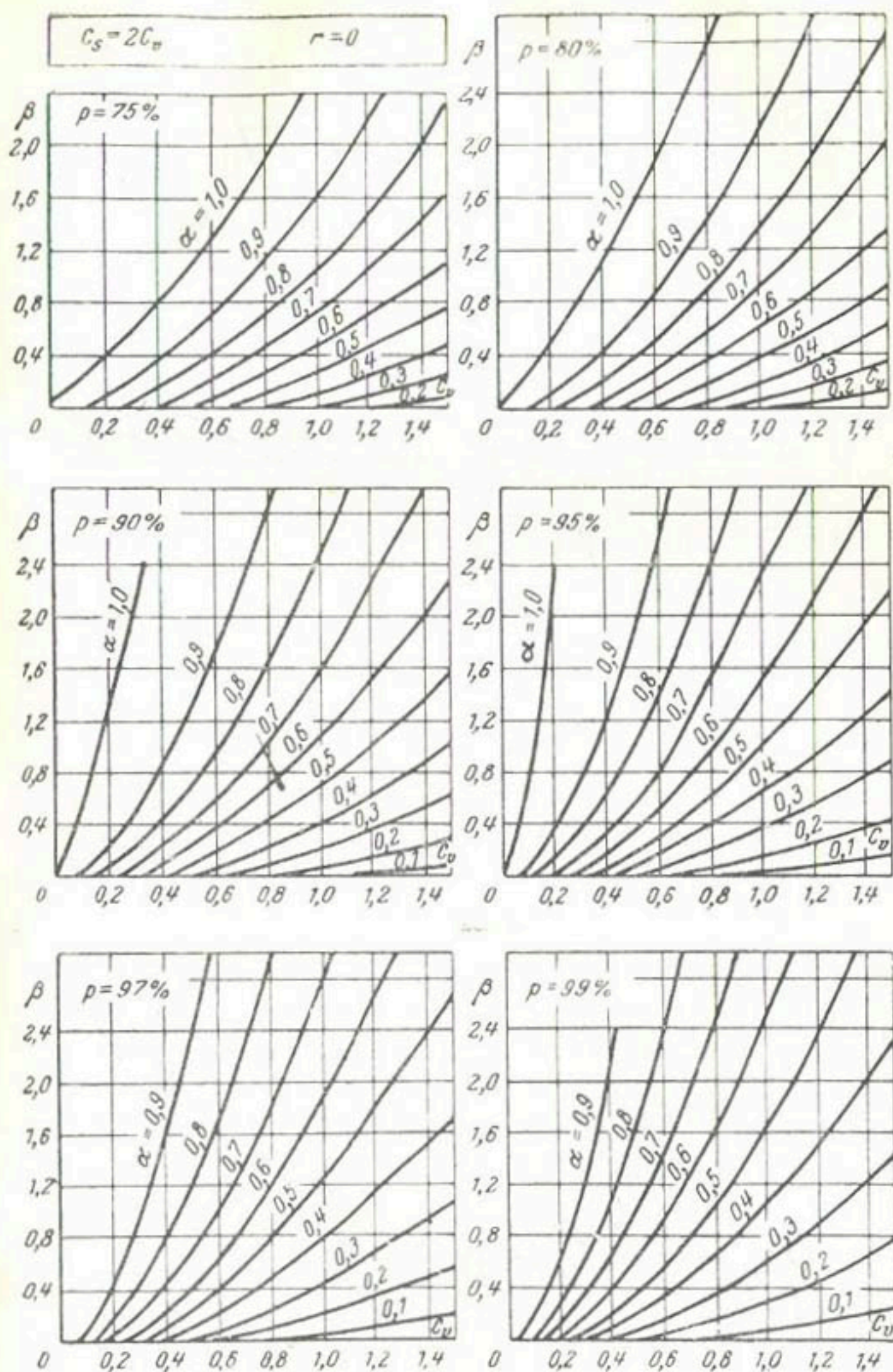


Рис. 2-4. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0$ и $C_s=2C_v$.

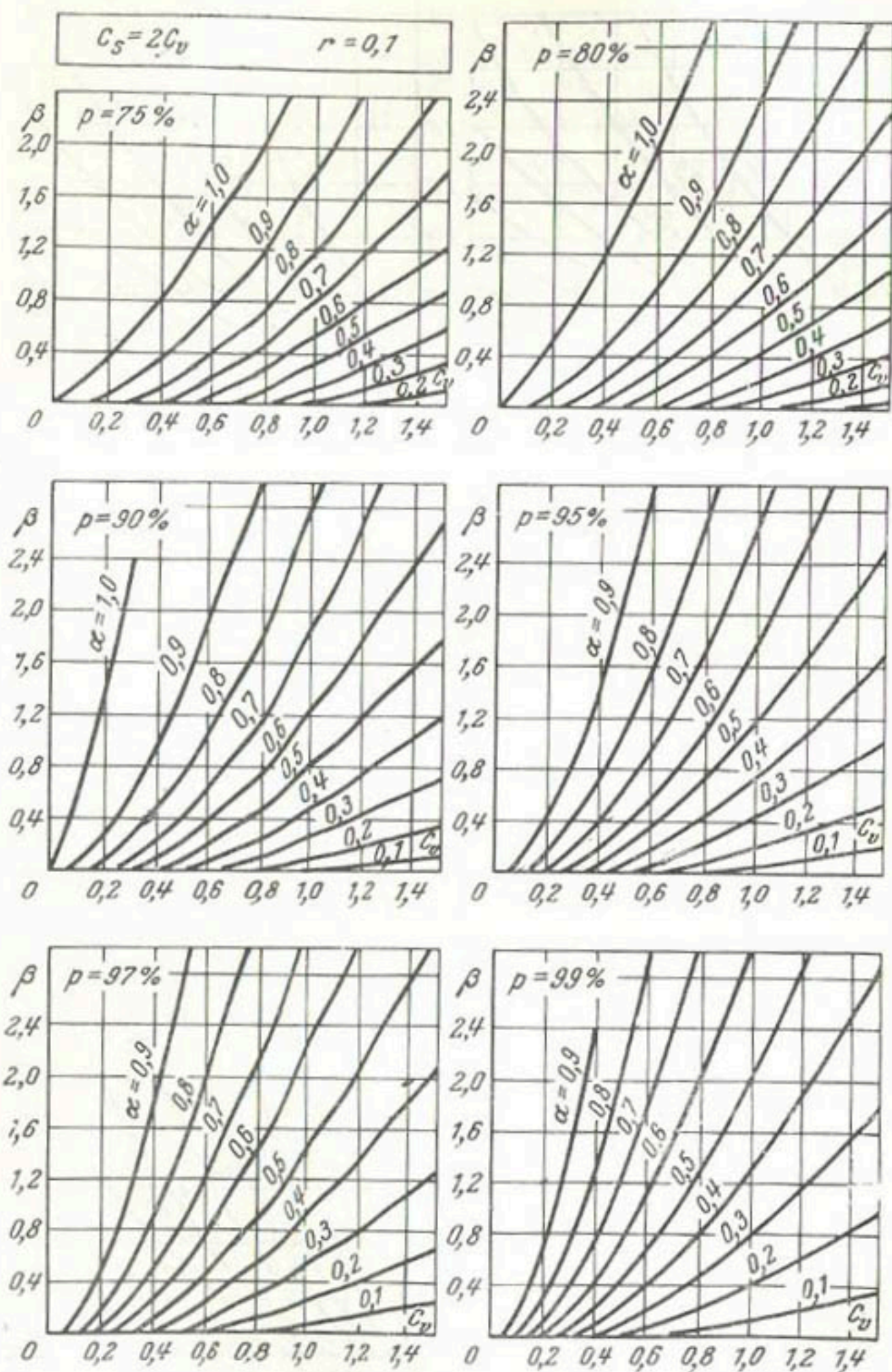


Рис. 2.5. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0.1$ и $C_s=2C_v$.

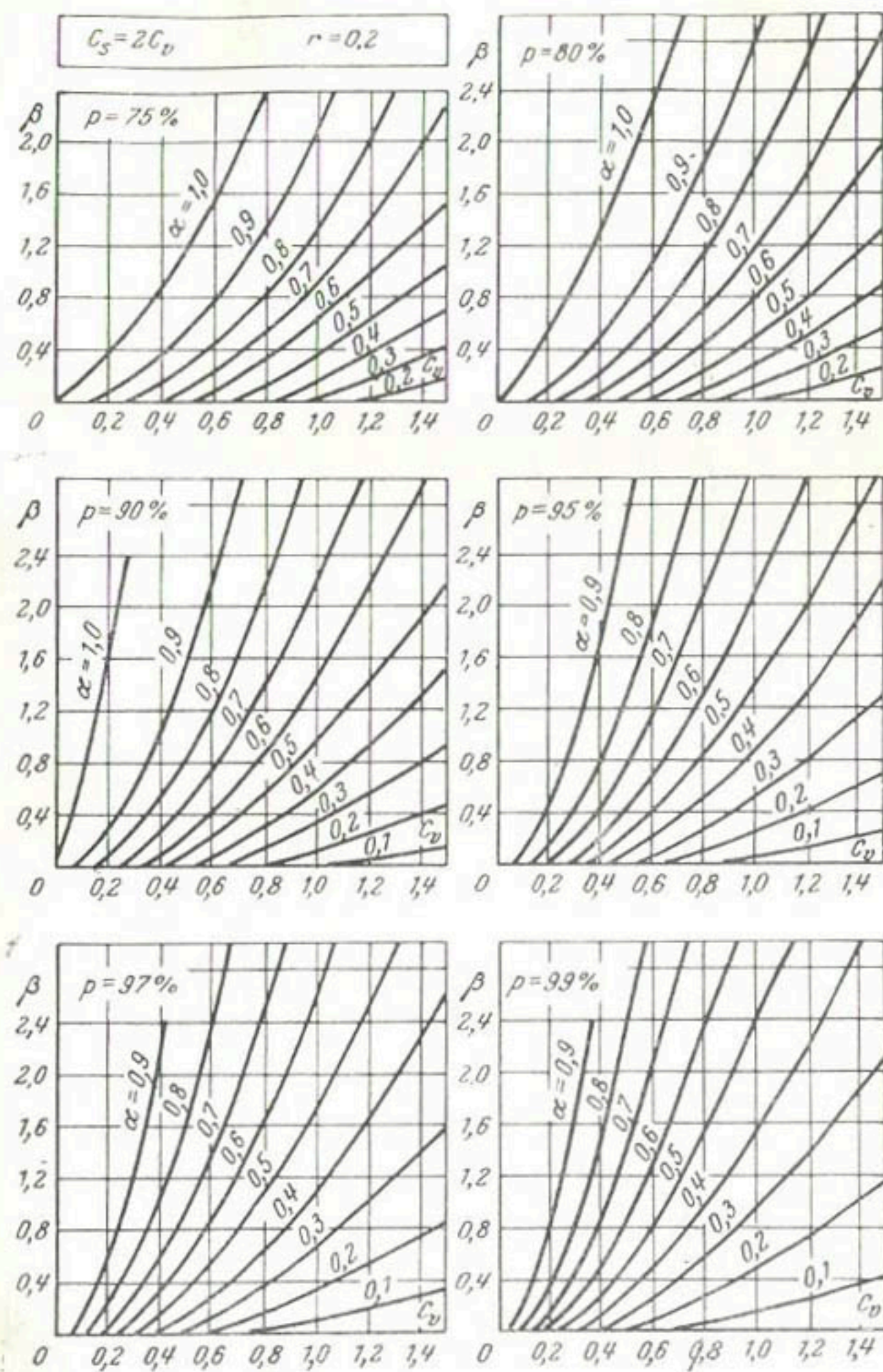


Рис. 2-6. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0,2$ и $C_s=2C_v$.

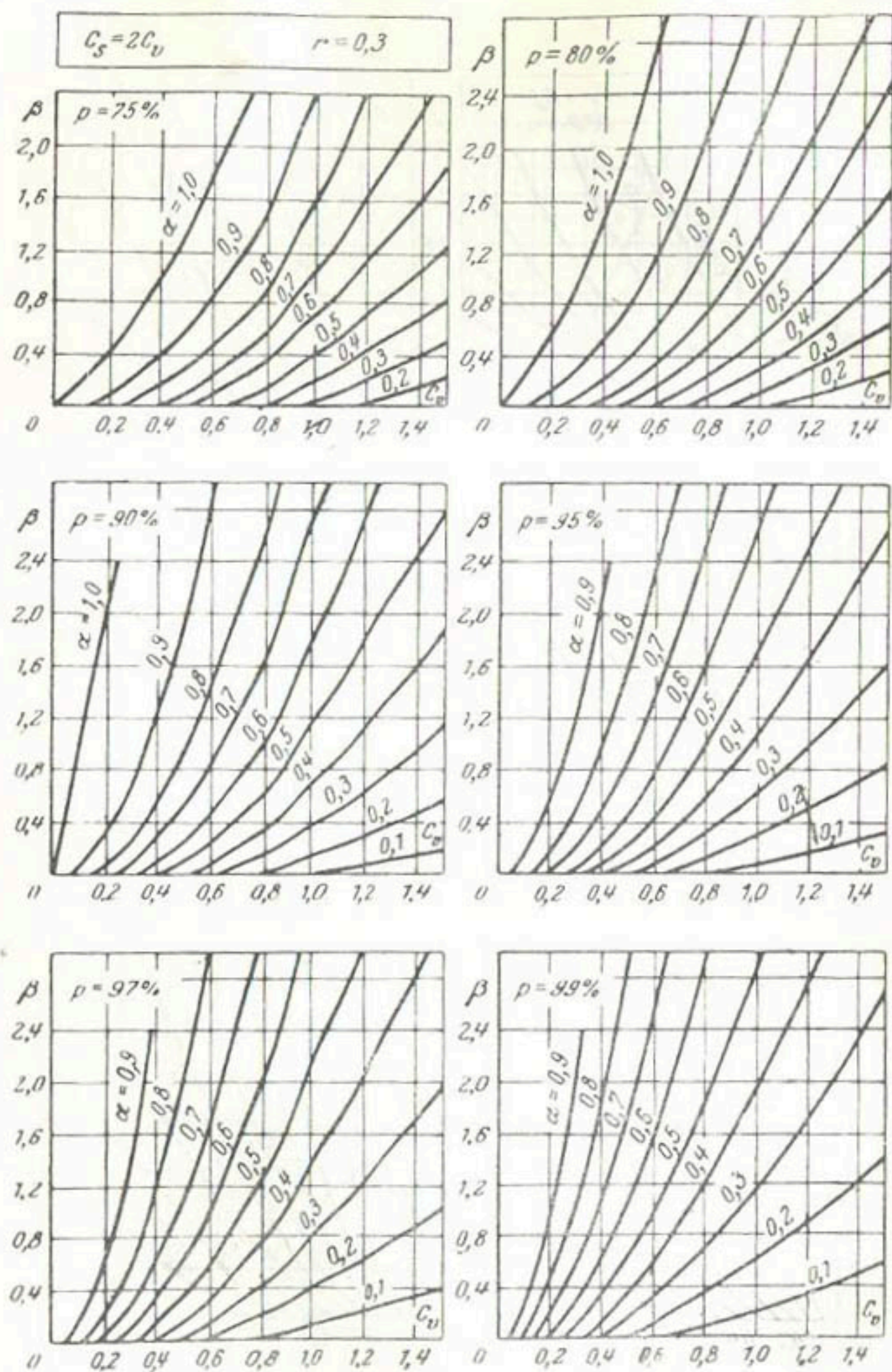


Рис. 2-7. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0,3$ и $C_s=2C_v$.

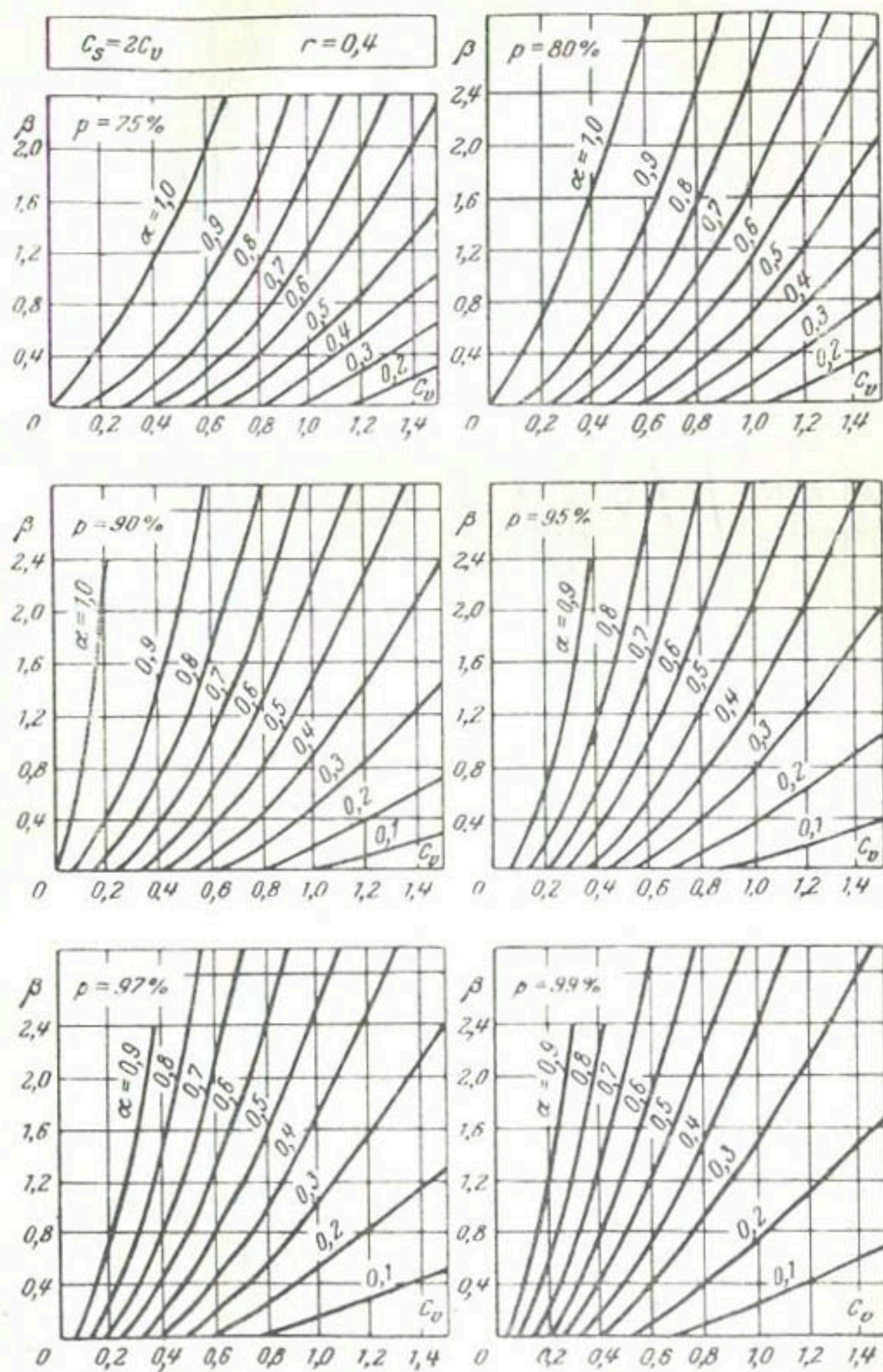


Рис. 2-8. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0,4$ и $C_s=2C_v$.

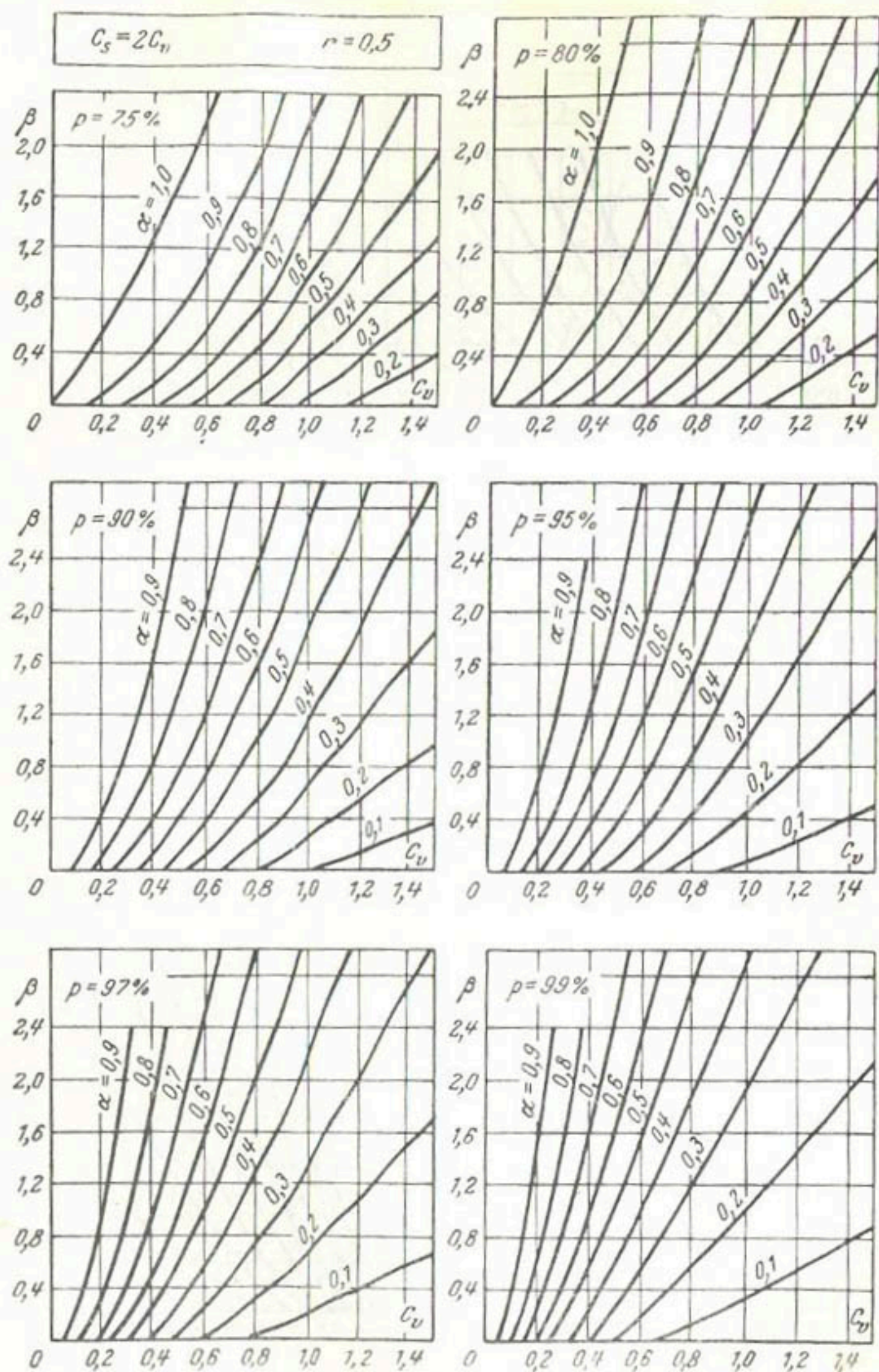


Рис. 2-9. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0,5$ и $C_s=2C_v$.

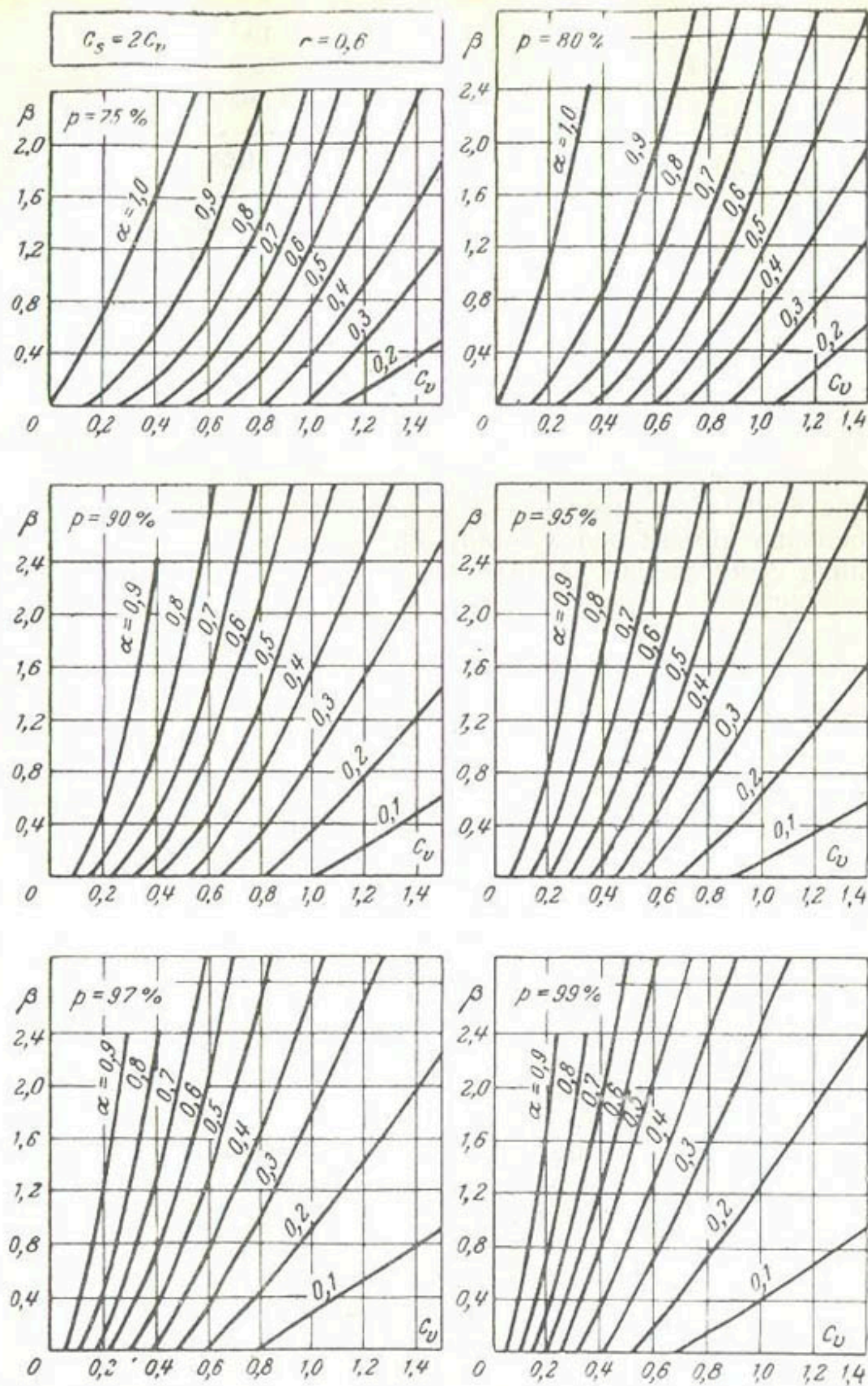


Рис. 2-10. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0,6$ и $C_s=2C_v$.

мограммами Гуглия при тех p и C_v , для которых эти номограммы были построены. Предлагаемые графики как при наличии, так и при отсутствии корреляции построены по единой методике и полностью сопоставимы. Эти графики позволяют количественно оценить зависимость необходимой многолетней емкости водохранилища от величины коэффициента корреляции между смежными членами ряда. Такая зависимость может быть получена для любых соотношений параметров рядов и гидроузлов. На рис. 2-11, а зависимости $\beta = f(r)$ при $\alpha = \text{const}$ представлены для нескольких значений C_v и α . Эти зависимости показывают, что требуемый объем водохранилища при прочих равных условиях в значительной степени увеличивается с увеличением коэффициента корреляции. Так, например, при $C_v = 0,3$, $p = 90\%$ и $\alpha = 0,9$ в случае $r = 0,3$ требуется на 40%, а в случае $r = 0,5$ на 80% больший объем водохранилища, чем при $r = 0$. Эта разница существенно увеличивается для больших значений обеспеченности, коэффициентов вариации и величин отдач. Так, для $p = 95\%$, $C_v = 0,3$ и $\alpha = 0,9$ требуемый объем водохранилища возрастает на 64% в случае $r = 0,3$ и на 128% в случае $r = 0,5$ и т. д.

Таким образом, приведенные данные подтверждают, что учет корреляционных связей в расчетах многолетнего регулирования стока имеет первостепенное значение. Графики, показанные на рис. 2-4—2-10, позволяют учитывать эти связи для широкого диапазона изменений коэффициента корреляции между смежными членами ряда.

Переход в гидрологии от симметричного распределения Гаусса, применявшегося А. Хазеном, к асимметричным кривым Пирсона III типа был предложен А. Фостером и обосновывался тем общеизвестным фактом, что на реках чаще встречаются отрицательные отклонения годовых расходов от среднего, но зато положительные отклонения имеют большую абсолютную величину.

При описании речного стока обычно приходится иметь дело с положительной асимметрией, чему соответствует положительная величина коэффициента асимметрии C_s . Как указывалось в § 1-2, при рассмотрении кривой Пирсона III типа, для того чтобы величины переменной не приняли в зоне малых вероятностей отрицательных значений, необходимо, чтобы коэффициент асимметрии был не менее удвоенного коэффициента вариации ($C_s \geq 2C_v$).

Поэтому крайнее соотношение $C_s = 2C_v$, соответствующее физически возможному диапазону колебаний величин речного стока $0 \leq Q \leq \infty$, и получило в гидрологии столь широкое распространение.

Однако обработка материалов наблюдений за стоком рек (эти данные приведены частично в § 1-6) указывает на то, что эмпирический коэффициент асимметрии C_s далеко не всегда равен $2C_v$.

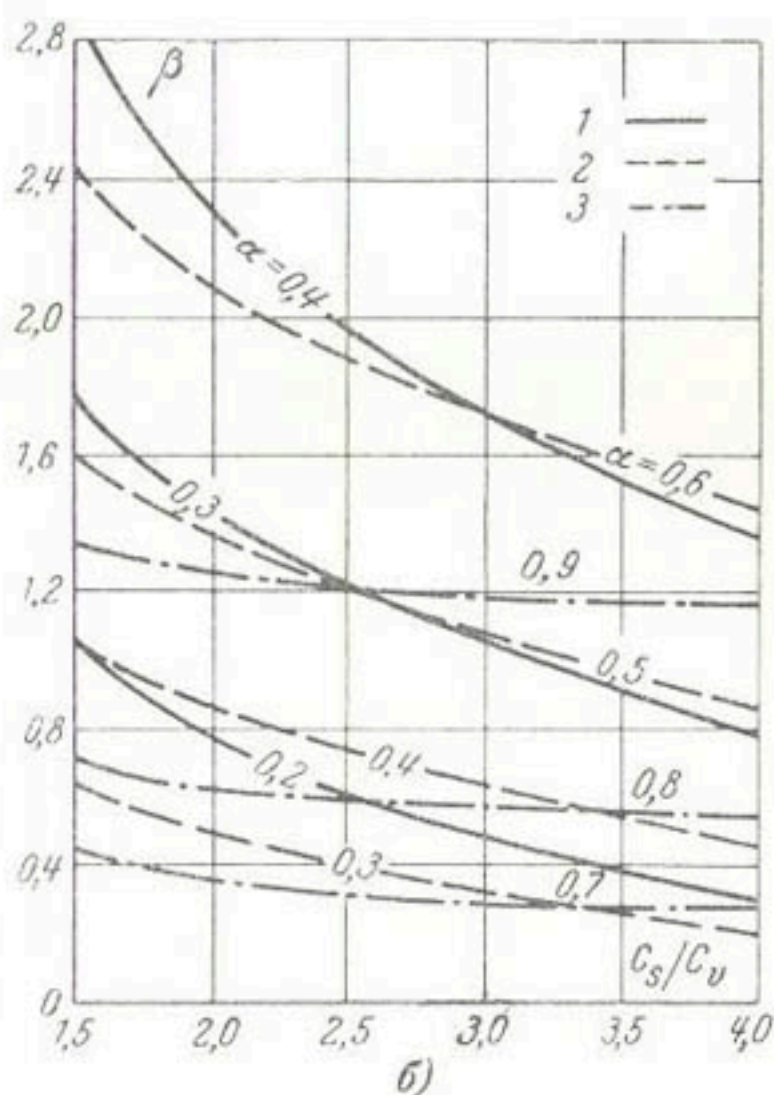
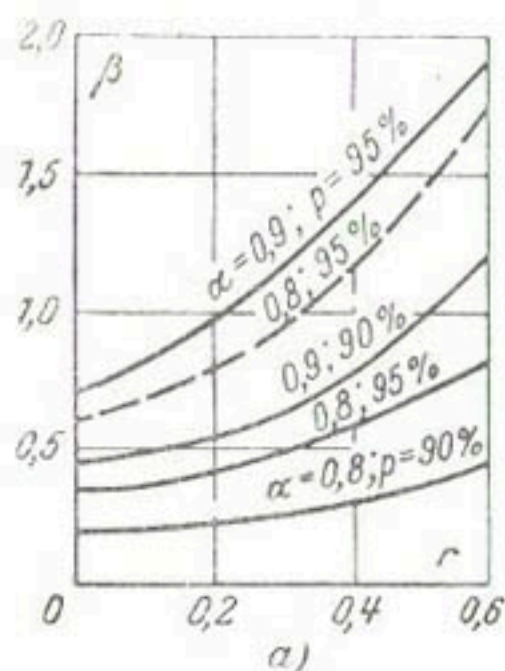


Рис. 2-11. Зависимости многолетней емкости β от r и C_s/C_v при $\alpha = \text{const}$, $p = \text{const}$ и $C_v = \text{const}$.

а — $\beta = f(r)$; — $C_v = 0.3$;
 — — — $C_v = 0.4$; б — $\beta =$
 $= f(C_s/C_v)$; 1 — $C_v = 1.5$; 2 — $C_v =$
 $= 0.9$; 3 — $C_v = 0.3$.

Проведенные исследования показали, что величины C_s иногда могут быть определены с допустимой точностью и что для некоторых рек соотношение между C_s и C_v может значительно отличаться от 2. Последнее, несмотря на наличие погрешностей в определении C_s , вынуждает иногда использовать в проектной практике гамма-распределения с соотношением между C_s и C_v , близким к эмпирическому. При этом следует иметь в виду, что отход от соотношения $C_s = 2C_v$ влечет за собой при использовании биномиальных кривых принятие некоторого вполне определенного положительного или даже отрицательного (при $C_s < 2C_v$) абсолютного минимума годового стока реки, формально диктуемого урав-

нением кривой и никак не вытекающего из природы колебаний речного стока.

В работе [Л. 90] были построены номограммы, соответствующие кривым Пирсона III типа для значений $C_s \neq C_v$ (они частично приведены и в [Л. 42, 87, 105]). Номограммы были построены для значений коэффициентов корреляции $r=0,0; 0,2; 0,4; 0,6$ для случаев $C_s=4C_v$ и $C_s=C_v$. Указанные графики характеризуются наличием зоны отрицательных отдач при $C_s=C_v$; по ним нельзя определять отдачи, меньшие, чем $\alpha=0,6$ при $C_s=4C_v$. Это ставит под сомнение возможность практического использования их.

Для сохранения нижнего предела стока, совпадающего с нулем при произвольных значениях C_v и C_s , различными авторами предложены специальные функции распределения вероятностей, которые также могут быть использованы для построения номограмм $F(\alpha, \beta, C_v, \rho, r)=0$. Наиболее широкое распространение в гидрологии и водохозяйственных расчетах, как уже указывалось, получили предложенные С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем трехпараметрические кривые гамма-распределения. Эти кривые достаточно хорошо удовлетворяют требованиям, которые предъявляются к функциям распределения вероятностей, применяемым для описания колебаний речного стока.

На основе кривых Крицкого — Менкеля в Энергосетьпроекте были построены графики $F(\alpha, \beta, C_v, \rho, r)=0$ для двух значений коэффициента корреляции между смежными членами рядов ($r=0$ и $r=0,3$) и двух значений отношения коэффициентов асимметрии и вариации ($C_s/C_v=1,5$ и $4,0$) [Л. 71]. Указанные графики представлены на рис. 2-12—2-15. Анализ этих графиков показывает, что при прочих равных условиях в зоне обеспеченности отдачи, представляющей практический интерес (75—97%), с увеличением отношения C_s к C_v необходимая емкость водохранилища уменьшается (см. рис. 2-11,б). Указанные графики существенно отличаются от номограмм работ [Л. 42, 87, 90], построенных на основе кривых Пирсона III типа.

Приведенные в § 1-2 предварительные выводы о равноценности со статистической точки зрения гамма-распределения и логнормального распределения годовых величин речного стока делают целесообразной попытку построить аналогичные номограммы и для логнормального

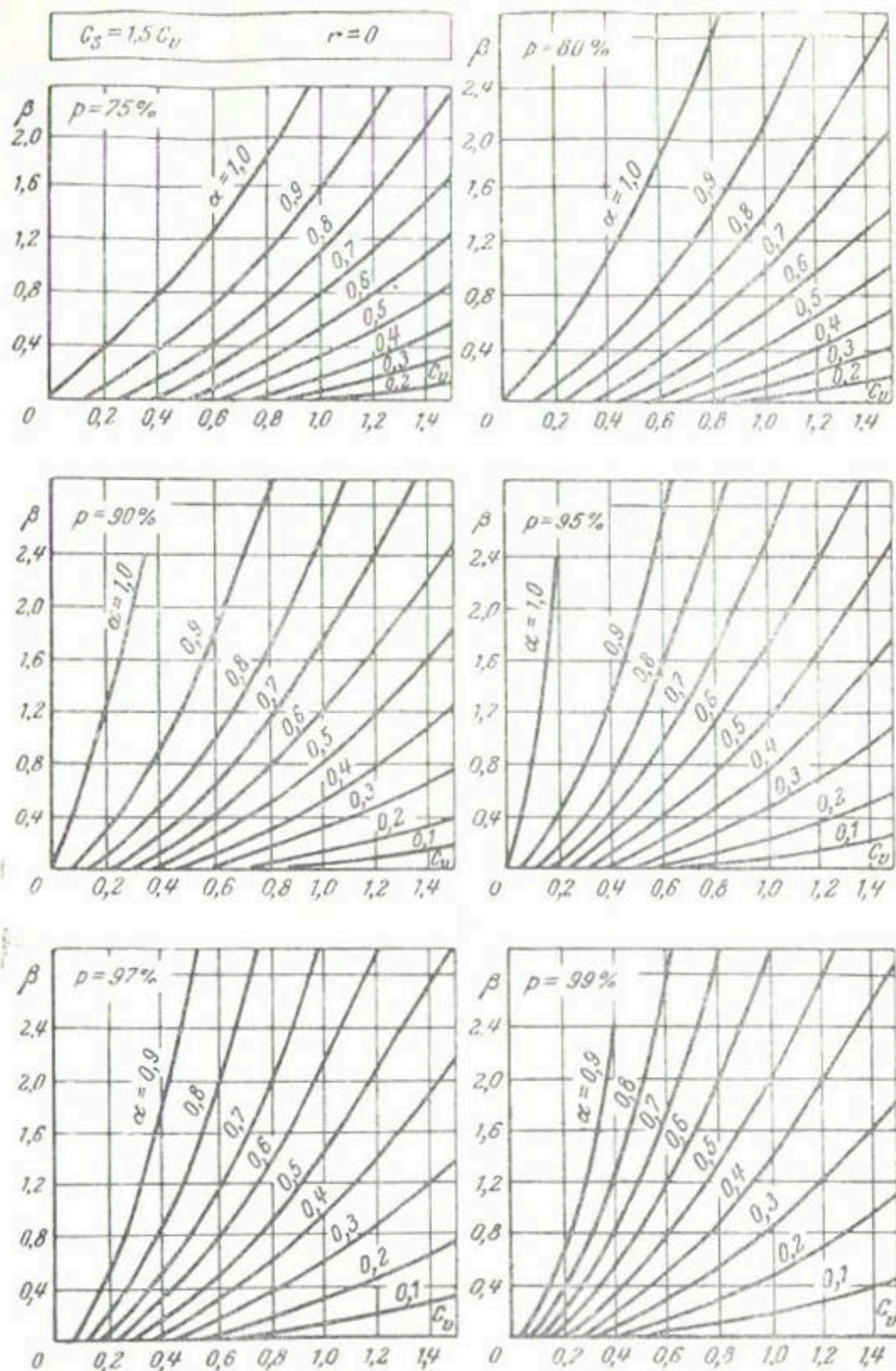


Рис. 2-12. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0,0$ и $C_s=1,5 C_v$.

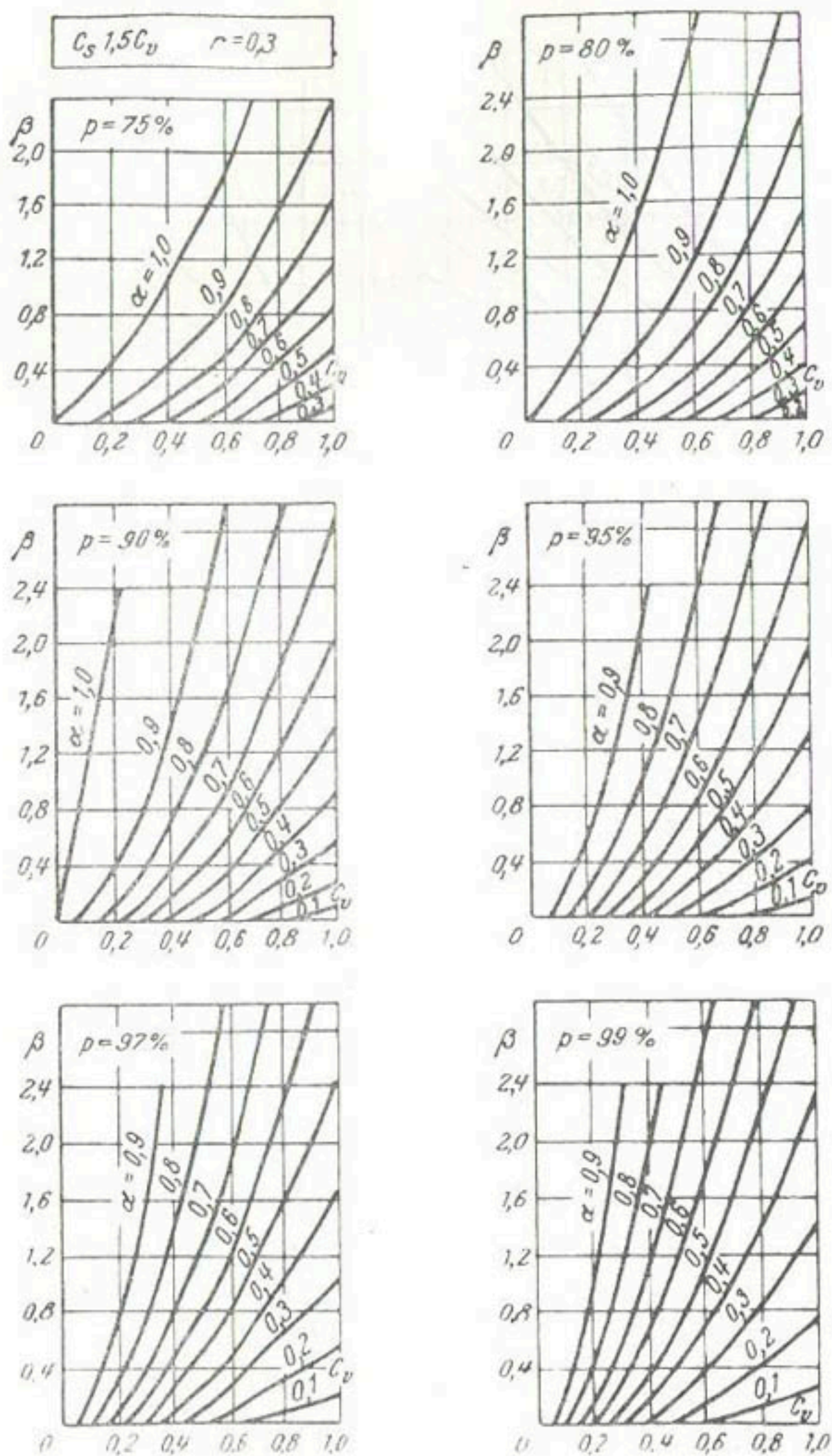


Рис. 2-13. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0,3$ и $C_s=1,5C_v$.

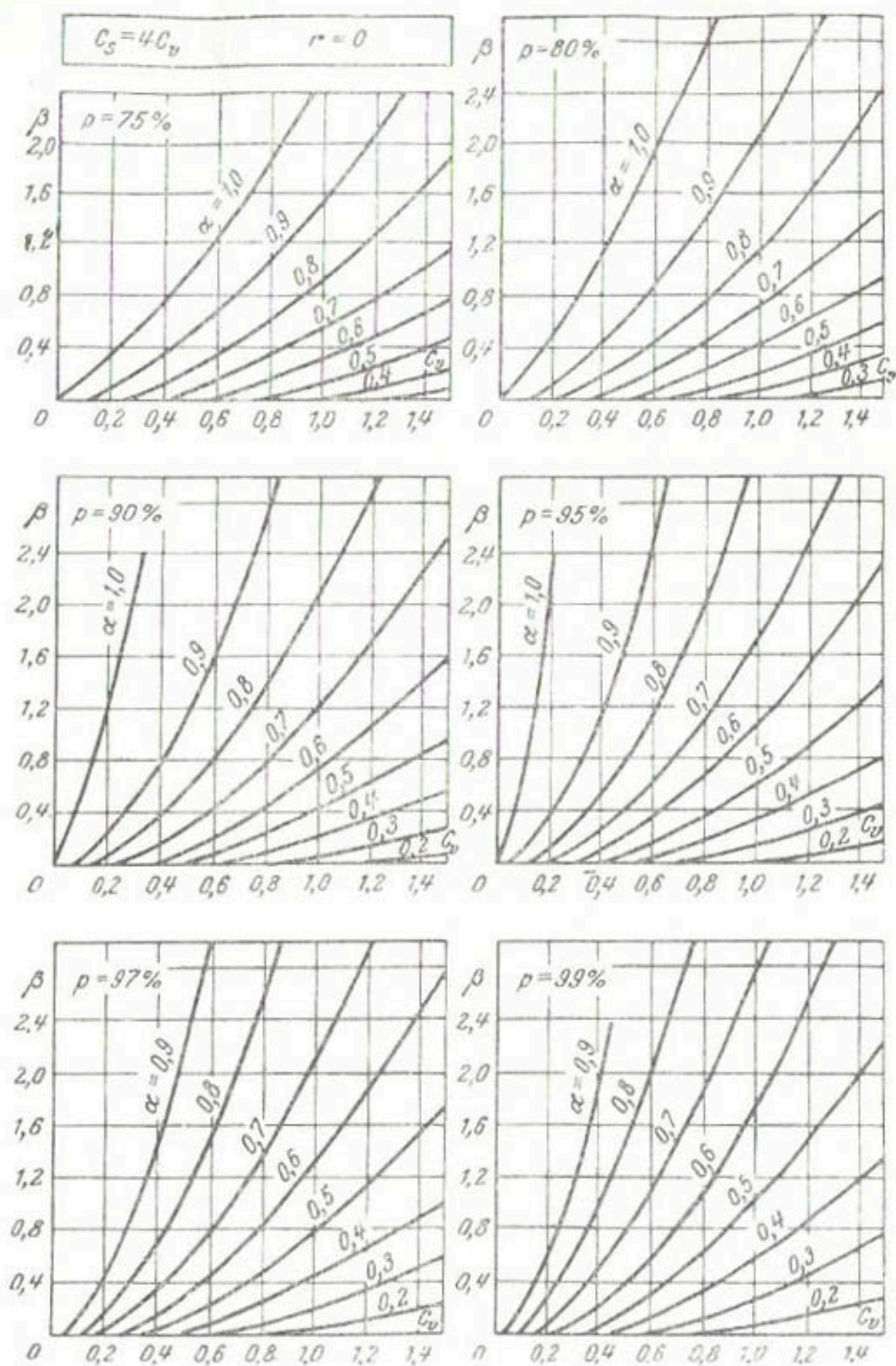


Рис. 2-14. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0,0$ и $C_s=4C_v$.

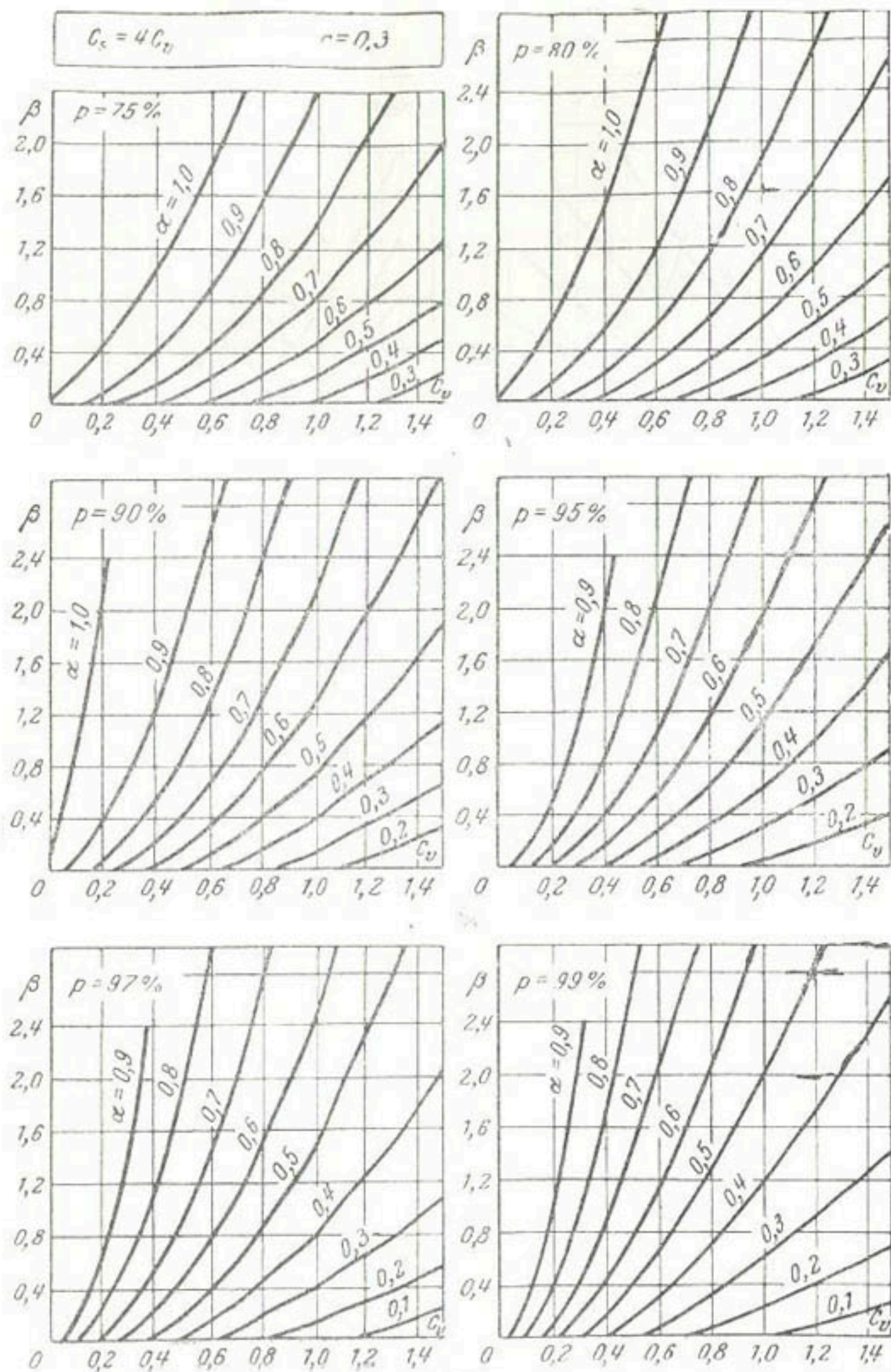


Рис. 2-15. Графики для определения многолетней составляющей емкости водохранилища при $r=0,3$ и $C_s=4C_v$.

распределения. Такие номограммы для $r=0$, $C_v < 0,5$ и $p=90, 95, 98$ и 99% были построены в США [Л. 115]. Аналогичные номограммы, но для $C_v \leq 1,5$ $r=0,3$ и $0,0$ и $p=75, 80, 85, 90, 95, 96, 97, 98$ и 99% были построены с помощью искусственных рядов в институте Энергосеть-проект. Сопоставление последних с номограммами, построенными по рядам с гамма-распределением, показывает, что соотношение их находится в существенной зависимости от величины коэффициента вариации.

Использование искусственных гидрологических рядов годового стока для водохозяйственных расчетов в том виде, который был описан в настоящей главе, видимо, должно быть ограничено построением приведенных обобщенных зависимостей, так как проектная практика требует рассмотрения стока рек за более малые интервалы времени, чем год. Эти вопросы будут подробно рассмотрены ниже в гл. 4.

2-4. СОПОСТАВЛЕНИЕ КАЛЕНДАРНОГО И СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДОВ РАСЧЕТА МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СТОКА РЕК

Целью настоящего параграфа являются сопоставление указанных методов, выявление их погрешностей и выбор наиболее эффективного метода расчета многолетнего регулирования стока.

Исследование проводилось с использованием искусственных гидрологических рядов, смоделированных методом Монте-Карло и использованных в § 1-5 и 1-6. Напомним, что указанные ряды подчиняются закономерностям простых цепей Маркова и распределены в соответствии с кривой Пирсона III типа. Из искусственных рядов, как и в § 1-5 и 1-6, выделялось по 500 выборок длиной n лет. По каждой выборке проводились расчеты календарным и статистическим методами.

1. Календарным способом определялись бесперебойные отдачи водохранилища при четырех заданных значениях его емкости $W=0,1; 0,4; 0,8$ и $2,0$.

Календарный способ заключается в проведении расчета регулирования стока по интегральной кривой наблюдаемого ряда (в нашем случае — искусственной выборки). Такое определение бесперебойной отдачи при заданной емкости водохранилища было пояснено в § 2-2. В качестве обязательного условия принималось одинаковое наполнение водохранилища в начале и конце n -летнего периода выборки. При неравенстве указанных на-

полнений производилась соответствующая корректировка начальных условий.

Для расчета календарным методом на ЭЦВМ был разработан специальный алгоритм, в котором максимальная бесперебойная отдача водохранилища определялась путем постепенного увеличения с постоянным шагом некоторой минимальной отдачи до тех пор, пока заданная емкость оказывалась недостаточной для обеспечения полученной отдачи A_k . В этом случае шаг уменьшался вдвое и расчет повторялся, начиная с отдачи A_{k-1} . Дробление шага производилось до нахождения отдачи, при которой опорожнение водохранилища произойдет лишь 1 раз в течение n -летнего периода. Обеспеченность бесперебойной отдачей оценивалась формулой

$$p = \frac{n}{n+1} \cdot 100\% \quad (2-6)$$

Следует заметить, что полученная отдача в значительной степени зависит от среднего стока выборки. Для сопоставления отдач в разных выборках отдача, полученная в каждой выборке, A_{pi} делилась (нормировалась) на средний расход этой выборки $\bar{Q}_i$:

$$\alpha_{pi} = \frac{A_{pi}}{\bar{Q}_i} \quad (2-7)$$

В результате расчета по всем 500 выборкам получена совокупность относительных отдач водохранилища при заданной емкости его. Эта совокупность далее рассматривается как некоторая новая случайная выборка, по которой строилось эмпирическое распределение оценок отдач водохранилища, найденных календарным методом.

Рассмотрим результаты определения календарным методом бесперебойных отдач водохранилища в данном статистическом эксперименте. В качестве истинной отдачи водохранилища берем отдачу, вычисленную по длинному ряду $N=2000$ лет с параметрами, равными исходным, принятым при моделировании. В соответствии с изложенным в § 2-2 и 2-3 номограммы, представленные на рис. 2-4—2-10, являются обобщением расчетов по длинным рядам и получение искомым истинных отдач сводится к снятию с номограмм значений их при исходных параметрах $C_v, p, r, W/\bar{Q} = \beta$.

В табл. 2-4 приведены результаты вычисления параметров распределения отдач, вычисленных календарным

Таблица 2-4

Пара- метры		Огдани и погрешности определения их при значениях n																	
		25						50											
		при коэффициентах корреляции r																	
		0,0						0,3						0,5					
		и коэффициентах вариации C_v																	
		0,25	0,50	1,00	0,25	0,50	1,00	0,25	0,50	1,00	0,25	0,50	1,00	0,25	0,50	1,00			
0,1	α_0	0,700	0,420	—	0,675	0,380	—	0,665	0,360	—	0,625	0,325	—	0,610	0,310	—			
	α_n	0,702	0,431	—	0,683	0,405	—	0,663	0,355	—	0,640	0,338	—	0,620	0,318	—			
	α_p	0,671	0,378	—	0,671	0,369	—	0,622	0,321	—	0,618	0,307	—	0,613	0,284	—			
	$\Delta\alpha_n\%$	0,3	2,6	—	1,2	6,6	—	—0,3	1,4	—	2,4	4,0	—	1,6	2,6	—			
	$\Delta\alpha_p\%$	—4,1	—10,0	—	—0,6	—2,9	—	—6,5	—10,9	—	—1,1	—5,5	—	0,5	—8,4	—			
0,4	α_0	0,850	0,603	0,310	0,894	0,540	0,220	0,815	0,550	0,265	0,765	0,485	0,180	0,718	0,410	0,135			
	α_n	0,849	0,620	0,329	0,810	0,552	0,249	0,812	0,560	0,272	0,768	0,489	0,194	0,735	0,432	0,150			
	α_p	0,862	0,614	0,332	0,834	0,573	0,273	0,824	0,558	0,282	0,785	0,503	0,216	0,759	0,455	0,168			
	$\Delta\alpha_n\%$	0,0	2,7	6,2	0,7	2,2	13,2	0,0	1,8	2,6	0,4	0,8	7,8	2,4	5,4	11,1			
	$\Delta\alpha_p\%$	1,4	1,8	7,1	3,7	6,1	24,0	1,1	1,5	6,4	2,7	3,7	20,0	5,7	10,9	24,5			
0,8	α_0	0,936	0,750	0,430	0,885	0,660	0,322	0,905	0,700	0,380	0,850	0,600	0,280	0,875	0,510	0,208			
	α_n	0,920	0,745	0,454	0,883	0,670	0,358	0,891	0,685	0,390	0,845	0,600	0,294	0,815	0,526	0,223			
	α_p	0,950	0,769	0,479	0,923	0,712	0,403	0,916	0,711	0,414	0,877	0,634	0,325	0,848	0,575	0,251			
	$\Delta\alpha_n\%$	—1,7	—0,5	5,6	0,0	1,5	11,2	—1,5	—2,0	2,6	—0,5	0,0	5,0	1,2	3,1	7,2			
	$\Delta\alpha_p\%$	1,5	2,5	11,4	4,3	7,9	25,2	1,2	1,6	9,0	3,2	5,7	16,0	5,3	12,7	25,4			
2,0	α_0	—	0,893	0,650	—	0,825	0,520	—	0,850	0,585	—	0,770	0,455	—	0,697	0,355			
	α_n	—	0,887	0,662	—	0,826	0,545	—	0,850	0,590	—	0,769	0,470	—	0,698	0,376			
	α_p	—	0,949	0,726	—	0,906	0,639	—	0,895	0,643	—	0,831	0,534	—	0,775	0,451			
	$\Delta\alpha_n\%$	—	—0,7	1,8	—	0,0	4,8	—	—1,2	0,9	—	0,0	3,3	—	0,0	5,9			
	$\Delta\alpha_p\%$	—	6,4	13,2	—	9,8	23,0	—	4,1	9,9	—	7,9	17,3	—	11,2	27,0			

способом, а также истинные отдачи, снятые с номограмм по исходным параметрам рядов α_0 .

На рис. 2-16 и 2-17 приведены для иллюстрации некоторые кривые распределения отдачи, полученные календарным методом.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что распределения отдачи водохранилища, определяемые календарным методом, имеют некоторое положительное сме-

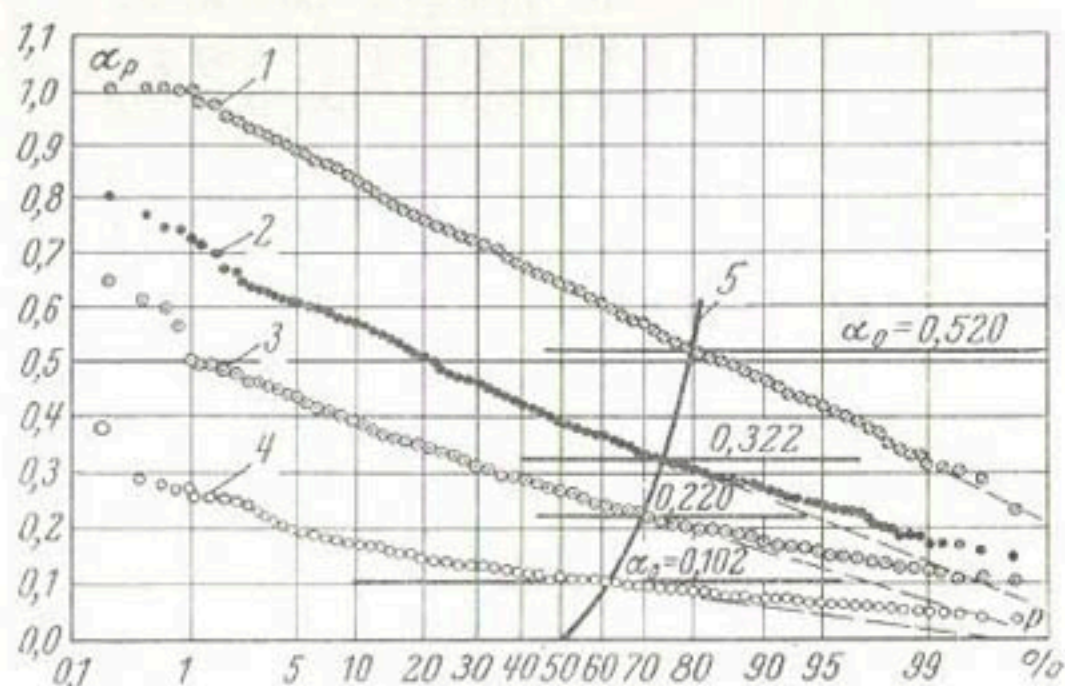


Рис. 2-16. Распределения отдачи α_p , вычисленных календарным методом, при заданных параметрах $C_v=1,0$; $r=0,3$; $n=25$.

1 — значения α_p при $W=2,0$; 2 — то же при $W=0,8$; 3 — то же при $W=0,4$; 4 — то же при $W=0,1$; 5 — характеристика смещения.

щение (рис. 2-16). Отсюда при определении отдачи водохранилища многолетнего регулирования стока календарным методом необходимо считаться с появлением некоторой систематической ошибки, завышающей отдачу. На возможность появления такой ошибки указывали С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель.

В соответствии с приведенными выше данными величина смещения существенно возрастает с увеличением коэффициентов вариации и корреляции ряда, в меньшей степени — с увеличением емкости водохранилища и уменьшением длины выборки. В данном эксперименте была отмечена максимальная систематическая погрешность отдачи, найденной календарным способом, равная 45% величины истинной отдачи (при $C_v=1,0$; $r=0,5$; $W=2,0$; $n=25$). Зависимости погрешности от C_v , r , W и n

представлены в табл. 2-4. Как видно из таблицы, для связанных рядов с высокой изменчивостью стока отдачи водохранилища глубокого многолетнего регулирования стока, определенные календарным методом, имеют систематические погрешности, вполне соизмеримые с их абсолютной величиной. Для $C_v < 0,5$ систематические погрешности не превышают 15% истинной величины отдачи.

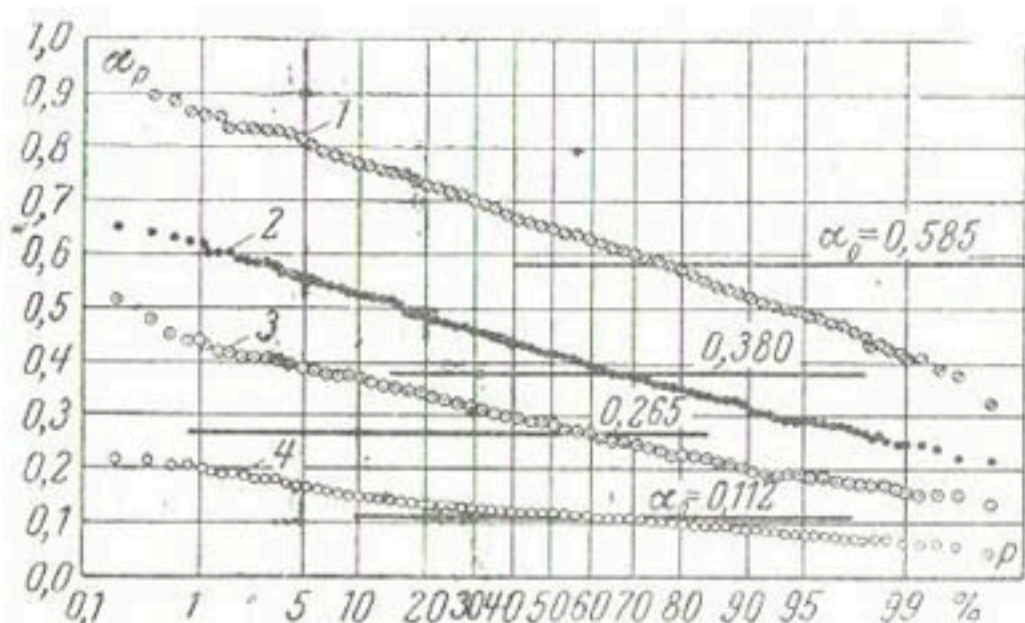


Рис. 2-17. Распределения отдачи α_p , вычисленных календарным методом, при заданных параметрах $C_v=1,0$; $r=0,0$; $n=50$.

1 — значения α_p при $W=2,0$; 2 — то же при $W=0,8$; 3 — то же при $W=0,4$; 4 — то же при $W=0,1$.

Случайное рассеяние отдачи водохранилища, определенных в описанном эксперименте календарным методом, характеризуется данными, приведенными в табл. 2-5. Зависимости эмпирического коэффициента вариации отдачи от C_v ряда r , n и W для нескольких сочетаний исходных параметров приведены на рис. 2-18 и 2-19. Эти данные свидетельствуют о том, что коэффициент изменчивости отдачи, т. е. относительная случайная ошибка их, повышается с увеличением коэффициентов вариации и корреляции ряда, но снижается с уменьшением длины выборки. Физический смысл таких зависимостей представляется достаточно ясным и особых пояснений не требует. Следует лишь обратить внимание на величину погрешности в определении отдачи календарным методом. Как следует из табл. 2-4 и 2-5, если пользоваться правилом «трех сигм», то случайные ошибки в определении отдачи могут достигать 100 и более процентов ве-

W		σ и C_v при значениях n																							
		25								50															
		при коэффициентах корреляции r																							
		0,0				0,3				0,5				0,0				0,3				0,5			
		и коэффициентах вариации C_v																							
	Пара- метры	0,25	0,5	1,0	0,25	0,5	1,0	0,25	0,5	1,0	0,25	0,5	1,0	0,25	0,5	1,0	0,25	0,5	1,0	0,25	0,5	1,0			
0,1	$\sigma(\alpha_p)$	0,077	0,092	—	0,080	0,098	—	0,084	0,105	—	0,069	0,073	—	0,073	0,079	—	0,080	0,085	—	—	—	—			
	$C_v(\alpha_p)$	0,114	0,244	—	0,119	0,265	—	0,125	0,295	—	0,111	0,228	—	0,117	0,255	—	0,130	0,305	—	—	—	—			
0,4	$\sigma(\alpha_p)$	0,053	0,085	0,081	0,063	0,098	0,087	0,072	0,113	0,088	0,050	0,072	0,063	0,061	0,084	0,058	0,070	0,095	0,156	—	—	—			
	$C_v(\alpha_p)$	0,062	0,147	0,245	0,075	0,171	0,317	0,088	0,207	0,383	0,061	0,129	0,222	0,077	0,168	0,268	0,092	0,211	0,334	—	—	—			
0,8	$\sigma(\alpha_p)$	0,038	0,083	0,105	0,052	0,100	0,115	0,062	0,116	0,119	0,039	0,076	0,080	0,051	0,088	0,081	0,062	0,101	0,081	—	—	—			
	$C_v(\alpha_p)$	0,040	0,108	0,219	0,055	0,140	0,285	0,068	0,172	0,344	0,042	0,107	0,194	0,058	0,138	0,248	0,073	0,176	0,309	—	—	—			
2,0	$\sigma(\alpha_p)$	—	0,056	0,121	—	0,080	0,142	—	0,098	0,158	—	0,057	0,097	—	0,078	0,109	—	0,097	0,115	—	—	—			
	$C_v(\alpha_p)$	—	0,059	0,166	—	0,088	0,223	—	0,113	0,273	—	0,054	0,150	—	0,093	0,203	—	0,125	0,255	—	—	—			
0,1	$\sigma(\alpha_n)$	0,045	0,068	—	0,049	0,074	—	0,054	0,085	—	0,037	0,052	—	0,040	0,054	—	0,044	0,063	—	—	—	—			
	$C_v(\alpha_n)$	0,065	0,157	—	0,071	0,184	—	0,081	0,214	—	0,055	0,143	—	0,062	0,159	—	0,072	0,197	—	—	—	—			
0,4	$\sigma(\alpha_n)$	0,035	0,068	0,072	0,043	0,074	0,068	0,051	0,083	0,073	0,029	0,051	0,049	0,035	0,053	0,047	0,043	0,063	0,041	—	—	—			
	$C_v(\alpha_n)$	0,041	0,111	0,218	0,053	0,134	0,272	0,065	0,163	0,347	0,036	0,091	0,181	0,046	0,108	0,242	0,058	0,146	0,272	—	—	—			
0,8	$\sigma(\alpha_n)$	0,026	0,058	0,087	0,033	0,068	0,083	0,042	0,082	0,081	0,022	0,048	0,062	0,030	0,051	0,059	0,039	0,063	0,050	—	—	—			
	$C_v(\alpha_n)$	0,028	0,078	0,192	0,038	0,102	0,233	0,049	0,135	0,275	0,025	0,071	0,158	0,035	0,086	0,202	0,048	0,120	0,224	—	—	—			
2,0	$\sigma(\alpha_n)$	—	0,037	0,089	—	0,052	0,093	—	0,063	0,100	—	0,033	0,069	—	0,044	0,168	—	0,054	0,065	—	—	—			
	$C_v(\alpha_n)$	—	0,042	0,134	—	0,063	0,171	—	0,082	0,221	—	0,039	0,117	—	0,057	0,144	—	0,078	0,176	—	—	—			

личины истинной отдачи. Это означает, что точность определения отдачи водохранилища многолетнего регулирования стока календарным методом существенно уменьшается с увеличением C_v и r и уменьшением W и n . При высоких C_v и r и небольших W и n точность расчета становится совершенно недостаточной для практических целей.

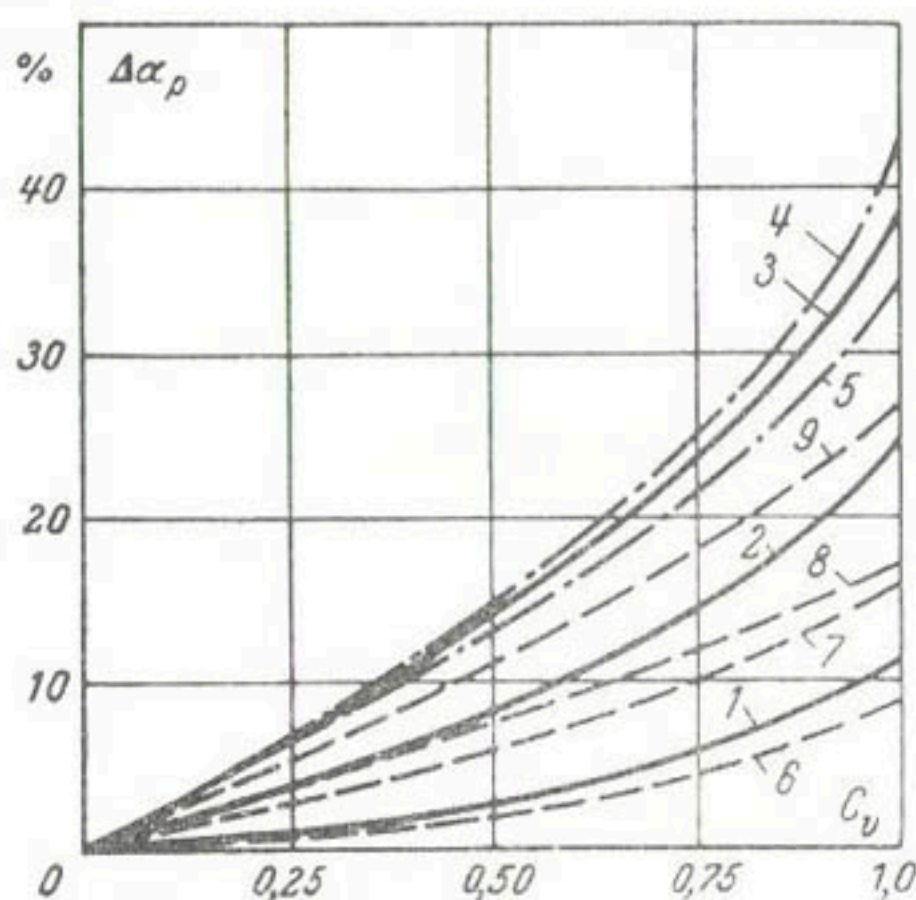


Рис. 2-18. Зависимости $\Delta\alpha_p = f(C_v, r, W, n)$.
 1 — $n=25$; $W=0,8$; $r=0$; 2 — $n=25$; $W=0,8$; $r=0,3$;
 3 — $n=25$; $W=0,8$; $r=0,5$; 4 — $n=25$; $W=2,0$; $r=0,5$;
 5 — $n=25$; $W=0,4$; $r=0,5$; 6 — $n=50$; $W=0,8$; $r=0$;
 7 — $n=50$; $W=0,8$; $r=0,3$; 8 — $n=50$; $W=2,0$; $r=0,3$;
 9 — $n=50$; $W=2,0$; $r=0,5$.

Рассмотрим теперь результаты определения отдачи статистическим методом и исследуем, уменьшаются ли при его применении погрешности, которые имели место при расчете отдачи календарным методом.

2. Для расчета обобщенным статистическим методом по выборкам, которые использовались выше в этом параграфе, определяются обычными способами статистические параметры распределения гидрологической выборки: средняя величина выборки, коэффициент изменчивости и коэффициент корреляции между смежными членами ряда. Эти выборочные параметры используются для определения отдачи водохранилища статистическим методом α_n по номограммам $F(\alpha, \beta, C_v, \rho,$

$r) = 0$, описанным выше в § 2-3. Во всех расчетах принималось, что закон распределения вероятностей величин соответствует кривой Пирсона III типа и соотношение C_s/C_v в каждой выборке равно исходному при моделировании, т. е. $C_s/C_v = 2$. Кроме того, принималось, что истинный коэффициент корреляции между смежными членами ряда известен и равен коэффициенту, использованному как при моделировании ряда, так и при построении номограмм.

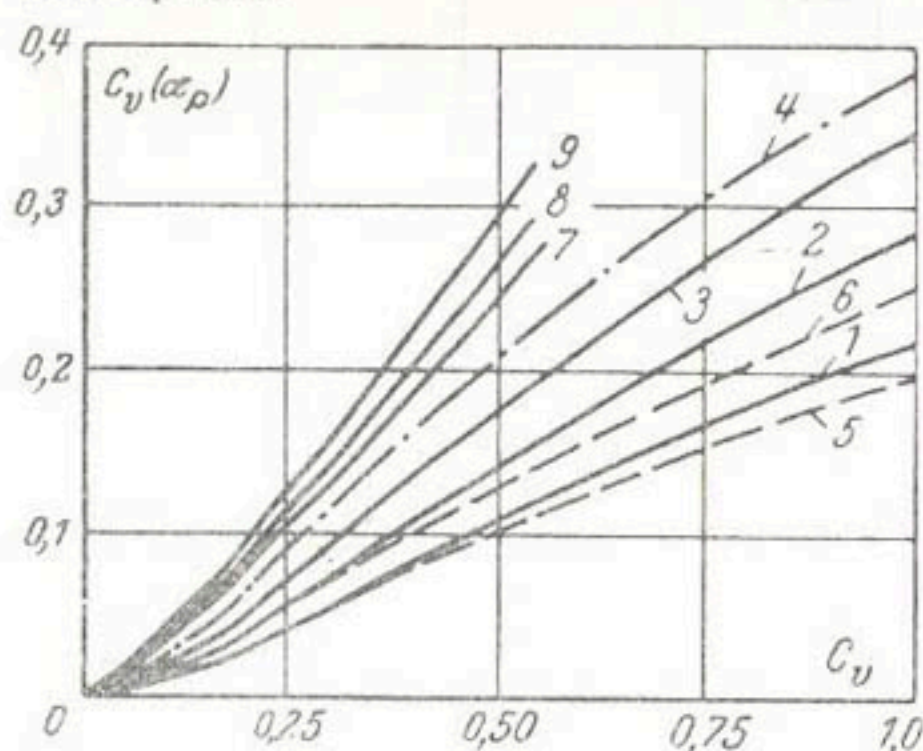


Рис. 2-19. Зависимости $C_v(a_p) = f(C_v, W, r, n)$.

1 — $n=25$; $W=0,8$; $r=0$; 2 — $n=25$; $W=0,8$; $r=0,3$;
 3 — $n=25$; $W=0,8$; $r=0,5$; 4 — $n=25$; $W=0,4$; $r=0,5$;
 5 — $n=50$; $W=0,8$; $r=0$; 6 — $n=50$; $W=0,8$; $r=0,3$;
 7 — $n=25$; $W=0,1$; $r=0$; 8 — $n=25$; $W=0,1$; $r=0,3$;
 9 — $n=25$; $W=0,1$; $r=0,5$.

Кривые распределений отдач, полученных статистическим и календарным методами, показаны на рис. 2-20.

Математические ожидания отдач α_n при разных сочетаниях исходных параметров гидрологических рядов и сопоставление их с истинными отдачами приведены в табл. 2-4. Эти данные свидетельствуют о том, что распределения отдач, полученных статистическим методом, так же как и отдач, полученных календарным методом, имеют некоторое смещение относительно истинной величины. Однако практически во всех рассмотренных случаях величина смещения α_n значительно меньше смещения распределения отдач, полученных календарным методом. Максимальное смещение α_n в данном статисти-

ческом эксперименте не превышало 25% истинной величины (сравним с 45% в календарном методе). Следует заметить, что в отличие от расчета календарным методом, в котором с ростом емкости водохранилища смещенность увеличивалась, в статистическом методе с увеличением емкости смещенность снижается.

Таким образом, в условиях рек засушливых районов страны (большие исходные C_v и r) для водохранилищ глубокого многолетнего регулирования стока статисти-

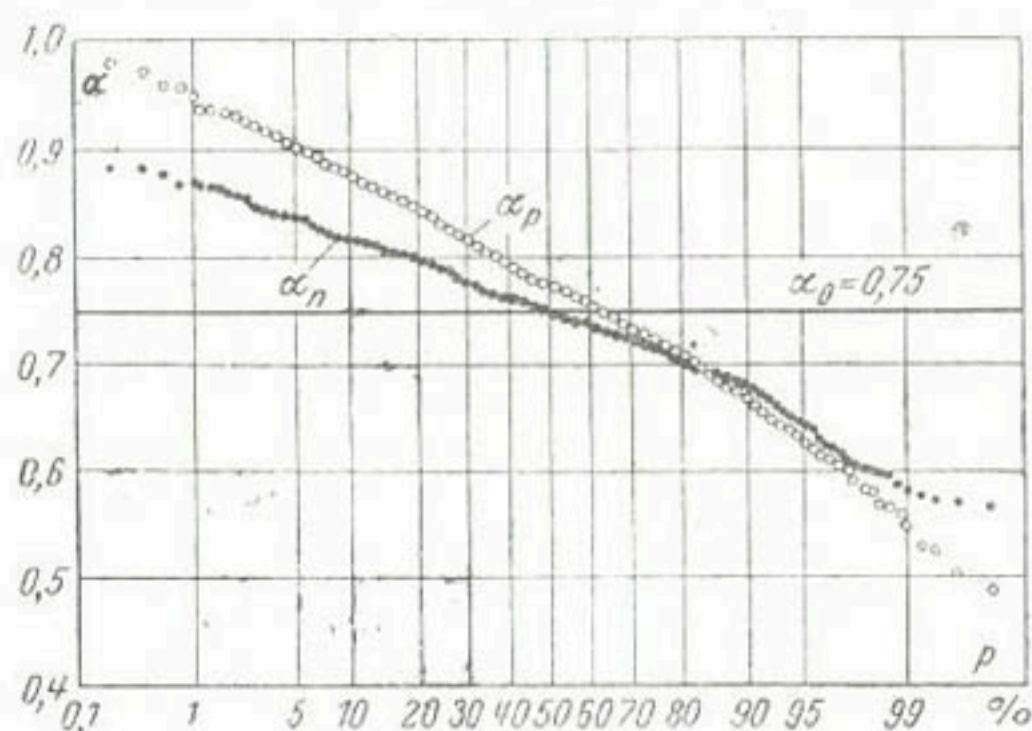


Рис. 2-20. Распределения отдачи α_n и α_p при исходных параметрах $W=0,8$; $C_v=0,5$; $r=0,0$; $n=25$.

ческий метод дает решения, имеющие в 2—4 раза меньшие систематические ошибки, чем календарный. Для рек с небольшими C_v и менее емких водохранилищ различие между статистическим и календарным методами не столь велико. Во всех рассмотренных случаях статистическим методом были получены более осторожные решения, чем календарным.

Появление положительного смещения распределений отдачи в расчетах статистическим методом не является неожиданным. Его следовало ожидать, так как в указанных расчетах использовалась обычная моментная оценка коэффициента изменчивости, которая, как было показано в § 1-6, имеет небольшое отрицательное смещение, т. е. в расчетах систематически, хотя и сравнительно не намного, занижалась величина выборочного коэффициента изменчивости. Тем самым при каждой

заданной емкости водохранилища величина отдачи, определяемая по номограммам, несколько завышалась.

Ликвидировав систематическую погрешность в оценке коэффициента вариации, видимо, можно почти полностью устранить и смещенность распределения отдачи, определяемых статистическим методом.

Проиллюстрируем сказанное на примере несвязных гидрологических рядов ($r=0$). Для оценки коэффициента изменчивости в указанных несвязных рядах с гам-

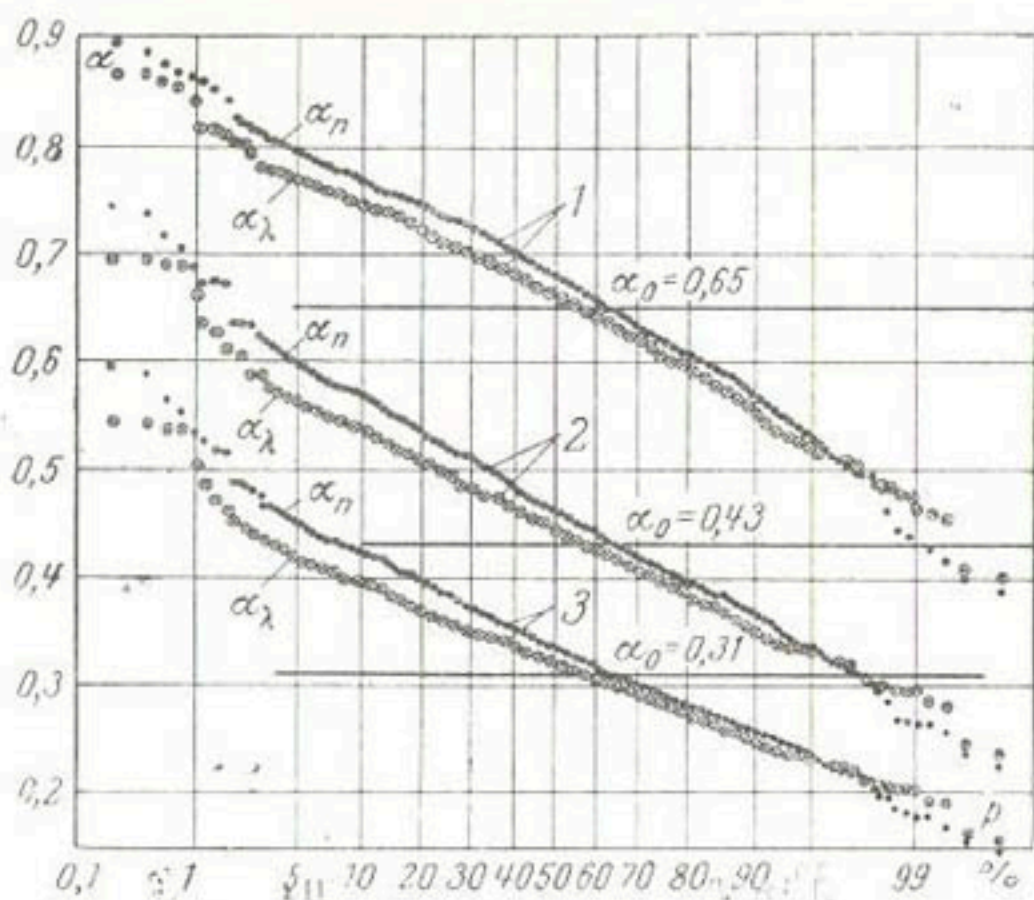


Рис. 2-21. Распределения отдачи при заданных параметрах $C_v=1,0$ и $n=25$ для разных значений емкости водохранилища.

1 — $W=2,0$; 2 — $W=0,8$; 3 — $W=0,4$.

ма-распределением Е. Г. Блохиновым [Л. 9] применен метод наибольшего правдоподобия и получены практически несмещенные оценки коэффициента изменчивости. Эти оценки были использованы для вычисления выборочных коэффициентов изменчивости в данном эксперименте и по ним статистическим методом находились отдачи водохранилища α_λ .

Для иллюстрации на рис. 2-21 показаны некоторые из распределений отдачи, полученные, исходя как из коэффициентов вариации вычисленных методом наибольшего правдоподобия, так и методом моментов. Матема-

тические ожидания распределений представлены в табл. 2-6.

Таблица 2-6

n	C _v	Отдачи при значениях W											
		0,1			0,4			0,8			2,0		
		α_0	$\bar{\alpha}_n$	$\bar{\alpha}_\lambda$	α_0	$\bar{\alpha}_n$	$\bar{\alpha}_\lambda$	α_0	$\bar{\alpha}_n$	$\bar{\alpha}_\lambda$	α_0	$\bar{\alpha}_n$	$\bar{\alpha}_\lambda$
50	0,25	0,665	0,667	0,668	0,815	0,815	0,816	0,905	0,894	0,894	—	—	—
	0,50	0,360	0,372	0,369	0,559	0,567	0,564	0,700	0,693	0,690	0,860	0,854	0,853
	1,00	—	—	—	0,265	0,279	0,270	0,380	0,399	0,390	0,585	0,600	0,591
25	0,25	0,700	0,702	0,705	0,850	0,853	0,853	0,933	0,923	0,923	—	—	—
	0,50	0,420	0,431	0,434	0,603	0,626	0,621	0,750	0,752	0,748	0,893	0,891	0,888
	1,00	—	—	—	0,310	0,338	0,322	0,430	0,464	0,446	0,659	0,673	0,656

Примечание. Значения $\bar{\alpha}_n$, приведенные в данной таблице, получены при $r=0$ с использованием датчика псевдослучайных чисел, опубликованных в книге А. Ю. Биркмана и Г. П. Воскресенского [Л. 6]. Приведенные значения $\bar{\alpha}_n$ несколько отличаются от аналогичных данных, приведенных в табл. 2-4, которые были получены при использовании для моделирования рядов датчика псевдослучайных чисел, построенного на алгоритме, опубликованном в [Л. 16] (подробнее об этих датчиках и алгоритмах см. § 1-4).

Приведенные и другие полученные в работе данные указывают на существенное приближение к истинному значению отдач, использующих оценки наибольшего правдоподобия. Наиболее эффективно использование метода наибольшего правдоподобия для рядов с высокими исходными коэффициентами вариации. Для рядов с умеренными C_v эффективность метода наибольшего правдоподобия по ликвидации смещения отдач, определяемых статистическим методом, значительно меньше. В рассмотренных рядах смещенность относительно истинной отдачи при использовании оценки наибольшего правдоподобия не превышала 4% истинной величины, что примерно в 1,5—2 раза меньше, чем смещенность отдачи при использовании моментных оценок коэффициента изменчивости.

Таким образом, для несвязных рядов введение оценки наибольшего правдоподобия для C_v практически полностью ликвидирует смещенность отдач, полученных статистическим методом.

В связных рядах, как указывалось в § 1-6, для ликвидации смещенности в первом приближении может быть использована поправка (1-67). Вычисление отдач с учетом этой поправки в данной работе не производилось. Однако представляется достаточно очевидной возможность с ее помощью привести к практически при-

емлемым пределам смещенность распределений отдач, полученных статистическим методом для связанных гидрологических рядов.

3. Сопоставим случайные погрешности рассматриваемых методов. Стандартные отклонения и коэффициенты изменчивости всех исследуемых распределений представлены в табл. 2-5. Как видим, для всех без исключения сочетаний исходных параметров стандартные отклонения и коэффициенты изменчивости отдач, полученных календарным методом, больше соответствующих

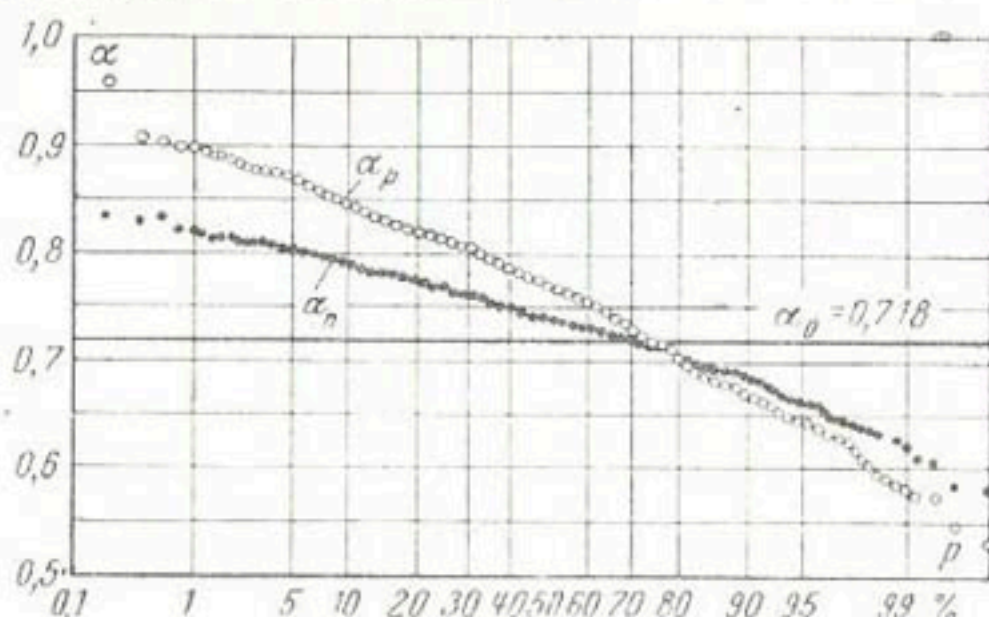


Рис. 2-22. Распределения отдач α_n и α_p при заданных параметрах $W=0,4$; $C_v=0,25$; $r=0,5$; $n=50$.

стандартных отклонений и коэффициентов изменчивости отдач, полученных статистическим методом (в 1,1—2,0 раза). Это означает, что случайные погрешности вычисления отдач статистическим методом меньше погрешностей вычисления отдач календарным методом. Последнее хорошо иллюстрируется рис. 2-22, где все точки кривых распределения отдач, полученных статистическим методом, ближе к истинному значению отдачи, чем соответствующие точки распределений отдач, полученных календарным методом. Следует отметить, что использование метода наибольшего правдоподобия для оценки C_v в несвязных рядах приводит к еще меньшим случайным рассеяниям, чем это имело место при определении отдач статистическим методом по моментной оценке C_v . Снижение стандартного отклонения распределения отдач в этом случае достигает 10—25%, т. е. преимущества статистического метода перед календарным становятся еще большими.

В заключение несколько слов об асимметричности распределений отдач, найденных календарным и статистическим методами. Асимметричность этих распределений характеризуется большим разнообразием и в существенной степени зависит от исходных параметров гидрологических рядов и принятой емкости водохранилища. Имели место как существенно положительные коэффициенты асимметрии (при больших C_v), так и существенно отрицательные (при небольших C_v); отмечено небольшое увеличение асимметричности распределений отдач с ростом коэффициентов корреляции между смежными членами ряда и уменьшением емкости водохранилища. Как правило, асимметричность распределений отдач, полученных статистическим методом, для больших исходных C_v ниже асимметричности распределений отдач, полученных календарным методом, и т. д.

Таким образом, проведенное исследование показало, что для случая, когда коэффициент корреляции между смежными членами гидрологического ряда известен и равен принятому при построении номограмм, статистический метод имеет существенные преимущества перед календарным как с точки зрения систематических ошибок и возможности ликвидации их, так и с точки зрения величины случайных ошибок и асимметричности распределений. Однако если принять, что истинный коэффициент корреляции между смежными членами ряда нам неизвестен, а известно лишь выборочное значение его, то положение может существенно измениться. Рассмотрим этот случай подробнее.

4. Прежде всего следует выяснить, какие погрешности могут появиться в расчете статистическим методом, если истинный коэффициент корреляции между смежными членами ряда неизвестен. Для решения этого вопроса был проведен следующий эксперимент: при определении отдач α_d для рядов с истинным коэффициентом корреляции $r=0$ были использованы номограммы с $r_n=-0,3$ и, наоборот, для рядов с $r=0,3$ — номограммы с $r_n=0$ и т. п. Смысл такого эксперимента очевиден. Полученные результаты иллюстрируются рис. 2-23. Он показывает, что при несовпадении истинного коэффициента корреляции r с принятым при построении номограмм r_n в распределениях отдач водохранилища, полученных статистическим методом, появляется смещение. Его величина в долях истинной отдачи будет тем большей, чем

больше разница между указанными коэффициентами корреляции, чем выше исходный коэффициент изменчивости ряда и чем меньше емкость водохранилища. Знак смещения зависит от того, какой из двух указанных коэффициентов корреляции больше. При $r > r_n$, т. е. если истинный коэффициент больше принятого, смещение положительное, при $r < r_n$ смещение отрицательное. В проведенных проработках величина смещения достигала 100 и более процентов истинной величины отдачи водохранилища.

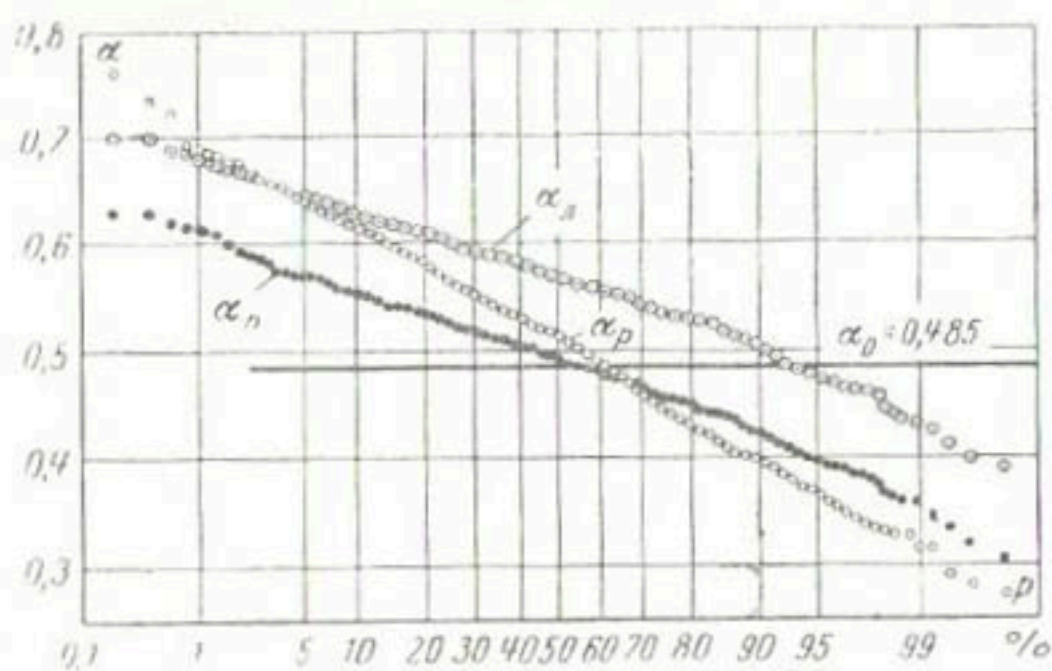


Рис. 2-23. Распределения отдачи α_d совместно с распределениями отдачи α_p и α_n при заданных параметрах $W=0,4$; $C_v=0,5$; $r=0,3$; $n=50$.

Таким образом, при неизвестном истинном значении коэффициента корреляции между смежными членами гидрологического ряда использование статистического метода может привести к весьма существенным систематическим погрешностям, тем бóльшим, чем больше разница между r_n и r^* .

Одним из возможных способов определения коэффициента корреляции между смежными членами ряда является выборочная оценка его, которая, как указывалось в § 1-5, может быть получена со сравнительно небольшой точностью, что неизбежно скажется и на точности определения отдачи статистическим способом.

* Появления систематических погрешностей в статистическом методе можно ожидать также за счет принятия постоянным отношения C_d/C_v .

Оценим, насколько снижается точность вычисления статистическим методом отдачи α_n , если в качестве коэффициента корреляции между смежными членами ряда будет использоваться его выборочное значение r^* . В этом исследовании необходимо применение всего набора программ, приведенных в § 2-3.

5. Расчет может быть проведен, исходя из двух предположений: а) коэффициент корреляции определяется по обычному уравнению (1-11) и б) коэффициент кор-

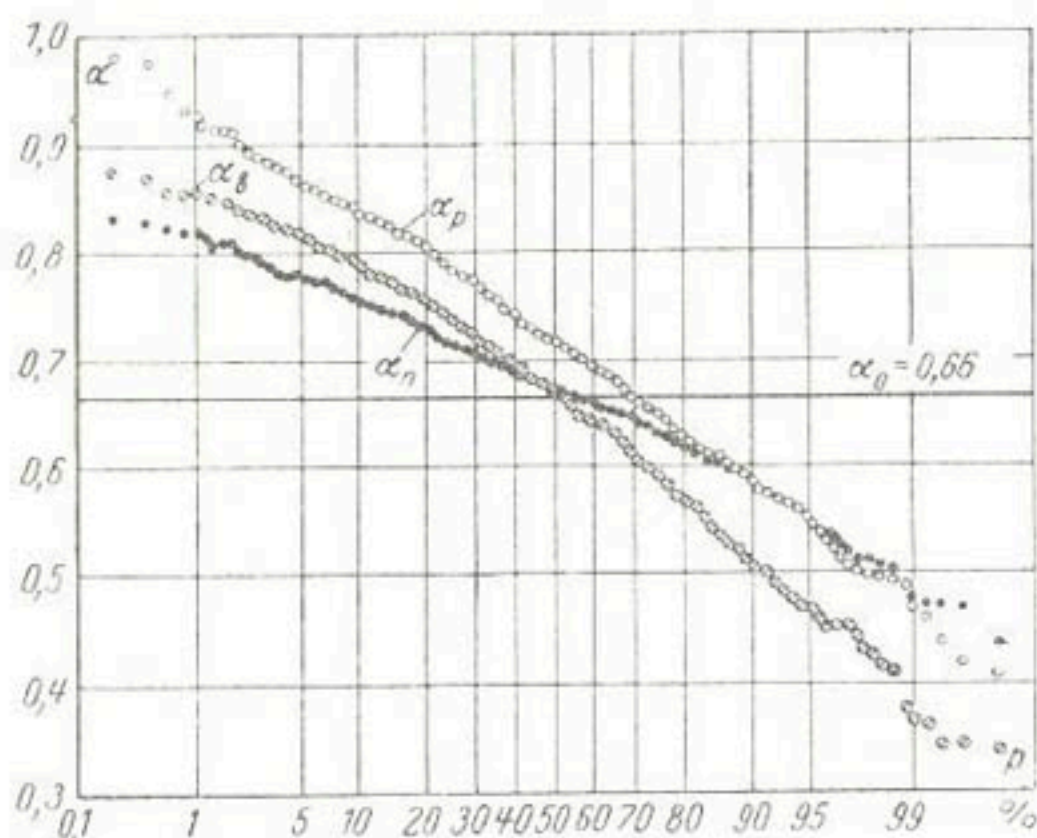


Рис. 2-24. Распределения α_n , полученных с использованием смещенной и несмещенной выборочных оценок коэффициента корреляции между смежными членами совместно с распределениями α_n и α_p при заданных параметрах $W=0,8$; $C_v=0,5$; $r=0,3$; $n=25$.

реляции определяется с учетом эмпирической поправки на смещенность (1-60). Результаты расчета иллюстрируются на рис. 2-24 и табл. 2-7 (при $W=0,8$; $r=0,3$; $n=25$).

Из табл. 2-7 видно, что использование обычной оценки коэффициента корреляции, имеющей отрицательное смещение, при прочих равных условиях приводит к несколько завышенным значениям отдачи водохранилища, в результате чего распределения отдачи имеют небольшое положительное смещение. Это смещение удастся практически полностью ликвидировать за счет введения эмпирической поправки (1-60) к обычной формуле вы-

Таблица 2-7

C_v	α_0	$\overline{\alpha_n}$	$\overline{\alpha_n}$ (по r^*)	$\overline{\alpha_p}$	σ_n	σ_n (по r^*)	σ_p
1,0	0,322	0,358	0,378	0,403	0,083	0,112	0,115
0,5	0,660	0,670	0,683	0,712	0,068	0,098	0,100

числения коэффициента корреляции (табл. 2-8 при $r=0,3$).

Во всех рассмотренных случаях рассеяние отдач водохранилища, найденных с учетом выборочного значения коэффициента корреляции, оказалось больше рас-

Таблица 2-8

n	C_v	W	α_0	$\overline{\alpha_p}$	$\overline{\alpha_n}$ (по $\hat{r}$)	$\overline{\alpha_n}$	$\sigma(\alpha_p)$	$\sigma(\alpha_n)$ (по $\hat{r}$)	$\sigma(\alpha_n)$
50	0,5	0,4	0,485	0,503	0,480	0,489	0,084	0,075	0,053
		0,8	0,600	0,634	0,594	0,600	0,088	0,082	0,051
		2,0	0,770	0,831	0,764	0,769	0,078	0,073	0,044
	1,0	0,4	0,180	0,216	0,192	0,194	0,058	0,060	0,047
		0,8	0,280	0,325	0,287	0,294	0,081	0,079	0,059
		2,0	0,455	0,534	0,462	0,470	0,109	0,098	0,068
25	0,5	0,4	0,540	0,573	0,546	0,552	0,098	0,101	0,074
		0,8	0,660	0,712	0,659	0,670	0,100	0,107	0,068
		2,0	0,825	0,906	0,812	0,826	0,080	0,089	0,052
	1,0	0,4	0,220	0,273	0,250	0,249	0,087	0,092	0,068
		0,8	0,322	0,403	0,352	0,358	0,115	0,116	0,083
		2,0	0,520	0,639	0,533	0,545	0,142	0,138	0,093

сеяния отдач, найденных при известном истинном коэффициенте корреляции. Однако для широкого диапазона исходных C_v ряда эти характеристики оказываются все же меньше аналогичных характеристик отдач, полученных календарным методом. Только для очень высоких C_v характеристики рассеяния отдач, полученных статистическим и календарным методами, становятся примерно одинаковыми и большими, т. е. оба метода при больших C_v характерны высокими случайными погрешностями. Однако и здесь, учитывая наличие в календарном методе больших систематических погрешностей, предпочтение должно быть отдано статистическому методу.

В заключение отметим влияние на результаты расчета статистическим методом еще одного параметра, значение которого в описанном эксперименте принималось известным. Речь идет об отношении коэффициентов асимметрии и вариации гидрологического ряда, которое принималось равным 2. Если использовать несмещенную выборочную оценку отношения коэффициентов асимметрии и вариации для определения отдачи водохранилища по номограммам на рис. 2-12—2-15, то, видимо, случайные ошибки определения отдачи возрастут, но при этом будет ликвидирована возможность появления больших систематических ошибок.

Глава третья

О ЦИКЛИЧНОСТИ ГОДОВОГО СТОКА РЕК И УЧЕТЕ ЕЕ В РАСЧЕТАХ МНОГОЛЕТНЕГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

3-1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Анализ гидрологических рядов привел многих исследователей к выводу о том, что колебаниям речного стока присуща тенденция к образованию группировок многоводных и маловодных лет. Эта тенденция проявляется в том, что периоды с пониженной или повышенной против нормы водностью в ряде случаев продолжают в течение нескольких лет. Продолжительность таких периодов и степень отклонения водности от средней, тем более на разных реках, не остаются постоянными с течением времени. Указанную тенденцию к образованию группировок принято называть цикличностью колебаний стока рек.

В дальнейшем под циклом колебаний стока будем понимать совокупность двух группировок лет с повышенной и пониженной водностью, причем каждую из этих группировок будем называть фазой или полуциклом повышенной или пониженной водности.

Циклические изменения годового стока рек являются предметом исследования многих ученых в СССР и за рубежом в течение довольно длительного периода времени. Библиография работ по этому вопросу обширна. В этих работах, кроме констатации циклов в изменении водности отдельных рек, делаются попытки рассмотреть связи циклов водности рек с циклами различных гео- и гелиофизических процессов, а также даны сравнения циклов водности различных рек, расположенных как в пределах сравнительно небольших районов, так и на большом удалении друг от друга. Эти работы выявили общие закономерности циклических колебаний стока рек, а в некоторых случаях и возможные причины их и

вызвали большой интерес у гидрологов и водохозяйственников к этой проблеме. Однако причины наблюдаемых в природе циклических колебаний стока рек пока еще нельзя считать окончательно выясненными.

Одной из возможных и, видимо, главных причин образования группировок в колебаниях стока рек являются инерция и наблюдающаяся цикличность в колебаниях геофизических (циркуляционных), гелиофизических и приливообразующих процессов. Даже краткий обзор литературы по вопросам цикличности гелиофизических процессов и особенно по выявлению их связей с различными синоптико-циркуляционными и гидрологическими явлениями потребовал бы значительного увеличения объема настоящей работы. Поэтому мы сошлемся здесь только на книгу М. С. Эйгенсона [Л. 106], в которой дан достаточно подробный обзор литературы по указанному вопросу и приведена обширная библиография. Одним из основных выводов рассмотренных М. С. Эйгенсоном работ является то, что отмечающиеся солнечно-циркуляционно-гидрологические связи не являются одинаковыми для разных географических районов и различных эпох. Указанные связи не являются функциональными. Коэффициенты корреляции, характеризующие стохастическую связь, как правило, весьма невелики. Механизм связей между циклическими изменениями показателей солнечной активности, циркуляцией атмосферы и гидрологическими явлениями до сих пор в большинстве случаев остается нераскрытым.

Второй и при этом, видимо, менее спорной причиной цикличности в колебаниях стока рек является регулирующая роль водосбора рек. В качестве регуляторов на водосборе могут выступать озера и подземные резервуары, накапливающие запасы воды в многоводные годы и сбрасывающие их в последующие маловодные годы. Ярko выраженная цикличность колебаний стока крупных озерных рек подтверждает правильность этого объяснения причин цикличности. Однако наличие группировок лет одинаковой водности на реках засушливых районов страны, на которых сток полностью прекращается в сухие сезоны года, заставляет думать, что эта причина цикличности не является единственной. Видимо, первая из отмеченных причин для рек засушливых районов более правдоподобна.

Высказываются также соображения о том, что наличие неправильной цикличности в колебаниях стока является лишь свойством, присущим любым случайным рядам. В работе [Л. 5], например, получена даже прямая зависимость средней продолжительности группировок стока в случайных искусственных рядах от коэффициента корреляции между их смежными членами.

В известных работах Е. Е. Слуцкого [Л. 93] показано, что циклические колебания могут быть следствием суммирования нескольких случайных рядов. Этот вывод может быть, видимо, распространен и на сток крупных рек, так как последний образуется в результате слияния нескольких притоков, условия стокообразования на которых могут отличаться друг от друга. С другой стороны, годовой сток реки можно рассматривать как сумму стоков за отдельные (например, сезонные, месячные) интервалы времени или как сумму отдельных генетических составляющих стока. И в последнем случае, исходя из выводов работ Е. Е. Слуцкого, можно предположить появление циклических колебаний годового стока рек как следствие суммирования отдельных генетических составляющих его или величин стока, проходящих за сезонные или месячные интервалы времени. Аналогично этому циклические изменения различных стокообразующих факторов, если отсутствует физическое объяснение причин цикличности их, также можно считать следствием суммирования их сезонных или других составляющих. В тех же случаях, когда физическая сущность явления цикличности представляется достаточно ясной, объяснение появления его только за счет суммирования случайных рядов нельзя считать достаточным, и в этом случае цикличность, видимо, нужно рассматривать как следствие наложения различных причин.

Резюмируя все сказанное выше, можно отметить, что в зависимости от тех или иных характеристик бассейна влияние и роль перечисленных возможных причин цикличности в колебаниях стока рек могут быть различными, а в общем виде циклические колебания стока рек можно считать результатом воздействия всех указанных причин.

В течение ряда лет усилия многих исследователей были направлены на выявление продолжительности циклов колебаний стока рек и стокообразующих факторов. Наиболее простым способом выявления циклических ко-

лебаний какой-либо величины, широко распространенным в СССР [Л. 49] и за рубежом, является способ скользящих средних за n лет. В этом методе сглаживаются резкие колебания за отдельные годы, что дает возможность выявить тенденцию многолетних колебаний рассматриваемой величины. При этом, однако теряется определенность границ между фазами циклических колебаний и, более того, наблюдается даже смещение их, вплоть до сдвига на целую фазу [Л. 4].

Значительно более четкое и наглядное представление о циклических колебаниях без смещения границ между фазами циклов большой и малой продолжительности получается при применении разностных интегральных кривых или суммарных кривых отклонений от середины [Л. 4, 70 и др.]. Основным недостатком интегральных кривых является то, что они позволяют судить лишь качественно о циклах в колебаниях какой-либо величины или о совпадении циклов в колебаниях нескольких величин, что накладывает определенный отпечаток субъективизма на выводы.

В [Л. 99, 100] и некоторых других, более ранних работах для выявления цикличности стока рек использован анализ периодограмм. В работе [Л. 28] и др. для этой цели используются автокорреляционные функции, а в работах [Л. 47, 73] их преобразование — спектральные функции. За показатель наличия связи между цикличностью стока реки и цикличностью какого-либо стокообразующего фактора или между цикличностями стока нескольких рек принимается совпадение продолжительностей указанных циклов. При этом не принимается во внимание амплитуда колебаний, которая в разных процессах может быть весьма различной. Кроме того, в воздействии каждого геофизического процесса на процесс колебаний речного стока может быть отмечена большая или меньшая инерция, так как могут быть сдвиги фаз между циклами стокообразующих факторов и стока рек. В этом случае даже при наличии одинаковой продолжительности циклов установлению тесноты связи между процессами должно предшествовать выявление указанного сдвига фаз.

Аналогичные проработки требуются и при сопоставлении цикличностей стока различных рек для выявления закономерностей асинхронности в колебаниях, так как совпадение показателей цикличности двух рек еще

не означает синхронности колебаний их стока. В работе [Л. 13] для последнего случая использован аппарат взаимных корреляционных функций. Эти же функции могут быть использованы также для выявления сдвига фаз и тесноты связи между колебаниями стока и стокообразующих факторов. Более удобным аппаратом для этой цели, видимо, являются взаимные спектральные функции, получаемые на основе взаимных корреляционных функций.

Следует отметить, что в большинстве указанных выше работ осталась невыясненной точность сделанных тем или иным способом оценок показателей цикличности, что ставит под сомнение многие выводы этих работ. Поэтому в настоящей работе, кроме описания метода спектрального анализа, использованного в институте Энергосетьпроект для оценки цикличности стока рек, также рассматриваются некоторые вопросы точности сделанных оценок.

Настоящая работа не претендует на окончательные выводы по рассматриваемым вопросам. В ней лишь изложена позиция авторов в вопросе выявления цикличности стока рек и приведены некоторые результаты достаточно обширных и трудоемких проработок, которые были выполнены в течение последних нескольких лет в институте Энергосетьпроект и которые, видимо, будут полезны другим исследователям, занимающимся этой проблемой.

3-2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ И ВЫБОР ГИПОТЕЗЫ

При исследовании многолетних колебаний стока рек ввиду крайне непродолжительного периода наблюдений построение автокорреляционной функции процесса основывается на допущении эргодичности процесса стока.

Для вычисления коэффициентов корреляции в корреляционной функции применяется следующее уравнение:

$$r_{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{n-\tau} (x_i - \bar{x}_i) (x_{i+\tau} - \bar{x}_{i+\tau})}{\sigma_i \sigma_{i+\tau} (n - \tau - 1)}. \quad (3-1)$$

Здесь: n — число членов исходного ряда наблюдений; τ — порядок сдвига, изменяющийся от 0 до m ($\tau = 0, 1, 2, \dots, m$); x_i — расходы ряда, включающие значения от $x_i = x_1$ до $x_i = x_{n-\tau}$; $\bar{x}_i$ — среднее значение этого ряда;

$x_{i+\tau}$ — расходы ряда, включающие значения от $x_{1+\tau}$ до x_n ; $\bar{x}_{i+\tau}$ — среднее значение этого ряда; σ_i и $\sigma_{i+\tau}$ — стандарты соответствующих рядов.

Стандартная ошибка вычисления отдельных коэффициентов корреляции в корреляционной функции может весьма приближенно определяться по формуле

$$\sigma_r = \frac{1 - r_\tau^2}{\sqrt{n - \tau - 1}}. \quad (3-2)$$

Из этой формулы видно, что с увеличением τ увеличивается σ_r . По свидетельству Э. Хеннана [Л. 98] «... последние r_τ практически не будут давать никакой информации. На практике должно быть принято решение, когда следует урезать корреляционную функцию...» В дальнейшем вопрос о неравнозначности отдельных членов корреляционной функции будет рассмотрен особо. Здесь же следует подчеркнуть, что наибольшего доверия заслуживает, видимо, некоторое количество первых членов корреляционной функции гидрологического ряда. Ввиду этого выявление цикличности стока особенно большой продолжительности по графикам корреляционной функции ряда следует производить достаточно осторожно. В этой связи следует отметить, что уделяемое в работе [Л. 28] большое внимание высоким коэффициентам корреляции, появляющимся в автокорреляционной функции при больших τ , и принятие этих коэффициентов за показатель цикличности большой продолжительности вряд ли можно считать обоснованными. Кроме увеличения погрешности вычисления их, возрастание коэффициентов корреляции при больших τ по свидетельству Е. Е. Слуцкого [Л. 93] «... есть естественное следствие уменьшения числа членов ряда, из которых они могли быть вычислены».

Нужно также отметить, что при выборе наиболее приемлемой схемы математического описания процесса стока рек нельзя ограничиться только исследованием стандартных ошибок коэффициентов корреляции, приближенно оцениваемых уравнением (3-2). Так, в работах [Л. 98, 127] и др. было показано, что первый коэффициент в корреляционной функции (коэффициент корреляции между смежными членами), вычисленный по формуле (3-1), имеет систематическую погрешность, кото-

рая приближенно равна $\Delta r_1 = 1/n$ (более точная поправка для рядов с гамма-распределением дана в § 1-5). Распределение этого коэффициента близко к нормальному только при небольшой абсолютной величине его. Стандартная ошибка вычисления этого коэффициента (см. § 1-5) в гораздо большей степени зависит от его абсолютной величины, чем это дает уравнение (3-2).

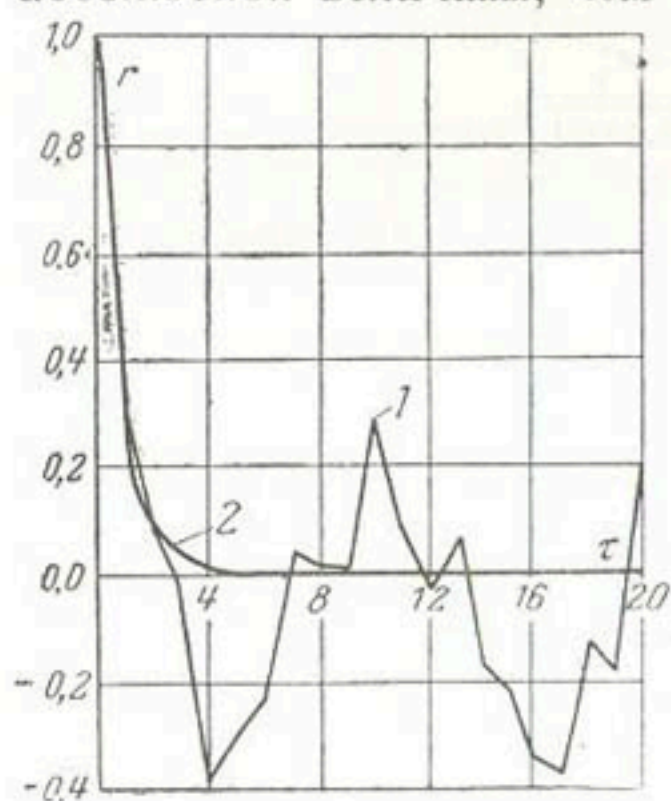


Рис. 3-1. Автокорреляционная функция гидрологического ряда р. Нарын (Уч-Курган) за 1916—1955 гг.

1 — эмпирические данные; 2 — простая цепь Маркова.

раниченному количеству данных наблюдений вопросы оценки отдельных членов этих функций приобретают существенное значение. Из всего сказанного следует, что с увеличением порядка сдвига τ точность коэффициентов значительно снижается. Иллюстрация автокорреляционной функции дана на рис. 3-1.

Приемы установления искомых характеристик цикличности по такого вида функциям сложны и включают элемент субъективности.

Как отмечалось, более удобными и надежными являются спектральные функции, которые могут быть получены путем некоторого преобразования описанных выше корреляционных функций. Спектр стационарной случайной функции описывает распределение дисперсий по различным частотам. Если откладывать по оси ординат среднюю плотность дисперсии, т. е. дисперсию, приходя-

Систематическая погрешность вычисления второго члена автокорреляционной функции нормально распределенных рядов по формуле (3-1), по данным Хеннана [Л. 98], увеличивается вдвое (по сравнению с ошибкой первого члена) и может быть приближенно оценена поправкой $\Delta r_2 = 2/n$. Последняя становится особенно существенной при небольших n . Распределение несимметрично относительно своего среднего.

Таким образом, при построении автокорреляционных функций по ог-

щуюся на единицу длины данного интервала частот, то эта кривая будет изображать плотность распределения дисперсий по частотам спектра, а сама функция будет называться спектральной плотностью. Спектральная плотность стационарного случайного процесса является характеристикой, описывающей его частотный состав.

В дальнейшем под спектральной плотностью будем подразумевать нормированную спектральную плотность, т. е. спектральную плотность, отнесенную к дисперсии случайной функции. Для ряда с числом членов n , стремящимся к бесконечности, выражение для определения спектральной плотности имеет вид [Л. 14]:

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r_{\tau} \cos \frac{2\pi\tau}{T} d\tau. \quad (3-3)$$

На конечном интервале времени при изменении τ от 1 до m можно воспользоваться выражением, приведенным в работе А. С. Моница [Л. 62]:

$$S \approx \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{\tau=1}^m r_{\tau} \cos \frac{2\pi\tau}{T} \right]. \quad (3-4)$$

Зависимость величины S от показателя времени T , выраженного в годах, и будем называть для краткости спектральной функцией ряда или просто спектром. Спектры стоковых рядов вычислялись в работах [Л. 47, 73].

В работе [Л. 73] было показано, что скачки спектральных функций, вычисленных для нескольких рек Средней Азии, имеют место при одной и той же частоте (периодичности). На основании этого факта был сделан предварительный вывод о том, что на этих реках имеет место циклическая синхронность в колебаниях стока. Кроме того, в указанной работе было отмечено, что эта периодичность совпадает с периодичностью индексов солнечной активности.

В работе [Л. 47] были исследованы другие реки Советского Союза, и в результате анализа спектральных функций были выявлены районы с синхронными колебаниями стока рек. Для каждого района были определены периоды, в течение которых был отмечен максимальный скачок спектральной функции (период первой гармоники), а также периоды еще трех скачков спектральной функции, названных автором периодами второй, третьей

а максимальной по времени гармоник. Вопросы точности оценок спектральных плотностей в работах [Л. 47, 73] не рассматривались. Выражение (3-4) предполагает одинаковую точность определения отдельных коэффициентов корреляции в корреляционной функции. Как было указано выше, для нашего случая это условие не выполняется, особенно если величина m мало отличается от длины ряда n . Ввиду этого приближенное выражение (3-4) дает недостаточно точные значения спектральной плотности, которые в некоторых случаях становятся отрицательными, в то время как спектральная плотность, представляющая собой распределение дисперсий, может быть равна нулю лишь в пределе. Поэтому в уравнение (3-4) целесообразно ввести специальный множитель, который увеличивал бы влияние первых, наиболее точных членов корреляционной функции и уменьшал влияние последних [Л. 98].

С учетом сказанного расчетное выражение для построения спектральной функции процесса стока имеет вид:

$$S = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{\tau=1}^m \left(1 - \frac{\tau}{m+1} \right) r_{\tau} \cos \frac{2\pi\tau}{T} \right]. \quad (3-5)$$

Из осторожности в выражении (3-5) следует ограничиться значениями $m \leq \frac{n^*}{2}$. Однако очень малые m выбирать также не следует, так как при малых m разложение (3-5) получается очень грубым.

Рассмотрим различные возможные виды спектральной функции. Нормированный спектр чисто случайного процесса является прямой линией, параллельной оси абсцисс. Эта форма спектра часто называется «белым шумом» по аналогии со спектром видимого света.

Если на каждое значение временного ряда оказывает влияние только предшествующее (простая цепь Маркова), то спектр искривляется и амплитуда спектра будет постоянно возрастать с увеличением периода (с уменьшением частоты). Эта форма спектра часто называется «красным шумом». Его вид зависит от величины коэффициента корреляции между смежными членами ряда.

* Следует заметить, что если $m=n$, то спектр идентичен получаемому классическим гармоническим анализом или периодограмм-анализом Шустера.

Если во временных рядах содержится цикличность синусоидального вида, то спектр ряда будет содержать относительно резкий пик на соответствующей длине волны или частоте (периоде). В таком случае необходимо убедиться в значимости этого пика (об этом см. ниже), а затем выделить эту цикличность известными методами гармонического анализа и учесть ее при моделировании гидрологического ряда. Здесь эти вопросы рассматриваться не будут; об этом см. работы И. В. Хомерики [Л. 100] и др.

Если в ряду есть постоянная периодичность, имеющая несинусоидальную форму, то спектр будет содержать не только вершину, соответствующую основной длине волны, но и другие вершины на длинах волн, соответствующих одной или нескольким высшим гармоникам основной длины волны.

Если имеется квазипериодичность или нерегулярный ритм, то на спектре появится относительно широкий бугор (горб), распространяющийся на соответствующий широкий диапазон длин волн. В последних случаях часто оказывается вполне достаточным для учета цикличности, особенно нерегулярной, представление процесса стока процессом с авторегрессией высокого порядка (многозвенные марковские цепи).

Спектральные функции гидрологических рядов, полученные с помощью уравнения (3-5), иллюстрируются рис. 3-2. Представленная на рис. 3-2 и вычисленные в институте Энергосетьпроект спектральные функции стоковых рядов многих других рек характеризуются наличием скачков различной интенсивности, относящихся к различным частотам (различная периодичность). Однако в силу недостаточной ясности физической природы цикличности стока рек появление скачков конечной высоты в спектральных функциях, вообще говоря, еще не дает достаточных оснований для утверждения о существовании синусоидальной компоненты. В последнем случае потребовалось бы введение гармонической составляющей или использование схем авторегрессии высокого порядка. Указанные скачки могут быть результатом только случайных причин. Поэтому по свидетельству [Л. 92] проблема различения пиков в периодограмме или скачков в спектральной функции «... есть по существу проблема об установлении на основе значения отрезка отдельной реализации процесса следующего факта: со-

держит ли этот процесс действительно гармоническую компоненту с некоторой частотой или же «игра случайных факторов» привела к появлению в данном отрезке реализации компоненты со свойствами, близкими к такой гармонической функции». Проблема эта представляется достаточно сложной, так как еще Е. Е. Слуцкий [Л. 93] показал, что «...любые корреляционные случайные последовательности, в том числе образованные сколь-

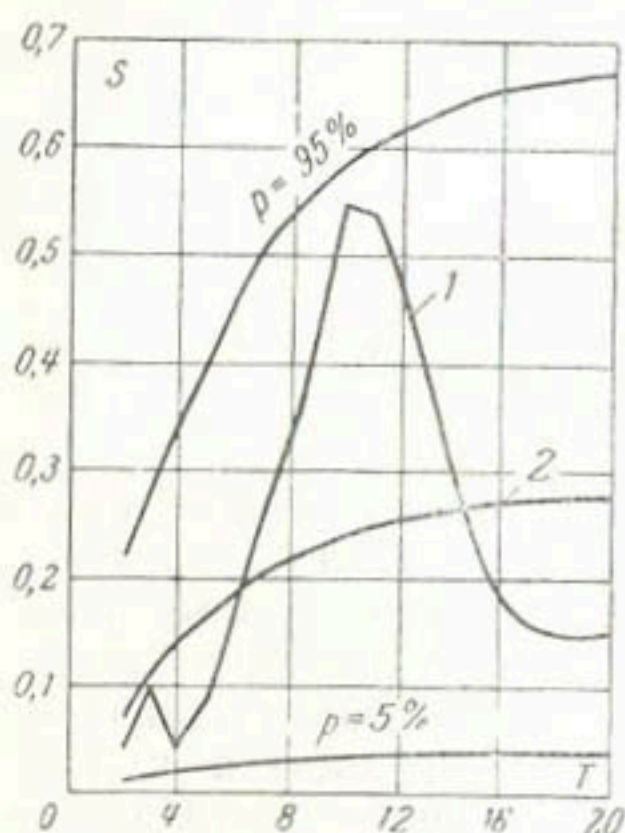


Рис. 3-2. Спектральная функция гидрологического ряда р. Нары (Уч-Курган) за 1916—1955 гг.

1 — эмпирические данные; 2 — простая цепь Маркова.

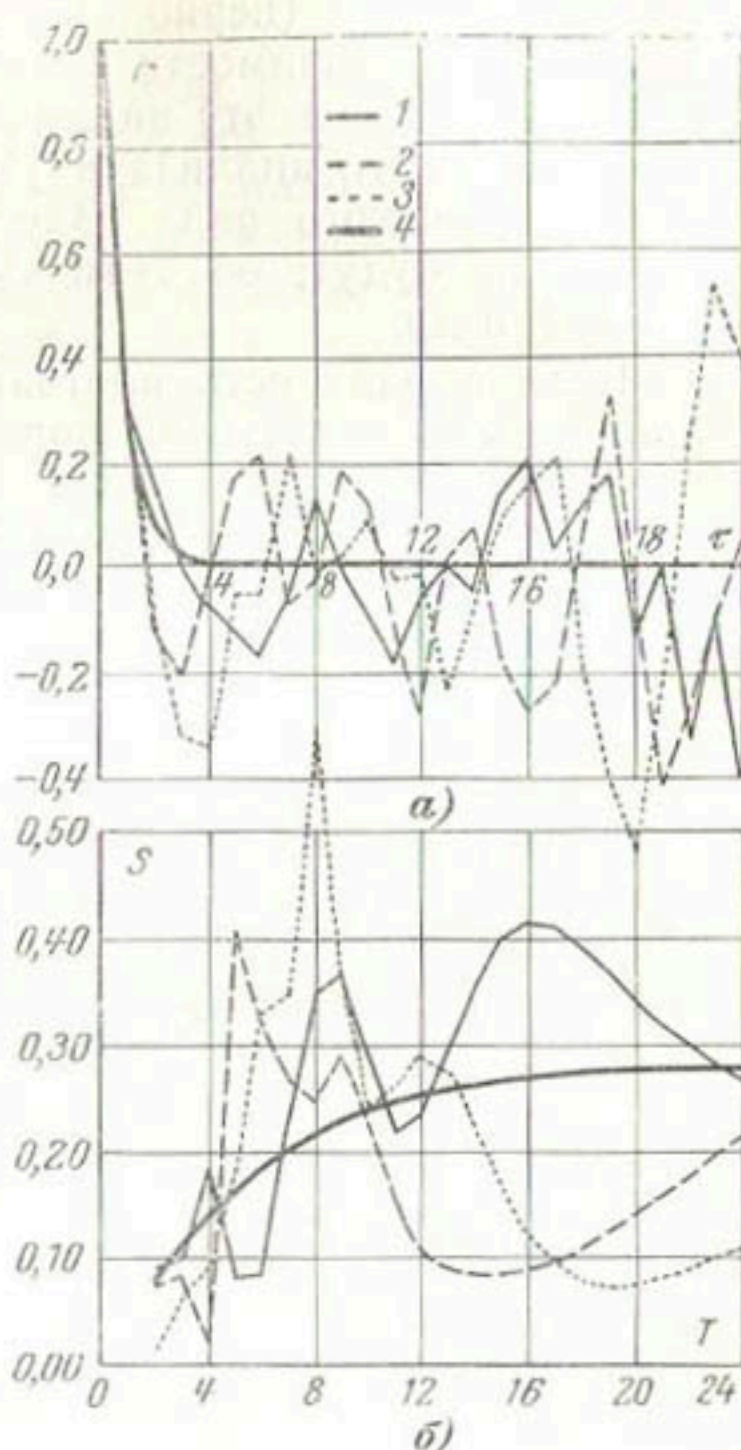


Рис. 3-3. Автокорреляционная (а) и спектральная (б) функции некоторых случайных выборок с $r_1 \approx 0,3$ и простой цепи Маркова с $r_1 = 0,3$.

1, 2, 3 — автокорреляционные и спектральные функции случайных выборок; 4 — простая цепь Маркова.

зящим суммированием последовательностей взаимно независимых случайных величин, могут давать реализации, сходные с гармоническими функциями». Более того, в [Л. 93] была доказана теорема о способности случайных, но сильно коррелированных последовательностей прибли-

жаться (при некоторых условиях) к гармонической функции на протяжении сколь угодно большого числа периодов с любым приближением и вероятностью, сколь угодно близкой к единице [Л. 92]. Поэтому прежде чем рассматривать значимость скачков спектральных функций стоковых рядов, исследуем спектральные функции использованных ранее случайных выборок с гамма-распределением.

В качестве примера рассмотрим простую марковскую совокупность из 500 выборок по 50 членов в каждой. Исходный коэффициент вариации ряда берем равным 0,5, а коэффициент корреляции между смежными членами $r_1=0,3$. Истинный вид корреляционной и спектральной функций совокупности известен; он представлен на рис. 3-3. Там же приведены некоторые из корреляционных и спектральных функций случайных выборок. На спектрах искусственных выборок можно отметить такие же, как и на спектрах стоковых рядов, ярко выраженные пики, которые, являются следствием лишь случайных причин и сравнительно небольшой длины выборок.

Для того чтобы получить приближенный критерий значимости скачка спектральной функции, для каждой из 500 выборок были подсчитаны отношения значений спектральной плотности максимального скачка спектральной функции выборки S_2 к соответствующему значению спектральной функции простой цепи Маркова S_1 исходной совокупности. Затем было построено эмпирическое распределение величин S_2/S_1 . При истинном отношении, равном единице, среднее отношение указанного распределения оказалось равным 2,1.

Максимальное отношение S_2/S_1 в рассмотренных случайных выборках достигало величины 5,3; минимальное отношение было несколько меньше единицы. Стандартное отклонение эмпирического распределения оказалось равным $\sigma=0,65$; последнее распределение имеет положительную асимметрию. При $p=95\%$ отношение $S_2/S_1=3,3$. Превышение именно этой величины при индивидуальной оценке спектральной функции выборки должно, видимо, свидетельствовать о значимости скачка спектральной функции. При $p=99\%$ отношение $S_2/S_1=4,1$. Превышение этой величины при индивидуальной оценке спектральной функции выборки, видимо, должно свидетельствовать об очень высокой значимости скачка спектральной функции.

Исходя из проведенного статистического эксперимента для рядов, не слишком отличающихся от рассмотренных, выбор гипотезы можно производить в первом приближении в соответствии со следующим условием: рассматриваемый процесс является простой марковской последовательностью, если $S_{2 \text{ макс}} \leq 3,3S_1$.

Более надежные выводы в задаче различения пиков спектра и выборе гипотезы для рассматриваемого процесса дают исследования Тьюки [Л. 107, 110]. Согласно этим исследованиям оценка спектра (3-5) является несмещенной и распределяется как отношение χ^2 к числу степеней свободы ν , где

$$\nu = \frac{2n - \frac{m}{2}}{m}. \quad (3-6)$$

Для определения доверительного интервала каждой оценки спектра можно воспользоваться следующими значениями распределения χ^2/ν [Л. 110]:

Степени свободы	Вероятность, %			
	1	5	95	99
2	0,010	0,052	3,000	4,605
3	0,038	0,117	2,605	3,782
4	0,074	0,178	2,372	3,319
5	0,111	0,229	2,214	3,017
6	0,145	0,272	2,099	2,802
8	0,206	0,342	1,938	2,511
10	0,256	0,394	1,831	2,321
15	0,349	0,484	1,666	2,038
20	0,413	0,543	1,570	1,878
50	0,594	0,695	1,350	1,523
100	0,701	0,779	1,243	1,358
1 000	0,899	0,928	1,075	1,107

Значение χ^2/ν при найденной величине степеней свободы и принятом процентном уровне значимости рассматривается как постоянный переходный коэффициент, на который умножаются ординаты спектра «красного шума» при всех значениях T . В качестве примера на рис. 3-2 нанесены 5%- и 95%-ные доверительные интервалы спектра простого марковского процесса, соответствующего коэффициенту корреляции r_1 гидрологического ряда р. Нарын. Рассмотрим для этого ряда последовательность выбора гипотезы.

Если считать отвергнутой гипотезу о том, что годовой сток рек есть последовательность независимых случайных величин (см. [Л. 28, § 1-3 и др.]), представляется

необходимым рассмотреть вопрос различения следующих двух альтернативных гипотез:

A_1 — анализируемый процесс является коррелированным стационарным случайным процессом с достаточно быстро убывающей корреляционной функцией (простой марковский процесс);

A_2 — анализируемый процесс содержит гармонические компоненты или компоненту с большим временем корреляции (сложный марковский процесс).

Гипотезе A_1 соответствуют процессы с плавно изменяющейся спектральной плотностью. Гипотезе A_2 соответствуют процессы, имеющие в спектральной плотности резкие пики конечной или бесконечной высоты. Если в первом случае появление скачков в оценке S носит случайный характер и связано с неточностью оценки, то во втором наличие скачков не случайно, а вызвано самим существом явления.

Гипотезу A_1 будем считать нулевой гипотезой. Для выявления соответствия исследуемого процесса нулевой гипотезе сопоставим спектр процесса A_1 и его 5%- и 95%-ные доверительные интервалы с исследуемым спектром (см. рис. 3-2).

На рис. 3-2 при сопоставлении спектра исследуемого процесса с 5%- и 95%-ными доверительными интервалами процесса A_1 обнаружилось, что ни одна из сделанных спектральных оценок процесса стока не отклоняется на величину статистической значимости от спектра «красного шума». Поэтому можно сделать вывод, что для данного процесса гипотеза A_1 более правдоподобна, чем A_2 . Кроме того, аналогичный вывод можно сделать, даже исходя из нашего приближенного критерия (см. выше). Хотя при $T=10$ на спектре на рис. 3-2 отмечается пик, но величина его $S_2(T_{10}) < 3,3S_1(T_{10})$, т. е., исходя из приближенного критерия, гипотеза A_1 более правдоподобна.

Данные по другим рекам свидетельствуют, что только для 15 из 83 рек гипотезе A_2 может быть отдано предпочтение в соответствии с приведенным выше приближенным критерием различения, и только для озерных рек эта гипотеза имеет высокую значимость. Для остальных рек более правдоподобной является гипотеза A_1 , т. е. описание стоковой последовательности простой цепью Маркова.

Весьма близкие результаты получены по критерию Тьюки. В соответствии с ним только для 25 рек из 83

при 95%-ном уровне значимости гипотезе A_2 может быть отдано предпочтение. Для остальных рек также более правдоподобной является гипотеза A_1 . Кроме того, при 95%-ном уровне появление только одного значимого пика в спектральной функции, состоящей хотя бы из 20 оценок спектра, еще не свидетельствует надежно о предпочтительности гипотезы A_2 . Только один значимый скачок в этом случае может явиться также следствием случайных причин.

Для доказательства значимости только одного максимального скачка в спектральной функции следует использовать более жесткий критерий (см. [Л. 110])

$$p_d = \frac{100m + p_t}{m + 1}.$$

Здесь: p_d — необходимый уровень значимости максимальной оценки спектральной функции; p_t — уровень значимости, принимаемый для всех оценок спектра; m — количество рассматриваемых оценок спектральной функции.

Если $p_t = 95\%$, а $m = 20$, то p_d получается равным 99,75%, т. е. уровень значимости одной максимальной оценки спектра должен быть очень высоким. В рассматриваемых нами рядах практически все максимальные скачки спектральных функций не являются значимыми.

Приведенные данные не могут явиться основанием для окончательного выбора гипотезы в связи с отсутствием в настоящее время каких-либо физических обоснований появления на реках циклов различной продолжительности. Поэтому приведенные методы различения гипотез, видимо, можно использовать для предварительных оценок. Они не должны исключать поисков любых других доказательств наличия скрытых периодичностей в колебаниях стока рек, особенно тех, которые дают физическое или генетическое обоснование их.

Рассмотрим один из ряда возможных способов доказательства наличия цикличности в стоковых рядах — на основе группового анализа.

3.3. ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ЦИКЛИЧНОСТИ СТОКА РЕК

Основные приемы группового анализа были рассмотрены в гл. 1. По гидрологическим рядам 83 рек со средней продолжительностью 66 лет были вычислены

различные статистические характеристики. Характеристика каждой реки принята в качестве случайной переменной, а совокупность их рассматривалась как некоторая выборка, пригодная для построения кривой распре-

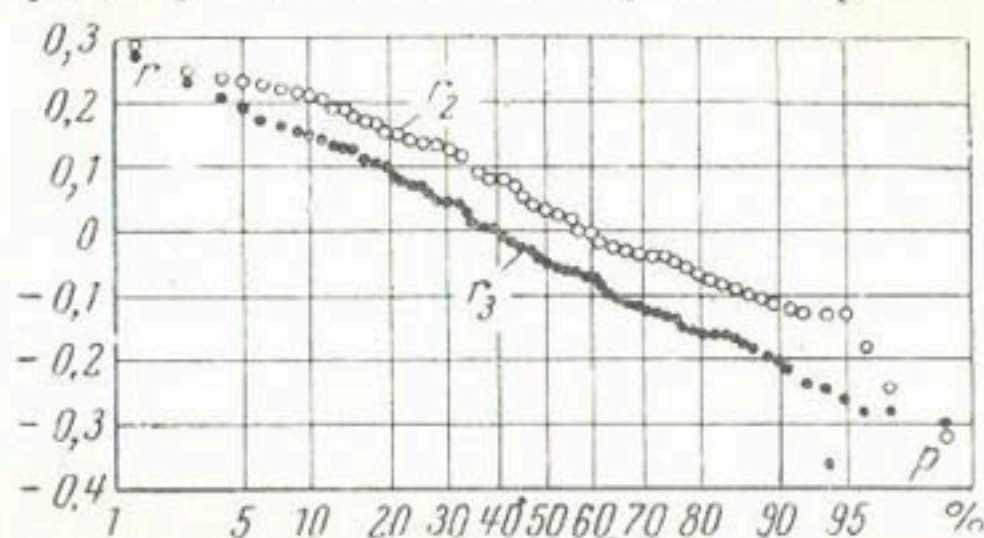


Рис. 3-4. Эмпирические распределения коэффициентов корреляции r_2 и r_3 78 рек СССР и мира.

деления данной характеристики. В гл. 1 таким способом исследовался коэффициент корреляции между смежными членами ряда, причем из 83 рек были выделены реки, принадлежащие двум районам: 1) европейскому (число рек 41 со средней длиной ряда 72 года) и 2) казахстанскому (число рек 25 со средней длиной ряда 46 лет). По тем же группам рек были проведены исследования отдельных членов их корреляционных функций. Для каждого члена корреляционной функции $r_2, r_3, \dots, r_{25}$ были построены кривые распределения и вычислены их статистические параметры.

Таблица 3-1

r_τ	Параметры распределений для различных групп рек							
	83 реки				78 рек			
	$\bar{r}_\tau$	$\sigma(r)$	ϵ_r	$C_s(r)$	$\bar{r}_\tau$	$\sigma(r)$	ϵ_r	$C_s(r)$
r_1	0,298	0,129	0,014	0,38	0,282	0,111	0,013	-0,21
r_2	0,048	0,139	0,015	0,17	0,037	0,127	0,014	-0,23
r_3	-0,032	0,137	0,015	0,12	-0,036	0,136	0,015	0,14
r_4	0,047	0,148	0,016	-0,06	-0,055	0,146	0,017	-0,09
r_5	0,010	0,122	0,013	-0,53	0,005	0,124	0,014	-0,46
r_6	0,013	0,150	0,016	0,44	0,004	0,149	0,017	0,57
r_7	-0,025	0,136	0,015	-0,02	-0,032	0,136	0,015	0,08
r_8	-0,116	0,146	0,016	-0,07	-0,119	0,147	0,017	-0,06
r_9	-0,069	0,159	0,017	-0,42	-0,060	0,156	0,018	-0,43
r_{10}	-0,058	0,138	0,015	-0,31	-0,050	0,135	0,015	-0,29
r_{11}	-0,037	0,110	0,012	-0,19	-0,035	0,113	0,013	-0,25

r_τ	Параметры распределений для различных групп рек							
	европейские реки				казахстанские реки			
	$\bar{r}_\tau$	$\sigma(r)$	ε_r^-	$C_s(r)$	$\bar{r}_\tau$	$\sigma(r)$	ε_r^-	$C_s(r)$
r_1	0,277	0,112	0,017	-0,34	0,312	0,115	0,023	-0,35
r_2	0,061	0,116	0,018	-0,14	-0,018	0,135	0,027	-0,09
r_3	-0,001	0,134	0,021	0,32	-0,105	0,133	0,027	0,12
r_4	-0,037	0,118	0,018	0,55	-0,116	0,171	0,034	0,07
r_5	0,028	0,097	0,015	0,10	-0,033	0,100	0,032	-0,29
r_6	-0,013	0,125	0,019	-0,09	0,053	0,194	0,039	0,38
r_7	-0,027	0,128	0,020	-0,08	-0,035	0,163	0,033	0,20
r_8	-0,131	0,121	0,019	0,01	-0,155	0,176	0,035	-0,01
r_9	0,014	0,119	0,019	-0,38	-0,182	0,162	0,033	0,32
r_{10}	-0,034	0,098	0,015	-0,16	-0,064	0,193	0,038	-0,23
r_{11}	-0,015	0,087	0,014	-0,24	-0,053	0,137	0,027	0,15

В качестве иллюстрации на рис. 3-4 приведены распределения второго и третьего коэффициентов корреляционной функции, а в табл. 3-1 — параметры распределений 11 членов корреляционных функций.

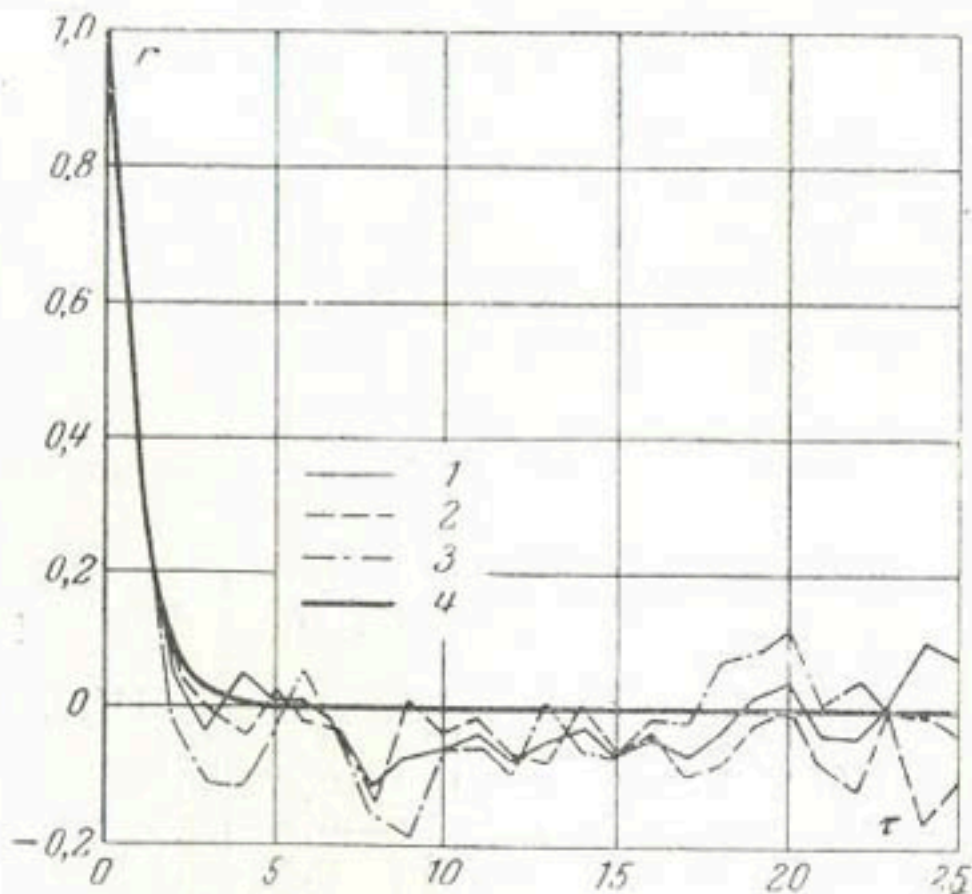


Рис. 3-5. Осредненные автокорреляционные функции трех групп рек и корреляционная функция простой цепи Маркова.

1 — 83 реки СССР и мира; 2 — 41 реки европейской территории СССР; 3 — 25 рек Средней Азии и Казахстана; 4 — простая цепь Маркова.

Аналогичные расчеты были проведены для $r_{12}—r_{25}$. Средние значения $\bar{r}_\tau = \bar{f}(\tau)$ ($\tau = 0, 1, \dots, 25$) для трех групп рек приведены на рис. 3-5. Там же приводится $r_\tau = f(\tau)$ для простой цепи Маркова. Кроме того, была оценена погрешность ε_r определения каждого среднего $\bar{r}_\tau$.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что распределения тех или иных членов корреляционной функции близки к нормальным (при сравнительно больших $C_v(r) = \sigma(r)/\bar{r}$ величины $C_s(r)$ малы). Осредненные для разных групп рек корреляционные функции $\bar{r}_\tau = \bar{f}(\tau)$ несколько отличаются от корреляционной функции простой цепи Маркова и друг от друга. Ошибка вычисления отдельных $\bar{r}_\tau$ очень мала, и многие средние значительно превосходят утроенную ошибку определения их, т. е. величины $\bar{r}_\tau$ для многих τ вполне значимы. Ошибка вычисления средних практически не зависит от τ , но зависит от количества рек в той или иной выборке.

Таким образом, значимость отдельных коэффициентов в осредненной корреляционной функции при групповом анализе намного выше, чем при построении корреляционной функции отдельного ряда.

Рассмотрим, есть ли возможность решить поставленные в этой главе задачи с помощью осредненных корреляционных функций. Для этой цели на основе корреляционных функций построены осредненные спектральные функции, представленные на рис. 3-6. На этот же рисунок (для сопоставления) нанесен спектр простой цепи Маркова.

На осредненных спектральных функциях можно отметить скачки, определяющие лишь первую и вторую гармоники. Для рек европейской группы периодичность первой гармоники равна 5 годам ($S \approx 0,23$), для рек казахстанской группы и группы из всех 83 рек — 6 годам (соответственно $S \approx 0,32$ и $S \approx 0,24$). Приведенные значения спектров превосходят 95%-ную границу доверительного предела¹, который определялся по методу Тьюки [Л. 110], изложенному выше в § 3-2.

Превышение спектральных оценок, соответствующих 5—6-летней гармонике, в рассмотренных группах рек

¹ В этих расчетах число степеней свободы ν принималось равным числу рек в группе минус 2 (см. [Л. 61]).

95%-го доверительного интервала простой цепи Маркова свидетельствует, видимо, о том, что появление этой гармоникой обусловлено не только случайными причинами.

Однако такого вывода нельзя сделать в отношении второй гармоникой, спектральные оценки которой не превышают 95%-го доверительного предела спектра простой марковской цепи, и поэтому нет оснований считать эту гармонику статистически значимой, т. е. видимо, она обусловлена случайными причинами.

Проведенный групповой анализ позволяет сделать для рассмотренных групп рек в целом предварительные выводы о правомерности гипотезы A_2 и наличии 5—6-летней цикличности на рассмотренных реках СССР. Видимо, ее и следует в первую очередь учитывать при проведении водохозяйственных и водноэнергетических расчетов. Некоторые способы учета цикличности в указанных расчетах при использовании метода Монте-Карло будут даны ниже в § 3-4. Использование гармонического анализа для этой цели исследовано в [Л. 100].

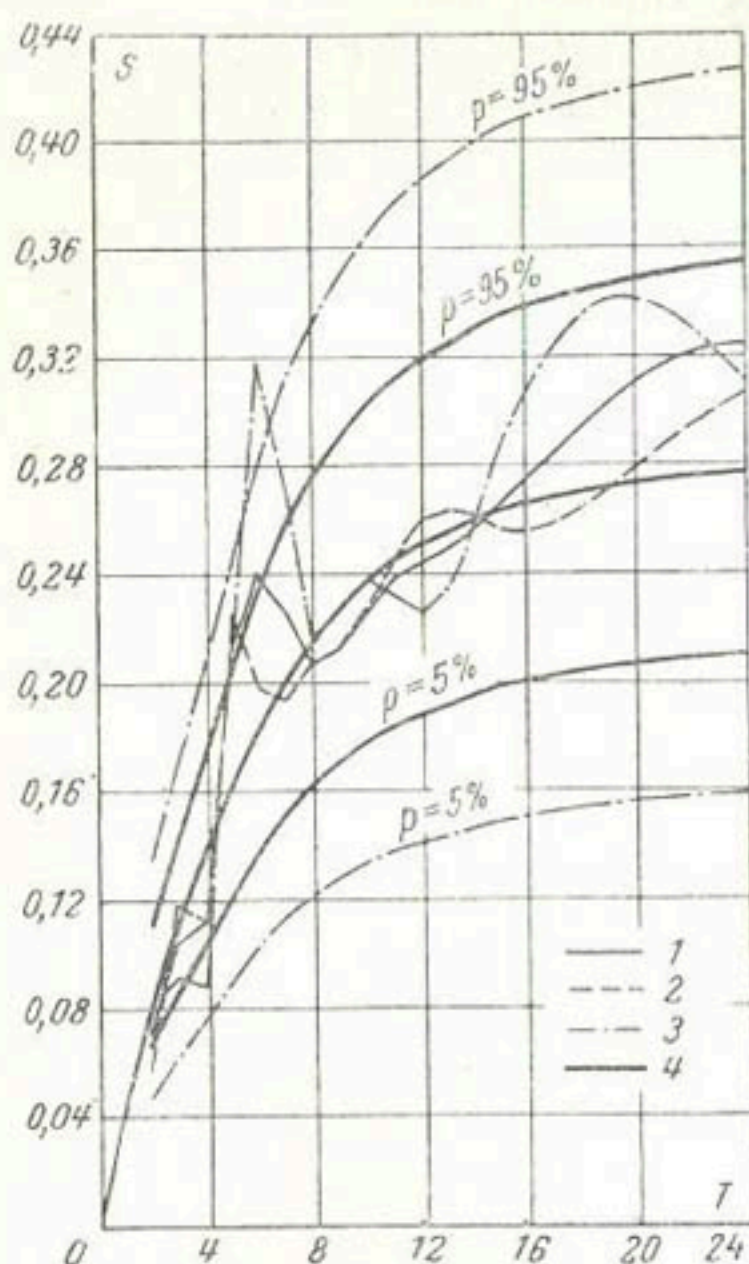


Рис. 3-6. Осредненные спектральные функции трех групп рек и простой цепи Маркова.

1 — 83 реки СССР и мира; 2 — 41 река европейской территории СССР; 3 — 25 рек Средней Азии и Казахстана; 4 — простая цепь Маркова.

Таким образом, анализ спектральных функций некоторых рассмотренных в данной работе гидрологических рядов и групповой спектральный анализ довольно большого числа гидрологических рядов показали, что: 1) для

большого числа рек значимых отличий спектра процесса стока от спектра простой цепи Маркова не обнаружено, 2) процессу годового стока некоторых рек присуща цикличность, которую нельзя объяснить только случайными причинами; для них гипотезу A_2 о подчинении процесса стока закономерностям многозвенных цепей Маркова, видимо, предварительно целесообразно считать более соответствующей данным наблюдений, чем гипотезу A_1 о достаточности описания стока простыми марковскими цепями.

Из сказанного выше следует необходимость для ряда рек учитывать цикличность при проведении расчетов глубокого многолетнего регулирования стока, особенно когда критический период сработки водохранилища превышает длительность наиболее вероятных циклов в колебаниях водности.

Для обоснования необходимости учета цикличности при проведении расчетов многолетнего регулирования стока прежде всего нужна такая методика расчетов, которая позволила бы учитывать цикличность той или иной длительности. Проведение расчетов по такой методике позволило бы оценить действительные погрешности расчетов многолетнего регулирования стока при неучете цикличности для рек различных районов и установить, в каких случаях необходимо учитывать цикличность стока, а в каких этим учетом можно пренебречь. Эти вопросы рассматриваются в следующем параграфе.

3-4. МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ ПРИ ОПИСАНИИ ПРОЦЕССА СТОКА МНОГОЗВЕННОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА

Приципиальные основы расчета регулирования стока при рассмотрении его как сложного марковского процесса с дискретным временем впервые были даны в работах [Л. 41, 87]. Целесообразность использования сложных цепей отмечалась в [Л. 26, 95 и др.].

Однако в указанных и ряде других работ не было предложено практически приемлемого метода расчета регулирования стока при описании процесса стока сложной цепью Маркова. Указанные разработки, как правило, наталкивались на исключительные вычислительные трудности, преодолеть которые не удавалось до сих пор и с помощью ЭЦВМ.

При использовании в расчетах регулирования стока метода Монте-Карло не возникает не только никаких принципиальных, но и никаких дополнительных (по сравнению с использованием простой марковской цепи) вычислительных трудностей. Расчет ведется по искусственному гидрологическому ряду точно так же, как это делалось и в предыдущей главе при описании процесса стока простой цепью. Несколько изменяется лишь способ моделирования.

Можно предложить несколько приемов моделирования искусственных гидрологических рядов с заданным законом распределения вероятностей при рассмотрении их как сложных цепей Маркова. Рассмотрим здесь два таких способа. Оба способа являются распространением на более сложный случай приведенных в § 1-4 методов моделирования искусственных гидрологических рядов, подчиняющихся закономерностям простых марковских цепей.

В случае сложной или многозвенной цепи Маркова вывод основных расчетных уравнений для моделирования гидрологических рядов, приведенных в § 1-4, практически остается точно таким же, как и в случае простой цепи Маркова [см. уравнения (1-50) и (1-51)]. В основу моделирования ряда по многозвенной цепи Маркова положено уравнение нормальной линейной регрессии при учете множественной корреляции между смежными членами ряда [Л. 74].

Условное математическое ожидание расхода $Q_i^{\text{усл}}$ при известных предшествующих членах стокового ряда $Q_{i-1}, \dots, Q_{i-j}, \dots, Q_{i-m}$ выражается уравнением

$$Q_i^{\text{усл}} = \bar{Q}_i - \sum_{j=1}^m (Q_{i-j} - \bar{Q}_{i-j}) \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-j}} \frac{D_{i(i-j)}}{D_{ii}}, \quad (3-7)$$

а условные стандарт и коэффициент вариации — соответственно:

$$\sigma_{\text{усл}} = \sigma \sqrt{\frac{D}{D_{ii}}}; \quad (3-8)$$

$$C_v^{\text{усл}} = \frac{\sigma_{\text{усл}}}{Q_i^{\text{усл}}} = \frac{\sigma \sqrt{D/D_{ii}}}{\bar{Q}_i - \sum_{j=1}^m (Q_{i-j} - \bar{Q}_{i-j}) \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-j}} \frac{D_{i(i-j)}}{D_{ii}}}. \quad (3-9)$$

Здесь: D — определитель квадратной симметричной корреляционной матрицы следующего вида:

$$D = \begin{vmatrix} r_{ii} & r_{ii(i-1)} & r_{ii(i-2)} & \dots & r_{ii(i-j)} & \dots & r_{ii(i-m)} \\ r_{ii(i-1)} & r_{ii(i-1)} & r_{ii(i-1)} & \dots & r_{ii(i-j-1)} & \dots & r_{ii(i-m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{ii(i-m)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{ii(i-m)} \end{vmatrix}, \quad (3-10)$$

где m — общее количество учитываемых связей, т. е. длина используемой при моделировании корреляционной функции исходного ряда [(первая строка и первый столбец корреляционной матрицы (3-10)]; D_{ii} и $D_{ii(i-j)}$ — алгебраические дополнения элементов r_{ii} и $r_{ii(i-j)}$ в определителе D .

Здесь, так же как и для простой марковской цепи, принимается, что условная функция распределения вероятностей того же типа, что и безусловная, и что распределение вероятностей годового стока соответствует кривой Пирсона III типа с соотношением $C_s^{усл} = 2C_v^{усл}$; в методе статистических испытаний используется указанный выше прием — «перемешивание таблиц». При этих предпосылках расчетное уравнение для моделирования гидрологического ряда при описании процесса стока многозвенной марковской цепью примет вид:

$$Q_i = \bar{Q}_i - \sum_{j=1}^m (Q_{i-j} - \bar{Q}_{i-j}) \frac{\sigma_d}{\sigma_{i-j}} \frac{D_{ii(i-j)}}{D_{ii}} + \\ + \Phi_i(\xi_i; C_{sd}^{усл}) \sigma_i \sqrt{\frac{D}{D_{ii}}}. \quad (3-11)$$

Если в уравнении (3-7) принять, что среднее и стандарт годового стока одинаковы в любых временных интервалах, т. е. что

$$\bar{Q}_i = \bar{Q}_{i-1} = \dots = \bar{Q}_{i-j} = \dots = \bar{Q}_{i-m} = \dots = \bar{Q} \quad (3-12)$$

и

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} = \dots = \sigma_{i-j} = \dots = \sigma_{i-m} = \dots = \sigma, \quad (3-13)$$

то уравнение (3-11) примет вид:

$$Q_i = \bar{Q} - \sum_{j=1}^m (Q_{i-j} - \bar{Q}) \frac{D_{ii}(i-j)}{D_{ii}} + \\ + \Phi_i(\xi_i; C_{si}^{усл}) \sigma \sqrt{\frac{D}{D_{ii}}}. \quad (3-14)$$

В уравнениях (3-7) и (3-14) Q_i — искомый ряд моделируемых среднегодовых расходов: Q_{i-j} — расход за предыдущий $(i-j)$ -й год. При соотношении $C_{si}^{усл} = 2C_{\sigma}^{усл}$ условный коэффициент асимметрии определяется уравнением

$$C_{si}^{усл} = \frac{2\sigma \sqrt{D/D_{ii}}}{\bar{Q} - \sum_{j=1}^m (Q_{i-j} - \bar{Q}) \frac{D_{ii}(i-j)}{D_{ii}}}. \quad (3-15)$$

В более простом виде, который в последующем и будет использоваться в данной работе, уравнения (3-11) и (3-14) можно представить так:

$$Q_i = a_0 \bar{Q} + a_1 Q_{i-1} + a_2 Q_{i-2} + \dots + a_j Q_{i-j} + \dots + \\ + a_m Q_{i-m} + \Phi_i(\xi_i; C_{si}^{усл}) a_{\sigma} \sigma, \quad (3-16)$$

где

$$a_0 = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{\bar{Q}_{i-j}}{\bar{Q}} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-j}} \cdot \frac{D_{ii}(i-j)}{D_{ii}}; \quad (3-17)$$

$$a_1 = - \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-1}} \cdot \frac{D_{ii}(i-1)}{D_{ii}}; \quad a_2 = - \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-2}} \times \frac{D_{ii}(i-2)}{D_{ii}} \quad (3-18)$$

и

$$a_{\sigma} = \sigma_i \sqrt{\frac{D}{D_{ii}}}. \quad (3-19)$$

При этих обозначениях формула (3-15) получит вид:

$$C_{si}^{усл} = \frac{2a_{\sigma}\sigma}{a_0 \bar{Q} + a_1 Q_{i-1} + \dots + a_m Q_{i-m}}. \quad (3-20)$$

Уравнение (3-16) очень удобно для моделирования и выявления влияния отдельных звеньев и числа их на результаты моделирования.

В целях иллюстрации в табл. 3-2 представлены коэффициенты уравнения (3-16) для р. Нарын, вычисленные при разном числе звеньев m .

Приведенные данные свидетельствуют о том, что увеличение числа звеньев в марковской цепи существенно уменьшает долю случайного рассеяния моделируемой величины (с увеличением числа звеньев с $m=1$ до $m=11$ a_0 уменьшается с 0,955 до 0,650, т. е. почти вдвое). Кроме того, знак и абсолютная величина влияния отдельных предшествующих расходов воды на моделируемый практически не меняются с изменением числа учитываемых звеньев. Так, например, для рассматриваемой реки расход за предыдущий год входит в уравнение для моделирования с коэффициентом, имеющим знак «плюс» и абсолютную величину, примерно равную 0,3 (последняя цифра близка к r_1); расход за $i-2$ -й год имеет коэффициент со знаком «минус», но с абсолютной величиной, примерно в 10 раз меньшей, и т. д. Наиболее существенное влияние (коэффициент равен примерно $-0,5$) на величину моделируемого расхода оказывает $i-4$ -й год (r_5 — член корреляционной функции — также отрицателен).

После выбора количества звеньев, необходимых для моделирования сложной цепи, и вычисления коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_m, a_s$, расчет по уравнению (3-16) весьма прост и полностью аналогичен расчету по уравнению (1-50), рассмотренному выше в § 1-4. И в этом случае время моделирования 1 000-летнего гидрологического ряда на ЭЦВМ «Урал-2» практически не превышает 2 мин.

Соответствие параметров смоделированных 1 000-летних рядов параметрам исходных рядов иллюстрируется табл. 3-3, где для сокращения места приведены, кроме нормы стока и C_v , только коэффициенты корреляции между смежными членами рядов.

Как видно из табл. 3-3, совпадение параметров исходных и искусственных рядов в большинстве случаев удовлетворительное.

На рис. 3-7 для притока в оз. Байкал сделано сопоставление корреляционной и спектральной функций исходного и смоделированного искусственного 1 000-летнего рядов при описании процесса стока многозвенной цепью Маркова. Совпадение указанных функций исключительно хорошее, что, видимо, свидетельствует о практической пригодности рассмотренного метода моделирования процесса стока при описании его многозвенными цепями Маркова.

Рассмотрим второй способ моделирования. Пусть требуется смоделировать ряд $x_1, x_2, \dots, x_m$ с заданной автокорреляционной функцией $r(l)$ и заданным законом распределения.

Таблица 3-2

m	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	0,710	0,290	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,955
2	0,728	0,298	—0,026	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,916
3	1,255	0,297	—0,020	—0,022	—	—	—	—	—	—	—	—	0,915
4	1,045	0,290	—0,028	0,098	—0,405	—	—	—	—	—	—	—	0,875
5	1,061	0,247	—0,018	0,095	—0,375	—	—	—	—	—	—	—	0,760
6	1,316	0,232	—0,072	0,110	—0,378	—0,104	—	—	—	—	—	—	0,740
7	1,040	0,260	—0,057	0,190	—0,400	—0,053	—0,140	—	—	—	—	—	0,710
8	1,262	0,305	—0,098	0,175	—0,484	—0,014	—0,100	0,210	—	—	—	—	0,680
9	1,373	0,287	—0,075	0,158	—0,484	—0,055	—0,189	0,256	—0,210	—	—	—	0,670
10	1,144	0,300	—0,044	0,116	—0,450	—0,046	—0,110	0,230	—0,171	0,087	—	—	0,650
11	1,123	0,298	—0,042	0,119	—0,458	—0,044	—0,107	0,238	—0,174	—0,134	0,165	—	0,650

Таблица 3-3

Наименование ряда	Параметры	По исходному ряду	Значения параметров										
			по искусственному ряду при учете числа звеньев m										
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Пригок к оз. Байкал	$\overline{Q}$ C_p r_1	1,00 0,196 0,343	1,0 0,201 0,345	1,0 0,202 0,348	1,0 0,202 0,345	1,0 0,202 0,351	1,0 0,203 0,349	1,0 0,203 0,345	1,0 0,203 0,345	1,0 0,202 0,341	1,0 0,202 0,341	1,0 0,202 0,347	1,0 0,200 0,342
р. Нарын (Уч-Курган)	$\overline{Q}$ C_p r_1	1,00 0,205 0,230	1,01 0,210 0,296	1,01 0,210 0,297	1,01 0,209 0,295	1,01 0,208 0,292	1,00 0,208 0,287	1,00 0,207 0,277	1,00 0,209 0,276	1,00 0,208 0,258	0,995 0,207 0,257	1,00 0,207 0,244	1,00 0,207 0,236
р. Урал (Кушум)	$\overline{Q}$ C_p r_1	1,00 0,68 0,28	1,03 0,69 0,30	1,01 0,70 0,30	1,00 0,71 0,30	1,01 0,71 0,30	1,01 0,71 0,29	1,01 0,71 0,29	1,00 0,72 0,29	0,99 0,73 0,29	— — —	— — —	— — —
р. Селеты (Ильинское)	$\overline{Q}$ C_p r_1	1,00 0,89 0,41	1,03 0,91 0,41	1,02 0,90 0,40	1,02 0,89 0,40	1,00 0,91 0,39	1,00 0,90 0,38	1,07 0,85 0,41	1,02 0,90 0,39	1,02 0,89 0,38	— — —	— — —	— — —

Значение $r(\tau)$ корреляционной функции $r(t)$ в момент времени τ есть коэффициент корреляции между рядами

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_\tau, x_{\tau+1}, \dots$$

$$x_{\tau+1}, x_{\tau+2}, \dots, x_{\tau+m}, \dots, x_{2\tau}, x_{2\tau+1}, \dots$$

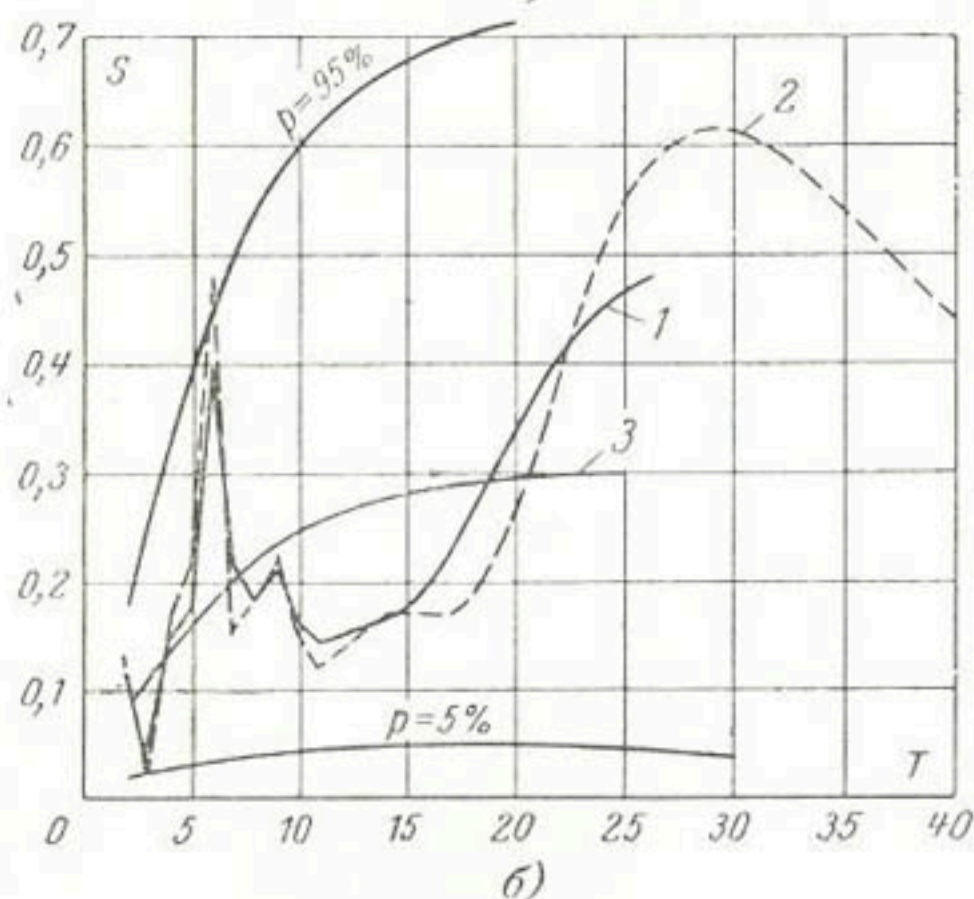
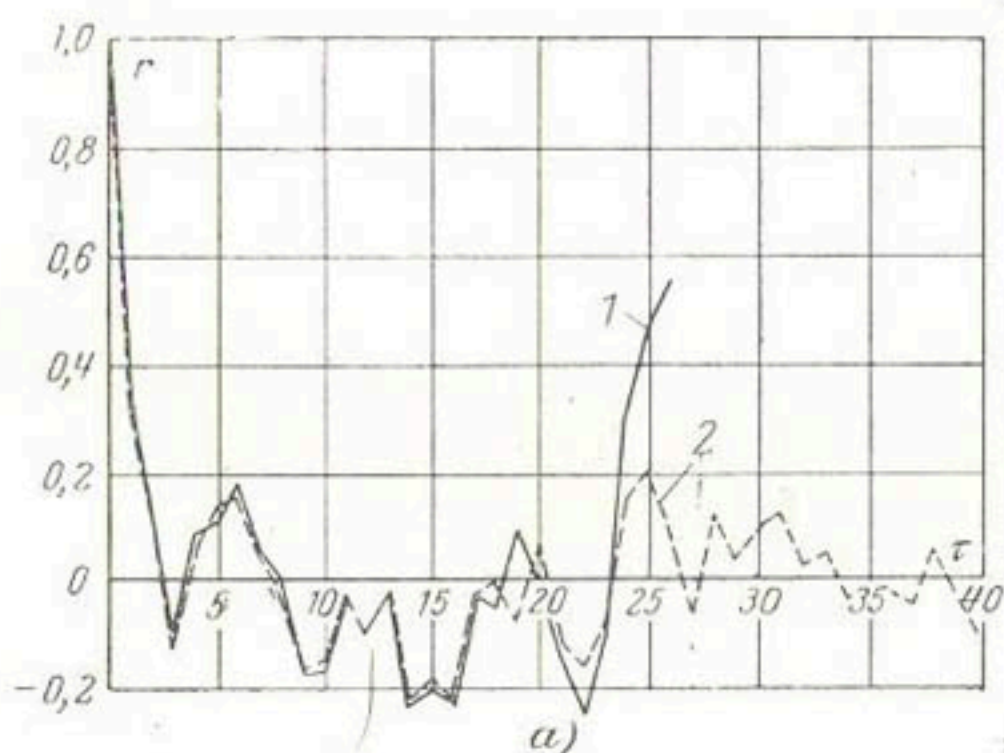


Рис. 3-7. Корреляционные (а) и спектральные (б) функции, подсчитанные по наблюдаемому и искусственному ряду притока в оз. Байкал.

1 — наблюдаемый ряд, $n=53$ года; 2 — 1000-летний ряд, смоделированный по сложной цепи Маркова; 3 — простая цепь Маркова.

Такой взгляд на значения корреляционной функции позволяет (в случае дискретности и конечности аргумента t) свести задачу о временном процессе к задаче построения случайного вектора с заданным коэффициентом корреляции между координатами.

Итак, требуется получить ряд $x_1, x_2, \dots$ с заданным распределением и заданными коэффициентами корреляции:

$$r_1, r_2, \dots, r_\tau,$$

где r_t — коэффициент корреляции между $x_1, x_2, \dots$ и $x_{t+1}, x_{t+2}, \dots$ при $t=1, 2, \dots, \tau$.

Задача сводится к построению вектора $\xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\tau+1})$ с заданным законом распределения координат и матрицей коэффициентов корреляции

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_\tau \\ r_1 & 1 & r_1 & \dots & r_{\tau-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_\tau & r_{\tau-1} & r_{\tau-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом значения координаты ξ_i должны образовывать ряд

$$x_i x_{i+1} x_{i+2} \dots; i=1, 2, \dots, \tau+1.$$

Многозвенную цепь y_i с произвольной функцией распределения $F(x)$ можно получить из равномерной цепи x_i по формуле $y_i = F^{-1}(x_i)$, где $F^{-1}(x)$ — функция, обратная $F(x)$. При этом, как и прежде (см. § 1-4), вопрос о коэффициентах корреляции при таком преобразовании требует отдельного исследования.

Дальнейшее использование полученного равномерного вектора для получения вектора с заданным законом распределения вероятностей аналогично описанному в гл. 1 (см. § 1-4).

Рассмотрим, как влияет принятие гипотезы A_2 для описания процесса речного стока на результаты его многолетнего регулирования. Анализ проведем на примере нескольких рек методом, описанным первым в данном параграфе. Для оценки рассматриваемого влияния на ЭЦВМ были получены зависимости обеспеченности гарантированной отдачи водохранилища от величины его многолетней емкости $p = f(\alpha, \beta)$ для различного числа учитываемых при моделировании звеньев m .

Для Иркутского водохранилища результаты расчетов представлены в табл. 3-4. Определение обеспеченно-

Обеспеченность P (%) при учете m звеньев цепи Маркова													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
при коэффициенте корреляции $r_T = m$													
α	0	0,34	0,15	-0,10	0,08	0,11	0,17	0,05	0,00	-0,18	-0,17	-0,04	
и спектральной функции S													
	—	0,10	0,04	0,13	0,14	0,33	0,16	0,14	0,20	0,18	0,19	0,23	
0,0	—	—	—	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	
	0,4	100,0	100,0	99,8	99,6	99,6	99,6	99,6	99,6	99,9	99,9	99,9	
	0,5	98,1	98,3	98,5	98,5	98,6	98,5	98,5	98,6	98,3	98,5	98,4	
	0,6	94,9	93,7	93,9	93,5	93,7	93,6	93,7	94,0	93,9	93,4	94,0	
	0,7	84,2	83,4	84,4	84,2	84,8	84,2	84,3	85,0	84,0	84,4	84,4	
	0,8	69,3	69,0	68,3	69,6	69,7	68,8	69,5	69,7	69,1	69,4	69,0	
0,15	0,9	48,3	47,4	47,2	47,2	47,7	46,5	47,0	47,2	47,8	48,0	48,2	
	1,0	15,5	15,6	15,6	16,1	16,4	15,9	15,9	16,3	16,1	15,8	15,8	
	0,6	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	99,9	100,0	
	0,7	99,5	99,3	99,1	98,9	99,1	98,9	99,1	99,3	99,1	99,4	99,2	
	0,8	95,8	93,7	93,2	93,9	93,9	93,6	93,5	94,2	93,6	93,5	93,6	
	0,9	84,8	83,0	82,1	83,4	83,0	82,4	82,6	83,0	82,8	82,2	83,2	
0,30	1,0	63,2	61,2	60,7	60,4	61,0	59,6	60,0	60,7	61,4	61,7	61,1	
	1,2	19,0	18,5	18,3	19,0	19,1	19,0	19,1	19,4	19,2	18,5	18,7	
	0,6	—	—	—	—	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	
	0,7	100,0	100,0	99,9	100,0	99,9	99,9	99,9	99,9	99,8	99,8	99,9	
	0,8	99,6	97,9	98,0	97,9	97,8	97,7	97,8	97,9	97,8	97,9	98,2	

		Обеспеченность p (%) при учете m звеньев цепи Магкова											
β	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
		при коэффициенте корреляции $r_z = m$											
		0	0,34	0,15	-0,10	0,08	0,11	0,17	0,05	0,00	-0,18	-0,17	-0,04
		и спектральной функции S											
		—	0,10	0,04	0,13	0,14	0,33	0,16	0,14	0,20	0,18	0,19	0,23
0,30	0,9	92,5	89,9	89,3	89,7	89,6	90,0	89,2	89,3	89,6	89,3	89,1	89,9
	1,0	73,3	69,2	68,9	69,3	69,6	70,1	68,8	68,8	69,6	69,0	68,7	69,3
	1,2	20,8	21,1	20,5	20,6	20,9	21,0	20,9	20,8	21,0	21,2	20,4	20,7
0,60	0,7	—	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
	0,8	100,0	99,9	99,8	99,9	99,9	99,8	99,8	99,8	99,8	99,7	99,6	99,9
	0,9	98,9	95,9	95,1	96,4	95,7	95,7	95,5	95,6	96,0	95,8	95,6	96,1
	1,0	83,4	78,3	77,5	78,2	78,2	78,6	76,6	77,0	77,9	78,0	78,3	78,4
	1,2	22,0	22,8	22,1	22,2	22,8	—	22,7	22,6	22,9	22,6	22,0	21,9
0,90	0,8	—	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
	0,9	100,0	98,6	98,3	98,9	98,7	98,5	98,2	98,3	98,6	98,8	98,7	99,9
	1,0	88,2	83,5	82,7	84,3	83,0	83,1	81,2	81,5	82,4	83,0	82,5	83,6
3,00	1,2	22,3	23,3	22,9	22,8	23,8	24,2	23,5	23,7	23,9	23,5	22,8	22,7
	0,9	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
	1,0	97,5	95,2	94,0	95,1	94,6	94,4	92,7	93,3	94,1	95,1	95,1	95,2
	1,2	23,4	24,5	24,0	23,7	24,8	25,4	25,0	25,1	25,3	24,8	24,3	24,3

сти было произведено для шести значений емкости, восьми значений отдачи и для числа звеньев, меняющегося от 1 до 11, причем также рассмотрен случай отсутствия связи между смежными членами ряда ($r_1=0$). Из табл. 3-4 следует, что явной зависимости обеспеченности p от числа учитываемых звеньев m при прочих равных условиях не наблюдается. Это объясняется тем, что коэффициенты корреляции и спектральные плотности при различных m изменяются в очень широких пределах. Можно отметить, что при максимальном значении спектральной плотности $S=0,33$ при $m=5$, которое, однако, при 95%-ном доверительном интервале не является значимым, наиболее часто (при различных α и β) встречаются максимальные значения обеспеченности.

Для большей наглядности по данным табл. 3-4 построены зависимости $p=f(\alpha, \beta)$ при $p=\text{const}$ для нескольких значений m . По этим зависимостям определены величины гарантированных отдач при двух расчетных обеспеченностях отдач (90 и 95%) и трех величинах относительной многолетней емкости водохранилища $\beta=0,2; 0,4; 0,6$. В табл. 3-5 эти данные сопоставлены с результатами расчетов, проведенных без учета связи между смежными членами ряда ($r_1=0$), а также с отдачей, полученной по календарному ряду наблюдений за стоком. В этой же таблице приведены результаты аналогичного расчета, проведенного при моделировании процесса стока четырехзвенной цепью Маркова, составленной из условия искусственного увеличения коэффициента корреляции при $m=4$. В этом случае скачок спектральной функции становится высоко значимым. Полностью представляя условность последнего расчета, мы хотели лишь проиллюстрировать влияние ярко выраженной цикличности в колебаниях стока на результаты расчета регулирования его.

Данные табл. 3-5 свидетельствуют о том, что при проведении расчетов многолетнего регулирования гарантированная отдача ГЭС изменяется в зависимости от принятого способа описания процесса речного стока и количества учитываемых звеньев в сложной цепи Маркова. Данные табл. 3-4 и 3-5 показывают, что не всегда увеличение числа звеньев в цепи снижает величину отдачи при прочих равных условиях. Снижение отдачи в очень значительной степени зависит от соотношения количественных характеристик корреляционной связи

Таблица 3-5

Способ описания	Гарантированные отдачи при β					
	0,2		0,4		0,6	
	и обеспеченности P , %					
	95	90	95	90	95	0,90
Без учета связей между смежными членами	0,85	0,90	0,90	0,95	0,95	1,00
По простой цепи Маркова	0,83	0,88	0,88	0,93	0,91	0,95
По четырехзвенной цепи Маркова	0,82	0,87	0,87	0,92	0,91	0,95
То же, но с искусственно увеличенной цикличностью	0,72	0,77	0,75	0,81	0,77	0,82
По десятизвенной цепи Маркова	0,81	0,86	0,86	0,92	0,90	0,94
По наблюдаемому ряду	0,85		0,89		0,92	

между смежными и несмежными членами ряда. Только при ярко выраженной цикличности (в нашем случае она создана искусственно путем простого увеличения коэффициента корреляции r_3 до $r_3=0,8$ при $m=4$) отдача из водохранилища снижается очень сильно. Использование же эмпирической корреляционной функции наблюдаемого ряда приточности к оз. Байкал дает сравнительно небольшое снижение отдачи при увеличении числа учитываемых связей от 1 до 4 и далее до 10.

Кроме сказанного, из табл. 3-5 следует, что бесперебойная отдача, полученная по наблюдаемому ряду при проектной многолетней емкости водохранилища, соответствует примерно 95% обеспеченности в расчете без учета связей между смежными членами ряда, 93% обеспеченности при описании процесса стока простой марковской цепью и 92% обеспеченности при описании процесса стока многозвенной цепью Маркова. В то же время при оценке этой величины по календарному ряду обеспеченность отдачи была равна 98%.

Аналогичные расчеты были проведены для р. Нарына; они приведены в [Л. 73].

В табл. 3-6 даны результаты аналогичных расчетов для р. Урала (Кушум). Статистические характеристики гидрологического ряда р. Урала приводились в табл. 3-3. В этом ряду выявлена значимая при $p=95\%$ оценка спектра ($T=5$ лет). При моделировании этого ряда было принято фактическое соотношение между C_s и C_v , равное 1,3. Параметры смоделированных рядов при различных m даны в табл. 3-3.

Таблица 3-6

β	α	Обеспеченность p (%) при учете m звеньев цепи Маркова						
		1	1	2	3	4	5	6
		при коэффициенте корреляции $r_{\tau=m}$						
		0	0,28	-0,13	-0,24	-0,01	0,13	0,03
		и спектральной функции S_m						
		—	0,111	0,099	0,076	0,474	0,283	0,237
0,00	0,1	93,8	93,6	93,1	92,1	92,5	92,2	92,4
	0,2	90,3	89,7	89,3	89,5	88,9	88,7	88,6
	0,4	81,1	81,8	81,3	79,9	79,1	79,2	79,2
	0,5	75,9	76,6	75,4	74,3	75,4	75,4	75,7
	0,6	70,4	71,6	69,0	69,8	69,8	69,4	70,2
	0,7	64,0	66,1	64,4	63,2	63,8	64,2	64,4
	0,8	57,0	58,9	58,3	57,4	57,1	56,7	57,0
	0,9	51,0	51,9	50,9	50,4	50,7	51,0	50,5
	1,0	45,8	45,4	45,0	44,1	44,8	44,7	44,9
	1,2	33,5	34,7	33,2	32,8	33,3	33,5	33,5
	1,2	33,5	34,7	33,2	32,8	33,3	33,5	33,5
0,15	0,1	96,8	96,7	95,5	95,5	95,7	95,7	95,8
	0,2	95,2	94,3	93,6	92,8	93,2	93,1	93,3
	0,4	86,6	86,0	85,9	85,1	84,4	84,5	84,7
	0,5	81,9	81,2	82,2	79,3	79,7	80,1	80,1
	0,6	76,3	77,4	75,3	74,9	75,3	74,8	75,3
	0,7	70,2	71,4	68,8	68,8	69,7	69,6	69,8
	0,8	63,7	64,8	62,9	62,0	62,6	63,0	63,1
	0,9	56,2	57,1	56,2	54,3	55,2	56,3	55,9
	1,0	48,8	50,2	49,2	47,7	48,7	48,5	48,6
	1,2	35,7	37,3	35,4	35,6	36,0	36,2	36,0
	1,2	35,7	37,3	35,4	35,6	36,0	36,2	36,0
0,30	0,1	99,5	99,2	98,7	98,6	98,4	98,5	98,5
	0,2	97,8	96,7	96,1	96,0	95,9	96,1	96,2
	0,4	92,1	90,7	90,2	89,2	89,1	89,4	89,7
	0,5	87,3	85,9	85,7	85,0	84,7	84,8	84,8
	0,6	81,8	81,1	81,6	79,7	79,2	79,2	79,6
	0,7	75,4	76,1	74,9	73,7	73,4	73,4	73,5
	0,8	69,4	69,1	67,9	66,1	67,1	67,0	67,4
	0,9	61,4	62,4	59,7	59,7	59,5	60,0	60,6
	1,0	53,8	54,9	53,4	51,1	52,4	52,8	53,0
	1,2	38,4	40,3	38,3	37,8	38,6	38,9	38,8
	1,2	38,4	40,3	38,3	37,8	38,6	38,9	38,8
0,60	0,1	100,0	100,0	99,9	99,9	99,8	99,8	99,8
	0,2	99,9	99,4	99,7	99,6	99,1	99,3	99,3
	0,4	98,0	95,7	96,1	96,1	95,9	96,4	96,5
	0,5	94,7	92,2	92,3	91,7	92,6	92,8	93,2
	0,6	91,0	88,6	88,2	87,1	87,6	88,1	88,2
	0,7	85,1	83,1	82,9	81,7	82,1	82,1	82,3
	0,8	78,4	76,7	75,9	74,5	74,5	74,3	74,7
	0,9	69,7	69,4	67,9	66,3	65,8	66,3	66,8
	1,0	61,6	61,7	60,3	57,9	58,2	58,5	58,9
	1,2	43,5	46,8	43,0	43,0	43,5	44,0	44,3
	1,2	43,5	46,8	43,0	43,0	43,5	44,0	44,3

β	α	Обеспеченность p (%) при учете m звеньев цепи Маркова						
		1	1	2	3	4	5	6
		при коэффициенте корреляции $r_{\tau=m}$						
		0	0,28	-0,13	-0,24	-0,01	0,13	0,03
		и спектральной функции S_m						
		—	0,111	0,099	0,076	0,474	0,286	0,237
1,2	0,2	—	100,0	100,0	100,0	99,9	99,9	99,9
	0,4	100,0	98,9	98,8	99,8	99,7	99,7	99,7
	0,5	99,5	97,8	98,9	99,0	98,6	98,7	98,7
	0,6	98,1	94,9	96,3	96,2	96,3	96,6	96,6
	0,7	94,8	91,3	92,6	92,8	93,0	93,0	93,2
	0,8	90,3	86,1	87,5	86,9	86,8	88,0	88,2
	0,9	82,7	79,2	79,4	78,2	78,9	78,8	79,2
	1,0	73,6	71,0	70,1	68,2	69,0	69,2	69,5
	1,2	52,6	54,5	52,2	50,4	51,2	51,7	51,8
	0,7	100,0	98,7	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
3,0	0,8	99,2	96,4	98,4	99,5	98,8	98,5	98,5
	0,9	94,9	90,8	93,7	94,9	94,3	94,2	94,4
	1,0	86,2	83,5	85,1	85,2	84,5	84,6	84,7
	1,2	62,4	63,4	61,9	59,5	61,6	62,4	62,4

Следует отметить, что обеспеченность отдачи зависит не только от числа звеньев, учитываемых при моделировании рядов, но и от глубины регулирования стока.

Все приведенные данные следует рассматривать в качестве предварительных. Они ни в коей мере не отвечают на вопрос о количественном влиянии способа описания речного стока на величину отдачи водохранилища многолетнего регулирования стока. Эти данные лишь иллюстрируют важность проведения тщательного анализа природы речного стока каждой конкретной реки или группы их в пределах гидросиноптического района при проведении расчетов глубокого многолетнего регулирования стока.

Изложенный способ моделирования гидрологических рядов большой продолжительности и возможность проведения на основе искусственных рядов массовых расчетов многолетнего регулирования речного стока на ЭЦВМ позволяют, видимо, в дальнейшем исследовать этот вопрос более подробно для каждого крупного проектируемого объекта или сделать определенные выводы применительно к различным районам.

УЧЕТ ВНУТРИГОДОВЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

4-1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотренный в предыдущих главах случай регулирования стока при среднегодовом интервале осреднения является простейшим; он не дает возможности учесть внутригодовую неравномерность стока, переменность потребления воды различными водопотребителями в течение года, влияние переменного напора на гидроэлектростанции на результаты регулирования и т. п.

Для учета влияния внутригодовой неравномерности притока и потребления в практике водохозяйственного проектирования получило распространение проведение расчетов регулирования стока либо по календарному ряду наблюдений, либо путем условного разделения емкости водохранилища на две составляющие: многолетнюю и сезонную.

В первом случае, особенно при многолетнем регулировании стока по сравнительно коротким рядам наблюдений, надежность расчета весьма невысока. Значительно более точным является второй способ. Об определении отдельных составляющих и полной емкости водохранилища см. [Л. 51].

Здесь будет рассмотрен лишь способ проведения расчетов регулирования стока, аналогичный способу проведения расчетов по календарному ряду наблюдений, с той лишь разницей, что вместо последнего будут использованы длинные, смоделированные методом Монте-Карло, искусственные гидрологические ряды с месячным (или еще меньшим) интервалом временного осреднения. Расчет по таким рядам не только аналогичен расчету по календарному ряду наблюдений, но и практически одинаков для различной степени регулирования стока. На заключительной стадии такого расчета проводится статистическая обработка непосредственно тех характе-

ристик работы водохранилища, которые получаются в результате водохозяйственного расчета (третий прием по классификации [Л. 51, стр. 127]).

В настоящее время разработано несколько способов учета внутригодового распределения стока при его моделировании. Однако прежде чем приступить к их изложению, рассмотрим кратко некоторые статистические закономерности внутригодового распределения стока рек. При этом будем рассматривать два интервала осреднения: месячный и суточный (последний — для периода паводка).

4-2. НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ МЕСЯЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТОКА РЕК

При исследовании статистических закономерностей среднемесячного стока рек будем рассматривать его как периодический случайный процесс с дискретным временем. Функции, описывающие случайный процесс, называются случайными функциями. В результате опыта они могут принять тот или иной заранее неизвестный вид. Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется реализацией случайной функции, а совокупность — «семейством» реализаций этой функции [Л. 14]. Наблюдения за один и тот же момент времени по семейству реализаций называется сечением случайной функции.

В рассматриваемом случае в качестве реализаций случайной функции принимаются данные наблюдений за 1 год, весь ряд наблюдений является семейством реализаций, периодичность процесса стока обуславливается годовым циклом вращения Земли вокруг Солнца, а расходы одноименных месяцев за многолетие рассматриваются как сечения случайной функции.

Математическое описание случайного процесса сводится к получению некоторых основных характеристик его.

Основными характеристиками случайной функции являются математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция.

Математическим ожиданием случайной функции $Q(t)$ называется неслучайная функция $\bar{Q}(t)$, которая при каждом значении аргумента равна математическому ожиданию сечения случайной функции [Л. 14]. Математическое ожидание есть некоторая средняя функция, около которой различным образом варьируются отдель-

ные реализации случайной функции. Иллюстрацией математического ожидания $\bar{Q}(t)$ случайной функции месячных расходов реки могут служить эти характеристики, вычисленные по 31-летнему ряду наблюдений для притока к оз. Имандра (рис. 4-1).

Дисперсией случайной функции называется неслучайная и неотрицательная функция $D(t)$, значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции [Л. 14]. Дисперсия случайной функции характеризует разброс возможных реализаций случайной функции относительно среднего, иными словами характеризует «степень случайности» случайной функции. Извлекая из

$D(t)$ квадратный корень, получим функцию $\sigma(t)$ — среднее квадратическое отклонение случайной функции. Если разделить $\sigma(t)$ на $\bar{Q}(t)$, получим нормированное среднее квадратическое отклонение — коэффициент вариации случайной функции $C_v(t)$. Иллюстрация последней характеристики для притока к оз. Имандра представлена на рис. 4-1, откуда видна существенная зависимость указанной характеристики от рассматриваемого месяца.

Корреляционной функцией случайной функции называется неслучайная функция двух аргументов $K_Q(t, t')$, при каждой паре значений t, t' равная корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции [Л. 14]. Здесь корреляционный момент является характеристикой степени зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к различным t . В дальнейшем будут использоваться нормированные корреляционные функции, т. е. зависимости

$$r_Q(t, t') = \frac{K_Q(t, t')}{\sigma_Q(t) \sigma_Q(t')}, \quad (4-1)$$

численно равные коэффициентам корреляции между сечениями случайной функции. Нормированная корреля-

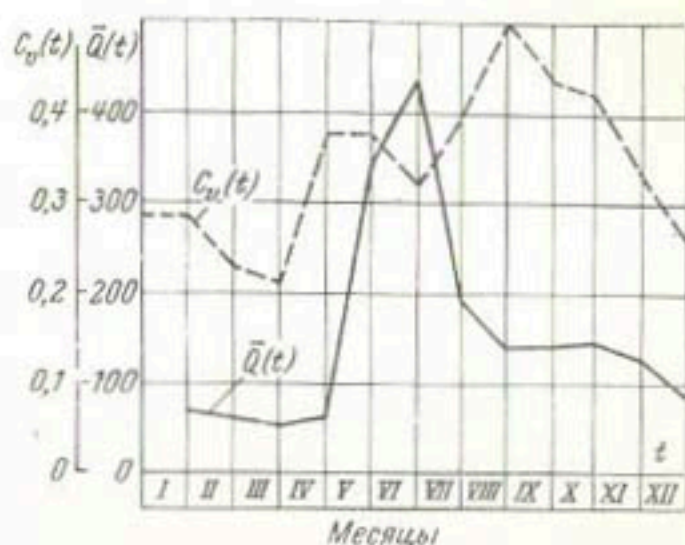


Рис. 4-1. Математическое ожидание и коэффициент вариации случайной функции месячных расходов притока в оз. Имандра.

ционная функция аналогична нормированной корреляционной матрице системы случайных величин.

Корреляционные матрицы месячных расходов и связь последних со среднегодовыми расходами некоторых из рассмотренных нами рек иллюстрируют табл. 4-1 и 4-2. Коэффициенты корреляции между месячными и среднегодовыми расходами реки приведены в последнем столбце каждой матрицы. Они указывают на различную степень коррелятивной связи между годовым стоком и стоком разных месяцев, которая наблюдается на рассматриваемых здесь реках. Указанный коэффициент корреляции на разных реках для различных месяцев изменялся от 0 до 0,93. Диапазон изменений коэффициентов корреляции между месячными и годовым стоками не был одинаковым на разных реках.

Одним из основных вопросов, подлежащих исследованию при рассмотрении случайных функций, является вопрос о законе распределения вероятностей сечений случайных функций.

Исследования законов распределения вероятностей среднемесячных сечений случайных функций были проведены в Энергосетьпроекте для различных рек методами, описанными в § 1-2. Они показали, что для месячных расходов большинства рек ни обычный логнормальный закон распределения вероятностей, ни гамма-распределение непригодны. Причиной этого, видимо [Л. 42], является фазовая неоднородность стока рек в различные месяцы. Несоответствие месячных расходов рассмотренных нами рек ни одному используемому в практических приложениях закону требует более тщательного и широкого исследования этого вопроса.

В работе [Л. 43] для декадных и месячных интервалов предложена следующая трансформация нормального закона с трансформирующей функцией:

$$\left. \begin{aligned} Z(x) &= -\infty \text{ при } x \leq 0 \text{ и} \\ Z(x) &= a \ln \ln (1+x) + b \ln x + \\ &+ c \sqrt{x} \text{ при } x > 0, \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

где a , b , c — параметры распределения.

Однако в этой работе достаточная проверка соответствия указанной трансформации нормального закона эмпирическим данным не производилась.

р. Нарын (Уч-Курган)

	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I	II	III	Год IV-III
IV	1	0,48	0,55	0,70	0,70	0,62	0,49	0,41	0,56	0,55	0,55	0,34	0,77
V	0,48	1	0,45	0,27	0,25	0,28	0,26	0,25	0,31	0,35	0,39	0,21	0,53
VI	0,55	0,45	1	0,8	0,62	0,69	0,71	0,58	0,63	0,63	0,63	0,61	0,69
VII	0,70	0,27	0,8	1	0,83	0,84	0,81	0,69	0,76	0,76	0,71	0,64	0,93
VIII	0,70	0,25	0,62	0,83	1	0,94	0,76	0,55	0,65	0,60	0,61	0,50	0,85
IX	0,62	0,28	0,69	0,84	0,94	1	0,84	0,61	0,69	0,64	0,66	0,52	0,87
X	0,49	0,26	0,71	0,81	0,76	0,65	1	0,87	0,84	0,76	0,79	0,74	0,84
XI	0,41	0,25	0,58	0,69	0,58	0,69	0,87	1	0,92	0,84	0,89	0,83	0,72
XII	0,56	0,31	0,63	0,76	0,65	0,64	0,84	0,92	1	0,90	0,91	0,75	0,80
I	0,55	0,35	0,63	0,76	0,60	0,64	0,76	0,84	0,90	1	0,71	0,70	0,78
II	0,55	0,39	0,63	0,71	0,61	0,66	0,79	0,89	0,91	0,71	1	0,70	0,78
III	0,34	0,21	0,51	0,64	0,59	0,52	0,74	0,83	0,75	0,70	0,70	1	0,67

Таблица 4-2

Приток к оз. Байкал

	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	I	II	III	IV	Год V-IV
V	1	0,31	-0,02	0,17	0,28	0,28	0,16	-0,01	-0,05	-0,1	0,27	0,03	0,39
VI	0,31	1	0,35	0,38	0,44	0,24	0,29	0,14	0,02	0,01	-0,02	0,17	0,71
VII	-0,02	0,35	1	0,48	0,38	0,22	0,19	0,05	0,14	0,04	-0,02	0,18	0,68
VIII	0,17	0,38	0,48	1	0,60	0,34	0,29	0,07	0,23	-0,12	0,04	0,02	0,76
IX	0,28	0,44	0,38	0,60	1	0,54	0,42	0,12	0,05	-0,09	-0,05	0,21	0,79
X	0,28	0,44	0,38	0,60	0,54	1	0,23	0,14	-0,01	-0,13	0,17	0,13	0,55
XI	0,16	0,29	0,22	0,34	0,23	0,23	1	-0,12	0,02	-0,07	-0,07	0,10	0,43
XII	0,01	0,14	0,07	0,23	0,14	0,14	-0,12	1	-0,14	-0,05	-0,10	0,01	0,29
I	-0,01	0,02	0,01	0,01	-0,01	-0,01	0,02	-0,14	1	0,09	-0,04	-0,35	0,16
II	-0,05	0,02	0,04	0,12	0,13	0,17	-0,07	-0,05	0,09	1	-0,22	-0,05	-0,01
III	-0,10	0,01	0,04	0,04	0,09	0,13	-0,07	-0,10	-0,04	-0,22	1	-0,19	0,03
IV	0,27	-0,02	-0,02	0,04	0,21	0,13	0,10	0,01	-0,35	0,05	-0,19	1	0,23
	0,03	0,17	0,18	0,02	0,03	0,05	0,07	0,01	0,01	0,05	0,05	0,01	

Таким образом, вопрос о теоретическом законе распределения для месячных величин стока рек представляется еще нерешенным.

4-3. СПОСОБЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВНУТРИГОДОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТОКА РЕК И ПРИМЕР РАСЧЕТА ПО ИСКУССТВЕННЫМ ГИДРОЛОГИЧЕСКИМ РЯДАМ

В последние годы предложено несколько различных способов моделирования внутригодового распределения стока рек методом Монте-Карло. Для данной работы они имеют большое значение, поэтому остановимся на них подробно.

Первый метод был предложен Г. Г. Сванидзе [Л. 85]. Он заключается в моделировании гидрологического ряда способом двойной выборки. Сначала любым из методов, описанных в гл. 1, моделируется среднегодовой расход, а затем для него производится случайная выборка модели внутригодового распределения стока — так называемого фрагмента. Под фрагментом подразумеваются наблюдавшиеся в данном створе гидрографы реки, представленные в относительных ординатах, причем длительность интервала времени может быть любой (месяц, декада и др.). В соответствии с [Л. 85] «... преимущество применения фрагментов заключается в том, что фрагмент, являясь моделью реально наблюдаемого гидрографа, автоматически учитывает корреляционную зависимость между расходами воды отдельных интервалов и, следовательно, характерное для данной конкретной реки и створа внутригодовое распределение стока. Располагая набором таких фрагментов в количестве, равном числу наблюдаемых лет, при достаточно длинном гидрологическом ряде будем иметь множество вариантов внутригодовых колебаний стока (гидрографов). Нет особой надобности доказывать, что подобное многообразие гидрографов с достаточно высокой степенью вероятности должно охватывать возможное поведение стока в будущем».

При использовании метода фрагментов не требуется введения какого-либо теоретического закона распределения вероятностей для месячных расходов рек:

Применение метода фрагментов к расчетам многолетнего регулирования стока некоторых комплексных гидроузлов подробно рассмотрено ниже. Здесь же от-

метим, что несомненным достоинством метода фрагментов являются простота использования и возможность при необходимости проведения расчета по небольшим интервалам времени (пятидневки, недели, декады). С точки зрения использования ЭЦВМ для решения водохозяйственных задач по методу фрагментов можно отметить исключительную простоту программ. Однако при наличии большого числа фрагментов для хранения их требуется большая емкость оперативной или внешней памяти ЭЦВМ, что в случае расчета для каскада гидроузлов затрудняет решение. Некоторые осложнения в этом методе возникают при стыковании фрагментов за отдельные годы. Но они не представляются существенными при правильной разбивке года.

В работе [Л. 85] отмечается возможность учета при моделировании зависимости между водностью года и типом внутригодового распределения стока, что несомненно является его положительным качеством.

Вторым, к сожалению не доведенным до практического использования, является предложение Г. А. Гриневича [Л. 22]. Рекомендуется в пределах каждой сезонной фазы выделять в качестве базиса линии регрессии осредненное закономерное изменение уровня стока. На базис накладываются случайные относительные отклонения, которые интерпретируются как стационарный стохастический процесс. Использование этого предложения (если будут разработаны достаточно простые способы выделения базиса) потребует проведения соответствующего статистического анализа отклонений от выделенных базисов ординат наблюдаемых гидрографов для широкого круга рек. На основе такого анализа могли бы быть разработаны достаточно простые схемы моделирования гидрографов рек.

Третье предложение по моделированию внутригодового распределения стока базируется на рассмотрении процесса стока как периодического стохастического процесса с дискретным временем без деления его на годовые и внутригодовые интервалы. Средние расходы воды одноименного отрезка времени за многолетие рассматриваются как сечение случайной функции (т. е. так, как это было сделано в § 4-2). Статистические характеристики гидрологических рядов при таком представлении процесса стока были приведены выше. В данном методе, несомненно, необходимо знание или принятие гипотезы

о законе распределения вероятностей для месячных расходов.

Использование рассматриваемого метода для моделирования внутригодового распределения стока дано в работах [Л. 67, 34]. В этих работах для моделирования используется простая марковская цепь. При этом в работе [Л. 67] в качестве закона распределения вероятностей среднемесячных расходов принимается нормальная кривая распределения, а в работе [Л. 34] — кривая Пирсона III типа.

Применение рассматриваемого метода моделирования внутригодового распределения стока рек, по нашему мнению, возможно, если корреляционные связи между смежными расчетными интервалами времени значительно выше, чем при сдвиге $\tau = 2, 3, 4$ и т. д. и если с ростом τ они уменьшаются. При сезонном регулировании стока этого условия достаточно для правомерного использования данного способа моделирования внутригодового распределения стока.

Для многолетнего регулирования стока требуется дополнительно, чтобы на рассматриваемой реке отсутствовала многолетняя цикличность в колебаниях стока или хотя бы связь между соседними среднегодовыми расходами, либо и тем и другим можно было бы пренебречь.

Первое условие на некоторых реках выполняется, что подтверждается [Л. 34, 67]. В табл. 4-1 и 4-2 также можно отметить, что коэффициенты корреляции главной диагонали матрицы (т. е. коэффициенты корреляции между смежными месяцами) превосходят все остальные коэффициенты. Однако на ряде рек Средней Азии и Сибири при $\tau = 2, 3$ и т. д. коэффициенты корреляции оказываются примерно равными, а в некоторых случаях превосходят вдвое и более коэффициенты корреляции при $\tau = 1$. Не затрагивая эти вопросы более подробно, отметим, что в случае, когда обоснована необходимость учета дальних связей внутри года, при моделировании внутригодового распределения стока можно применить не простую марковскую цепь, а m -звенную цепь Маркова (при месячной разбивке — до 12-звенной).

Уравнение для моделирования внутригодовых расходов аналогично приведенному выше для годовых расходов (3-11):

$$Q_i = \bar{Q}_i - \sum_{j=1}^{12} (Q_{i-j} - \bar{Q}_{i-j}) \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-j}} \frac{D_{i(i-j)}}{D_{ii}} + \Phi_i(\xi_i, C_{\sigma i}^{усл}) \sigma_i \sqrt{\frac{D}{D_{ii}}} \quad (4-3)$$

Здесь Φ_i соответствует отклонению ординаты кривой обеспеченности от нормы для принятого закона распределения вероятностей, а $\bar{Q}_i$ и σ_i — месячным нормам и стандартам. Все остальные обозначения прежние.

Следует заметить, что использование при многолетнем регулировании данного способа моделирования при несоблюдении второго указанного выше условия, т. е. при наличии цикличности стока или хотя бы связи между стоками смежных лет, может привести к некоторым ошибкам. Чтобы показать это, мы с помощью метода, описанного в [Л. 67], провели моделирование среднемесячных величин притока к оз. Байкал, вычислили среднегодовые расходы этого ряда длиной в 1 000 лет и определили его статистические характеристики. Эти данные приведены в табл. 4-3 и показывают, что в сравнении

Таблица 4-3

Показатели	$\bar{Q}$	C_v	C_s	r_1
По исходному ряду	1 938	0,196	0,8	0,34
По искусственному ряду . .	1 932	0,176	0,0	-0,03

с характеристиками исходного ряда одинаковыми оказались только нормы стока, коэффициент вариации отличается сравнительно немного; связь между смежными членами искусственного ряда практически равна нулю. Очевидно, что проведение расчетов глубокого многолетнего регулирования стока по такому ряду даст преуменьшение необходимой многолетней емкости водохранилища.

В свете сказанного данный метод моделирования внутригодового распределения стока может быть использован для условий сезонного регулирования стока любых рек при известном законе распределения месячных расходов. Для условий многолетнего регулирования стока метод применим только для рек, на которых можно пренебречь связью между смежными членами годовых объемов стока и его цикличностью.

Рассмотренные способы моделирования длинных искусственных гидрологических рядов с месячным интервалом осреднения позволяют производить водохозяйственные расчеты многолетнего регулирования стока комплексных гидроузлов без деления емкости водохранилища на многолетнюю и сезонную составляющие.

В качестве иллюстрации подобного водохозяйственного расчета, выполненного по длинным искусственным рядам, смоделированным методом Монте-Карло, рассмотрим результаты расчета многолетнего регулирования стока Мингечаурским водохранилищем на р. Кура. При моделировании годовых стоков применялась простая цепь Маркова, для учета внутригодового распределения — метод фрагментов.

Мингечаурская ГЭС находится в эксплуатации с 1953 г. и является крупнейшей гидростанцией Азербайджанской энергосистемы. Ее водохранилище осуществляет многолетнее регулирование стока р. Куры в интересах целого комплекса водопотребителей и водопользователей. Гидроэлектростанция имеет мощность 369 тыс. кВт со среднемноголетней выработкой электроэнергии 1,434 млрд. кВт·ч в год. Мингечаурское водохранилище удовлетворяет потребности сельского хозяйства Кура-Араксинской низменности. Задержанная в водохранилище вода используется как для орошения, так и для обводнения. С помощью Мингечаурского гидроузла ликвидированы наводнения. В результате задержания в водохранилище избытков воды высоких половодий предельное значение максимального расхода воды снижается до 1200—1300 м³/сек по сравнению, например, с максимальным расходом 1%-ной обеспеченности 2860 м³/сек. Регулирование стока, осуществляемое Мингечаурским водохранилищем с относительной емкостью 0,63, благоприятно сказывается также на условиях навигации в нижнем течении р. Куры и рыбном хозяйстве.

В нижнем бьефе Мингечаурской ГЭС сооружен Варваринский гидроузел, водохранилище которого служит для выравнивания внутрисуточной неравномерности расходов Мингечаурской ГЭС.

В результате расчетов, выполненных на ЭЦВМ «Урал-2» табличным методом по наблюдаемому 46-летнему ряду, гарантированная мощность Мингечаурской и Варваринской ГЭС оказалась равной 136 тыс. кВт при обеспеченности 99,8% по числу бесперебойных месяцев или при обеспеченности 98% по числу бесперебойных лет.

Обеспеченность отдачи воды для ирригации составила 91,5% по числу бесперебойных месяцев и 87,2% по числу бесперебойных лет, что практически соответствует заданному нормативу. За пределами этой обеспеченности принималось снижение ирригационной отдачи на 15%. Обеспеченность сниженной отдачи составила 99,1% по числу бесперебойных месяцев и 95,7% по числу бесперебойных лет. При $p > 95,7\%$ отдача на ирригацию снижается на 35% по сравнению с гарантированной и является бесперебойной.

Для обеспечения бесперебойной гарантированной энергоотдачи 136 тыс. кВт и указанной выше отдачи на ирригацию в наблюдаемом 46-летнем ряду требуется сработка Мингечаурского водохра-

нилища до отметки 470,6 м. В результате расчетов был построен диспетчерский график работы Мингечаурского водохранилища (рис. 4-2).

Для проверки полученных по наблюдаемому ряду водноэнергетических показателей и диспетчерского графика Мингечаурских ГЭС были выполнены расчеты регулирования стока по 10 столетним и 34-м 50-летним рядам, смоделированным методом Монте-Карло. Расчеты по искусственным рядам производились на ЭЦВМ «Урал-2», так же как и по наблюдаемому ряду лет, табличным методом; в качестве расчетного интервала времени принимался 1 мес.; режим работы гидроузла назначался при помощи построенного выше диспетчерского графика таким образом, чтобы в каждый момент времени принятый размер отдачи гидростанций и отбор воды на нужды неэнергетических потребителей соответствовали той режимной зоне, в пределах которой находится уровень воды в водохранилище. После выполнения расчетов диспетчерский график работы Мингечаурской ГЭС был уточнен.

В результате расчетов регулирования стока по искусственным 100-летним рядам было получено, что обеспеченность требуемых отъемов на ирригацию колеблется от 88 до 95% при средней за 1000 лет 91,5%; обеспеченность сниженной ирригационной отдачи изменялась в отдельные столетия от 97 до 99,9% (по числу бесперебойных месяцев). Средняя за 1000 лет обеспеченность отдачи составила 98,5%. Число месяцев работы с перебойной энергоотдачей составляет в отдельные столетия от 0 до 27. Это соответствует обеспеченности гарантированной отдачи 97,8—99,9%. Обеспеченность гарантированной энергоотдачи в 1000-летнем ряду равна 98,7%, т. е. на 1% меньше, чем в наблюдаемом ряду, в котором она является бесперебойной. Соответствующие характеристики обеспеченностей отдачи по числу бесперебойных лет приведены в табл. 4-4.

В смоделированных столетиях сниженная энергоотдача составляет 0,9 гарантированной и практически не имеет перебоев. Наиниз-

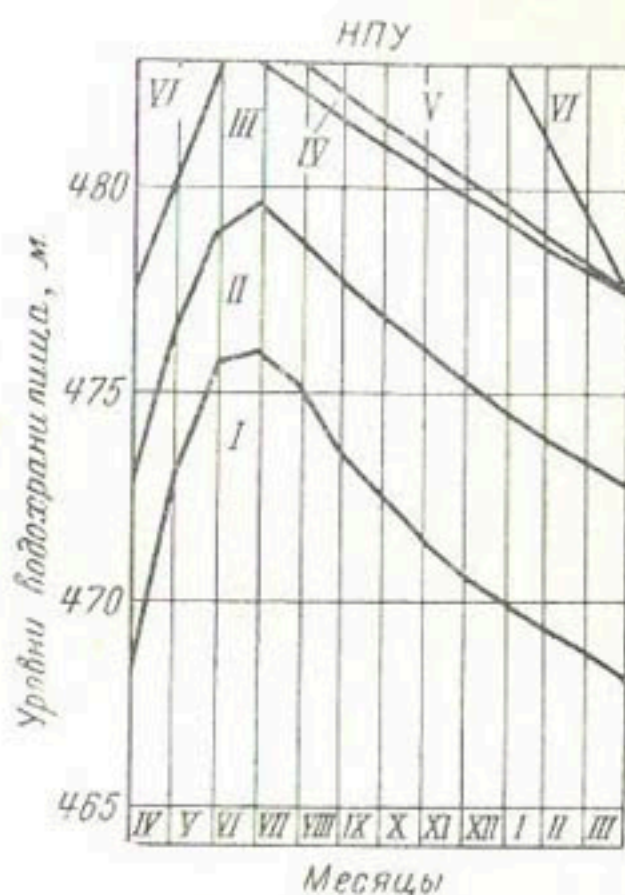


Рис. 4-2. Диспетчерский график Мингечаурской ГЭС.

I — зона работы Мингечаурской и Варваринской ГЭС с $N=0,9N_{\text{гар}}$ и сниженным на 35% забором воды для ирригации; *II* — зона работы Мингечаурской и Варваринской ГЭС с $N_{\text{гар}}$ и сниженным на 15% забором воды для ирригации; *III* — зона работы Мингечаурской и Варваринской ГЭС с гарантированной отдачей $N_{\text{гар}}$; *IV* — зона работы с $1,3N_{\text{гар}}$; *V* — зона работы с максимальным расходом через Варваринскую ГЭС; *VI* — зона работы с максимальным расходом через Мингечаурскую ГЭС (требования ирригации удовлетворяются полностью при уровне водохранилища выше зоны *II*).

Номера столетий	Наименование отряда	Ирригационная отдача									
		Число перебоев энергоотдачи				Обеспеченность энергоотдачи, %				формальная	
		Число перебоев		Число перебоев		Число перебоев		Число перебоев		сниженная	
		месяцы	годы	по числу месяцев	по числу лет	по числу месяцев	по числу лет	по числу месяцев	по числу лет	по числу месяцев	по числу лет
1	439,5	14	7	98,8	92,0	124	28	89,5	71,3	14	7
2	468,4	25	9	98,0	90,2	179	32	85,0	67,3	25	9
3	468,3	15	6	98,8	93,0	142	27	88,0	72,3	15	6
4	468,1	15	5	98,8	94,2	92	21	92,2	78,2	15	5
5	471,8	0	0	99,9	99,9	35	14	97,0	85,0	0	0
6	466,0	25	6	98,0	93,0	82	15	93,1	84,1	26	6
7	467,0	27	6	98,0	93,0	115	20	90,5	79,1	27	6
8	470,9	0	0	99,9	99,9	68	16	94,3	83,2	0	0
9	468,7	15	5	98,8	94,2	100	20	91,6	79,1	15	5
10	468,9	9	6	99,3	93,0	175	29	85,4	70,3	9	6
Всего за 1 000 лет	466,0	147	50	98,8	95,0	1 112	222	90,6	77,7	147	50
Наблюденный ряд 45 лет	470,6	0	0	99,8	98,0	45	5	91,5	87,2	0	0

Таблица 4-5

Показатели	$\bar{\Sigma}$, млрд. кат.ч	σ (Э), млрд. кат.ч	C_v (Э)	C_s (Э)	$\Sigma_{\text{макс}}$, млрд. кат.ч	$\Sigma_{\text{мин}}$, млрд. кат.ч
Наблюденный ряд — 45 лет	1,4341					
10 столетий	1,4318	0,0210	0,015	-0,73	1,4641	1,3847
34 50-летия	1,4254	0,0354	0,025	0,30	1,5004	1,3671

шая отметка сработки водохранилища в смоделированном 1000-летнем ряду на 4,6 м ниже, чем в наблюдаемом.

Средняя за 1000 лет выработка энергии рассматриваемого каскада ГЭС практически равна выработке энергии за период наблюдений. Однако в отдельные столетия среднегодовой выработки энергии отличались в большой степени от выработки, определенной по наблюдаемому ряду, и от средней за 1000 лет. Средние максимальное и минимальное значения среднегодовой выработки энергии Мингечаурской и Варваринской ГЭС в рассмотренных столетках, приведены в табл. 4-5.

Приведенные данные, полученные по искусственному гидрологическому ряду, позволили подойти к исследованию возможных изменений среднегодовой выработки энергии каскада Э. На возможность и необходимость оценки ошибки этой величины, определенной по ряду наблюдений, указывали в своей работе С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель [Л. 56]. Для этой цели, кроме указанных 10 столетий, было смоделировано также 34 50-летних отрезка из ряда длиной 1700 лет. Длина отрезка была выбрана в соответствии с длиной имеющегося ряда наблюдений. В результате расчетов для каждого из 50-летий была определена среднегодовая выработка энергии. По совокупности этих величин, найденных в результате водохозяйственного расчета по всем 34 50-летиям, было построено эмпирическое распределение среднегодовой выработки энергии каскада. Это эмпирическое распределение вместе с нормальной кривой при соответствующих статистических параметрах дано на рис. 4-3. Статистические параметры этого распределения, а также аналогичные параметры распределения по столетиям даны выше в табл. 4-5.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что распределение величины $\bar{E}$ является несмещенным, близким к нормальному. Коэффициент изменчивости сравнительно невелик, причем для столетий он немного ниже, чем для 50-летий. Абсолютная величина стандартной ошибки среднегодовой выработки энергии данного каскада такова, что ее не следует, видимо, учитывать при составлении балансов энергии в данной энергосистеме. Этот вывод не следует распространять на энергосистемы с большим удельным весом гидроэлектростанций. Заслуживают внимания также полученные в смоделированных 50- и 100-летиях максимальные и минимальные величины среднегодовой выработки энергии, которые могут существенно отличаться от математического ожидания этих величин.

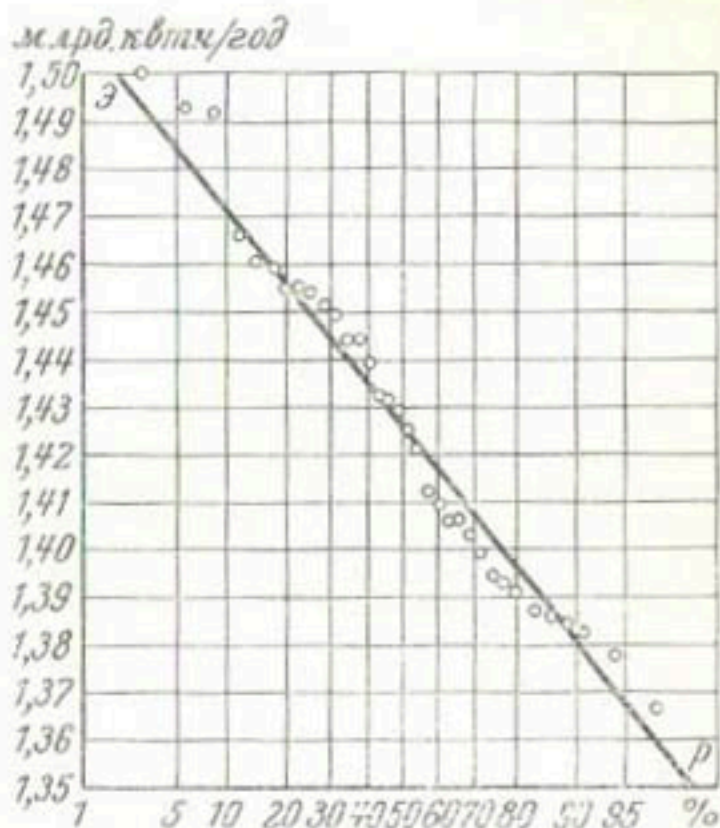


Рис. 4-3. Эмпирическое распределение среднегодовой выработки Мингечаурского каскада.

4-4. НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ СУТОЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТОКА РЕК

Для ряда водохозяйственных расчетов месячные временные интервалы осреднения, рассмотренные нами выше, оказываются недостаточными. Так, в период паводка определение энергетических характеристик ГЭС обычно проводят по декадным, недельным или пятидневным интервалам. При проведении расчетов пропуска паводков через сооружения гидроузла обычно используются суточные или еще более малые интервалы осреднения (например, шестичасовые). Естественно, что в этих случаях требуется знание соответствующих генетических и статистических закономерностей колебаний стока рек. Генетические способы исследования паводочного стока изложены в [Л. 3, 32, 33 и др.] и здесь не рассматриваются. Наиболее интересной попыткой исследовать статистические закономерности декадного стока некоторых рек являются работы Н. А. Картвелишвили [Л. 39, 42 и др.] В первой из них было показано, например, что на р. Терек декадные расходы внутри каждого из пяти условно выделенных авторами сезонов года являются однородной выборкой.

Наблюдаемые данные по всем пяти сезонам согласуются с гипотезой о логарифмической нормальности распределения. Зависимостью между значениями среднедекадных расходов можно пренебречь.

Для р. Неман также удалось выявить сезоны, на протяжении которых процесс стока приближенно можно считать стационарным процессом. Однако на этой реке пренебрегать зависимостями между значениями среднедекадных расходов оказалось невозможным, и в качестве вероятностной модели использовалась марковская последовательность. Для меженных декад распределения расходов р. Неман хорошо аппроксимировались логарифмически нормальной кривой. Для паводочных декад опытные данные не дали согласия с логнормальным, нормальным, равномерным и биномиальным распределениями. По-видимому, наблюдения периода паводка, объединенные по признаку календарной даты, нельзя считать выборкой из одной генеральной совокупности.

Представляет определенный интерес рассмотреть в данной работе закономерности суточных расходов рек в период паводка. Анализ будет проведен применительно к некоторым рекам Сибири и Закавказья. Метод ис-

следования в значительной степени подобен примененному при выявлении статистических закономерностей месячного стока (см. § 4-2) и в работе [Л. 39].

Период наблюдений, по которому определялись статистические характеристики суточных расходов, был сравнительно небольшим: 14—15 лет. Для проверки влияния длины ряда на статистические характеристики последние для одной из рек были вычислены и по ряду длиной 28 лет. Совпадение характеристик получилось хорошим.

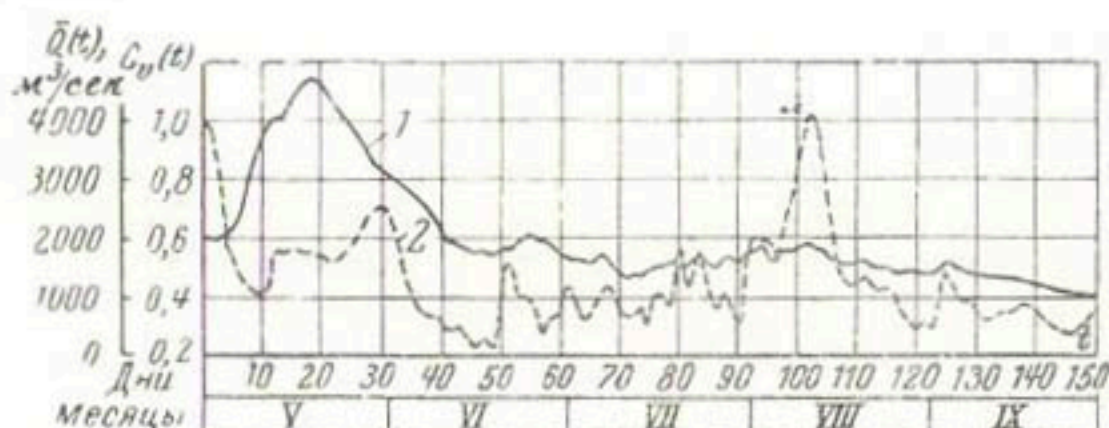


Рис. 4-4. Норма стока $\bar{Q}$ и коэффициенты вариации C_v для каждого дня паводка, подсчитанные по 15-летнему периоду наблюдений боковой приточности р. Ангара между Богучанской ГЭС и Усть-Тасеевской плотинной.

1 — норма стока; 2 — коэффициенты вариации.

Математические ожидания суточных расходов одной из рассмотренных рек за паводочный период (длина его принималась равной 5—6 мес.) представлены на рис. 4-4. Там же приведены коэффициенты вариации суточных расходов за отдельные сутки паводочного периода. Полученные данные свидетельствуют о существенном различии статистических характеристик $\bar{Q}(t)$ и $C_v(t)$ суточных расходов различных рек за период паводка, а также свидетельствуют о наличии на каждой реке существенных изменений характеристик с течением времени. Судя по рис. 4-4, рассмотренные процессы скорее всего следует отнести к классу нестационарных случайных функций [Л. 14]. Однако требование наличия в стационарной функции некоторого постоянного среднего, вокруг которого происходят колебания случайной функции, и постоянства дисперсии не являются основными. Главным условием стационарности процесса являются [Л. 14] отсутствие зависимости корреляционной

функции его от положения его первого аргумента на оси абсцисс и наличие такой зависимости только от промежутка τ между первым и вторым аргументами. Таким образом, корреляционная функция стационарного случайного процесса должна быть функцией только одного аргумента. Это требование означает необходимость постоянства коэффициентов корреляции вдоль параллелей главной диагонали.

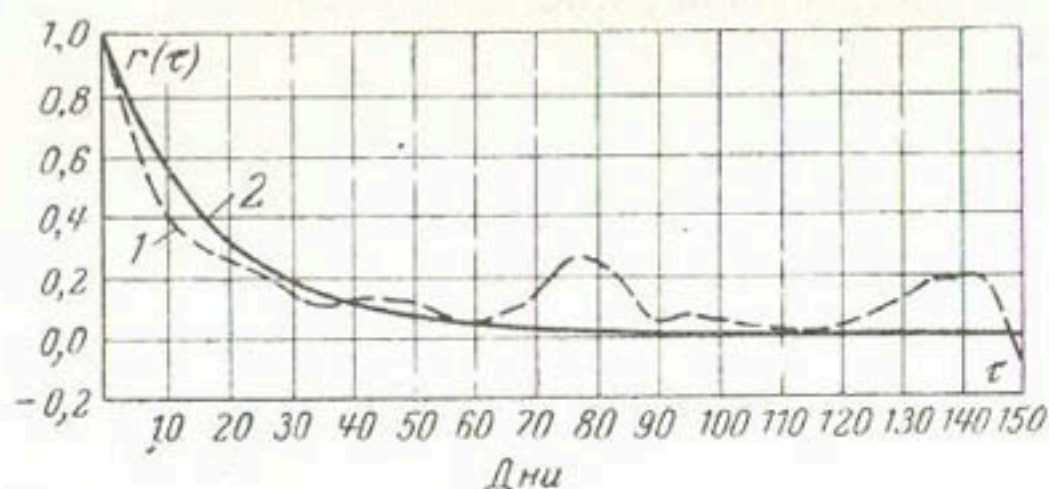


Рис. 4-5. Осредненная корреляционная функция ежедневных расходов боковой приточности р. Ангары на участке между Богучанской ГЭС и Усть-Тасеевской плотиной за половодный период, построенная по 15-летнему ряду наблюдений (1), и корреляционная функция простой цепи Маркова (2).

Рассмотрим корреляционные функции суточных расходов. По специальной программе, составленной в институте Энергосетьпроект на ЭЦВМ «Урал-2», для исследуемых рек были сосчитаны корреляционные матрицы, характеризующие связи между суточными сечениями случайной функции. Ввиду чрезвычайной громоздкости матриц они здесь не приводятся. Следует лишь отметить, что значения отдельных коэффициентов корреляции вдоль параллелей к главной диагонали не являются постоянными, однако разброс был сравнительно небольшим. Так, для бокового притока р. Ангары коэффициенты корреляции на первой диагонали, параллельной главной, колебались от 0,69 до 0,99 со средней 0,95, на второй диагонали — от 0,49 до 0,98, со средней 0,88 и т. д.

Принимая во внимание весьма ограниченное число обработанных реализаций (14—28) и учитывая наличие большого элемента случайности в полученных оценках

коэффициентов корреляции, эти, казалось бы, видимые отклонения от стационарности вряд ли можно считать значимыми, тем более что в полученных корреляционных матрицах не было отмечено отступлений сколько-нибудь закономерного характера. Поэтому, видимо, целесообразно и допустимо на данном этапе исследований считать случайную функцию суточных расходов рассмотренных рек стационарной случайной функцией.

Для стационарной случайной функции необходимо провести осреднения коэффициентов корреляции вдоль параллелей главной диагонали. Эти осреднения также выполняются в программе, упомянутой выше. График осредненной корреляционной функции для одной из рассмотренных рек представлен на рис. 4-5. Этот график представляет собой довольно плавно изменяющуюся линию. Значения коэффициентов корреляции в большинстве случаев положительны. Иллюстрация спектрального преобразования осредненных корреляционных функций суточных расходов одной из рек представлена на рис. 4-6.

Все приведенные выше материалы дают возможность высказать некоторые соображения о целесообразности применения к рассматриваемому процессу одного из наиболее разработанных подклассов случайных функций, а именно цепей Маркова. На рис. 4-5 нанесена корреляционная функция, а на рис. 4-6 — спектральная функция простого марковского процесса, у которого первый коэффициент корреляции равен соответствующему среднему коэффициенту на первой диагонали, параллельной главной. Как видно из рисунков, совпадение осредненных эмпирических корреляционных функций с корреляционными функциями простого марковского

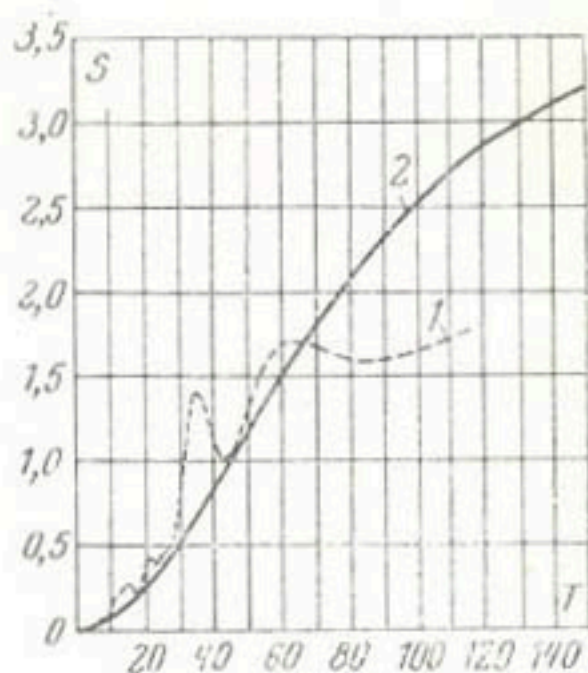


Рис. 4-6. Осредненная спектральная функция ежедневных расходов за половодный период (боковая приточность на участке Иркутск — Братск), построенная по 28-летнему периоду наблюдений (1), и спектральная функция простой цепи Маркова (2).

ляется распространение на случай паводков описанного в § 4-3 метода фрагментов, или, как его называют в проектной практике, метода «расчетных моделей».

Для моделирования паводков с помощью метода фрагментов можно использовать две разновидности последнего:

1. В качестве фрагментов используются несколько наблюдаемых гидрографов за паводочные и меженные месяцы, представленных в виде ежесуточных расходов воды в паводочные месяцы и ежемесячных расходов в меженные месяцы в долях среднегодового расхода. Основным достоинством такого метода является его простота. Действительно, для получения ежедневных расходов за период паводка и месячных расходов за период межени необходимо только умножить ординаты выбранного фрагмента на найденный среднегодовой расход. Способ выбора фрагмента с помощью равномерно распределенных случайных чисел был рассмотрен в § 4-3, а также в [Л. 87].

Определение среднегодового расхода осуществляется моделированием, рассмотренным в § 1-4. Существенным недостатком метода следует считать необходимость большого объема памяти ЭЦВМ для хранения фрагментов, каждый из которых включает 100—150 и более суточных и месячных ординат.

2. Метод, который можно по аналогии с § 4-3 называть методом тройной выборки. В нем сначала моделируются годовые величины стока, затем месячные (или, как в [Л. 67], сразу месячные) и, наконец, для каждого паводочного месяца разыгрывается фрагмент внутримесячного распределения. Подробные рекомендации по использованию такого способа даны в [Л. 67]. В этих рекомендациях учитываются коэффициенты вариации внутримесячного распределения стока в различные месяцы, даются способы выбора фрагментов из данных наблюдений и т. д. Следует отметить, что использование этого метода значительно сложнее, чем первого, хотя при применении его и требуется намного меньше памяти ЭЦВМ для хранения фрагментов. Последнее достигается тем, что фрагменты заготавливаются лишь для месячных интервалов времени и используются в трансформированном виде в любом месяце года, когда средний расход его превышает некоторую наперед заданную величину, являющуюся признаком паводочного месяца. Следует за-

метить, что в работе [Л. 67] использовались не суточные, а шестичасовые расходы.

Для расчетов пропуска паводков через сооружения гидроузлов с целью определения необходимой пропускной способности их представляется более целесообразным использовать все же вторую из приведенных здесь схем, так как она дает большее разнообразие возможных конфигураций паводков. При этом в отличие от [Л. 67] представляется возможным оперировать не смоделированными годовыми расходами, а объемами паводков заданной нормативной обеспеченности, используя при этом полученное методом Монте-Карло распределение объема паводка во времени.

В качестве иллюстрации использования искусственных гидрографов для проведения расчетов пропуска паводков через гидроузлы могут быть приведены результаты расчетов, выполненных для Мингечаурского гидроузла. В этих расчетах использовалась следующая простейшая схема метода фрагментов, которая обычно применяется в проектной практике: 1) объем паводка принимается равным объему заданной расчетной обеспеченности (0,01%; 1%); 2) в качестве фрагментов используются паводочные гидрографы за многоводные годы с суточным интервалом осреднения. Указанные расчеты были запрограммированы на ЭЦВМ «Урал-2», что позволило проводить их в большом объеме с малой по сравнению с ручными расчетами затратой труда и времени. Конечной целью рассматриваемых расчетов являлось установление оптимальных правил пропуска экстремальных половодий через гидроузлы, т. е. построение так называемой линии безопасности диспетчерского графика (см. рис. 4-2).

Для построения расчетных гидрографов половодий из имеющегося 46-летнего ряда наблюдений было отобрано 11 половодий обеспеченностью менее 50% с различной интенсивностью нарастания расходов и продолжительностью пика. По гидрографам отобранных половодий как по моделям (фрагментам) были построены гидрографы половодий вероятностью превышения 0,01%; 1%. Построение расчетных гидрографов половодий производилось по известному соотношению между объемами естественного и расчетного половодий.

Для построения линии безопасности по расчетным гидрографам половодий обеспеченностью 0,01 и 1% были выполнены расчеты трансформации половодий ходом назад — соответственно от предельной допустимой отметки форсировки и от НПУ при максимально допустимых сбросах в нижний бьеф. В результате расчетов были установлены для каждого гидрографа половодья среднесуточные уровни воды в водохранилище за период от начала половодья до достижения максимальной допустимой отметки воды в водохранилище: НПУ в половодье обеспеченностью 1% и ФПУ в половодье обеспеченностью 0,01%. Нижняя огибающая полученных для разных гидрографов уровней воды является линией безопасности и отделяет на диспетчерском графике зону работы с максимальным допустимым расходом через гидроузел от зоны работы гидростанции с гарантированной отдачей.

Таким образом, с помощью описанного способа можно получить любое количество паводков с объемом стока заданной обеспеченности, но различной конфигурации. Появление каждого такого паводка равновероятно, и расчет необходимой пропускной способности гидроузла по набору смоделированных паводков дает, видимо, более осторожное и надежное решение, чем расчет по одному генетически обоснованному расчетному гидрографу.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ В НЕСКОЛЬКИХ СТОРАХ

5-1. ОБЪЕДИНЕНИЕ ЭНЕРГОСИСТЕМ И ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ ГЭС

Одной из наиболее характерных и важных черт современной и перспективной энергетики является резко выраженная тенденция к централизации энергопроизводства, объединению электростанций различных типов для параллельной работы в крупных энергетических системах [Л. 122].

Нарастающая централизация энергоснабжения и формирование все более крупных энергосистем дают возможность возложить на каждый источник энергии определенные функции, в наибольшей степени соответствующие его технологическим особенностям и экономическим характеристикам. Это позволяет существенно повысить экономическую эффективность каждого компонента централизованного энергохозяйства, в частности гидроэнергетики [Л. 109].

Современный этап развития гидроэнергетики характеризуется строительством каскадов гидроузлов на ряде рек, гидроэлектростанции которых предназначены для работы в объединенных энергосистемах. В этих условиях режимы работы ГЭС, расположенных на одной или нескольких реках, а также водноэнергетические характеристики гидроэлектростанций и в первую очередь их гарантированные мощности зависят друг от друга. Указанная связность сооружаемых гидроузлов и ГЭС вынуждает рассматривать их при проектировании совместно, т. е. находить наилучшие совместные режимы работы водохранилищ и ГЭС при определении их водноэнергетических характеристик, выборе оптимальных параметров и оптимальной очередности ввода отдельных станций.

Совместное рассмотрение при проектировании, а в дальнейшем и совместная эксплуатация различных ГЭС и отдельных энергосистем, дают ряд как технических, так и особенно экономических преимуществ по сравнению с раздельной работой электростанций, что приводит к увеличению общей эффективности энергостроительства (см. [Л. 75, 104, 108]).

Характерной чертой современного этапа развития гидроэнергетики является также тесная взаимосвязь энергетического и водного хозяйств.

При проектировании следует считаться с созданием каскадов гидроузлов и водохранилищ на реках, межбассейновыми перебросками стока, значительными изъятиями воды из рек на нужды орошения, обводнения и водоснабжения, с резкой неравномерностью сбросов воды в нижние бьефы гидроузлов в течение суток и недели, с использованием преобладающей части водных ресурсов реки в осенне-зимний период по требованиям энергетики и с энергетическими связями гидроэлектростанций, расположенных в бассейнах различных рек [Л. 1, 2]. В перспективе на работу ГЭС и водохранилищ все большее влияние будут оказывать сельское хозяйство и промышленность из-за заборов воды и сбросов сточных вод.

В настоящее время вопросы оптимизации режимов работы гидроузлов с водохранилищами и их диспетчеризация для сложных каскадов разработаны совершенно недостаточно. Эти вопросы являются предметом исследования многих авторов [Л. 36, 37, 64, 102, 103] и в настоящей работе рассматриваться не будут. Одной из последних и наиболее полных работ в данной области является книга Е. В. Цветкова [Л. 101], к которой мы и отсылаем читателя.

Здесь будет рассмотрен частный случай оптимизации режимов работы ГЭС, который может быть осуществлен при наличии асинхронности стока рек и неравнозначности регулирующих сток водохранилищ, объединяемых для совместной работы гидроэлектростанций. Эффект оптимизации режимов работы ГЭС в указанных условиях получил наименование водноэнергетического эффекта совместной работы ГЭС. В основе этого эффекта лежит известное положение о том, что важным фактором повышения эффективности использования гидроресурсов является повышение зарегулированности водной энергии.

Образование крупных энергетических объединений, в которых работают мощные гидростанции или каскады ГЭС, расположенные на водотоках, разделенных значительными расстояниями и имеющих различные гидрологические режимы, создает новые, дополнительные предпосылки для увеличения общей гарантированной отдачи гидростанций, входящих в состав этих объединений, по сравнению с суммой гарантированных отдач этих станций до их объединения.

В объединенных энергосистемах благодаря наличию ЛЭП, помимо водохозяйственного компенсированного регулирования отдачи гидравлически связанных гидроустановок, осуществляется так называемое электрическое межбассейновое регулирование отдачи гидроэлектростанций, гидравлически не связанных. Сущность его заключается в том, что в зависимости от потребности отдельных энергосистем в гидроэнергии она может передаваться из одного энергорайона в другой. Общая гарантированная отдача объединяемых единой высоковольтной сетью гидростанций — это их суммарная мощность требуемой расчетной обеспеченности, поступающая в энергосистему. При этом отдачи отдельных ГЭС, образующие общую гарантированную отдачу, могут изменяться, но сумма их должна оставаться постоянной.

Повышение зарегулированности общей отдачи ГЭС энергосистемы зависит от гидрологических особенностей водотоков, на которых работают объединяемые энергосистемой гидростанции, и регулирующих возможностей водохранилищ и расположения их в каскаде.

Гидрологические особенности водотоков, предопределяющие увеличение зарегулированности отдач гидростанций, заключаются в наличии асинхронности колебаний стока рек, протекающих на территории объединенной энергосистемы. Этот водноэнергетический эффект получается при работе ГЭС в энергосистеме за счет естественной взаимной компенсации их отдач, т. е. низкая отдача ГЭС на одних водотоках может совпадать с относительно более высокой отдачей на других гидростанциях энергосистемы; в этом случае общая гарантированная отдача ГЭС превысит сумму гарантированных равнообеспеченных отдач гидростанций.

Эффект компенсированного режима регулирования становится особенно значительным в том случае, если на компенсируемых ГЭС можно осуществлять сравни-

тельно неглубокое сезонное регулирование стока, а ГЭС-компенсаторы способны проводить глубокое многолетнее регулирование не только приточности к створу данной ГЭС, но и выработку энергии всех компенсируемых ГЭС. Указанные преимущества совместной работы энергосистем и ГЭС в них выражаются в конечном счете в сокращении необходимых генерирующих мощностей электростанций в объединенной энергосистеме. За этот счет в некоторых энергосистемах можно повысить гарантированные отдачи ГЭС на 5—20% (подробнее см. [Л. 97, 104 и др.]).

Таблица 5-1

Энергосистема	Сумма гарантированных мощностей, тыс. кВт	Общая гарантированная мощность ГЭС объединения ¹ , тыс. кВт	Прирост	
			тыс. кВт	%
Европейской части СССР без Северо-Запада	4 820	4 960	140	2,9
Азербайджана	219	245	26	11,8
Армении	190	200	10	5,3
Грузии	564	659	95	16,8
Всего по Закавказью	973	1 104	131	13,5
Северного Кавказа	414	472	58	14,0
Всего по Кавказу	1 387	1 576	189	13,6
Объединение трех энергосистем Закавказья	1 104	1 165	61	5,5
Объединение энергосистем Закавказья и Северного Кавказа	1 637*	1 734	97	5,9
Общий эффект от объединения ГЭС Кавказа	1 387	1 734	347	25,0

¹ Для европейских ГЭС приведены мощности, средние за период с VII по III месяцы, для кавказских ГЭС — с X по III месяцы.

* Получено как сумма общей гарантированной мощности энергосистем Закавказья (1 165 тыс. кВт) и Северного Кавказа (472 тыс. кВт).

В табл. 5-1 показаны размеры водноэнергетического эффекта, получаемого при создании энергосистем европейской части СССР, вычисленного в институте Энергосетьпроект [Л. 104]. В табл. 5-2 представлены общая гарантирования мощность гидроэлектростанций Восточной Сибири, приросты общей гарантированной мощности гидроэлектростанций за счет вводимой ГЭС, в том числе за счет компенсированного регулирования отдачи енисей-

Таблица 5-2

Гидростанции, работающие совместно	Глубина сработки Братского водохрани- лища, м	Мощность ГЭС при раз- дельной работе Ангарского и Енисейского каскадов, Мвт	Мощность ГЭС при ком- пексированном регулировании отдачи Ени- сейского кас- када, Мвт	Прирост гарантированной мощности ГЭС в системе за счет вводимой гидро- станции, Мвт			Суммарный эф- фект компенса- ционного регули- рования		Примечание
				всего	за счет ввода ГЭС	за счет компенси- рованного режима	Мвт	% к мощ- ности при изолиро- ванной работе	
Иркутская и вводи- мая Братская	4,5	2 760	2 800	2 395	2 355	40	40	1,5	100 из 1 750 Мвт получены за счет увеличения гаран- тированной мощ- ности Краснояр- ской ГЭС при вводе Саянской ГЭС
	6,3	2 780	2 835	2 430	2 375	55	55	2,0	
	7,5	2 785	2 850	2 445	2 380	65	65	2,3	
Иркутская, Братская и вводимая Краснояр- ская	4,5	4 350	4 975	2 175	1 590	585	625	14,3	
	6,3	4 385	5 030	2 195	1 605	590	645	14,7	
	7,5	4 400	5 045	2 195	1 615	580	645	14,6	
Иркутская, Брат- ская, Красноярская и вводимая Усть-Илим- ская	4,5	6 630	17 340	2 355	2 280	85	710	10,7	
	6,3	6 695	17 420	2 390	2 310	80	725	10,8	
	7,5	6 725	17 450	2 405	2 325	80	725	10,8	
Иркутская, Брат- ская, Красноярская, Усть-Илимская и вво- димая Саянская	4,5	8 380	9 625	2 285	1 750	535	1 245	14,9	
	6,3	8 445	9 730	2 310	1 750	560	1 285	15,3	
	7,5	8 475	9 770	2 320	1 750	570	1 295	15,3	
Иркутская, Брат- ская, Красноярская, Усть-Илимская, Саян- ская и вводимые Ени- сейская и Богучанская	4,5	13 380	14 945	5 320	5 000	320	1 565	11,7	

ских ГЭС отдачей ангарских гидростанций при различных глубинах сработки основного компенсатора — Братского водохранилища.

До настоящего времени расчеты многолетнего компенсированного регулирования сложных каскадов ГЭС в проектной практике осуществлялись непосредственно на базе календарных рядов наблюдений за стоком, так как до сих пор не было разработано удовлетворительной вероятностно-статистической методики проведения расчетов. Применение метода Монте-Карло к расчетам многолетнего регулирования стока позволило предложить несколько способов и приемов таких расчетов.

Для проведения расчетов совместного (в том числе многолетнего) регулирования стока в нескольких водохранилищах необходимо одновременно моделировать искусственные гидрологические ряды притоков воды к нескольким створам на одной или многих реках. Для математического моделирования гидрологических рядов требуется знание статистических закономерностей совместных колебаний стока рек в нескольких створах. Наиболее важными характеристиками, но, к сожалению, совершенно не исследованными, являются совместные плотности распределения вероятностей величин стока нескольких рек, взаимные корреляционные и взаимные спектральные функции. Наибольшее освещение в литературе получил лишь показатель корреляционной связи между гидрологическими рядами (первый член взаимных корреляционных функций). Этот показатель характеризует явление асинхронности в колебаниях речного стока. Изучению явления асинхронности стока на реках Советского Союза и в отдельных его районах посвящен ряд работ советских авторов [Л. 97 и др.].

При моделировании рядов для расчетов компенсированного регулирования в отличие от схем, рассмотренных в первой части работы, должно быть соблюдено не только подобие статистических характеристик каждого моделируемого и исходного рядов, но и соответствие стохастических связей между моделируемыми рядами и наблюдаемыми.

Описанию схем моделирования стоковых рядов в нескольких створах при различном временном осреднении будут посвящены остальные параграфы данной главы.

5-2. НЕКОТОРЫЕ УПРОЩЕННЫЕ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЯДОВ В НЕСКОЛЬКИХ СТВОРАХ

Наиболее простым методом моделирования рядов годового стока рек в нескольких створах является моделирование с помощью коррелированных последовательностей случайных чисел [Л. 91], равномерно распределенных в интервале $(0; 1)$. Рассмотрение этого метода начнем с простейшего случая двух створов: 1 и 2. Корреляционная связь между рядами равна ρ_{12} . Берем произвольную случайную равномерно распределенную последовательность ξ_i и находим случайную последовательность η_i , также равномерно распределенную, которая связана с последовательностью ξ_i коэффициентом корреляции $\rho_{\xi\eta} \approx \rho_{12}^*$.

Величины η_i определяем из условной функции распределения

$$F(\eta_i/\xi_i) = \int_0^{\eta_i/\xi_i} \psi(\tau/\xi_i) d\tau = \begin{cases} (1 - \rho_{\xi\eta}) \eta_i + \rho_{\xi\eta} \xi_i & \text{при } \eta_i \geq \xi_i; \\ (1 - \rho_{\xi\eta}) \eta_i & \text{при } \eta_i < \xi_i. \end{cases} \quad (5-1)$$

Для моделирования используем еще одну произвольную последовательность случайных чисел γ_i . Алгоритм генерирования ряда η_i следующий:

$$\eta_i = \begin{cases} \frac{\gamma_i}{1 - \rho_{\xi\eta}}; & 0 < \gamma_i \leq (1 - \rho_{\xi\eta}) \xi_i; \\ \xi_i; & (1 - \rho_{\xi\eta}) \xi_i < \gamma_i \leq (1 - \rho_{\xi\eta}) \xi_i + \rho_{\xi\eta}; \\ \frac{\gamma_i - \rho_{\xi\eta}}{1 - \rho_{\xi\eta}}; & (1 - \rho_{\xi\eta}) \xi_i + \rho_{\xi\eta} < \gamma_i \leq 1. \end{cases} \quad (5-2)$$

Этот алгоритм хорошо иллюстрируется рис. 5-1.

После того как вычислены случайные последовательности ξ_i и η_i , моделирование гидрологических рядов в створах 1 и 2 осуществляется одним из рассмотренных выше способов с учетом индивидуальных характеристик многолетних колебаний стока реки в данном створе. Моделирование гидрологических рядов с помощью рас-

* Более подробно о соотношении $\rho_{\xi\eta}$ и ρ_{12} для разных законов распределения вероятностей см. ниже в § 5-3.

смаатриваемого метода более чем в двух створах возможно несколькими способами. Рассмотрим некоторые из них.

а) Способ «скользящих двоек». Этот способ заключается в учете только некоторых связей между моделируемыми рядами [Л. 91]. Так, например, при моделировании ряда притоков к одной реке предлагается

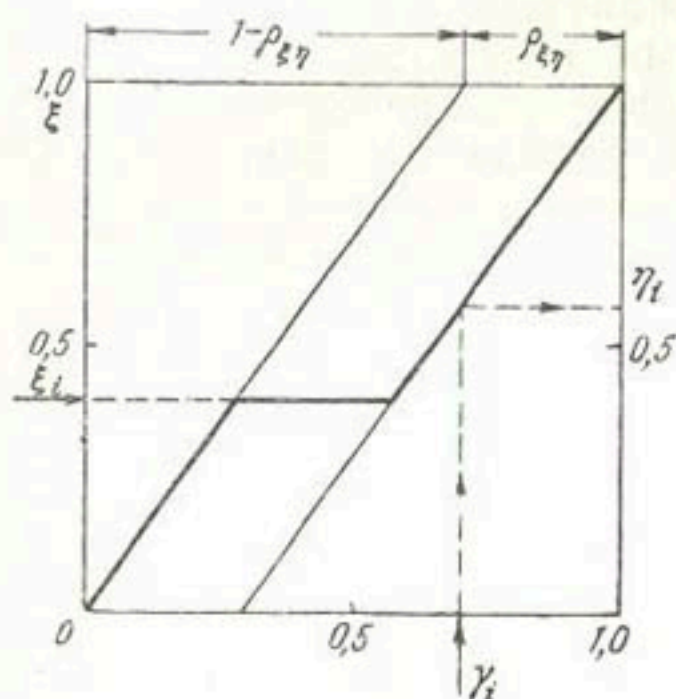


Рис. 5-1. Схема упрощенного способа получения равномерно распределенных случайных чисел η_i , корреляционно связанных со случайными числами ξ_i .

последовательно учитывать связи только между теми притоками, у которых величины среднеголетних расходов соизмеримы между собой, пренебрегая при этом связями между небольшими и крупными притоками.

б) Второй способ приближенного учета связей для числа створов, большего 2, получил название «скользящие тройки». В нем предполагается последовательный учет связей между тремя створами. Этот способ подробно описан в [Л. 87]. Схема «скользящих троек» яв-

ляется очень громоздкой и ряд ли будет использована в проектной практике. В то же время использование более простой схемы «скользящих двоек» для ряда речных систем оказывается недостаточным из-за пренебрежения связями между отдельными рядами.

Для рек, на которых отсутствует цикличность стока и где можно пренебречь связями между смежными годами, возможно использование второй упрощенной схемы моделирования искусственных рядов в нескольких створах.

В [Л. 67] изложен способ моделирования двух взаимозависимых рядов, основанный на уравнении линейной регрессии. Этот способ точно учитывает корреляционную связь между рядами и менее точно — особенности колебаний стока во втором створе, например коэффициент корреляции между смежными членами его ряда. Учет

коэффициентов корреляции производится лишь косвенно по связям второго ряда с первым. При моделировании точно учитываются лишь норма стока и его стандарт. Первый ряд моделируется обычным способом (в работе [Л. 67] применено моделирование среднемесячных расходов с учетом связи между смежными членами ряда и принят нормальный закон распределения).

Второй ряд, который связан с первым коэффициентом корреляции ρ_{12} , моделируется с помощью уравнения

$$Q_{2i} = \bar{Q}_2 + (Q_{1i} - \bar{Q}_1) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho_{12} + \Phi_{2i} \sigma_2 \sqrt{1 - \rho_{12}^2}. \quad (5.3)$$

Здесь все обозначения, относящиеся к первому ряду, снабжены индексом 1, ко второму — 2; Φ_{2i} — вторая случайная последовательность с заданным законом распределения вероятностей.

При числе створов, большем 2, авторы работы [Л. 67] рекомендуют использовать прием, аналогичный методу «скользящих двоек»: учитывать связи только между опорным (основным) створом и всеми рассматриваемыми створами и не учитывать все остальные связи. Это предложение также неприменимо для случая, когда указанными связями между рядами пренебрегать нельзя. При учете множественной корреляции между рядами этот недостаток можно ликвидировать. Запишем уравнение (5.3) в несколько ином виде:

$$Q_{2i} = \bar{Q}_2 - (Q_{1i} - \bar{Q}_1) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{D_{12}}{D_{22}} + \Phi_{2i} \sigma_2 \sqrt{\frac{D^{(2)}}{D_{22}}}. \quad (5.4)$$

Здесь $D^{(2)}$ — определитель корреляционной матрицы вида:

$$D^{(2)} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \rho_{12}^2; \quad (5.5)$$

D_{12} и D_{22} — алгебраические дополнения элементов ρ_{12} и ρ_{22} определителя (5.5); при этом $D_{12} = -\rho_{12}$ и $D_{22} = 1$.

При гамма-распределении с $C_s = 2C_v$ Φ_{2i} определяется в зависимости от случайных равномерно распределенных чисел ξ_{2i} и условного коэффициента асимметрии, принимаемого равным:

$$C_{si}^{усл} = \frac{2\sigma_2 \sqrt{1 - \rho_{12}^2}}{\bar{Q}_2 - (Q_{1i} - \bar{Q}_1) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho_{12}}. \quad (5.6)$$

По двум искусственным рядам, учитывая связи их с третьим, моделируем гидрологический ряд в третьем створе. Корреляционная матрица в этом случае будет:

$$D^{(3)} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{vmatrix}, \quad (5-7)$$

Уравнение, по которому моделируется ряд, будет по аналогии с (5-4) иметь вид:

$$Q_{3i} = \bar{Q}_3 - (Q_{1i} - \bar{Q}_1) \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \cdot \frac{D_{13}}{D_{33}} - \\ - (Q_{2i} - \bar{Q}_2) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{D_{23}}{D_{33}} + \Phi_{3i} \tau_3 \sqrt{\frac{D^{(3)}}{D_{33}}}. \quad (5-8)$$

. В общем виде 4-й, 5-й, ..., n -й ряды могут быть смоделированы по уравнению

$$Q_{ni} = \bar{Q}_n - \sum_{j=1}^{n-1} (Q_{ji} - \bar{Q}_j) \frac{\sigma_n}{\sigma_j} \cdot \frac{D_{jn}}{D_{nn}} + \\ + \Phi_{ni} \tau_n \sqrt{\frac{D^{(n)}}{D_{nn}}}. \quad (5-9)$$

Здесь $D^{(n)}$ — определитель квадратной симметричной корреляционной матрицы

$$D^{(n)} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{j1} & \rho_{j2} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{jj} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{nj} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{nn} \end{vmatrix}; \quad (5-10)$$

а D_{jn} и D_{nn} — алгебраические дополнения элементов ρ_{jn} и ρ_{nn} этого определителя; Φ_{ni} — функция ξ_{ni} случайного числа и условного коэффициента асимметрии, определяемого уравнением

$$C_{\alpha n}^{\text{усл}} = \frac{2\sigma_n \sqrt{\frac{D^{(n)}}{D_{nn}}}}{\bar{Q}_n - \sum_{j=1}^{n-1} (Q_{ji} - \bar{Q}_j) \frac{\sigma_n}{\sigma_j} \cdot \frac{D_{jn}}{D_{nn}}}, \quad (5-11)$$

Для моделирования 1 000-летних гидрологических рядов по приведенной методике составлены программы на ЭЦВМ «Стрела» и «Урал-2» и проведена серия проверочных расчетов. Ниже в табл. 5-3 приведены полученные параметры и характеристики связи исходных и искусственных рядов для: боковых притоков к створам двух ГЭС на р. Ангаре и одной ГЭС на р. Енисее; боковых притоков к трем ГЭС на р. Ангаре. В первом случае смоделированы два 1 000-летних ряда.

Как в первом, так и во втором случаях в качестве опорного принимался ряд притока к оз. Байкал. Для этого ряда моделирование велось по четырехзвенной цепи Маркова. Приведенные данные свидетельствуют о хорошем соответствии параметров и характеристик стохастической связи смоделированных рядов указанным характеристикам исходных рядов.

Для рассматриваемого примера оказалась вполне достаточной длина рядов $n=1\,000$. При меньшей длине рядов ($n=250$, $n=500$) совпадение характеристик значительно хуже.

По искусственным гидрологическим рядам выполнены иллюстративные расчеты совместного многолетнего регулирования стока трех ГЭС: Иркутской, Братской и Красноярской. Эти иллюстративные расчеты проводились упрощенно, по среднегодовым расходам воды. Они выполнялись по искусственным рядам в опорном створе: без учета связи между смежными членами ряда; при описании процесса стока простой цепью Маркова; при описании процесса стока четырехзвенной цепью Маркова; по наблюдаемому ряду ($n=53$ года).

Расчеты совместного регулирования стока по наблюдаемому ряду проводились с помощью суммарной интегральной кривой потенциальной энергии объединяемых ГЭС. В результате проведенных расчетов по наблюдаемому ряду получена зависимость бесперебойной суммарной отдачи группы ГЭС от суммарной многолетней емкости водохранилища.

Расчеты по искусственным рядам велись следующим образом. Моделировались гидрологические ряды средних годовых притоков к трем створам; затем путем умножения на напоры и коэффициент C соответствующих расходов стоковые ряды были превращены в мощностные (напоры принимались постоянными); далее путем суммирования мощностных рядов был получен суммар-

Боковой приток к водохранилищу	Наименование и продолжительность ряда	P_{4j}			$\bar{Q},$ м ³ /сек	C_v	r_1	$r_{\max} \geq r_1 \geq r_{\min}$ при $p = 5\%$
		1	2	3				
Иркутской ГЭС	Исходный, $n = 53$	1,00	0,236	0,472	1 938	0,196	0,343	$0,53 \geq r \geq 0,13$
Красноярской ГЭС		0,236	1,00	0,422	2 800	0,140	0,091	$0,31 \geq r \geq -0,14$
Братской ГЭС		0,472	0,422	1,00	1 000	0,143	0,025	$0,33 \geq r \geq -0,31$
Иркутской ГЭС	1-й искусственный $n = 1 000$	1,00	0,244	0,455	1 933	0,198	0,359	$0,41 \geq r \geq 0,32$
Красноярской ГЭС		0,244	1,00	0,410	2 788	0,140	-0,041	$0,01 \geq r \geq -0,09$
Братской ГЭС		0,455	0,410	1,00	996	0,149	0,120	$0,17 \geq r \geq 0,07$
Иркутской ГЭС	2-й искусственный $n = 1 000$	1,00	0,262	0,464	1 938	0,194	0,358	$0,41 \geq r \geq 0,32$
Красноярской ГЭС		0,262	1,00	0,467	2 831	0,145	0,068	$0,12 \geq r \geq 0,02$
Братской ГЭС		0,464	0,467	1,00	1 002	0,140	0,105	$0,16 \geq r \geq 0,06$
Иркутской ГЭС	Искусственный $n = 2 000$	1,00	0,250	0,460	1 936	0,196	0,344	$0,38 \geq r \geq 0,31$
Красноярской ГЭС		0,250	1,00	0,440	2 810	0,142	0,015	$0,06 \geq r \geq -0,02$
Братской ГЭС		0,460	0,440	1,00	998	0,146	0,114	$0,15 \geq r \geq 0,08$
Иркутской ГЭС	Исходный, $n = 53$	1,00	0,472	0,260	1 938	0,196	0,343	$0,53 \geq r \geq 0,13$
Братской ГЭС		0,472	1,00	0,170	1 000	0,143	0,025	$0,33 \geq r \geq -0,31$
Усть-Илимской ГЭС		0,260	0,170	1,00	325	0,143	0,209	$0,41 \geq r \geq -0,02$
Иркутской ГЭС	Искусственный $n = 1 000$	1,00	0,457	0,268	1 938	0,197	0,358	$0,41 \geq r \geq 0,32$
Братской ГЭС		0,457	1,00	0,176	999	0,148	0,122	$0,17 \geq r \geq 0,07$
Усть-Илимской ГЭС		0,268	0,176	1,00	323	0,143	-0,037	$0,02 \geq r \geq -0,08$

ный ряд для каскада. Задаваясь несколькими значениями суммарной гарантированной отдачи каскада α и возможной серией суммарных многолетних емкостей водохранилищ β , с помощью алгоритма, приведенного в § 2-2, получим зависимости $\alpha = f(p)$

для серии $\beta = \text{const}$. Затем указанные зависимости преобразовывались в графики $\alpha = f(\beta)$ при $p = \text{const}$. Один из таких графиков представлен на рис. 5-2. На рисунке нанесена также кривая $\alpha = f(\beta)$, построенная аналогичным образом, но по календарному ряду.

Для оценки влияния принятого способа описания процесса речного стока в опорном створе на результаты расчетов совместного регулирования по зависимостям, аналогичным представленным на рис. 5-2, были определены совокупные гарантированные отдачи группы ГЭС, соответствующие трем значениям суммарной многолетней емкости водохранилищ и двум значениям расчетной обеспеченности отдачи ГЭС (табл. 5-4).

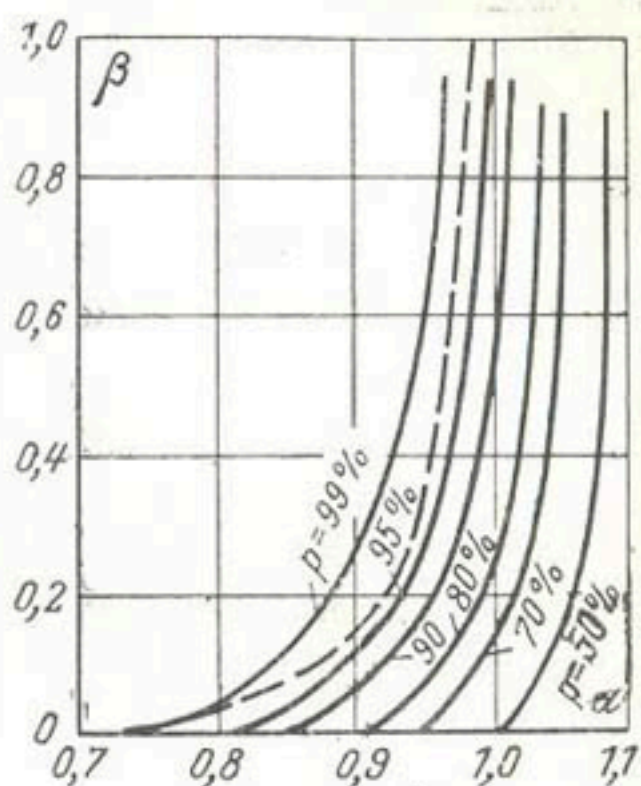


Рис. 5-2. Зависимости $\beta = f(\alpha)$ при $p = \text{const}$ для группы ГЭС (Иркутская, Братская, Красноярская).

— по искусственным рядам;
- - - по календарному ряду.

Таблица 5-4

Способ описания процесса стока в опорном створе	$\beta=0,2$		$\beta=0,4$		$\beta=0,6$	
	$p=95\%$	$p=90\%$	$p=95\%$	$p=90\%$	$p=95\%$	$p=90\%$
Без учета связи между смежными членами ряда . . .	0,925	0,955	0,980	1,005	1,005	1,025
По простой цепи Маркова	0,935	0,960	0,975	1,000	0,990	1,010
По четырехзвенной цепи Маркова	0,935	0,960	0,970	0,990	0,985	1,005
По наблюдаемому ряду . .	0,925		0,955		0,965	

Приведенные данные свидетельствуют о том, что способ описания процесса стока в опорном створе сравни-

гельно мало влияет на результаты расчетов регулирования его в каскаде ГЭС.

Следует отметить, что отдачи, полученные в результате расчета по календарному ряду в случае трех ГЭС на двух реках, соответствуют во всем диапазоне рассмотренных значений β обеспеченности, превышающей 95—97%.

Рассмотренный пример показывает, что отдачи группы ГЭС, полученные по календарным рядам, в зависимости от их статистических характеристик могут отличаться от отдач ГЭС при оценке их методом Монте-Карло. Сказанное подтверждает необходимость при многолетнем регулировании стока каскадами ГЭС в дополнение к календарному использовать статистические методы и особенно метод Монте-Карло.

Выше было отмечено, что в рассмотренных способах моделирования гидрологических рядов либо не учитываются все коэффициенты корреляции между моделируемыми рядами, либо не учитываются внутрирядные связи каждого из моделируемых рядов, что может привести к некоторым ошибкам при вычислении характеристик ГЭС и их водохранилищ. Поэтому в следующем параграфе будут даны более точные способы моделирования гидрологических рядов в нескольких створах (для различных законов распределения вероятностей), позволяющие учесть одновременно и статистические характеристики отдельных рядов, и стохастические связи между ними, т. е. корреляционные связи во времени и пространстве.

5.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ С ЗАДАННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ КОРРЕЛЯЦИИ

В гл. 1 было показано, что последовательность случайных величин η с функцией распределения $F(x)$ можно получить из равномерно распределенной последовательности ξ по формуле

$$\eta = F^{-1}(\xi), \quad (5-12)$$

где F^{-1} — функция, обратная $F(x)$.

Коэффициент корреляции k между $\eta_1 = F^{-1}(\xi_1)$ и $\eta_2 = F^{-1}(\xi_2)$, вообще говоря, не равен коэффициенту корреляции r между ξ_1 и ξ_2 . Выявление зависимости между r и k для каждой функции $F(x)$ является самостоятельной задачей.

Таким образом, в общем случае для получения рядов с заданным законом распределения в нескольких ство-

рах с учетом корреляционных связей во времени и пространстве необходимо моделирование случайных равномерно распределенных чисел с некоторыми коэффициентами корреляции, т. е. моделирование равномерного вектора с заданной корреляцией.

В некоторых случаях (нормальный закон, логарифмически нормальный закон и др.) могут быть использованы и другие пути моделирования.

В настоящее время в математической литературе не имеется решения задачи получения равномерного вектора с заданной корреляцией. Однако в литературе неоднократно приводились способы получения нормально распределенных векторов с заданной корреляцией [Л. 19 и др.]. Один из таких способов дан в приложении III. В последующем будем считать возможным построение нормального вектора с заданной корреляцией.

Рассмотрим путь получения коррелированного равномерного вектора, который может быть использован для получения рядов с любым законом распределения вероятностей. Кроме того, рассмотрим прямой путь получения коррелированного вектора с логнормальным законом распределения.

Пусть на основании упомянутого выше способа построен нормальный вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, у которого коэффициенты корреляции между координатами μ_i и μ_j есть k_{ij} .

Построим два новых вектора: 1) вектор ξ , у которого все координаты распределены равномерно в интервале $(0; 1)$, и 2) вектор η , у которого все координаты распределены логнормально, т. е. с плотностью

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (5-13)$$

Коррелированный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ с равномерно распределенными координатами можно получить (смоделировать на ЭЦВМ) из нормального коррелированного вектора по формуле

$$\xi_i = \Phi_i(\mu_i), \quad (5-14)$$

где μ_i — координата нормального коррелированного вектора $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ с функцией распределения $\Phi_i(x)$ (см. [Л. 25, стр. 636]).

При этом, как указывалось, возникает задача отыска-

ния зависимости коэффициента корреляции r_{ij} между величинами ξ_i и ξ_j от коэффициента корреляции k_{ij} между величинами μ_i и μ_j .

Точно так же при построении коррелированного вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ с логнормальным распределением координат по формуле

$$\eta_i = e^{\mu_i} \quad (5-15)$$

необходимо решить вопрос о зависимости коэффициента корреляции ρ_{ij} между η_i и η_j от k_{ij} .

Итак, задача сводится к следующему:

1) Пусть k — коэффициент корреляции между координатами μ_1 и μ_2 нормального вектора, совместная плотность которого

$$f_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2} 2\pi} e^{-\frac{x^2 - 2kxy + y^2}{2(1-k^2)}}. \quad (5-16)$$

Из (5-16) следует, что функция распределения каждой координаты μ_i есть функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (5-17)$$

Обозначим через r коэффициент корреляции между равномерными в интервале $(0; 1)$ координатами вектора $[\Phi(\mu_1), \Phi(\mu_2)]$.

Требуется найти функциональную зависимость между k и r .

2) Пусть q — коэффициент корреляции между координатами v_1 и v_2 нормального вектора с совместной плотностью

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-q^2}} \times \\ \times e^{-\frac{\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2q\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}}{2(1-q^2)}}. \quad (5-18)$$

Одномерная плотность координаты v_i ($i = 1; 2$) есть

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a_i)^2}{2\sigma_i^2}} dt. \quad (5-19)$$

Обозначим через ρ коэффициент корреляции между координатами e^{y_1} и e^{y_2} вектора, распределенного лог-нормально с параметрами a_i, σ_i .

Требуется найти функциональную зависимость между q и ρ .

По определению коэффициента корреляции имеем:

$$r = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \Phi(y) f_0(x, y) dx dy - M[\Phi(p_1)] M[\Phi(p_2)]}{\sqrt{D[\Phi(p_1)] D[\Phi(p_2)]}}; \quad (5-20)$$

$$\rho = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x+y} f(x, y) dx dy - M(e^{y_1}) M(e^{y_2})}{\sqrt{D(e^{y_1}) D(e^{y_2})}}, \quad (5-21)$$

где $M(x)$ и $D(x)$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины x .

Некоторые сведения о полиномах Эрмита, необходимые для вычисления интегралов, входящих в формулы (5-20) и (5-21), даны в приложении IV.

Вычислим интеграл I , приведенный в числителе выражения (5-20):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \Phi(y) f_0(x, y) dx dy.$$

Подставив вместо $f_0(x, y)$ ее значение из (5-16) и произведя небольшое преобразование, получим:

$$I = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-k^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \Phi(y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} e^{-\frac{k^2 x^2 - 2kxy + k^2 y^2}{2(1-k^2)}} dx dy. \quad (5-22)$$

Для разделения переменных в двойном интеграле воспользуемся следующим равенством:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} e^{-\frac{k^2 x^2 + k^2 y^2 - 2kxy}{2(1-k^2)}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x) H_m(y)}{m!} k^m, \quad (5-23)$$

где $H_m(x)$ — полиномы Эрмита (см. [Л.50, стр. 151]).

Тогда

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \Phi(y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x) H_m(y)}{m!} k^m dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \Phi(y) H_m(x) H_m(y) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) dx \right]^2
\end{aligned}$$

Запишем полученное в виде:

$$I = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} I_m^2, \quad (5-24)$$

где

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) dx,$$

и вычислим интеграл I_m при $m=0$ и $m>0$.

При $m=0$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_0(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

так как $H_0(x) = 1$ (см. приложение IV).

$$\text{Ввиду того, что } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad d\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\text{и } e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} d\Phi(x),$$

поэтому

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \int_0^1 \Phi(x) d\Phi(x) = \\
&= \sqrt{2\pi} \frac{\Phi^2}{2} \bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned} \quad (5-25)$$

При $m>0$ имеем:

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) H_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) (-1)^m \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(m)} dx \quad (5-26)$$

(см. приложение IV).

Применим правило интегрирования по частям:

$$\Phi(x) = u, \quad \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(m)} dx = dv;$$

тогда

$$\begin{aligned} I_m &= (-1)^m \Phi(x) \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(m-1)} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - (-1)^m \int_0^1 \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(m-1)} d\Phi(x) = \\ &= (-1)^{m+1} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^{m-1} H_{m-1}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) e^{-x^2} dx = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } m = 2l; \quad m > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) e^{-x^2} dx & \text{при } m = 2l + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Последнее вытекает из свойства 3 приложения IV.

$$\begin{aligned} I_{2l+1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{2l}(x) e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_{2l}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{2^l} e^{-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2^l \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2l}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{2l}(xy) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2l)!}{l!} (y^2 - 1)^l \quad (5-27)$$

(см. [Л.21, стр. 851]).

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{2l}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2l)!}{l!} \left(\frac{1}{2} - 1\right)^l = \sqrt{\pi} (-1)^l \frac{(2l)!}{2^l l!}$$

и

$$I_{2l+1} = \frac{(-1)^l \sqrt{\pi} (2l)!}{\sqrt{2\pi} 2^l \cdot 2^l l!} = (-1)^l \frac{(2l)!}{\sqrt{2} \cdot 2^{2l} l!}.$$

Итак,

$$I_m = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{при } m = 0 \\ 0 & \text{при } m = 2l; m > 0 \\ (-1)^l \frac{(2l)!}{\sqrt{2} 2^{2l} l!} & \text{при } m = 2l + 1. \end{cases} \quad (5-28)$$

Подставив найденное в (5-24) получим:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^2 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^{2l+1} ((2l)!)^2}{(2l+1)! 2 \cdot 2^{4l} (l!)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^{2l+1} (2l)!}{(2l+1) 2^{4l+1} (l!)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \Phi(y) f_0(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{k}{2}. \end{aligned} \quad (5-29)$$

Вычислим теперь интеграл $I = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{x+y} f(x, y) dx dy$, входящий в

числитель выражения (5-21).

Подставив вместо $f(x, y)$ ее значение из (5-18), произведя замену переменных интегрирования по формулам $\frac{x-a_1}{\sigma_1} = u$,

$\frac{y-a_2}{\sigma_2} = v$ и воспользовавшись равенством (5-23), получим:

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^{a_1+a_2}}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{u\sigma_1+v\sigma_2} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{m!} H_m(u) H_m(v) du dv = \\ &= \frac{e^{a_1+a_2}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{m!} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{u\sigma_1 - \frac{u^2}{2}} \times \end{aligned}$$

$$\times H_m(u) e^{\frac{u\sigma_i}{2} - \frac{u^2}{2}} H_m(v) du dv = \frac{e^{\frac{\sigma_i^2}{2}}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{m!} I_{1m} I_{2m},$$

где

$$I_{im} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{u\sigma_i}{2} - \frac{u^2}{2}} H_m(u) du; \quad i = 1, 2.$$

Для вычисления I_{im} подставим вместо $H_m(u)$ выражение его, приведенное в приложении IV.

Тогда

$$I_{im} = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{u\sigma_i}{2}} \left(e^{-\frac{u^2}{2}} \right)^{(m)} du. \quad (5-30)$$

Применив правило интегрирования по частям, получим:

$$\begin{aligned} I_{im} &= (-1)^m e^{\frac{u\sigma_i}{2}} \left(e^{-\frac{u^2}{2}} \right)^{(m-1)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-1)^m \times \\ &\times \sigma_i \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{u^2}{2}} \right)^{(m-1)} e^{\frac{u\sigma_i}{2}} du = \\ &= \sigma_i (-1)^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{u^2}{2}} \right)^{(m-1)} e^{\frac{u\sigma_i}{2}} du. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное с (5-30), замечаем, что

$$I_{im} = \sigma_i I_{i, m-1},$$

или, что легко доказать по индукции,

$$I_{im} = \sigma_i^m I_{i0}.$$

Из (5-30) следует, что

$$\begin{aligned} I_{i0} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{u\sigma_i}{2} - \frac{u^2}{2}} du = e^{\frac{\sigma_i^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-\sigma_i)^2}{2}} du = \\ &= \sqrt{2\pi} e^{\frac{\sigma_i^2}{2}} = \sqrt{2\pi e^{\frac{\sigma_i^2}{2}}}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$I_{im} = \sigma_i^m \sqrt{2\pi e^{\frac{\sigma_i^2}{2}}}$$

и

$$I = \frac{e^{a_1+a_2}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{m!} \sigma_1^m \sqrt{2\pi e^{\sigma_1^2}} \sigma_2^m \sqrt{2\pi e^{\sigma_2^2}} =$$

$$= e^{a_1+a_2} e^{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1\sigma_2 q)^m}{m!} = e^{a_1+a_2 + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2 q}.$$

Итак,

$$I = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{x+y} f(x, y) dx dy =$$

$$= e^{a_1+a_2 + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} + \sigma_1\sigma_2 q}, \quad (5-31)$$

Окончательный результат для равномерного распределения координат. Подставив (5-29) в (5-20) и учитывая, что

$$M(\Phi(\mu_1)) = M(\Phi(\mu_2)) = \frac{1}{2}$$

и

$$D(\Phi(\mu_1)) = D(\Phi(\mu_2)) = \frac{1}{12}$$

как математическое ожидание и дисперсия равномерной в интервале (0; 1) величины, получим:

$$r = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{k}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{k}{2},$$

откуда

$$k = 2 \sin \frac{\pi}{6} r. \quad (5-32)$$

Полученный результат (5-32) означает, что если $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ есть случайный нормальный вектор с одномерными функциями распределения (5-20) и коэффициент корреляции между μ_i и μ_j есть k_{ij} , то вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ с $\xi_i = \Phi(\mu_i)$ будет иметь равномерные в интервале (0; 1) координаты и коэффициент корреляции r_{ij} между ξ_i и ξ_j будет связан с k_{ij} соотношением (5-32).

Окончательный результат для логнормального распределения координат. Легко показать, исходя из определения математического ожидания и дисперсии, что если случайная величина x подчиняется логнормальному распределению с плотностью

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}},$$

то математическое ожидание $M(x)$ и дисперсия $D(x)$ величины x выражаются через параметры a и σ следующим образом:

$$M(x) = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}};$$

$$D(x) = e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

Так как e^{v_i} — логнормальная величина с параметрами a_i и σ_i , то

$$M(e^{v_i}) = e^{a_i + \frac{\sigma_i^2}{2}};$$

$$D(e^{v_i}) = e^{2a_i + \sigma_i^2} (e^{\sigma_i^2} - 1); \quad i = 1, 2. \quad (5-33)$$

Подставив теперь (5-31) и (5-33) в (5-21), получим:

$$\rho = \frac{e^{a_1 + a_2 + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \sigma_1 \sigma_2 q} - e^{a_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}} e^{a_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}}{\sqrt{e^{2a_1 + \sigma_1^2} (e^{\sigma_1^2} - 1) e^{2a_2 + \sigma_2^2} (e^{\sigma_2^2} - 1)}} =$$

$$= \frac{e^{\sigma_1 \sigma_2 q} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_1^2} - 1) (e^{\sigma_2^2} - 1)}}.$$

Отсюда

$$q = \frac{\ln \left[1 + \rho \sqrt{(e^{\sigma_1^2} - 1) (e^{\sigma_2^2} - 1)} \right]}{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (5-34)$$

В случае если величины v_1 и v_2 имеют одинаковые дисперсии $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, выражение (5-34) упрощается:

$$q = \frac{\ln [1 + \rho (e^{\sigma^2} - 1)]}{\sigma^2}. \quad (5-35)$$

Итак, если $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ есть такой случайный нормальный вектор, что функция распределения v_i есть (5-19) и коэффициент корреляции между v_i и v_j есть q_{ij} , то координата $\eta_i = e^{v_i}$ вектора $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ будет иметь логнормальное распределение с параметрами a_i и σ_i и коэффициент корреляции ρ_{ij} между η_i и η_j будет связан с q_{ij} соотношением (5-34).

Выражение (5-35) показывает, в частности, что при изменении q от -1 до $+1$ ρ изменяется от $-1/e^{\sigma^2}$ до $+1$.

Алгоритм решения первой задачи (равномерный случай). Требуется построить вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ с равномерно распределенными в интервале $(0; 1)$ координатами и матрицей коэффициентов корреляции $\|r_{ij}\|$.

Алгоритм получения такого вектора складывается из трех этапов:

1. Получение матрицы $\|k_{ij}\|$, связанной с заданной матрицей $\|r_{ij}\|$ соотношением

$$k_{ij} = 2 \sin \frac{\pi}{6} r_{ij}. \quad (5-36)$$

2. Построение нормального вектора $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ с матрицей коэффициентов корреляции $\|k_{ij}\|$ и функцией распределения каждой координаты μ_i

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

причем матрица $\|k_{ij}\|$ (как корреляционная) должна быть положительно определенной (см. [Л. 18, стр. 165]).

3. Получение искомого вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ по формуле

$$\xi_i = \Phi(\mu_i).$$

Алгоритм решения второй задачи (логнормальный случай). Требуется построить вектор $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, каждая координата η_i которого имеет логнормальное распределение координат с параметрами a_i , σ_i и заданной матрицей коэффициентов корреляции $\|\rho_{ij}\|$. Для получения такого вектора необходимы следующие расчеты:

1. Получение матрицы $\|q_{ij}\|$, связанной с заданной матрицей $\|\rho_{ij}\|$ соотношением

$$q_{ij} = \frac{\ln \left[1 + \rho_{ij} \sqrt{(e^{\sigma_i^2} - 1)(e^{\sigma_j^2} - 1)} \right]}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (5-37)$$

2. Построение нормального вектора $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ с матрицей коэффициентов корреляции $\|q_{ij}\|$ и функцией распределения координаты v_i

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a_i)^2}{2\sigma_i^2}} dt.$$

3. Построение искомого вектора $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ по формуле]

$$\eta_i = e_i^{v_i}.$$

Построенные указанным выше способом векторы не являются единственными решениями поставленных задач, так как одномерные плотности и коэффициент корреляции не определяют однозначно случайный вектор.

Легко проверить, что в случае равномерного распределения предложенным способом получается вектор, совместная плотность пар координат которого с коэффициентом корреляции r есть

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} e^{-\frac{k^2 u^2 - 2uvk + k^2 v^2}{2(1-k^2)}},$$

где

$$u = \Phi^{-1}(x); v = \Phi^{-1}(y); k = 2 \sin \frac{\pi}{6} r$$

$\Phi^{-1}(x)$ — функция, обратная $\Phi_0(x)$.

В логнормальном случае пара координат с параметрами a_i, σ_i и a_j, σ_j и коэффициентом корреляции ρ имеет совместную плотность

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & \frac{1}{2\pi\sigma_i\sigma_j} \sqrt{1-q^2} \times \\ & \times e^{-\frac{\frac{(u-a_i)^2}{\sigma_i^2} - 2q \frac{(u-a_i)(v-a_j)}{\sigma_i\sigma_j} + \frac{(v-a_j)^2}{\sigma_j^2}}{2(1-q^2)}} - u - v, \end{aligned}$$

где

$$u = \ln x; v = \ln y; q = \frac{\ln \left(1 + \rho \sqrt{(e^{\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2}} - 1)(e^{\frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2}} - 1)} \right)}{\sigma_i\sigma_j}.$$

В соответствии с изложенным выше алгоритмом в приложении IV приведена блок-схема программ датчиков случайных чисел с равномерным и логнормальным распределениями. В этом приложении даются также сами программы, составленные для ЭЦВМ «Урал-2», краткие инструкции по их использованию и результаты статистической проверки датчиков. Последние свидетель-

ствуют о хорошем качестве датчиков, что и позволяет рекомендовать их для широкого использования в практических целях, в частности для моделирования гидрологических рядов в нескольких створах.

Пути использования датчиков для моделирования гидрологических рядов следующие:

Логнормальный случай. Датчик дает возможность непосредственно моделировать годовые расходы рек в нескольких створах с учетом корреляционных связей между створами и по времени.

Случай гамма-распределения. Датчик дает возможность использовать равномерный вектор с заданной корреляционной матрицей для моделирования гидрологических рядов в нескольких створах. При этом корреляционные связи во времени в каждом створе учитываются способом, описанным в гл. 3, а коэффициенты корреляции между расходами в створах в первом приближении можно принимать равными коэффициентам корреляции между компонентами равномерного вектора. Для этого случая в институте Энергосетьпроект составлена для ЭЦВМ «Урал-2» специальная программа, с помощью которой одновременно можно моделировать до 10 связанных гидрологических рядов, распределенных в соответствии с кривой Пирсона III типа. Результаты иллюстративных расчетов по этой программе для Ангара-Енисейского каскада приведены в табл. 5-5 и 5-6. Они показывают удовлетворительное совпадение исходных и полученных параметров.

Следует отметить также предпринятую нами эмпирическую проверку правомерности допущения о приближительном равенстве коэффициентов корреляции равномерных последовательностей и полученных из равномерных последовательностей с гамма-корреляцией. Проработки проводились для рядов, имеющих одинаковые дисперсии, и для рядов с разными дисперсиями. Эмпирическая проверка проводилась следующим образом. Из равномерно распределенных величин x_1 и x с коэффициентом корреляции r были построены величины $y_1 = F_1^{-1}(x)$ и $y_2 = F_2^{-1}(x)$ [где $F_i(x)$ — функции распределения Пирсона] и был найден статистический коэффициент корреляции ρ между ними (число моделируемых значений y_1 и y_2 было равно 1 000). Для нахождения зависимости ρ от r были взяты различные пары $F_i(x)$ и для каждой пары произведено моделирование для разных r .

Таблица 5-5

Наименование ряда	Исходный ряд, 56 лет			Искусственный ряд, 500 лет			Искусственный ряд, 1 000 лет		
	$\bar{Q}$	C_v	r	$\bar{Q}$	C_v	r	$\bar{Q}$	C_v	r
Приток к Иркутской ГЭС	1 929	0,193	0,349	1 914	0,217	0,367	1 914	0,213	0,363
Приточность на участке Иркутская—Братская ГЭС	994	0,143	0,020	981	0,160	0,025	988	0,164	0,016
Приточность на участке Братская—Усть-Илимская ГЭС	322	0,143	0,236	320	0,157	0,160	322	0,160	0,272
Приточность на участке Усть-Илимская—Богучанская ГЭС	345	0,191	0,123	344	0,212	0,134	344	0,204	0,177
Приток к створу Саянской ГЭС	1 457	0,133	0,012	1 444	0,145	—0,123	1 453	0,149	—0,083
Приточность на участке Саянская—Красноярская ГЭС	1 341	0,158	0,172	1 322	0,181	0,146	1 335	0,175	0,144
Суммарная приточность Богучанская ГЭС—Устье Ангары и Красноярская — Средне-Енисейская ГЭС	1 586	0,234	0,166	1 560	0,264	0,121	1 593	0,266	0,190
Приточность на участке Средне-Енисейская — Осиновская ГЭС	971	0,148	—0,093	980	0,158	—0,196	979	0,158	—0,154

Примечание. В каждом столбце моделируется простая цепь Маркова.

	Наименование ряда	Коэффициенты корреляции между рядами								Характеристика ряда
		1	2	3	4	5	6	7	8	
1	Приток к створу Иркутской ГЭС	1,0	0,484	0,275	0,375	0,249	0,176	0,146	-0,228	Наблюденный ряд, 56 лет
		1,0	0,524	0,289	0,379	0,284	0,180	0,168	-0,209	Искусственный ряд, 500 лет
		1,0	0,508	0,248	0,351	0,276	0,196	0,152	-0,220	Искусственный ряд, 1 000 лет
2	Приточность на участке Иркутская ГЭС—Братская ГЭС	0,484	1,0	0,196	0,319	0,413	0,328	0,388	-0,287	Наблюденный ряд, 56 лет
		0,524	1,0	0,254	0,342	0,434	0,385	0,447	-0,299	Искусственный ряд, 500 лет
		0,508	1,0	0,236	0,340	0,438	0,386	0,448	-0,321	Искусственный ряд, 1 000 лет
3	Приточность на участке Братская ГЭС — Усть-Илимская ГЭС	0,275	0,196	1,0	0,543	0,295	0,203	0,470	0,004	Наблюденный ряд, 56 лет
		0,289	0,254	1,0	0,536	0,339	0,225	0,510	0,002	Искусственный ряд, 500 лет
		0,248	0,236	1,0	0,541	0,363	0,245	0,504	0,029	Искусственный ряд, 1 000 лет
4	Приточность на участке Усть-Илимская ГЭС — Богучанская ГЭС	0,375	0,319	0,543	1,0	0,366	0,363	0,479	-0,172	Наблюденный ряд, 56 лет
		0,379	0,342	0,536	1,0	0,392	0,342	0,508	-0,190	Искусственный ряд, 500 лет
		0,351	0,340	0,541	1,0	0,389	0,354	0,492	-0,168	Искусственный ряд, 1 000 лет

Наименование ряда	Коэффициенты корреляции между рядами								Характеристика ряда
	1	2	3	4	5	6	7	8	
5 Приток к створу Саянской ГЭС	0,249	0,413	0,295	0,366	1,0	0,776	0,452	-0,196	Наблюденный ряд, 56 лет
	0,284	0,434	0,339	0,392	1,0	0,779	0,502	-0,187	Искусственный ряд, 500 лет
	0,276	0,438	0,363	0,389	1,0	0,772	0,491	-0,156	Искусственный ряд, 1 000 лет
6 Приточность на участке Саянская ГЭС — Красноярская ГЭС	0,176	0,328	0,203	0,363	0,776	1,0	0,489	-0,177	Наблюденный ряд, 56 лет
	0,180	0,385	0,225	0,342	0,779	1,0	0,550	-0,119	Искусственный ряд, 500 лет
	0,196	0,386	0,245	0,354	0,772	1,0	0,538	-0,121	Искусственный ряд, 1 000 лет
7 Суммарная приточность на участках Богучанская ГЭС — устье Ангары и Красноярская ГЭС — Средне-Енисейская ГЭС	0,146	0,388	0,470	0,479	0,452	0,489	1,0	-0,301	Наблюденный ряд, 56 лет
	0,168	0,447	0,510	0,508	0,502	0,550	1,0	-0,261	Искусственный ряд, 500 лет
	0,152	0,448	0,504	0,492	0,491	0,538	1,0	-0,250	Искусственный ряд, 1 000 лет
8 Приточность на участке Средне-Енисейская ГЭС — Осиновская ГЭС	-0,228	-0,287	0,004	-0,172	-0,196	-0,177	-0,301	1,0	Наблюденный ряд, 56 лет
	-0,209	-0,299	0,002	-0,190	-0,187	-0,119	-0,261	1,0	Искусственный ряд, 500 лет
	-0,220	-0,321	0,029	-0,168	-0,156	-0,121	-0,250	1,0	Искусственный ряд, 1 000 лет

Расчеты показали (рис. 5-3), что для положительных коэффициентов корреляции с относительной погрешностью 6% $\rho=r$. Таким образом, в тех случаях, когда указанная погрешность является приемлемой, можно считать, что $\rho=r$. Если же в какой-либо конкретной задаче требуется более высокая точность, то для моделирования случайных величин с коэффициентом корреляции ρ необходимо по графику (рис. 5-3) найти соответствующее r , построить равномерные величины x с коэффициентом корреляции ρ и затем применить преобразование $y=F^{-1}(x)$.

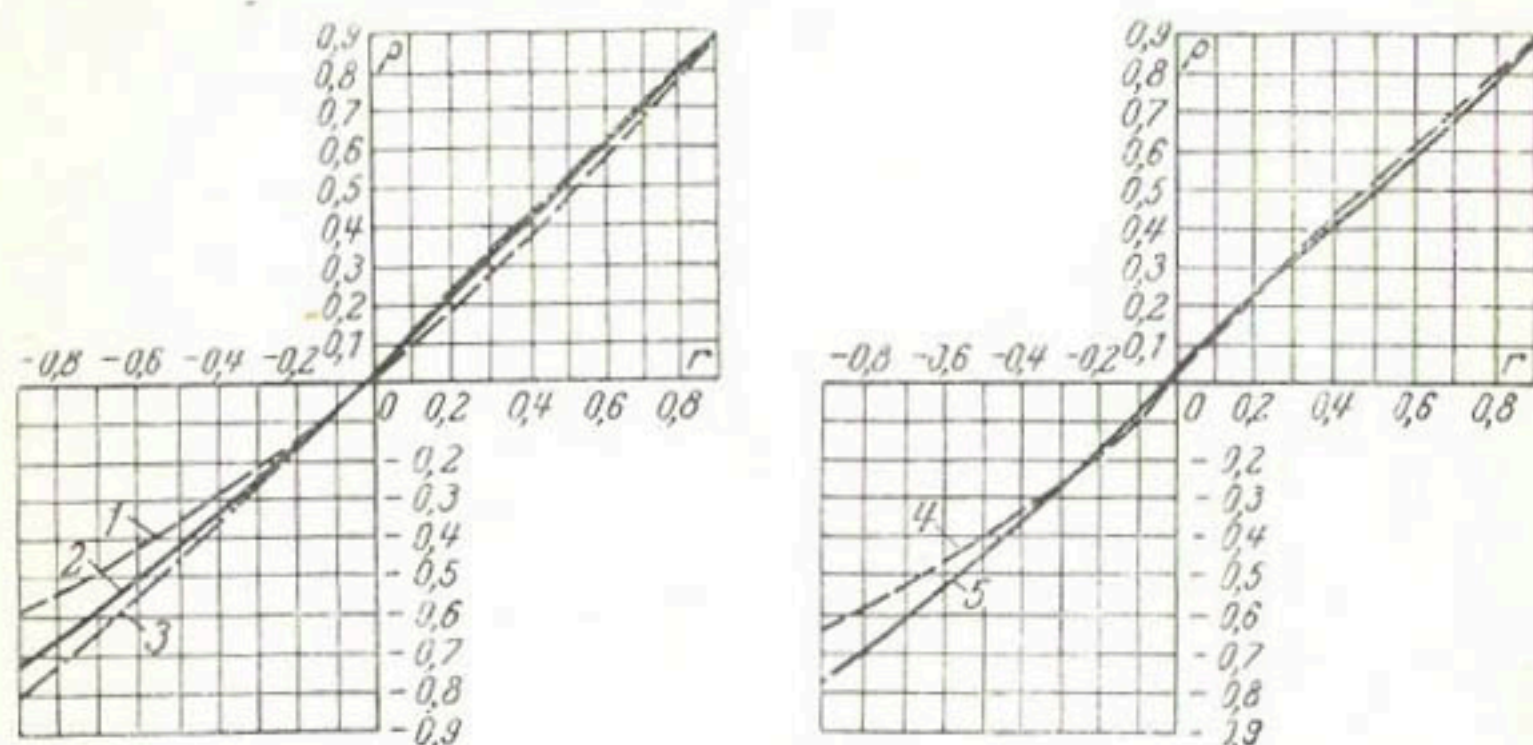


Рис. 5-3. Эмпирическая зависимость между коэффициентами корреляции при равномерном распределении r и гамма-распределении ρ .
 1 — $C_{v1}=C_{v2}=1$; 2 — $C_{v1}=C_{v2}=0,7$; 3 — $C_{v1}=C_{v2}=0,5$; 4 — $C_{v1}=0,7$; $C_{v2}=1,0$;
 5 — $C_{v1}=0,25$; $C_{v2}=1,0$.

Полученный таким образом вектор $y=(y_1, y_2)$ будет иметь совместную плотность

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_2(y) \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{k^2 P_1^2(x) - 2k P_1(x) P_2(y) + k^2 P_2^2(y)}{2(1-k^2)} \right],$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ — одномерные плотности;

$$P_1(x) = \Phi^{-1}(F_1(x)); P_2(y) = \Phi^{-1}(F_2(y));$$

$\Phi(x)$ — функция Лапласа; $k = 2 \sin \frac{\pi}{6} r$; а r — коэффициент корреляции между равномерными величинами.

При других способах моделирования будут получаться векторы с другими совместными плотностями (так как коэффициент корреляции и одномерные плотности не определяют однозначно распределение). Идеальным было бы при моделировании реального процесса задавать совместную плотность, исходя из физических соображений. Однако до тех пор пока о совместной плотности известно очень мало, естественно предположить из общих соображений, что эта плотность непрерывна относительно своих аргументов. В этом смысле метод, предложенный Г. Г. Сванидзе [Л. 87] с введением в выражение плотности функции Дирака δ , что делает ее разрывной, является более далеким от действительно происходящего в реках процесса, чем наш или метод Е. Г. Блохинова и О. В. Сарманова [Л. 10], которые раскладывают совместную плотность по полиномам Лагерра (что можно сделать с любой непрерывной функцией).

Указанный нами способ получения коррелированного случайного вектора является универсальным, т. е. его можно применять для моделирования любого распределения, предварительно получив функцию $\rho(r)$ (аналитическую или в виде таблицы достаточного объема).

Составление таблицы $\rho(r)$ требует довольно значительных затрат машинного времени. Например, на ЭЦВМ «Урал-2» с быстродействием 6 000 операций в секунду расчет для одной пары $F_1(x)$ и $F_2(x)$ при r от $-0,9$ до $+0,9$ с шагом $0,2$ занимает 1 ч. Но это затраты единовременные, и при существующих темпах развития вычислительной техники (увеличении быстродействия ЭЦВМ) предложенный метод моделирования случайных коррелированных величин представляется перспективным и пригодным для практики.

5-4. ОБЩАЯ СХЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ В НЕСКОЛЬКИХ СТВОРАХ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ ОСРЕДНЕНИЯ

В § 5-2 были приведены иллюстративные расчеты многолетнего регулирования при использовании искусственных годовых стоков в нескольких створах Ангаро-Енисейского каскада ГЭС. Подобные расчеты можно

было бы провести и для других расчетных условий. Однако такие расчеты имели бы только иллюстративный характер, ввиду того что, как уже отмечалось в гл. 4, такие ряды недостаточны для большинства водохозяйственных и водноэнергетических расчетов. Для указанных расчетов требуется учет внутригодового распределения стока при месячном, декадном, суточном и других интервалах осреднения.

Моделирование внутригодового распределения в каждом из рассматриваемых створов требуется проводить с учетом наблюдавшихся в природе взаимосвязей между колебаниями стока отдельных притоков за расчетные интервалы времени продолжительностью меньше 1 года. Одним из способов такого моделирования внутригодового распределения стока является метод фрагментов [Л. 87], распространенный на случай каскада ГЭС. Для учета связей между притоками внутри года используются комплекты наблюденных гидрографов за отдельные годы [например, комплект гидрографов (фрагментов) за 1942 г., 1943 г. и т. д.]. С помощью указанных комплектов автоматически осуществляется увязка стока вдоль водотока.

Таким образом, основные закономерности изменения годового стока в каскаде гидроузлов учитываются способом, рассмотренным в § 5-3, а его внутригодовое распределение при некотором заданном интервале осреднения определяется второй случайной выборкой из набора комплектов фрагментов, полученных по данным наблюдений.

Если в указанной схеме в качестве интервала осреднения взять сутки, то величины декадного, месячного и других стоков можно получить соответствующим суммированием. Возможна и иная схема, в которой последовательно учитываются все выявленные при статистическом исследовании закономерности колебаний стока при различных временных интервалах осреднения. Эта схема может быть применена при моделировании процесса стока для проведения практически всего комплекса водохозяйственных расчетов, необходимых при проектировании сложной водохозяйственной системы. Исходным положением в этой схеме будем считать, что статистический анализ гидрометрических рядов произведен и для каждого створа выбран оптимальный способ математического описания процесса стока при том или ином

интервале осреднения его (закон распределения вероятностей один во всех створах). Последовательность расчетов в этой схеме следующая:

1. Моделируется случайный вектор годовых стоков с принятым законом распределения вероятностей для каждой его компоненты и заданной корреляционной матрицей связи между компонентами (створами). При этом среднегодовой расход в j -м створе в общем случае описывается m -звенной марковской цепью.

2. Затем для каждого i -го года и j -го створа производится розыгрыш внутригодового распределения стока при месячном временном осреднении. Для этого, описываем процесс стока m -звенной цепью Маркова (m может изменяться от 1 до 12), моделируем месячные модульные коэффициенты (в долях среднегодового расхода) и умножаем их на уже найденный среднегодовой расход. При этом для каждого створа запоминается m предшествующих среднемесячных модульных коэффициентов и при определении каждого месячного расхода учитывается связь его со среднегодовым расходом в данном створе и месячными расходами в других створах. Следует заметить, что при практическом моделировании стоковых рядов на ЭЦВМ учет всех указанных связей в настоящее время еще затруднен, однако принципиальная возможность такого учета имеется.

3. Если все водохозяйственные расчеты производятся одновременно с моделированием расходов, то на следующем этапе моделирования может быть использована предложенная Томасом и Фирингом [Л. 67] схема «пусковой величины» (trigger value), смысл которой заключается в отборе для последующего моделирования тех лет, в которые паводки на реке нуждаются в детальном расчете пропуска их через водохранилища и водопропускные сооружения каскада.

4. Зная среднемесячные величины стока (см. пп. 1—3) для каждого из паводочных месяцев, производится третий этап розыгрыша — розыгрыш среднесуточных величин стока. Как указывалось, схема моделирования выбирается при статистическом исследовании; например, она может быть m -звенной марковской цепью, или, что проще и удобнее, розыгрыш производится методом фрагментов. В последнем случае возможны два варианта: фрагменты за паводок в целом и месячные фрагменты с учетом поправки на месячный коэффициент вариации.

5. При розыгрыше на втором и третьем этапах используются случайные векторы с заданными законом распределения вероятностей и корреляционной матрицей связи между створами, аналогичные применявшимся на первом этапе и полученным при статистической обработке гидрометрических рядов стока.

6. Если расчеты пропуска паводка проводятся в отрыве от остальных водохозяйственных расчетов и производится приведение объема паводка к некоторой заданной обеспеченности в рассчитываемом створе, то схема расчета упрощается (она будет рассмотрена в следующем параграфе).

7. В результате моделирования получаются очень длинные (несколько сотен или тысяч лет) псевдохронологические графики колебаний расходов воды с заданными статистическими параметрами. При этом учитываются стохастические связи как внутри каждого ряда, так и между отдельными рядами.

Водноэнергетические расчеты для сокращения их объема могут проводиться не по всему смоделированному ряду, а по нескольким расчетным участкам его (реализациям). Для отбора нужных реализаций используются зависимости, аналогичные приведенным на рис. 5-2. Для принятой величины расчетной обеспеченности отбор производится по специальной программе. Данная схема позволяет при проведении водноэнергетических расчетов выбирать из длинного искусственного гидрологического ряда сравнительно небольшие расчетные периоды, разные для различных по составу водноэнергетических расчетов. Это дает возможность существенно (в 100—200 и более раз) сократить машинное время, необходимое для расчетов по гидрологическим рядам, смоделированным методом Монте-Карло.

Естественно, что моделирование внутригодового распределения производится только для выбранных расчетных периодов.

Следует еще раз отметить, что в расчетах регулирования стока на основании полученных рядов учитывается полная емкость водохранилища без искусственного деления на многолетнюю и сезонную составляющие.

Таким образом, выше дана достаточно общая схема моделирования гидрологических рядов в любом количестве створов на одной или нескольких реках с отбором расчетных периодов и моделированием для них внутри-

годового распределения стока. По выбранным участкам ряда водноэнергетические расчеты могут осуществляться обычным способом с помощью программ на ЭЦВМ. Использование ЭЦВМ для указанных расчетов дает возможность почти полностью механизировать процесс вычисления и за счет этого во много раз сократить время проектирования и значительно увеличить глубину проектных проработок.

В заключение настоящей главы остановимся на моделировании паводочных приточностей к гидроузлам каскада гидростанций и приведем пример водохозяйственного расчета по выбору пропускных способностей гидроузлов Ангара-Енисейского каскада ГЭС.

5-5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАВОДОЧНЫХ ПРИТОЧНОСТЕЙ К ВОДОХРАНИЛИЩАМ КАСКАДА ГИДРОУЗЛОВ И ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ РАСЧЕТЫ ПРОПУСКА ВЫСОКИХ ВОД

Правильность оценки гидрографа притока в период расчетного паводка имеет большое значение при выборе размеров водосливного фронта гидроузлов. Размер притока в нижележащие водохранилища существенно зависит от регулирующего влияния вышерасположенных водохранилищ, а также от характера формирования паводка по длине водотока, т. е. от соотношения объемов паводков, притекающих к створам вышележащих гидроузлов.

Таким образом, расчет гидрографа притока к проектируемому нижележащему гидроузлу является одновременно и расчетом трансформации водохранилищем этого гидроузла гидрографа зарегулированных вышележащим гидроузлом расходов и гидрографа боковой приточности.

Трансформация паводков — сложная, но методологически разработанная гидравлическая задача. Существует ряд методов построения гидрографов притока к гидроузлу и боковой приточности на участке между гидроузлами при заданном объеме паводка. В указанной задаче не исследованными остаются вопросы о возможных сочетаниях обеспеченностей объемов стока в различных створах каскада гидроузлов.

В выпущенных в 1966 г. строительных нормах и правилах [Л. 68] указывается, что «построение гидрографов

в этом случае можно выполнять по моделям многоводных половодий и паводков реальных календарных лет — общих для всех ступеней каскада. Гидрографы этих лет, построенные по данным гидрометрических наблюдений, приводят к заданной вероятности превышения в соответствии с характеристиками стока в створе того из сооружений каскада, достаточность водопропускных отверстий которого проверяется». Приведенная рекомендация соответствует упрощенному методу фрагментов, о котором указывалось в предыдущем параграфе.

Ввиду недостаточной продолжительности периода наблюдений за стоком число многоводных лет, которые могут служить моделями возможных сочетаний обеспеченностей объемов половодного стока на участках между гидроузлами каскада, расположенными выше проектируемого, невелико. Они, видимо, не могут охватить все возможные в будущем сочетания обеспеченностей объемов половодного стока на участках между гидроузлами.

Для получения различных теоретически возможных сочетаний обеспеченностей объемов притоков ниже будут использованы некоторые положения метода Монте-Карло. При этом конфигурация паводочного гидрографа для каждого створа может быть определена генетическими методами, либо в качестве конфигурации паводочного гидрографа могут быть приняты комплекты наблюденных гидрографов за отдельные многоводные годы по всем рассматриваемым створам. Иллюстрация влияния конфигурации паводка на результаты расчета будет приведена ниже.

Основным исходным материалом для моделирования возможного сочетания объемов паводочного стока в нескольких створах является характеристика корреляционной связи между рассматриваемыми объемами стока, которая задается в виде корреляционной матрицы связи.

Предлагаемый прием, исходящий лишь из объема паводкового притока, без учета максимального расчетного расхода, допустим лишь в случаях, когда высокий паводок может быть существенно трансформирован водохранилищем. При малой регулирующей способности водохранилищ оперирование только объемами паводкового притока может привести к некоторым ошибкам в оценке сбросных расходов.

Указанная матрица для паводочных притоков к створам Ангаро-Енисейского каскада ГЭС, рассматриваемого здесь в качестве

иллюстрации, представлена в табл. 5-7. Эта матрица характеризуется довольно высокой теснотой связи между близлежащими притоками и уменьшением ее (до отрицательной) при удалении притоков друг от друга. Исключение составляют притоки к соседним створам в среднем течении р. Енисея, где отмечается отрицательная связь. Наличие указанных отрицательных связей объясняется различием условий стокообразования в рассматриваемых частях бассейна.

Имея корреляционную матрицу связи между притоками, с помощью метода, изложенного в § 5-3, по программе, приведенной в приложении IV, можно моделировать теоретически возможные комплекты или векторы случайных равномерно распределенных чисел, которые приравниваются к обеспеченностям объема паводков. Использование всех теоретически возможных сочетаний обеспеченности притоков, которые получаются в результате расчета по указанной выше программе выработки коррелированных случайных чисел, представляется ненужным. Это объясняется тем, что в расчете должны участвовать лишь сочетания, дающие высокие паводки в рассматриваемом створе.

Ввиду сказанного общая схема исследования возможных сочетаний паводочной приточности в каскаде гидроузлов представляется следующей:

1. Выявляется корреляционная матрица связи между паводочными приточностями к гидроузлам каскада, а также вычисляются статистические параметры паводочного стока в каждом створе, по которым строятся соответствующие кривые обеспеченности.

2. Генерируется (см. приложение IV) большое число случайных равномерно распределенных векторов с заданной корреляционной матрицей связи.

3. По кривым обеспеченности паводочного стока на каждом участке (см. п. 1) и соответствующим обеспеченностям паводка, взятым из очередного случайного вектора (см. п. 2), определяются объемы паводочного стока для каждого участка.

4. Суммируются объемы паводочного стока на отдельных участках реки, получается объем паводочного стока в расчетном створе, и по кривой обеспеченности паводочного стока в этом створе определяется обеспеченность найденного нетрансформированного паводка.

5. Если определенная таким образом обеспеченность паводочного стока больше некоторой величины, прини-

Наименование ряда	Коэффициенты корреляции между рядами							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Приток к Иркутскому водохранилищу	1,00	0,45	0,25	0,31	0,31	0,20	0,20	-0,20
Приточность на участке Иркутская ГЭС — Братская ГЭС	0,45	1,00	0,45	0,31	0,30	0,29	0,25	+0,09
Приточность на участке Братская ГЭС — Усть-Илимская ГЭС	0,25	0,45	1,00	0,41	0,12	0,07	0,35	-0,12
Приточность на участке Усть-Илимская ГЭС — Богучанская ГЭС	0,31	0,31	0,41	1,00	0,27	0,24	0,46	-0,13
Приток к Саянскому водохранилищу	0,31	0,30	0,12	0,27	1,00	0,78	0,39	-0,26
Приточность на участке Саянская ГЭС — Красноярская ГЭС	0,20	0,29	0,07	0,24	0,78	1,00	0,19	-0,26
Суммарная приточность на участках Богучанская ГЭС — устье Ангары и Красноярская ГЭС — Средне-Енисейская ГЭС	0,20	0,25	0,35	0,46	0,39	0,19	1,00	-0,11
Приточность на участке Средне-Енисейская ГЭС — Осиновская ГЭС	-0,20	+0,09	-0,12	-0,13	-0,26	-0,26	-0,11	1,00

маемой в качестве границы понятия «многоводные паводки» (т. е. если паводок маловодный), то такое сочетание обеспеченностей из рассмотрения исключается.

6. Если найденная обеспеченность паводочного стока в расчетном створе меньше граничной величины (например, $p < 25\%$), то паводок считается многоводным и данное сочетание обеспеченностей используется в дальнейших расчетах.

Для Ангара-Енисейского каскада ГЭС указанным способом из 600 смоделированных реализаций возможных сочетаний объемов паводочной приточности на участках было отобрано 10 сочетаний обеспеченностей, которые соответствовали наиболее многоводным паводкам. Эти сочетания приведены в табл. 5-8. По первому из этих сочетаний (вариант 33) при использовании двух наблюдаемых конфигураций паводков (модели 1959 и 1937 гг.) выполнены расчеты трансформации паводка в водохранилищах каскада и определена необходимая пропускная способность водосбросных сооружений в каждом гидроузле каскада с учетом трансформации паводка в вышележащих гидроузлах. Результаты расчетов приведены ниже. В этих расчетах вычисляется переходный коэффициент, равный отношению объема паводка в проектируемом створе, соответствующего расчетной обеспеченности (например, $p = 0,01\%$), к объему данного паводка, найденному согласно п. 4. На этот коэффициент умножаются объемы паводочного стока каждого участка реки, найденные в п. 3.

Далее одним из принятых способов [Л. 68] производится расчет трансформации высокого стока.

В данной работе для рассматриваемого каскада задача суммирования сбросного гидрографа вышележащего гидроузла и гидрографа боковой приточности решается упрощенно: со сдвижкой сбросных расходов на время добегающего между гидроузлами, но без учета регулирующего влияния динамической емкости бьефа.

Расчет пропуска паводка через каждый гидроузел выполняется как расчет наполнения статической емкости водохранилища полученным гидрографом притока. Такое упрощение задачи для Ангара-Енисейского каскада представляется допустимым благодаря наличию достаточно больших емкостей, используемых для аккумуляции паводков. В других случаях при необходимости это упрощение можно не вводить.

В расчетах пропуска паводка начальный уровень каждого водохранилища принимался равным диспетчерской отметке предположительной сработки. Величина сбросного расхода в нижний бьеф гидроузла в каждый момент времени в течение паводка устанавливалась по соответствующим диспетчерским графикам и изменялась от гарантированной величины до максимального расхода через гидроузел; превышение НПУ допускалось только после использования всей пропускной способности гидроузла.

Результаты расчетов пропуска паводков через рассматриваемый каскад гидроузлов по смоделированному распределению объемов паводков по участкам реки (вариант № 33) и в соответствии с конфигурацией паводков 1937 и 1959 гг. представлены в табл. 5-9 и 5-10.

Обеспеченности объемов половодного стока (%) для расчетных вариантов в статистических испытаниях

Наименование ряда										
	33	60	105	116	137	174	237	293	405	516
Приток к Иркутской ГЭС	11,09	18,1	68,4	12,2	35,5	8,85	13,2	9,20	4,95	16,6
Приточность на участке Иркутская ГЭС — Братская ГЭС	7,97	2,50	26,9	0,44	2,77	0,10	33,2	24,8	16,0	0,82
То же Братская ГЭС — Усть-Илимская ГЭС	24,1	14,2	0,44	0,91	3,15	37,9	1,09	1,52	23,1	1,12
То же Усть-Илимская ГЭС — Богучанская ГЭС	25,9	21,4	6,87	19,4	0,03	1,19	13,0	0,40	0,29	5,41
Приток к створу Саянской ГЭС	5,74	9,12	35,1	6,00	13,00	16,7	1,71	3,84	1,80	13,5
Приточность на участке Саянская ГЭС — Красноярская ГЭС	17,8	1,93	50,4	6,20	2,38	0,62	4,96	40,3	4,21	45,9
То же Богучанская ГЭС — Красноярская ГЭС — Средне-Енисейская ГЭС	0,02	2,76	0,80	4,42	0,60	8,91	0,05	0,12	2,10	0,17
То же Средне-Енисейская ГЭС — Осиновская ГЭС	94,6	99,1	57,5	31,7	0,22	1,78	70,7	93,3	79,8	34,6

Таблица 5-9

Гидроузел	Используемая емкость, км³		Максимальный сброс выходящей ГЭС, м³/сек	Максимальный расход притоности, м³/сек	Обеспеченность боковой притоности, %	Максимальный расход притока к гидроузелу, м³/сек	Обеспеченность объема притока к створу, %	Максимальный расход в нижнем бьефе, м³/сек
	до НПУ	до горизонта форсировки						
Иркутский	13,40	28,50	—	9 400	10,800	9 400	10,80	5 640
Братский	8,04	8,04	5 640	6 710	6,720	10 450	7,10	10 450
Усть-Илимский	3,00	3,00	10 450	7 450	15,900	10 434	0,96	9 710

Гидроузел	Используемая емкость, км ³		Максимальный сброс выходящей ГЭС, м ³ /сек	Максимальный расход боковой приточности, м ³ /сек	Обеспеченность боковой приточности, %	Максимальный расход к гидроузлу, м ³ /сек	Обеспеченность объема притока к створу, %	Максимальный расход в нижнем бьефе, м ³ /сек
	до НПУ	до горизонта форсировки						
Богучанский	8,00	8,00	9 710	6 180	19,600	11 880	0,86	10 500
Усть-Тасеевский	10,80	17,97	10 500	22 600	0,016	28 800	0,01	20 100
Саянский	13,56	13,56	—	8 760	3,150	8 760	3,15	8 760
Красноярский	14,00	14,00	8 760	8 690	9,770	12 130	5,23	12 130
Средне-Енисейский	10,10	10,10	12 130	6 540	0,015	31 500	0,26	31 500
Осиновский	18,50	18,50	31 500	10 600	89,200	41 740	0,01	41 740

Примечание. Модель № 33, конфигурация паводка по 1959 г.

Таблица 5-10

Гидроузел	Используемая емкость, км ³		Максимальный сброс выходящей ГЭС, м ³ /сек	Максимальный расход боковой приточности, м ³ /сек	Обеспеченность боковой приточности, %	Максимальный расход к гидроузлу, м ³ /сек	Обеспеченность объема притока к створу, %	Максимальный расход в нижнем бьефе, м ³ /сек
	до НПУ	до горизонта форсировки						
Иркутский	13,40	28,50	—	9 480	10,800	9 480	10,80	5 651
Братский	8,04	8,04	5 651	5 370	6,720	10 140	7,10	10 140
Усть-Илимский	3,00	3,00	10 140	6 310	15,900	11 270	0,96	9 377
Богучанский	8,00	8,00	9 377	6 120	19,600	14 520	0,86	10 540
Усть-Тасеевский	10,80	17,80	10 540	24 800	0,016	30 100	0,01	19 532
Саянский	13,56	13,56	—	5 180	3,150	5 180	3,15	4 280
Красноярский	14,00	14,00	4 280	10 700	9,770	13 500	5,23	6 150
Средне-Енисейский	10,10	10,10	6 150	6 300	0,015	28 100	0,26	28 100
Осиновский	18,50	18,50	28 100	7 550	89,200	35 600	0,01	35 600

Примечание. Модель № 33, конфигурация паводка по 1937 г.

Аналогичные расчеты были проведены с помощью специальной программы, составленной на ЭЦВМ «Урал-2», и для других смоделированных и отобранных вариантов распределения объемов паводков по участкам реки, а также для некоторых наблюдаемых распределений из числа многоводных лет (1931, 1957, 1941 и др. годы), которые здесь не приводятся.

Приведенные в табл. 5-9 и 5-10 результаты соответствуют самым большим вычисленным расходам воды в створе Усть-Тасеевской плотины, для которой указанные расходы определяют пропускную способность соединительной прорези Тасеева — Енисей.

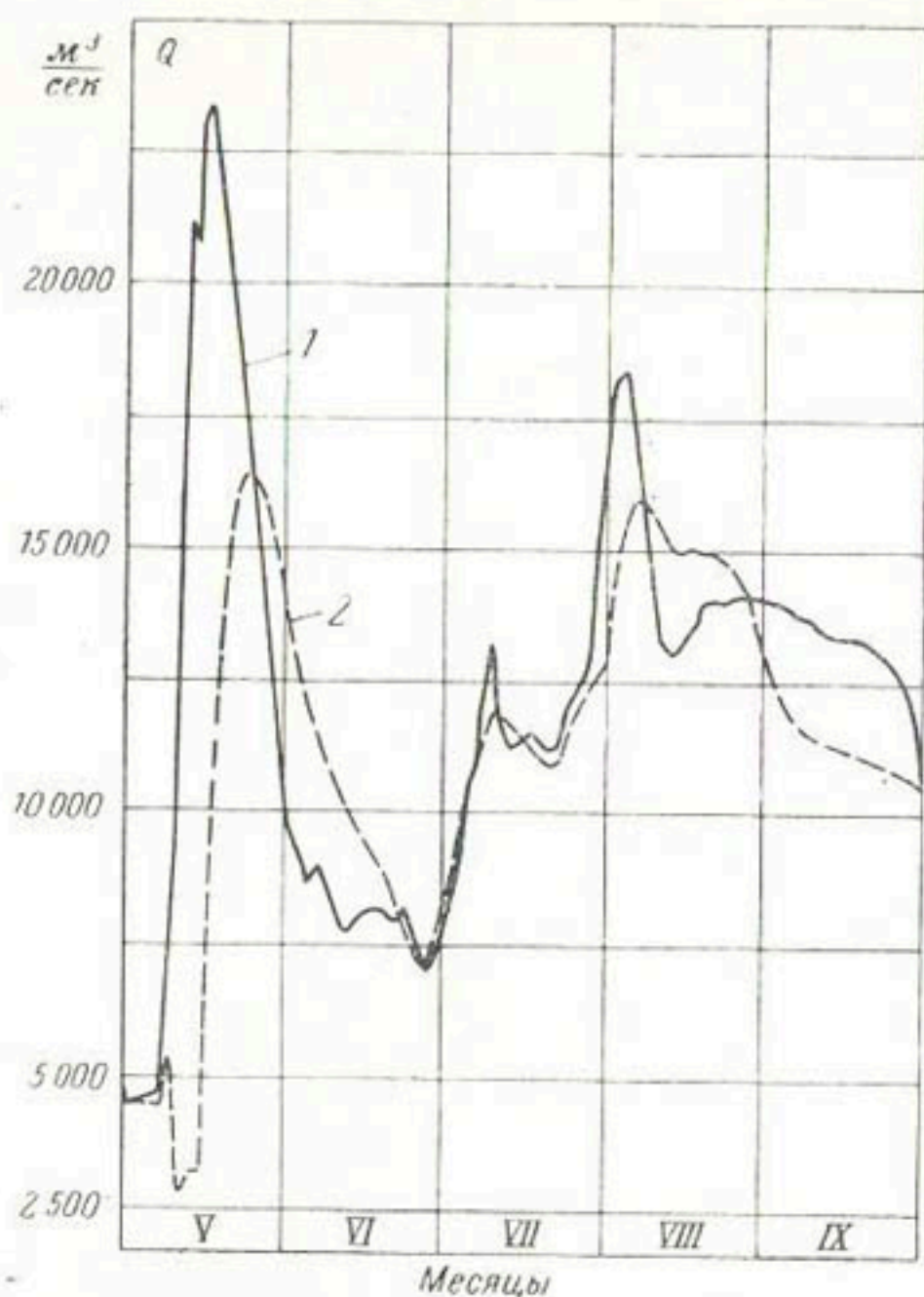


Рис. 5-4. Гидрографы притока к створу Усть-Тасеевской плотины и сбросов через соединительную прорезь Тасеева — Енисей.

1 — гидрограф притока; 2 — гидрограф сбросов.

В результате расчетов, выполненных в соответствии с рекомендацией [Л. 68] по данным наблюдений для отдельных многоводных лет (приведенных к расчетной обеспеченности), были получены значительно меньшие (на 10—15%) максимальные расходы в рассматриваемых створах, чем по наиболее неблагоприятным искусственным сочетаниям, смоделированным методом Монте-Карло.

Следует заметить, что полученный по самому неблагоприятному искусственному сочетанию максимальный расход $20\,100\text{ м}^3/\text{сек}$ значительно меньше расхода, определенного в проекте, исходя из предположения, что половодье обеспеченностью $0,01\%$ проходит во всех створах каскада одновременно. Снижение расчетного расхода, определяющего размер сечения и стоимость соединительной прорези Тасеева — Енисей, составляет $3\,900\text{ м}^3/\text{сек}$, или 16% по отношению к проектному расходу. Наблюдаемый и трансформированный гидрографы паводка в створе Усть-Тасеевской плотины представлены на рис. 5-4.

Следует также заметить, что принятие в качестве расчетного наихудшего сочетания¹ объема паводков на участках реки, а также наихудшей конфигурации паводка из числа наблюдаемых или генетически обоснованных представляется чрезвычайно осторожным решением, требующим обоснования. Приведенный пример свидетельствует о возможности существенного снижения необходимых пропускных способностей гидроузлов при расчете по изложенному методу по сравнению с расчетом, исходящим из предположения одновременного наступления половодий равной вероятности превышения во всех створах каскада.

В то же время рассмотренный способ дает более осторожное решение задачи, чем рекомендуемый [Л. 68] расчет только по гидрографам, построенным по моделям наблюдаемых паводков, исходя из наблюдаемых сочетаний обеспеченностей их объемов на участках.

На основании сопоставления табл. 5-9 и 5-10 можно судить о влиянии конфигурации гидрографа паводка на результаты расчета. Паводок 1937 г. отличается на некоторых участках от паводка 1959 г. абсолютной величиной максимального расхода и более ранними сроками прохождения пика паводка, особенно на среднем и нижнем течении Енисея. Так, например, в 1937 г. на среднем течении Енисея (Саянская ГЭС — Красноярская ГЭС; Красноярская ГЭС — Средне-Енисейская ГЭС) пик паводка наблюдался в первую половину мая, тогда как в 1959 г. пик паводка наблюдался в первых числах июня, т. е. тогда, когда основная часть емкости водохранилища, используемая для трансформации, уже заполнена. Это относится, например, к Средне-Енисейской станции. Кроме того, абсолютная величина максимального расхода на участке Средне-Енисейская ГЭС — Осиновская ГЭС больше в 1959 г., чем в 1937 г. при равных объемах паводка. Этим объясняются различия в результатах расчета, отмеченные в табл. 5-9 и 5-10.

Полученные в результате расчета величины максимального расхода, идущего через прорезь ($20\,100\text{ м}^3/\text{сек}$), и максимального расхода в нижнем бьефе Осиновской ГЭС ($41\,740\text{ м}^3/\text{сек}$) на 15% меньше соответствующих расходов воды, определенных при допущении наступления экстремального паводка во всех створах гидроузлов одновременно.

¹ Важно также установить число этих сочетаний, необходимое для надежного решения задачи в различных условиях.

Глава шестая

УЧЕТ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ СИСТЕМ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ РАСЧЕТОВ

6-1. ОСОБЕННОСТИ ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ РАСЧЕТОВ С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ СИСТЕМ

При проектировании развивающихся энергетических и водохозяйственных систем возникает необходимость определения параметров гидроузлов, работающих в каскадах, сроков ввода их и оптимального режима совместной работы с учетом интересов комплекса водопотребителей и водопользователей, исходя из условия минимума суммарных затрат в рассматриваемых системах за некоторый период времени.

Общим в имеющихся методологических предложениях [Л. 7, 103 и др.] является составление балансов мощности и энергии на каждый расчетный интервал рассматриваемого периода, т. е. так называемых динамических балансов, для различных вариантов структуры развивающихся энергосистем.

При наличии в развивающейся системе гидроэлектростанций появляется необходимость определять для каждого варианта изменения структуры генерирующих мощностей во времени гарантированную на каждый момент времени мощность, а также выработку электроэнергии гидроэлектростанций, которые должны учитываться в балансах мощности и энергии системы. Основные водноэнергетические показатели режима работы гидроузлов — гарантированная отдача и выработка энергии — являются переменными во времени.

Гарантированные мощности и выработки электроэнергии ГЭС, располагаемые на какой-либо интервал времени, зависят от принимаемых режимов работы ГЭС

в течение всего рассматриваемого периода регулирования. В связи с этим возникает необходимость оптимизации режимов работы каскадов ГЭС в развивающихся системах за весь рассматриваемый период. Оптимизация режимов работы комплексных каскадов ГЭС с учетом динамики их развития осложняется необходимостью на каждом этапе развития системы производить распределение водных ресурсов рек между участниками водохозяйственного комплекса, исходя из условия достижения минимума суммарных затрат по системе за весь рассматриваемый период в целом.

Особенностью водохозяйственных и водноэнергетических расчетов, выполняемых при проектировании развивающихся водохозяйственных и энергетических систем, является необходимость установления переменного во времени оптимального режима совместной работы переменного числа гидроузлов с учетом начального наполнения их водохранилищ при изменяющихся во времени требованиях неэнергетического и энергетического комплексов потребителей¹.

Оптимальный режим совместной работы гидростанций в системе может быть установлен в результате решения двух задач: 1) собственно оптимизации режима работы гидроузла в условиях расчетных гидрологических периодов, как бы заранее известных, и 2) разработки средств реализации найденных оптимальных или наиболее близких к ним режимов в процессе эксплуатации, т. е. в условиях неизвестной заранее гидрологической обстановки.

В результате решения первой задачи устанавливаются переменные во времени величины отдачи гидростанции; решение второй задачи завершается построением диспетчерских графиков работы гидроузла или нескольких каскадов гидроузлов, работающих в объединенной энергосистеме.

Надежность принятой диспетчерской схемы проверяется путем определения по ней водохозяйственных и водноэнергетических показателей гидроузлов за рассматриваемый период развития системы. В составе последней задачи необходимо проверить и обеспеченность гарантированной отдачи гидростанций, т. е. соответствие

¹ Вопрос о необходимости учета динамики развития водохозяйственных систем отмечался еще в 1952 г. С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем [Л. 51].

фактической обеспеченности гарантированной отдачи гидростанций системы заданной расчетной обеспеченности, которая в динамической задаче может быть переменной во времени.

Условия определения величины обеспеченности гарантированной отдачи в динамической задаче отличаются от статических. В этом случае вместо длительного периода работы гидроузла при неизменных требованиях комплекса потребителей, как это было в статической задаче, следует рассмотреть ряд относительно коротких расчетных периодов, продолжительность которых $n = T_p + l$ зависит от гидрологических условий данного периода и равна периоду развития системы T_p и некоторому отрезку времени l , необходимому для заполнения водохранилища до НПУ за пределами T_p (подробнее см. [Л. 77]).

Для определения обеспеченности гарантированной отдачи гидростанции в течение периода развития системы необходимо провести расчеты регулирования стока по очень значительному числу n -летий (различной длины), представляющих собой отрезки наблюденного или смоделированного тем или иным способом искусственного гидрологического ряда.

Для решения указанных выше задач определения оптимального режима работы гидроузлов в условиях известной водности за некоторый период развития системы и построения диспетчерских планов работы гидроузлов необходимо из длительного искусственного гидрологического ряда отобрать некоторое число характерных гидрологических периодов. Эти вопросы рассмотрим в следующем параграфе.

6-2. ГИДРОЛОГИЧЕСКАЯ ОСНОВА И ОБЩАЯ СХЕМА ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ СИСТЕМ

Постановка задачи. Исходной гидрологической информацией для проведения водохозяйственных и водноэнергетических расчетов являются данные наблюдений за колебаниями стока рек. Однако если в статической задаче в изменяющихся гидрологических условиях рассчитывается режим совместной работы постоянного числа гидроузлов, то в данном случае некоторый проектируемый вариант ввода гидроузлов в течение расчетного периода развития системы должен рассматриваться

в различных гидрологических условиях, отражающих возможное многообразие их в многолетнем разрезе. Если в нашем распоряжении имеется достаточно длинный гидрологический ряд, то наиболее полное использование его для получения необходимой гидрологической информации осуществляется следующим образом: первый год периода развития системы совмещается с первым годом гидрологического ряда, и расчет ведется в течение n лет этого ряда до завершения последнего цикла регулирования, начатого в любой год периода T_p . Затем аналогичный расчет повторяется при совмещении первого года периода развития системы со вторым годом гидрологического ряда и т. д. до тех пор, пока остаток гидрологического ряда окажется недостаточным для завершения последнего цикла регулирования в очередном n -лети. В результате такого скользящего совмещения первого года периода развития системы с отдельными годами ряда будет просмотрено несколько n -летий (причем любое $n_j \geq T_p$, и между собой эти n -летия могут быть не равны). Указанные n_j -летия могут рассматриваться как некоторое семейство расчетных периодов, дающее представление о возможных сочетаниях водности рек в одном створе, а также между притоками к различным ГЭС и водохранилищам системы.

Как правило, ряды гидрологических наблюдений характеризуют сравнительно небольшой период времени, совершенно недостаточный для непосредственного исследования по нему возможных в будущем сочетаний гидрографов в ряде створов группы рек в течение некоторого периода T_p или n . Поэтому, как это уже делалось раньше при проведении расчетов многолетнего регулирования стока, необходимо исследовать не только наблюдавшиеся, но и значительное количество теоретически возможных сочетаний водности притоков к нескольким ГЭС и водохранилищам, а также различные возможные последовательности изменения водности притоков и сочетания их в течение рассматриваемого периода развития системы. Для этой цели к расчетам регулирования стока системой водохранилищ в динамике необходимо применить некоторые положения теории вероятностей и математической статистики.

Так как аналитическое решение задач регулирования речного стока затруднено [Л. 42], а в сложных водохозяйственных системах особенно, поэтому нам представ-

ляется в настоящее время единственным возможным выполнять расчеты регулирования стока в динамике по искусственным гидрологическим рядам, смоделированным методом Монте-Карло.

Методы моделирования гидрологических рядов в нескольких створах на одной или нескольких реках были достаточно подробно рассмотрены в предыдущей главе. Будем считать, что получение таких рядов возможно, а статистические характеристики их в достаточной степени соответствуют характеристикам рядов наблюдений и длина достаточна для получения надежных решений. Необходимые для проведения водохозяйственных расчетов периоды регулирования при этом целесообразно получать не путем скользящего совмещения (см. выше), а путем последовательного выделения n -летий из непрерывно моделируемого ряда.

В работе И. П. Дружинина и др. было показано [Л. 27], что число теоретически необходимых реализаций расчетных периодов высоковероятностной группы в сложных водохозяйственных системах огромно (2^{200} — 2^{300}) и что применение многозвенных цепей Маркова для моделирования рядов значительно сокращает это число, которое, однако, остается весьма большим. Даже быстродействующие ЭЦВМ не позволяют подробно исследовать эти реализации.

Для практических целей полный перебор всех возможных реализаций представляется совершенно не обязательным, так как любое проектное решение необходимо принимать сообразно некоторой разумной степени надежности, соответствующей точности гидрологических и экономических исходных данных, участвующих в вычислениях. С учетом этого число необходимых реализаций весьма существенно сокращается по сравнению с теоретически необходимым числом их и становится в ряде случаев вполне сопоставимым с числом реализаций, которые можно получить непосредственно из наблюдаемого ряда.

Как уже указывалось в § 6-1, для решения рассматриваемых задач из длительного искусственного гидрологического ряда достаточно отобрать характерные гидрологические периоды: 1) маловодные, соответствующие принятой расчетной обеспеченности отдачи; 2) крайне маловодные, соответствующие отдам, лежащим за пределами расчетной обеспеченности; 3) периоды, в те-

чение которых гидростанции энергосистемы будут работать с отдачей, близкой к среднегодовой; 4) то же, но с максимально возможной отдачей по условиям передачи или потребления энергии в системе и т. д. По отобранным периодам на ЭЦВМ можно выполнить детальные водноэнергетические расчеты совместной работы нормально эксплуатируемых и вводимых гидростанций с учетом начального наполнения водохранилищ для нескольких вариантов их отдачи; в результате последующего технико-экономического анализа или по методике, изложенной в § 6-3, устанавливается оптимальное значение общей отдачи гидростанций в условиях различной водности. При найденных оптимальных значениях общей отдачи гидростанций водноэнергетические расчеты повторяются и результаты их используются для построения диспетчерского графика работы гидростанций.

Отбор расчетных периодов регулирования. Методика выбора расчетных периодов зависит от роли гидростанции в энергосистеме, например от того, является ли данная ГЭС компенсируемой или компенсирующей.

а) Для компенсируемой гидростанции, управляемой по собственному диспетчерскому графику, отбор расчетных периодов может производиться по притоку.

б) Если гидростанция является компенсатором отдачи других гидростанций каскада, расположенных на одном или нескольких водотоках, то отбор расчетных периодов производится по характеристикам суммарного притока к гидростанциям. Однако суммирование расходов притока в створах гидростанций возможно только при условии, что они эквивалентны по напору. Отсюда возникает необходимость перехода к суммированию энергии в створах гидростанций, потенциальной или зарегулированной, подсчитанной по длительному наблюдаемому или искусственному ряду. В обоих случаях в динамической задаче энергия изменяется во времени в зависимости не только от водности периода, но и от числа введенных в эксплуатацию гидростанций и стадии осуществления их.

В отличие от статической в динамической задаче отбор расчетных периодов производится из длительного ряда периодов регулирования, в течение которых состав гидростанций в системе и предъявляемые к ним требования не постоянны, а изменяются во времени в соответствии с намечаемым планом развития энергетической и водохозяйственной систем. Как известно,

расчетный период регулирования должен отвечать следующим условиям: а) быть продолжительнее рассматриваемого периода развития системы; б) заканчиваться моментом заполнения до НПУ водохранилища-компенсатора.

Совокупность периодов регулирования, из которой производится отбор расчетных периодов, должна быть достаточно длинной для надежного определения обеспеченности гарантированной отдачи и отражать все возможные сочетания годовых стоков во времени и в створах гидростанций.

При наличии некоторого гидрологического ряда или ряда эквивалентных ему энергетических величин отбор расчетных периодов регулирования производится путем анализа отдач гидростанций, которые могут быть получены в течение указанных периодов регулирования. С этой целью по всему ряду периодов регулирования производится расчет отдачи гидростанций по годовым интервалам времени. При этом в качестве заданного рассматривается предельно допустимое значение емкости водохранилища, а также принятый для данной задачи алгоритм нарастания гарантированной отдачи гидростанций в течение периода развития системы.

Режим работы гидростанций подчиняется простейшему диспетчерскому правилу: до заполнения суммарной многолетней емкости водохранилищ энергоотдача не превышает гарантированную; после заполнения она равна суммарной энергии притока к створам гидроузлов.

Полезная емкость может быть полностью использована в расчетный период регулирования, соответствующий принятой для каждого года или всего периода расчетной обеспеченности. В периоды регулирования, соответствующие большей обеспеченности, чем расчетная, емкость водохранилища также используется полностью, но отдача становится меньше гарантированной.

В периоды регулирования, соответствующие меньшей обеспеченности, чем расчетная, полезная емкость используется частично, отдача превышает гарантированную.

Отбор характерных гидрологических периодов производится в следующем порядке: а) принимается алгоритм изменения величины гарантированной мощности по годам периода регулирования; б) выполняются водно-энергетические расчеты совместной работы гидростанций

для всей совокупности периодов по годовым интервалам по указанным выше диспетчерским правилам. Периоды регулирования представляют собой n -летия различной продолжительности. Наименьшая длина n -летия определяется расчетным периодом развития системы T_p .

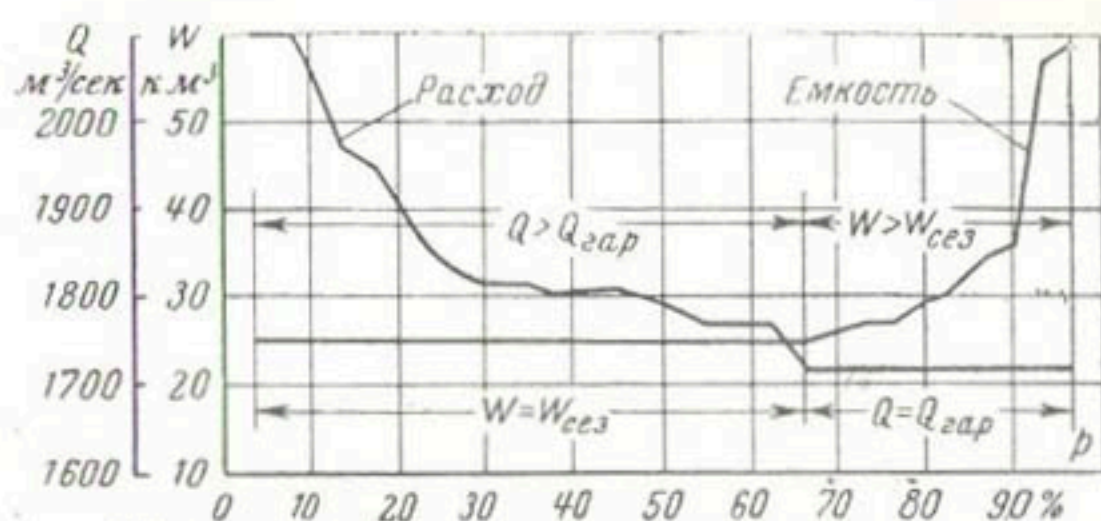


Рис. 6-1. Кривые обеспеченности водоотдачи и полезных емкостей водохранилища (расчетный период развития системы $T_p = 1$ год).

На основании полученных данных — суммарных зарегулированных отдач гидростанций по всем периодам регулирования — строятся: а) кривые обеспеченности зарегулированных отдач гидростанций, суммарных за T_p ; б) хронологические графики максимальных за период регулирования относительных объемов сработки водохранилищ $W_{\max}/W_{\text{пред}}$. Рассмотрим использование приведенной методики на примере некоторой ГЭС при периоде развития системы, равном 1 году.

Кривая обеспеченности отдач гидростанции энергосистемы при длине периода развития ее 1 год показана на рис. 6-1. Там же нанесен график емкостей водохранилища гидростанции, израсходованных для получения этих отдач. При обеспеченности отдачи гидростанции больше 65% величина ее не превышает гарантированную, а емкость возрастает от величины, необходимой для сезонного регулирования, до предельного значения, т. е. до полного объема. При обеспеченности отдачи ГЭС меньше 65% величина ее больше гарантированной, а емкость не превышает сезонную (т. е. многолетняя емкость равна нулю).

Кривая обеспеченности отдачи гидростанции, приведенная на рис. 6-1, дает представление о водности перио-

обеспеченности отдачи (например, 90%) вся полезная емкость должна быть израсходована в расчетный период регулирования обеспеченности 90%, а в периоды регулирования обеспеченностью, большей 90%, при той же емкости отдача была бы меньше гарантированной (т. е. сниженной).

На рис. 6-2 представлены график обеспеченности отдачи гидроэлектростанций за период развития энергосистемы Центральной Сибири продолжительностью 15 лет и график обеспеченности максимальных значений сработанного в каждый период регулирования суммарного объема водохранилищ. На рис. 6-2 отдачи гидроэлектростанций представлены в виде суммарных выработок всех гидроэлектростанций за период развития системы T_p ; отдача за время, проходящее между T_p и сроком заполнения водохранилищ до НПУ, в представляемую характеристику не включена; суммарные максимальные использованные емкости водохранилищ в целях обеспечения сопоставимости их в динамической задаче представлены в относительных единицах, т. е. в долях суммарной многолетней емкости водохранилищ, выраженной в энергетических единицах.

Для построения графиков относительной емкости водохранилищ для каждого периода регулирования вычисляется максимальное за период отношение сработанной емкости к суммарной многолетней емкости водохранилищ того же календарного года.

Путем анализа построенных кривых обеспеченности отдачи гидроэлектростанций и соответствующих им сработанных емкостей может быть произведен отбор расчетных периодов. Порядок отбора может быть иллюстрирован следующим примером.

В качестве маловодных периодов с обеспеченностью около 95% для $T_p=15$ лет (рис. 6-2) нужно рассмотреть периоды, начинающиеся с 1909, 1915 и 1916 гг.: обеспеченность зарегулированной отдачи гидроэлектростанций в указанные периоды равна соответственно 93, 95 и 98%. Кроме того, целесообразно исследовать также период, начинающийся с 1914 г., в гидрологических условиях которого обеспеченность отдачи гидроэлектростанций хотя и равна была всего лишь 88%, но для получения гарантированной отдачи здесь потребовалось использовать всю многолетнюю емкость водохранилищ (рис. 6-2,б).

В качестве средневодных расчетных периодов можно рассмотреть периоды, начинающиеся с 1941, 1919, 1942 и 1918 гг., как близкие к обеспеченности 50% (рис. 6-2,а).

По каждому из выбранных расчетных периодов различной водности дополнительно приводятся следующие показатели:

а) длина периода сработки; б) длина всего периода регулирования; в) хронологические графики или интегральные кривые суммарной потенциальной и зарегулированной энергии в створах гидроэлектростанций за годы расчетного периода.

На основании указанных дополнительных характеристик можно судить о «структуре» близких по обеспеченности периодов, гидрологической обстановке во время наполнения тех или иных водохранилищ, целесообразности задания тех или иных диспетчерских правил работы гидроэлектростанций (в детальном расчете режима совместной эксплуатации гидроэлектростанций в энергосистеме).

На рис. 6-3 представлены хронологические графики потенциальной и зарегулированной энергии, фактически израсходованной, и всей многолетней емкости водохранилищ Ангара-Енисейского каскада. Графики построены по годовым интервалам одного из периодов регулирования.

В Ангара-Енисейском каскаде в ближайшие 15 лет ($T_p=15$), кроме существующих Иркутского и Братского гидроузлов, намечается сооружение еще шести гидроузлов. В рассматриваемом варианте структуры системы Красноярская ГЭС вводится в 1967 г. (1-й год периода), Усть-Илимская — в 1972 г. (6-й год периода), Саянская — в 1975 г., Богучанская — в 1978 г., Средне-Енисейская — в 1980 г., Осиновская — в 1982 г. (подробнее см. § 6-3).

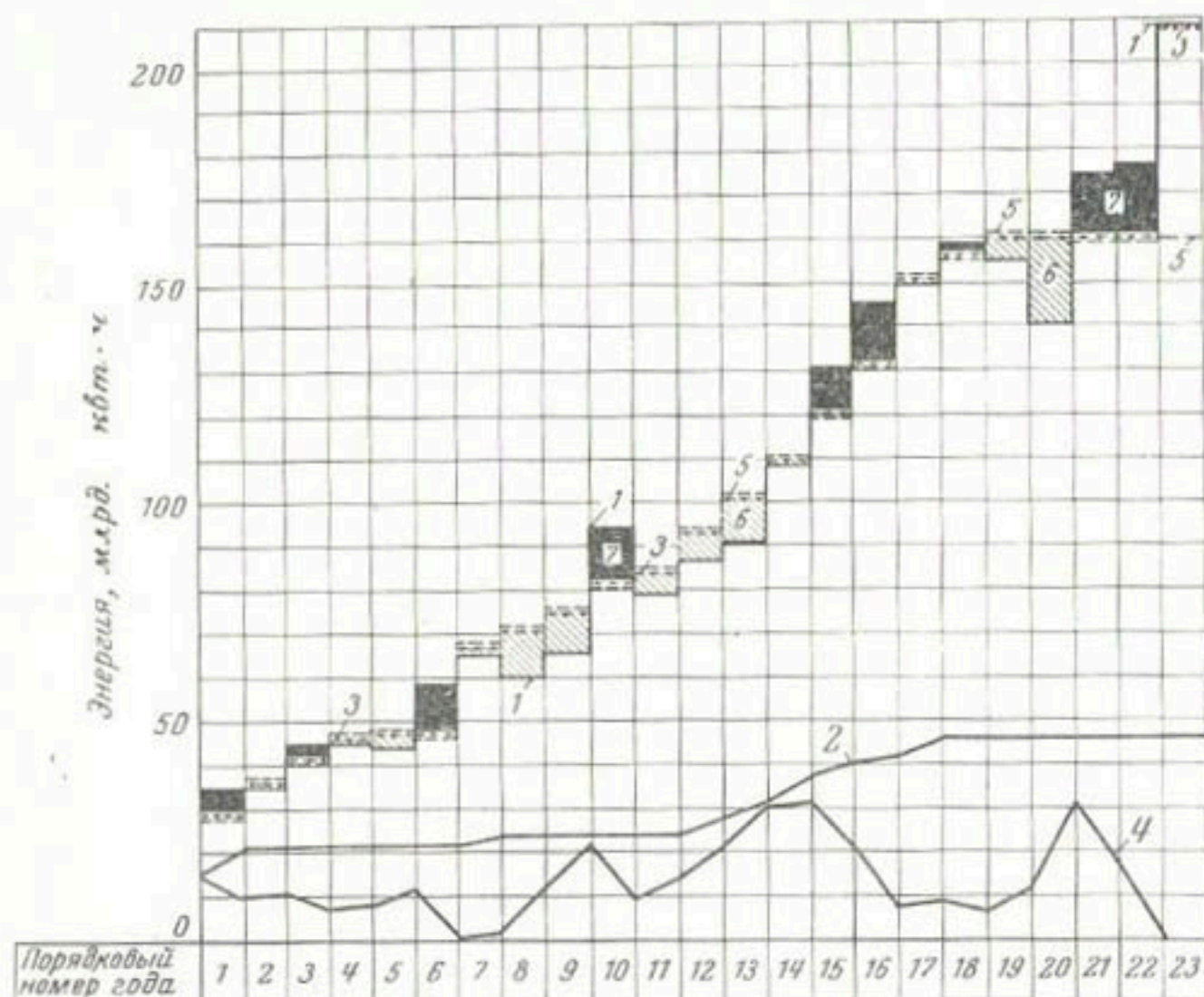


Рис. 6-3. Хронологические графики энергии Ангара-Енисейских ГЭС за расчетный период регулирования.

1 — потенциальная энергия водотока; 2 — располагаемая многолетняя емкость водохранилищ; 3 — зарегулированная энергия гидростанций; 4 — фактически сработавшая емкость водохранилищ; 5 — гарантированная энергия гидростанций; 6 — объемы воды, сработавшей для обеспечения гарантированной отдачи; 7 — объемы воды, израсходованной на наполнение водохранилищ.

Из неэнергетических участников водохозяйственного комплекса наиболее существенно на режим работы гидроузлов и скорость ввода их влияет водный транспорт, требующий обеспечения заданных расходов воды на мелководных участках рек. Удовлетворение этого требования приводит к уменьшению гарантированной отдачи действующих ГЭС и замедлению ввода строящихся. Обеспеченность отдачи гидростанций за первые 5 лет указанного периода составляет 65%, за 10 лет — 80%, а за весь 15-летний период — 90%.

На рис. 6-3 линия 1 обозначает суммарную незарегулированную энергию ГЭС каскада. Эта мощность складывается из незарегулированных мощностей отдельных станций¹. Мощности отдельных ГЭС могут изменяться от нуля (в допусковой период) до полной установленной (в период нормальной эксплуатации). В период начального заполнения водохранилищ мощности отдельных ГЭС зависят от степени заполнения водохранилища в данном году (напора) и числа введенных в эксплуатацию агрегатов. По мере ввода в эксплуатацию новых ГЭС величина суммарной мощности всех ГЭС каскада возрастает, но не непрерывно, так как мощности отдельных ГЭС зависят не только от напора, но и от водности рек в данном году.

Линия 2 обозначает энергетический эквивалент суммарной многолетней емкости компенсирующих водохранилищ каскада ГЭС. Эта величина с течением времени возрастает непрерывно, так как по мере ввода в эксплуатацию новых ГЭС каскада аккумулированная в верховых компенсирующих водохранилищах вода может быть использована на большем напоре.

Линия 3 обозначает суммарную зарегулированную отдачу ГЭС каскада. Эта отдача возрастает с течением времени по некоторому заданному в соответствии с оптимальными режимами работы каскада алгоритму. В нем величина отдачи в каждый интервал времени определяется в зависимости от количества введенных в эксплуатацию ГЭС, степени начального заполнения их водохранилищ, водноэнергетического эффекта совместной работы их и пр. Максимальная величина этой отдачи определяется, кроме условий водности n -летия, располагаемой в каждом году периода развития системы суммарной емкостью водохранилищ, которая хотя бы 1 раз в рассматриваемой совокупности периодов должна полностью использоваться. Ход использования емкости в отдельные годы n -летия иллюстрирует линия 4 на рис. 6-3.

Объемы воды, сработанной из водохранилища для обеспечения гарантированной отдачи, характеризуются заштрихованными площадками на рис. 6-3. Объемы воды, израсходованной на наполнение водохранилищ в отдельные годы сверх обеспечения гарантированной отдачи, показаны зачерненными площадками. Незаштрихованная площадка между линиями 3 и 5 соответствует разнице между зарегулированной и гарантированной энергиями ГЭС. При принятом алгоритме изменения гарантированной отдачи в представленный на рис. 6-3 расчетный период многолетняя емкость водохранилищ используется полностью в 13-м году.

Для завершения цикла регулирования в данном n -лети потребовалось рассмотреть восемь дополнительных лет сверх T_p ($l=8$ и $n=23$).

По отобранным характерным периодам выполняются подробные расчеты совместной работы нормально эксплуатируемых и вводимых гидростанций с учетом начального наполнения водохранилищ последних. При этом рассматривается несколько альтернативных вариантов возрастающей во времени гарантированной (а в опреде-

¹ Незарегулированная мощность ГЭС — мощность, которая могла бы быть получена в результате использования незарегулированного притока воды на гидростанции при имеющемся в данный момент времени напоре.

ленных гидрологических условиях и сниженной) отдачи. Для каждого варианта отдачи строится диспетчерский график совместной работы гидростанций системы.

Полученные данные являются достаточным материалом для выбора величины гарантированной отдачи каскада ГЭС в каждом году периода развития системы в расчетных условиях и величины сниженной отдачи в маловодных условиях, выходящих за пределы расчетной обеспеченности. Указанные величины используются при составлении динамических балансов мощности системы.

При составлении балансов энергии системы используются выработки энергии каскада ГЭС, полученные по средним расчетным периодам. Кроме того, выработки энергии каскада, полученные по отобраным маловодным n -летиям, используются при проектировании системы для определения необходимых в каждом году периода развития резервов мощности и топлива на ТЭС на случай наступления неблагоприятных маловодных условий. Выработки энергии, полученные по многоводным n -летиям, дают представление о возможной экономии топлива при наступлении благоприятных условий.

В результате водноэнергетических расчетов, выполненных по указанным гидрологическим периодам, устанавливаются окончательные диспетчерские правила и показатели режима совместной работы вводимых и ранее введенных гидроузлов, изменяющиеся в течение рассматриваемого периода развития системы.

Приведенная выше схема водноэнергетических расчетов в динамике может быть запрограммирована на ЭЦВМ среднего класса. В нашей работе была использована ЭЦВМ «Урал-2», и все исследования проводились на примере развития Ангаро-Енисейского каскада ГЭС в энергосистеме Центральной Сибири. Результаты проведенных проработок будут рассмотрены ниже. В следующем параграфе рассматриваются также примеры диспетчеризации долгосрочных режимов работы каскадов гидроузлов.

6-3. ПРИМЕР ДИСПЕТЧЕРИЗАЦИИ ДОЛГОСРОЧНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ КАСКАДОВ КОМПЛЕКСНЫХ ГИДРОУЗЛОВ С ВОДОХРАНИЛИЩАМИ

Диспетчерский график работы гидроузла является средством реализации оптимального режима эксплуатации его при неизвестных заранее гидрологических усло-

виях и представляет собой выраженную в графической форме совокупность правил назначения величины отдачи гидроузла в зависимости от уровней воды в его водохранилище.

Основными элементами диспетчерского графика являются зоны работы гидроузла с гарантированной и сниженной отдачами. На диспетчерском графике, построенном в координатах уровней и времени, границы зоны гарантированной отдачи выделяют тот диапазон колебаний уровней, в пределах которого находится запас воды, необходимый для обеспечения гарантированной отдачи гидроузла с принятой расчетной обеспеченностью (в условиях расчетного гидрологического периода, рис. 6-4).

В рассматриваемых гидрологических условиях (в пределах некоторого наблюдаемого или искусственного гидрологического ряда) при заданных величине и обеспеченности гарантированной отдачи, величине сниженной отдачи и принятых оптимальных правилах совместной работы гидроузлов каскада, основные элементы диспетчерского графика определяются однозначно. Гарантированная отдача может быть выражена как зарегулированный расход или как энергия, вырабатываемая гидростанцией, входящей в состав гидроузла. Если гидроузлы расположены на различных водотоках, то под их общей гарантированной отдачей может подразумеваться суммарный зарегулированный расход, соответствующий принятой расчетной обеспеченности. Если в состав гидроузлов, расположенных на различных водотоках, входят гидростанции, работающие в одной энергосистеме, то общая гарантированная отдача их — это суммарная мощность всех ГЭС (среднесуточная, среднемесячная или среднегодовая¹), соответствующая принятой расчетной обеспеченности.

В условиях непрерывного развития системы число гидроузлов (и гидроузлов-компенсаторов), стадия осуществления их, состав и требования потребителей, а следовательно, и гарантированная отдача гидростанций переменны во времени (динамическая задача). Построение диспетчерского графика гидроузла-компенсатора в условиях непрерывного развития системы производится в следующем порядке: 1) выбираются расчетные

¹ В зависимости от регулирующих возможностей водохранилища.

гидрологические периоды в соответствии с указанной в § 6-2 методикой; 2) устанавливается оптимальный режим работы гидроузлов в условиях выбранных расчетных периодов; 3) по полученным в результате расчета уровням воды в водохранилище гидроузла-компенсатора за расчетный маловодный период работы его строятся верхняя и нижняя огибающие уровней водохранилища, т. е. границы зоны совместной работы гидроузлов с гарантированной отдачей (изменяющейся в рассматриваемый период развития системы по заданному алгоритму) на диспетчерском графике гидроузла-компенсатора.

Описываемый метод наиболее целесообразно применять для построения диспетчерских графиков водохранилищ многолетнего регулирования стока.

В процессе эксплуатации построенный диспетчерский график даст возможность реализовать оптимальный режим работы ГЭС в тех или иных расчетных гидрологических условиях. В гидрологических условиях, отличных от рассмотренных, получение оптимального режима не гарантируется.

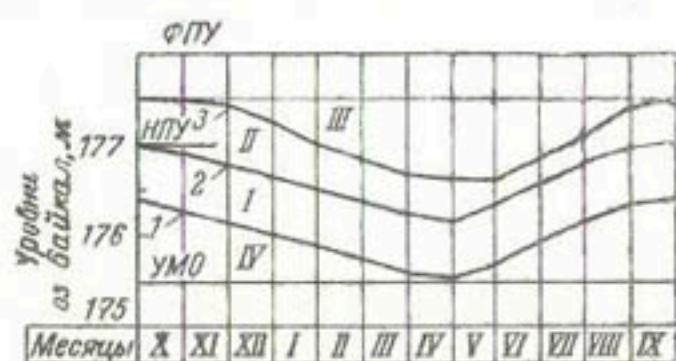
Построение диспетчерского графика работы гидроузлов в условиях непрерывного развития системы рассматривается на примере Ангара-Енисейского каскада в период строительства его с 1965 по 1980 г. Принятые в работе сроки ввода гидростанций приведены в табл. 6-1.

Таблица 6-1

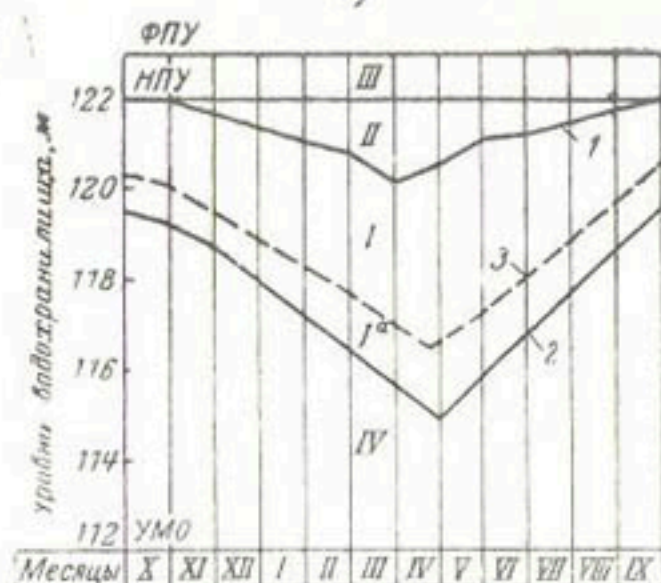
Река	Гидроэлектростанция	Начало на- полнения во- дохранилища	Пуск первого агрегата	Выработка энергии, млрд. кВт·ч	Полезная емкость	
					км³	% средне- много- летнего стока
Ангара	Иркутская	1957	1958	4,1	46	76
	Братская	1959	1961	22,6	50	55
	Усть-Илимская	1971	1972	21,6	3	3
	Богучанская	1978	1978	18,8	4—8	3,5—7
Енисей	Саянская	1974	1975	22,3	14,7	32
	Красноярская	1967	1967	20,3	30,4	34
	Средне-Енисейская	1979	1980	33,3	12,3—20,5	4,8—8,1
	Осиновская	1981	1982	30,2	9,3—18,5	3,5—6,6

Гарантированная отдача гидростанций Ангара-Енисейского каскада на различных этапах осуществления каскада определялась следующим образом: до 1972 г.— путем технико-экономического расчета, с 1972 по 1980 г.— из условия получения наибольшей выработки энергии.

В качестве критерия оптимальности режима отдачи в условиях заданной водности принят минимум приведенных расчетных затрат по энергосистеме за некоторый расчетный период T_p . Задача сводится к отысканию такого хода уровней в водохранилище, который отвечал бы принятому критерию оптимальности. Для решения поставленной задачи был применен один из алгоритмов метода динамического программирования. Предвари-



а)



б)

Рис. 6-4. Диспетчерские графики Иркутской ГЭС (а) и Братской ГЭС (б).

а: I — зона работы Ангаро-Енисейского каскада с общей гарантированной мощностью; II — зона работы Иркутской ГЭС с полной установленной мощностью; III — зона работы с максимальным допустимым расходом через гидроузел; IV — зона работы Иркутской ГЭС с минимальной допустимой отдачей; б: I — зона работы Ангаро-Енисейского каскада ГЭС с общей гарантированной мощностью при запланированной интенсивности начального наполнения ниже лежащих водохранилищ; Ia — то же без обеспечения запланированной интенсивности начального наполнения водохранилищ; II — зона работы Братской ГЭС с полной установленной мощностью; III — зона работы гидроузла с использованием полной пропускной способности его; IV — зона работы со сниженной отдачей.

тельно были построены зависимости отдачи Братской ГЭС для каждого года с 1967 по 1972 г. от отметки водохранилища на начало и конец года: $\mathcal{E} = f(z_{\text{нач}}; z_{\text{кон}})$. Эти зависимости позволяют в широких пределах варьировать выработкой энергии гидростанций при отыскании оптимальной отдачи их по годам рассматриваемого периода.

При известном наполнении водохранилища на конец прошедшего года рассматривается несколько возможных отметок на конец данного года. По графику $\mathcal{E} = f(z_{i-1}; z_i)$ для данного года определяется несколько значений уровней в водохранилище, соответствующих нескольким рассматриваемым значениям выработки энергии за данный год. Для каждого значения выработки по зависимости $Z_{\text{ЭК}}(\mathcal{E})$ строится зависимость $Z(z_{i-1}; z_i)$ (Z — экономия

затрат в некотором году), которая выражает экономию расчетных затрат в энергосистеме при переходе от известной отметки в начале года к ряду отметок в конце года. Полученные конечные отметки в конце данного года используются в качестве начальных для следующего года и для них задается ряд значений отдачи в конце следующего года. Определяются суммарные затраты (экономию) в энергосистеме за 2 года при различных режимах наполнения (значениях выработки). Для каждого значения конечной отметки наполнения водохранилища в 1-м году выбирается выработка, при которой имеет место максимальная экономия в затратах, достигаемая за 2 года. При этом устанавливается оптимальная с точки зрения максимальной экономии затрат за 2 года связь между конечными отметками 1-го и 2-го годов и зависимость максимальной экономии затрат за 2 года от отметки в конце 2-го года. Полученная характеристика экономии затрат за 2 года может служить основанием для определения оптимального режима наполнения (отдачи) за период в 3 года и т. д.

Для построения оптимальной зависимости между уровнями водохранилища в смежные годы может быть использована функция максимальной экономии затрат за все предыдущие годы. Начиная с 1-го года, последовательно строятся функции $Z_i(z_i)$ (Z_i — суммарная приведенная максимальная экономия затрат за i лет) и $z_i(z_{i-1})$.

Используя полученную серию кривых $z_i(z_{i-1})$ и условия достижения определенной отметки в любом году, например НПУ в конце 1972 г., можно ходом назад определить отметку водохранилища в 1971 г., а затем по зависимости $z_{1971}(z_{1970})$ — отметку в 1970 г. и т. д.

Имеющиеся характеристики $\mathcal{E} = f(z_{\text{нач}}; z_{\text{кон}})$ для каждого года позволяют установить соответствующую выработку ГЭС по годам¹.

В результате расчетов оптимизации отдач Иркутской и Братской ГЭС до 1972 г. для каждой из реализаций водности были установлены размеры выработки энергии этих ГЭС в каждом году указанного периода. Распределение же выработки энергии между этими двумя гидроузлами определяется по принципу оптимального использования их суммарного напора и регулирующей емкости. Это достигается наиболее интенсивной сработкой Байкала в первую очередь. В соответствии с указанным положением построен диспет-

¹ Подробнее см. в статье Д. Н. Коробовой [Л. 48].

черский график работы Иркутской ГЭС (рис. 6-4). Во всех проработках, выполняемых для оптимизации отдачи двух гидростанций, отдача Иркутской ГЭС устанавливается по этому диспетчерскому графику.

Следует указать, что начальное наполнение Братского водохранилища при найденных оптимальных значениях отдачи закончится (если не наступит крайне маловодный период) до 1972 г., т. е. до начала наполнения Усть-Илимского водохранилища. За окончание начального наполнения Братского водохранилища принимается момент, когда уровень водохранилища пересечет верхнюю границу зоны гарантированной отдачи на диспетчерском графике, т. е. когда будет накоплен объем воды, достаточный для обеспечения нормальной работы в случае наступления маловодного периода. При наполнении в маловодный период за окончание его принимается момент достижения уровня, имеющего место в расчетный маловодный период при нормальной эксплуатации гидростанций.

В период после 1972 г. величина суммарной гарантированной отдачи гидростанций Ангара-Енисейского каскада определяется следующими соображениями. Гидростанции, введенные в нормальную эксплуатацию, выдают нормальную (проектную) гарантированную мощность, а вводимая гидростанция вырабатывает количество энергии, устанавливаемое в соответствии с требованиями энергосистемы и намечаемыми сроками ввода гидроузла.

Необходимо указать, что отдача каждой гидростанции в первые годы ее работы может ограничиваться величиной установленной в данный момент времени мощности, а также возможностью выдачи энергии, т. е. готовностью линии передач. Последнее ограничение может действовать постоянно, т. е. и при нормальной эксплуатации ГЭС.

Диспетчерский график работы Братской ГЭС до 1972 г. строился следующим образом:

По установленной оптимальной отдаче Иркутской и Братской ГЭС по годам характерных гидрологических периодов производились детальные расчеты регулирования стока р. Ангары водохранилищами Иркутской и Братской ГЭС. Внутригодовое распределение найденной величины годовой выработки энергии Иркутской и Братской ГЭС принималось в соответствии с принципом обеспечения минимума затрат в системе. Если при этом не удовлетворялись требования водного транспорта, то отдача в навигационный период соответственно увеличивалась, а в ненавигационный — снижалась. Путем пусков из Братского водохранилища обеспечивались требуемые расходы в низовьях Ангары и на Енисее, у г. Енисейска, как в период начального наполнения Красноярского водохранилища, так и во время последующей нормальной работы его. Пуск из Братского водохранилища должен дополнять расход воды в нижнем бьефе Красноярской ГЭС и на участке ниже гидростанций до величины гарантированного навигационного расхода у г. Енисейска.

Режим работы Иркутской и Братской гидростанций назначался следующим образом. Отдача Иркутской ГЭС определялась по диспетчерскому графику ее работы. Братская ГЭС дополняла отдачу Иркутской ГЭС до величины, установленной для данного месяца суммарной отдачей обеих ГЭС. Если вследствие обеспечения навигационного пуска в нижний бьеф Братской ГЭС суммарная отдача двух ГЭС превышала оптимальную, то выработка энергии Иркут-

ской ГЭС снижалась до минимума, даже если по положению уровней в оз. Байкал она могла бы быть максимальной. Это условие не выполнялось в тех случаях, когда уровни в оз. Байкал превышали верхнюю границу зоны гарантированной отдачи на диспетчерском графике работы Иркутской ГЭС (линия 2 на рис. 6-4). Отдача Красноярской ГЭС устанавливалась по собственным диспетчерским правилам, предусматривающим максимальную зарегулированность энергии р. Енисея. Величина отдачи Красноярской ГЭС учитывалась при определении оптимальной и максимально возможной выработки энергии Иркутской и Братской ГЭС.

По полученным в результате расчетов совместной работы Иркутской и Братской ГЭС уровням воды в Братском водохранилище строились границы режимных зон на диспетчерском графике работы Братской ГЭС (рис. 6-5) с учетом следующих соображений.

Оптимальную величину отдачи следует обеспечить прежде всего в условиях маловодных периодов.

В 1967 г. оптимальная отдача гидростанций в условиях пятилеток, обеспеченность которых по суточной выработке энергии больше 65%, практически одинакова и равна 21 млрд. кВт·ч. Для обеспечения возможности реализации оптимальной отдачи в средние и маловодные годы на диспетчерском графике эксплуатации Братской ГЭС в 1967 г. выделяется зона I работы с отдачей 21 млрд. кВт·ч. Верхней границей этой зоны (на рис. 6-5) является верхняя огибающая уровней воды в Братском водохранилище, имеющих место в указанные годы при работе Иркутской и Братской ГЭС с оптимальной годовой отдачей.

В целях уменьшения вероятности холостых сбросов зона максимальной допустимой отдачи (III) располагается непосредственно рядом с зоной оптимальной отдачи с I по VII месяцы включительно. С I/VII по 30/IX границей этой зоны (максимально допустимой отдачи) является противосбросовая линия, построенная как нижняя огибающая уровней воды в Братском водохранилище, имеющих место в наиболее многоводные из наблюдаемых паводков при работе ГЭС с использованием всей располагаемой (в данном случае по условиям возможностей потребления гидроэнергии в энергосистеме) мощности. В правой части диспетчерского графика между зонами I и III находится зона II оптимальной отдачи Иркутской и Братской ГЭС для лет обеспеченностью около 40% (по суммарной годовой выработке энергии 24,5 млрд. кВт·ч).

В 1968 г. оптимальная годовая отдача Иркутской и Братской ГЭС в маловодные и средние периоды составит около 20—21 млрд. кВт·ч. Верхняя огибающая хода уровней в указанные периоды может быть принята в качестве верхней границы зоны гарантированной оптимальной отдачи (для маловодных и средних периодов). Выше этой зоны находится зона максимально допустимой (по условиям потребления энергии) отдачи.

Назначение режима работы Иркутской и Братской ГЭС по диспетчерским графикам производится в следующем порядке:

а) В соответствии с фактическим уровнем воды в водохранилище по диспетчерскому графику Братской ГЭС и принятому внутригодовому распределению отдачи находится суммарная среднемесячная мощность Иркутской и Братской ГЭС.

б) В соответствии с уровнем в оз. Байкал определяется отдача Иркутской ГЭС по диспетчерскому графику этой гидростанции.

в) Определяется отдача Братской ГЭС как разность между суммарной отдачей и отдачей Иркутской ГЭС.

г) Проверяется выполнение требований водного транспорта и других ограничений среднесуточной мощности и корректируется распределение суммарной отдачи между гидростанциями. Например, если при гарантированном навигационном попуске в нижний бьеф Братской ГЭС суммарная отдача двух ГЭС превышает установленную по диспетчерскому графику Братской ГЭС, то отдача Иркутской ГЭС снижается до минимума, даже если по положению уровней в оз. Байкал она могла бы быть максимальной.

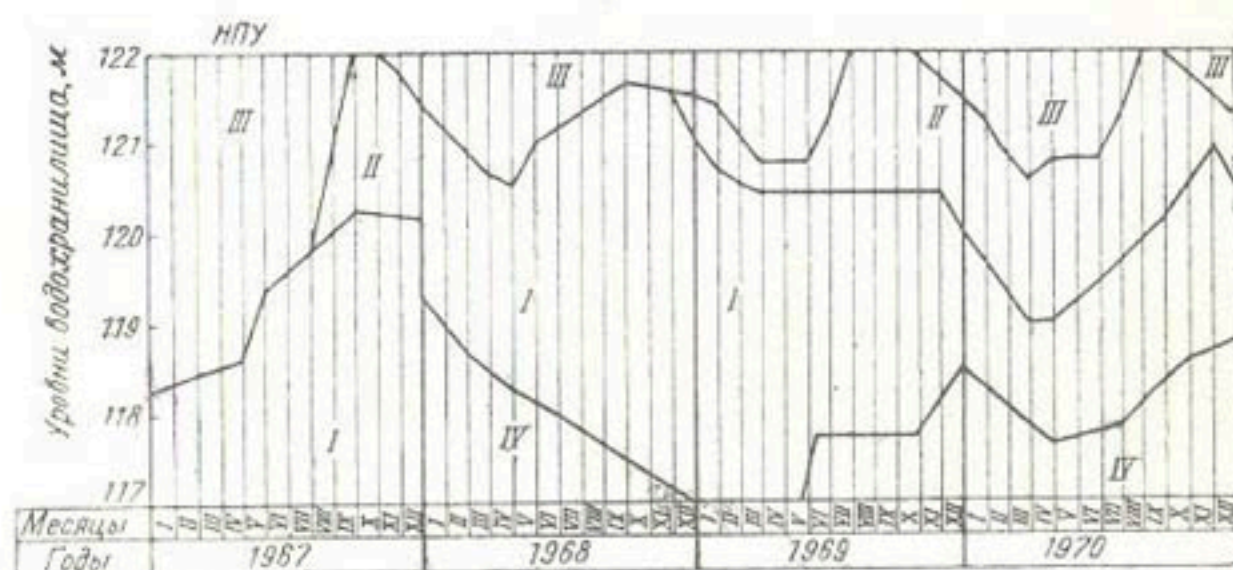


Рис. 6-5. Динамический диспетчерский график Братской ГЭС.

I — зона работы Ангара-Енисейских ГЭС с гарантированной отдачей; II — зона работы гидростанций с повышенной (против гарантированной) отдачей; III — зона работы гидростанций с максимально возможной (по потреблению) отдачей; IV — зона работы гидростанций со сниженной отдачей.

Для периода начального наполнения нижележащих ГЭС на схематический диспетчерский график работы Братского водохранилища после 1972 г. наносится линия, которая делит зону работы Ангара-Енисейских ГЭС с гарантированной отдачей на две части (линия 3 на рис. 6-4). При сработке водохранилища ниже указанной линии специальные попуски для наполнения нижележащих водохранилищ не даются. Линия 3 строится как нижняя огибающая уровней воды в водохранилище в период наполнения нижележащих водохранилищ с некоторой запланированной интенсивностью, для обеспечения которой даются специальные попуски из водохранилища Братской ГЭС. Расчет ведется по n -летнему периоду 90%-ной обеспеченности при условии, что предельная глубина сработки Братского водохранилища не превысит 10 м.

На рис. 6-6 показаны диспетчерские графики работы водохранилищ Ангара-Енисейского каскада для периодов начального наполнения и нормальной эксплуатации.

Поле диспетчерского графика (рис. 6-6,а), построенного для периода начального наполнения Красноярского и Саянского водохранилищ, разбито на три зоны: зону А работы с минимальной допустимой отдачей, зону Б работы с установленной мощностью, зону В работы с использованием всей пропускной способности гидроузла.

Зоны *Б* и *В* разделяет линия максимально допустимых по строительным условиям уровней воды в водохранилище. При совпадении фактических уровней с линией отдачи *1* отдача гидроэлектростанции равна установленной мощности, и на ГЭС производится хо-

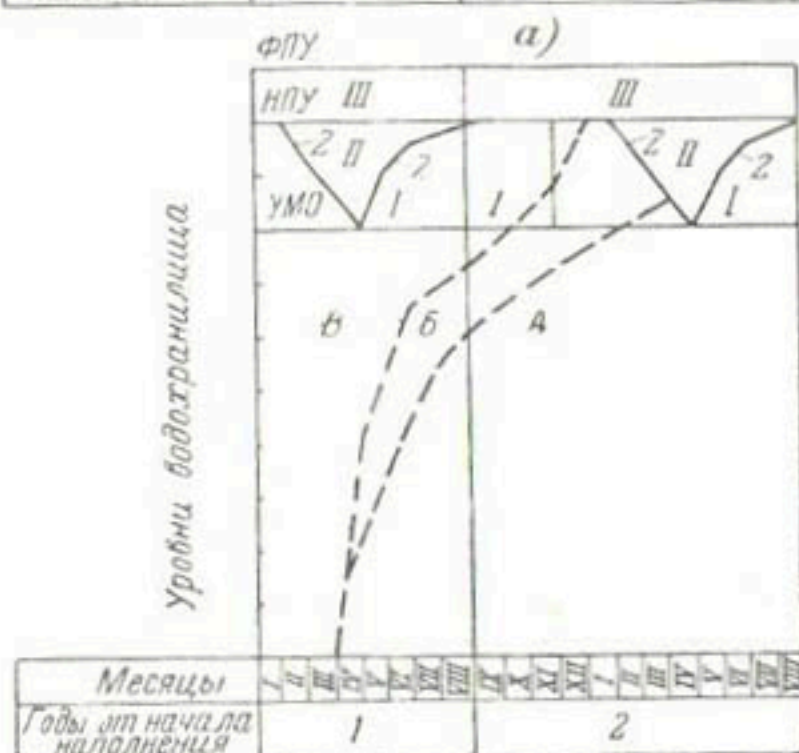
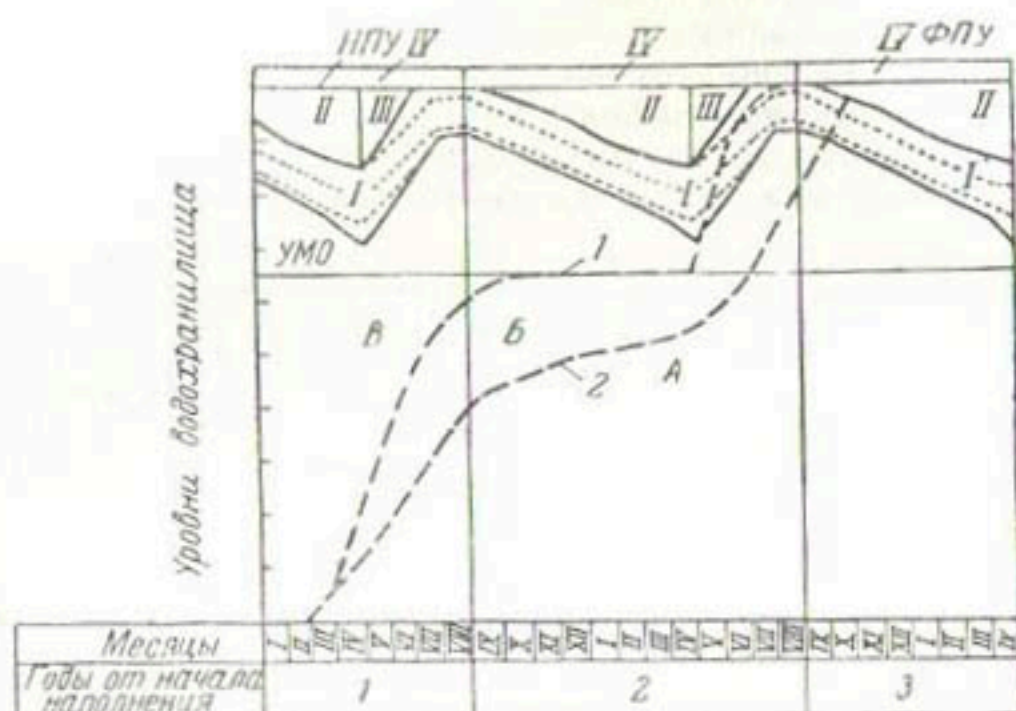


Рис. 6-6. Диспетчерские графики для временной и постоянной эксплуатации.

а — Саянского и Красноярского гидроузлов: *1* — зона работы с гарантированной мощностью; *II* — зона работы с повышенной (по сравнению с гарантированной мощностью); *III* — зона работы с установленной мощностью; *IV* — зона работы с использованием полной пропускной способности гидроузла; *А* — зона работы гидроузла с минимально допустимой отдачей; *Б* — зона работы с установленной мощностью; *В* — зона работы гидроузла с использованием полной пропускной способности его; точками показан ход уровней при нормальной эксплуатации гидроузла в расчетный маловодный период; *б* — Богучанского, Средне-Енисейского и Осинского гидроузлов: *1* — зона «транспортной сработки» водохранилища; *II* — зона работы с установленной мощностью; *III* — зона работы с использованием полной пропускной способности гидроузла; *А* — зона работы гидроузла с минимально допустимой отдачей; *Б* — зона работы с установленной мощностью; *В* — зона работы гидроузла с использованием его пропускной способности.

лостые сбросы. При совпадении фактических уровней с линией 2 отдача гидроузла превышает минимально допустимую, но остается меньше установленной мощности гидроузла. Линия 2 строится как верхняя огибающая уровней воды в водохранилище при наполнении его в условиях расчетного маловодного периода с минимально допустимой отдачей.

После окончания начального наполнения зона *A* диспетчерского графика Саянской и Красноярской ГЭС смыкается с зоной гарантированной отдачи гидроузла *I*, зона *B* — с зоной *II* (в период сработки) и зоной *III* (в период наполнения), а зона *B* — с зоной *IV* использования полной пропускной способности гидроузла. За окончание начального наполнения Красноярского и Саянского водохранилищ принимается момент, когда уровень водохранилища пересечет верхнюю границу зоны гарантированной отдачи на диспетчерском графике, т. е. когда будет накоплен объем воды, достаточный для обеспечения нормальной работы в случае наступления маловодного периода. При наполнении в маловодный период за окончание его принимается момент достижения уровня, имеющего место в расчетный маловодный период при нормальной эксплуатации гидростанции.

На рис. 6-6,б представлено схематическое изображение диспетчерского графика работы Богучанской, Средне-Енисейской и Осиновской ГЭС. Поле диспетчерского графика этих гидростанций, построенного для нормальной эксплуатации, ниже НПУ разбито на две зоны: транспортной сработки водохранилища и работы с установленной мощностью.

Диспетчерский график Усть-Илимской ГЭС отличается от упомянутого только отсутствием зоны транспортной сработки в связи с недостаточностью полезного объема. В зоне *I* уровни могут находиться в навигационный период и в период последующего наполнения водохранилища; в зоне *II* — в том случае, если при сработке по отметкам линии 2 отдача гидростанции достигнет максимально возможной. После окончания начального наполнения водохранилища зона *A* диспетчерского графика исключается, зона *B* сливается с зоной *II*, а зона *B* — с зоной *III* использования полной пропускной способности гидроузла.

За окончание начального наполнения Усть-Илимского, Богучанского, Средне-Енисейского и Осиновского водохранилищ принимается момент достижения «диспетчерских» уровней (уровней, до которых водохранилище срабатывается в каждый рассматриваемый момент времени в период нормальной эксплуатации).

Глава седьмая

ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ РАСЧЕТЫ НА ЭЦВМ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ КАСКАДОВ ГЭС

7-1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В предыдущих главах было отмечено, что режимы работы и гарантированные мощности каскадно расположенных ГЭС зависят друг от друга. Так как ряд отдельных каскадов, расположенных на разных реках, предназначается для совместной работы в объединенных энергосистемах, эти установки следует считать связанными не только гидравлически, но и электрически.

Совместное рассмотрение при проектировании нескольких ГЭС в объединенной энергосистеме приводит к несоизмеримому с числом объединяемых электростанций увеличению сложности и объема вычислительной работы для отыскания оптимальной структуры энергосистемы на различных этапах развития ее и выбора наилучших с точки зрения всей системы параметров отдельных установок.

Даже определение суммарной гарантированной мощности группы ГЭС и их среднемноголетней выработки энергии является чрезвычайно трудоемкой задачей, особенно если в составе рассматриваемых каскадов проектируются компенсирующие водохранилища многолетнего регулирования стока. В проектной практике подобные расчеты до сих пор велись табличным способом и требовали на выполнение одного расчета при наличии 4—5 ГЭС в каскаде до 1,5—2,0 и более месяцев работы квалифицированного техника.

В настоящее время накоплен определенный опыт использования ЭЦВМ при решении отдельных задач водноэнергетического и водохозяйственного проектирования.

Настоящая глава имеет целью ознакомить читателя

с опытом применения ЭЦВМ в водноэнергетическом проектировании и показать основные особенности программирования водноэнергетических задач. Общие сведения о существующих ЭЦВМ, системах их команд и приемах программирования можно получить в специальной литературе [Л. 6, 44 и др.].

Первые попытки использования ЭЦВМ для проведения наиболее трудоемких водноэнергетических расчетов для группы водохранилищ были предприняты в 1957 г. в США. В последующие годы вычислительные машины неоднократно применялись для водохозяйственных и водноэнергетических расчетов при проведении проектных проработок по различным речным бассейнам (Миссури, Теннесси, Колумбия, Нил и др.).

В СССР применение ЭЦВМ при проектировании ГЭС сначала осуществлялось в двух видах расчетов: в гидравлических расчетах неустановившегося движения в нижних бьефах ГЭС и в водноэнергетических расчетах регулирования стока сложных каскадов ГЭС. Одновременно с этим вычислительные машины получили применение при проведении расчетов, связанных с оптимизацией эксплуатационных режимов и планов развития крупных энергетических объединений.

В советской и зарубежной литературе предложено большое количество методов, алгоритмов и программ решения отдельных частных задач, а также сделаны попытки разработать общие схемы расчетов для таких крупных задач, как экономическая оптимизация оперативных эксплуатационных режимов энергосистем, выбор оптимальной структуры и параметров электростанций энергосистем при их проектировании и др.

В настоящей работе не представляется возможным не только осветить, но даже упомянуть все энергетические задачи, для решения которых уже применены или делаются попытки применить различные вычислительные машины. Совершенно очевидно, что число задач в энергетике, для решения которых целесообразно и необходимо применять ЭЦВМ, со временем будет интенсивно расти.

В настоящее время область применения ЭЦВМ при проектировании отдельных гидроэлектростанций также существенно расширилась. Как за рубежом, так и в СССР работа ведется в двух направлениях. Первое из них заключается в механизации существующих методов

и приемов расчетов для ускорения процесса проектирования. Кроме упомянутых гидравлических расчетов неустановившегося движения в нижнем бьефе ГЭС при суточном регулировании и расчетов компенсированного регулирования сложных каскадов ГЭС, большую помощь при проектировании в настоящее время оказывают программы, составленные для проведения различных вспомогательных расчетов. В качестве примеров можно назвать программы построения интегральных кривых выработки энергии группы ГЭС, программы построения кривых обеспеченности расходов или мощностей и т. п. Названные и ряд других сравнительно небольших программ во много раз сокращают время и затраты труда на производство однообразных и утомительных расчетов.

Вторым направлением использования ЭЦВМ при проектировании ГЭС и энергосистем является применение их в таких расчетах, которые вручную не могут быть проведены из-за громоздкости или сложности. Здесь особенно широкое применение получили ЭЦВМ для математического моделирования процесса стока, на базе которого с помощью ЭЦВМ проводятся расчеты сезонного или многолетнего регулирования стока в сложных системах водохранилищ с учетом динамики развития каскадов и энергосистем (см. выше). Широкое распространение получило применение ЭЦВМ для проведения энергоэкономических расчетов при выборе оптимальных длительных режимов работы энергосистем и входящих в них водохранилищ ГЭС.

Разработаны методы и алгоритмы, составлены программы для весьма трудоемких расчетов прохождения и трансформации паводков в каскаде водохранилищ на реке и т. д. и т. п.

В США в 1962 г. был издан коллективный труд [Л. 67], в котором на примере водохозяйственного комплекса (энергетика, ирригация, борьба с наводнениями) дана методика технико-экономического выбора оптимального варианта развития водохозяйственной системы и наилучшего соотношения между параметрами входящих в нее установок и водохранилищ. Как показали проведенные проработки, применение ЭЦВМ при проектировании комплексных водохозяйственных систем позволяет не только ускорить и облегчить процесс проектирования, но и качественно улучшить принимаемые проектные решения, т. е. добиться значительного (по американским

данным на 20—22%) увеличения эффективности капиталовложений, затрачиваемых на сооружение системы.

Все сказанное свидетельствует о высокой эффективности применения ЭЦВМ в водноэнергетических и энергоэкономических расчетах. Весьма показательным с точки зрения оценки эффективности применения ЭЦВМ в водохозяйственном и водноэнергетическом проектировании является также высвобождение значительного количества квалифицированных инженеров и техников от кропотливых расчетов, не содержащих элементов творчества.

Электронные вычислительные машины делятся на два больших класса: 1) вычислительные машины непрерывного действия и 2) вычислительные машины дискретного счета; они же называются цифровыми. В настоящей работе рассматривается применение в водноэнергетических расчетах только электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ). О использовании машин непрерывного действия в гидроэнергетических расчетах см. [Л. 65].

На первых этапах использования ЭЦВМ в водноэнергетических расчетах, проводимых общепринятым табличным способом, каждый программист-водохозяйственник составлял свою программу, непосредственно выписывая всю последовательность арифметических и логических действий, которые должна выполнять ЭЦВМ при решении его задачи. Однако необходимость составления ряда однотипных программ для аналогичных расчетов применительно к разным рекам, а также необходимость передачи готовых программ для применения их в других организациях заставили уже в самом начале использования ЭЦВМ в проектной практике заняться, с одной стороны, универсализацией составляемых программ, а с другой — унификацией отдельных частей их. По мере совершенствования методов программирования появилась возможность приступить к разработке отдельных стандартных элементов, которые позволяют автоматизировать сам процесс программирования водноэнергетических и энергоэкономических задач.

Программы могут полностью состояться программистом. В случае составления крупных программ это требует затраты большого количества времени, связано с напряженным трудом и неизбежно приводит к появлению в программе большого количества ошибок и описок,

для ликвидации которых требуется немалое количество машинного времени (так называемая отладка программы). Для облегчения труда программистов и ускорения процесса составления программ в некоторых странах, в том числе в СССР, были разработаны различные системы и методы автоматизации программирования, которые в конечном счете сводятся к передаче самой ЭЦВМ почти всей наиболее трудоемкой работы по составлению программ. Не имея возможности останавливаться здесь даже кратко на особенностях и основных принципах существующих в настоящее время систем и методов автоматизации программирования, отметим лишь, что они могут быть разбиты на две группы. Первая группа методов автоматизации программирования заключается в том, что язык для описания алгоритмов максимально приближается к обычной математической символике, по возможности не связанной с машиной. В этом случае вся информация об алгоритме, заданная последовательностью символов, перерабатывается в ЭЦВМ в рабочую программу с помощью специальной, так называемой программирующей программы.

Вторая группа методов автоматизации программирования заключается в составлении рабочей программы из готовых отдельных частей ее с помощью специальных, так называемых составляющих программ.

Как при составлении программ вручную, так и в обеих группах автоматизации программирования алгоритм решения рассматриваемой задачи удобно представлять в виде логической схемы, под которой подразумевается наглядное изображение алгоритма, разбитого на элементы, называемые операторами и подпрограммами.

Операторы разбиваются на несколько классов по тем функциям, которые они выполняют при работе программы. Один из основных классов составляют арифметические операторы, при выполнении которых производятся вычисления по арифметическим формулам. Другой основной класс составляют операторы логические, которые производят разветвления процесса вычислений в зависимости от выполнения или невыполнения каких-либо условий. Третий основной класс операторов составляют операторы управления, при выполнении которых производится переработка (модификация) тех или иных частей программы, т. е. изменяется конкретное содержание соответствующих операторов.

В логической схеме программы указанные элементарные операторы кратко обозначаются буквами или другими символами в соответствии с их конкретным содержанием.

В табл. 7-1 приведены стандартные обозначения некоторых операторов.

Таблица 7-1

Операторы	Обозначение	Назначение операторов
Арифметический	А	Вычисление по заданной формуле
Логический	Р	Разветвление вычислительного процесса
Засылка	З	Засылка и пересылка информации
Оператор обращения	Е	Обращение к стандартным подпрограммам
Оператор переадресации	Е	Переадресация команд
Оператор восстановления	О	Восстановление команд
Оператор формирования	Ф	Формирование команд, зависящих от параметров задачи
Оператор ввода	У	Ввод исходных данных и параметров задачи, перевод в двоичную систему
Оператор выдачи результатов	У	Перевод в десятичную систему и печать результатов
Оператор останова	Я	Останов машины

Для большей обзримости логических схем удобно объединить элементарные операторы в группу и обозначить ее одной буквой. Такую группу элементарных операторов называют обобщенным оператором; в состав его могут входить элементарные операторы различных видов. Обобщенные операторы, характерные для водно-энергетических расчетов, будут описаны ниже.

Наиболее часто встречающиеся части программ (например, вычисление элементарных функций), выполняющие одни и те же операции, но с различными исходными данными, могут быть составлены таким образом, чтобы их можно было использовать в программе многократно. Такие элементы программ получили название стандартных подпрограмм (СПП).

Наиболее распространенными СПП в водноэнергетических расчетах являются СПП интерполяции по кривым и номограммам. В качестве примера кривых можно назвать зависимости объема водохранилища от его уровня, уровня нижнего бьефа от расхода в нем и т. д., в каче-

стве примера номограмм — зависимости уровней в нижнем бьефе ГЭС от расхода в нем при учете подпора от нижележащего водохранилища, номограммы динамической емкости водохранилищ и т. д.

Группа обобщенных операторов, составленных для данного класса задач и объединенных по некоторым стандартным правилам, образует так называемые стандартные массивы.

Следует отметить, что с помощью разработанной для данного класса задач системы стандартных подпрограмм и обобщенных операторов программирование их вручную также значительно упрощается и облегчается. В следующем параграфе будут даны описания основных операторов и некоторых других стандартных элементов программ, применяемых для решения водноэнергетических и водохозяйственных задач.

7-2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О СТАНДАРТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ПРОГРАММ ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ВОДОХОЗЯЙСТВЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Как указывалось выше, при проведении водноэнергетических расчетов обычно используется большое число зависимостей, заданных в графической форме. Используемые графики, как правило, бывают двух видов: 1) функции одной переменной и 2) функции двух переменных. Первые зависимости выражаются плавными кривыми с монотонно возрастающими аргументами, вторые — серией кривых различного вида (номограммы).

Особенностью водноэнергетических и водохозяйственных расчетов является необходимость использования кривых как для определения функции по заданному аргументу, так и для определения аргумента по некоторому заданному значению функции. Ввиду сказанного наиболее простым способом ввода кривых в память ЭЦВМ оказался табличный способ задания функций, причем были применены таблицы с переменным шагом. Анализ кривых позволил выбрать простейший, но вполне достаточный с практической точки зрения способ кусочно-линейной аппроксимации указанных кривых. Большое число кривых, необходимых для проведения водохозяйственных и водноэнергетических расчетов сложных каскадов гидроузлов, определило целесообразность стандартного расположения таблиц при использовании подпрограмм интерполяции. Это означает, что перед обра-

щением к подпрограмме интерполяции соответствующая таблица пересылается в некоторые стандартные ячейки. Указанные ячейки используются всеми видами подпрограмм интерполяции по номограммам и кривым. Для задания плавной кривой оказалось достаточным ограничиться шестью точками для аргумента и столькими же для функции. При необходимости вычисления аргумента по заданному значению функции засылка соответствующей таблицы в стандартные ячейки производится в два приема, причем расположения таблицы аргументов и таблицы функций меняются местами.

В программах водноэнергетических расчетов можно выделить [Л. 78, 105] несколько стандартных элементарных арифметических операторов, которые группируются следующим образом:

1. Операторы, необходимые для вычисления мощности одной ГЭС при различных заданных исходных данных.

2. Операторы, необходимые для учета различных ограничений, накладываемых на правила регулирования стока.

3. Операторы, необходимые для подсчета и подбора заданной суммарной гарантированной мощности каскада ГЭС.

Рассмотрим подробнее три оператора первой группы. Считая приток к створу ГЭС известным, для вычисления мощности ГЭС необходимо знать либо турбинный расход, либо отметку верхнего бьефа. При выполнении первого оператора A_1 по заданному турбинному расходу вычисляются отметка водохранилища и расход в нижнем бьефе ГЭС. Этот оператор использует одну стандартную подпрограмму интерполяции по кривой и состоит из ряда элементарных водобалансовых вычислений, в результате которых определяются объем воды в водохранилище и расход в нижнем бьефе. По кривой объема с помощью стандартной подпрограммы (СПП) интерполяции находится искомый уровень воды в водохранилище. Логическая схема этого оператора следующая:

$$A_1 = [Q_{\text{тур}} + Q_{\text{ф}} = Q_{\text{н.б}}] [Q_{\text{тур}} - Q_{\text{быт}} = Q_{\text{с}}] \times \\ \times [Q_{\text{с}} \times t = \Delta V] [V_{\text{пред}} - \Delta V = V] Z_0 E Z_1. \quad (7-1)$$

Здесь: $Q_{\text{тур}}$ — заданный турбинный расход ГЭС; $Q_{\text{ф}}$ — фильтрационный расход через сооружения гидроузла; $Q_{\text{н.б}}$ — расход в нижнем бьефе ГЭС; $Q_{\text{быт}}$ — месячный

приток к водохранилищу ГЭС за вычетом безвозвратных потерь воды (на испарение и т. п.); ΔV — объем сработки водохранилища; $Q_{\text{ср}}$ — расход, соответствующий сработке водохранилища; t — время; V — объем воды в водохранилище в данный месяц; $V_{\text{пред}}$ — то же, но в предыдущий месяц; Z_0 — засылка исходных данных, необходимых для работы СПП интерполяции по кривой объемов, в рабочие ячейки; E — обращение к СПП интерполяции; Z_1 — засылка результатов интерполяции по кривой объемов в стандартные ячейки.

При выполнении второго оператора A_2 по заданной отметке сработки водохранилища определяются турбинный расход и расход в нижнем бьефе ГЭС. В этом операторе также используется СПП интерполяции по кривой.

Третий оператор рассматриваемой группы A_3 используется только после выполнения одного из предыдущих операторов A_1 или A_2 . Количество рабочих команд в операторе зависит от: а) напора ГЭС (т. е. от того, следует ли учитывать переменный к. п. д. агрегатов ГЭС или можно считать его постоянным); б) наличия или отсутствия подпора в нижнем бьефе ГЭС и в) необходимости учета динамической емкости водохранилища.

При вычислении мощности низконапорных ГЭС к. п. д. вычисляется по номограмме, представляющей собой зависимость $\eta = f(Q, H)$. Для большинства высоконапорных ГЭС в рассматриваемых расчетах вполне возможно принимать к. п. д. агрегатов постоянным. Переменный подпор от нижележащего водохранилища учитывается с помощью специальной СПП интерполяции по номограмме подпора.

Рассмотрим логическую схему оператора A_3 для простейшего случая, когда на высоконапорной ГЭС не имеется подпора в нижнем бьефе и не требуется учет динамической емкости водохранилища:

$$A_3 = Z_0 E Z_1 \left[\frac{z_{\text{пред}} + z}{2} = z_{\text{ср}} \right] \times \\ \times [z_{\text{ср}} - z_{\text{н.б}} - \Delta H = H] [9,81 Q H = N]. \quad (7-2)$$

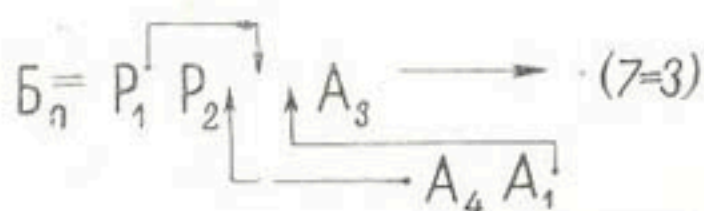
Здесь дополнительно обозначено: Z_1 — засылка результатов интерполяции по кривой расходов $z_{\text{н.б}}$ в стандартные ячейки; z , $z_{\text{пред}}$ — отметки верхнего бьефа водохранилища за данный и предыдущий месяцы; $z_{\text{ср}}$ — средняя отметка за рассматриваемый месяц; ΔH — суммарные

потери напора на ГЭС; H — напор ГЭС; N — мощность ГЭС.

Элементарные операторы A_1 , A_2 и A_3 состоят из сравнительно небольшого числа команд и используют достаточно большое число констант, различных для разных ГЭС.

Общее число элементарных арифметических операторов для водноэнергетических расчетов достигает 10—12. Большое число элементарных арифметических, а также логических операторов, с помощью которых проверяется выполнение того или иного заданного условия, значительно усложняет запись логической схемы программы водноэнергетических расчетов. Для лучшей обозримости схем удобно объединять ряд элементарных операторов в обобщенные. Для того чтобы полностью описать все режимы работы каждой ГЭС, необходимо не более пяти обобщенных операторов. Различные обобщенные операторы, относящиеся к одной ГЭС, будем обозначать одной буквой с тем или иным индексом. В нашем примере будем обозначать их буквой «Б».

Наиболее простым обобщенным оператором является оператор вычисления мощности ГЭС с проверкой обязательного навигационного или ирригационного попуска в нижний бьеф. Для этого оператора принят индекс 0. Выполнению этого оператора в программе предшествует выполнение элементарных операторов A_1 или A_2 . Логическая схема этого оператора следующая:



Здесь: P_1 — логический оператор, проверяющий условие наступления навигационного (ирригационного) периода; P_2 — логический оператор, проверяющий достаточность расхода в нижнем бьефе для удовлетворения требований водного транспорта (ирригации); A_4 — оператор вычисления турбинного расхода ГЭС при заданном навигационном расходе.

Следующая группа обобщенных операторов (B_1) служит для задания так называемого режима минимумов мощностей по условиям пропускной способности линии

электропередачи. С помощью операторов этой группы задается такой режим, чтобы ГЭС выдавала минимальную или близкую к ней мощность с заданной точностью ε_N . Турбинный расход на ГЭС, необходимый для выдачи минимальной мощности, получается за счет специального пуска из водохранилища данной или вышележащей компенсирующей ГЭС. Логическая схема оператора такова:

$$B_1 \left[A_6 A_1 B_0 P_1 P_3 \right] \rightarrow (7=4)$$

Здесь: A_6 — приближенное вычисление турбинного расхода на ГЭС; P_3 — проверка соответствия (с определенной точностью) полученной мощности заданной минимальной. Остальные обозначения приведены выше. При выполнении обобщенных операторов с индексом 2 назначается работа ГЭС с установленной мощностью. Если по условиям тех или иных ограничений или в период начального заполнения водохранилища из-за недостаточности напора выдача установленной мощности невозможна, при работе оператора с индексом 2, ГЭС работает с максимально возможной мощностью, а при отсутствии пускового напора — с нулевой мощностью. Логическая схема оператора 2 аналогична схеме оператора 1, однако в нем несколько больше логических проверок.

В обобщенных операторах с индексом 3 производится проверка необходимости форсировки уровня водохранилища выше противосбросной линии диспетчерского графика $z_{сб}$ (в простейшем случае — выше НПУ). Необходимость форсировки уровня появляется в том случае, если при сработке водохранилища до $z_{сб}$ (или поддержании ее на отметке НПУ) расход в нижнем бьефе превышает максимально допустимую величину. В этом операторе вычисляется также расход холостого сброса из водохранилища.

При выполнении операторов с индексом 4 происходит вычисление мощности ГЭС при сработке водохранилища до одной из заданных отметок, соответствующих той или иной линии диспетчерского графика, и т. д.

При наличии в каскаде большого числа гидростанций с водохранилищами (больше 5—6) в программе водно-

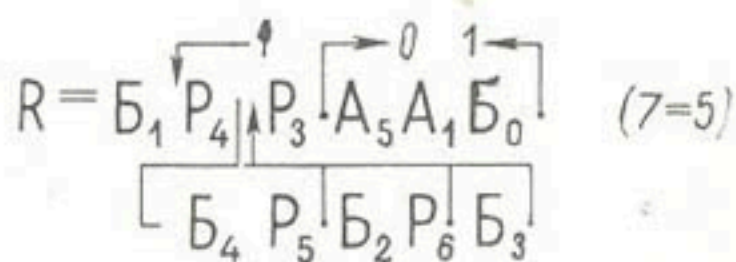
энергетических расчетов становится целесообразным иметь обобщенные и элементарные операторы не для каждой ГЭС в отдельности, а один стандартный комплект их. Для работы его выделяется группа стандартных ячеек, в которую засылаются исходные данные по гидростанции, расчет характеристик которой производится на каждом этапе. В такой программе производится большое количество пересылок исходных данных и результатов расчетов. При меньшем количестве ГЭС в каскаде более целесообразно иметь для каждой ГЭС свой комплект обобщенных и элементарных операторов, работающих с закрепленными для них ячейками, в которых хранятся исходные данные и результаты промежуточных расчетов.

С помощью приведенных элементарных и обобщенных операторов значительно упрощается программирование задач регулирования стока для каскадов ГЭС.

7-3. НЕКОТОРЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ПРОГРАММ ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Рассмотрение логических схем программ начнем с простейших случаев.

1. Рассмотрим логическую схему расчета регулирования стока одним водохранилищем на заданную отдачу одной ГЭС при известных диспетчерских графиках.



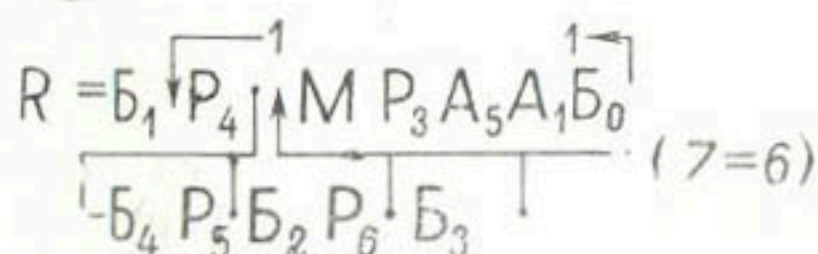
Расчет следует начинать заданием на ГЭС минимальной мощности B_1 ; далее проверяется P_4 — положение уровня водохранилища $z_{вб}$ по отношению к отметке диспетчерской линии z_d , обеспечивающей заданную гарантированную мощность. Если $z_{вб} > z_d$, то управление передается на оператор B_4 и после проверок на превышение установленной мощности P_5 и уровня НПУ P_6 либо выполняются операторы B_2 или B_3 , либо управление сразу передается на проверку соответствия с заданной точно-

стью полученной мощности искомой гарантированной P_3 . При соответствии (или превышении) расчет для данного интервала времени заканчивается (стрелка 0), при несоответствии — мощность ГЭС соответственным образом увеличивается (оператор A_5) и расчет повторяется (A_1 , B_0 и далее по стрелке 1). Ввиду того что невозможно точное определение нужного увеличения расхода для получения заданной мощности из-за переменности напора и к. п. д. на ГЭС единичным расчетом, расчет ведется подбором. Следует заметить, что число итерационных циклов даже при высокой заданной точности расчета оказывается сравнительно небольшим (2—4).

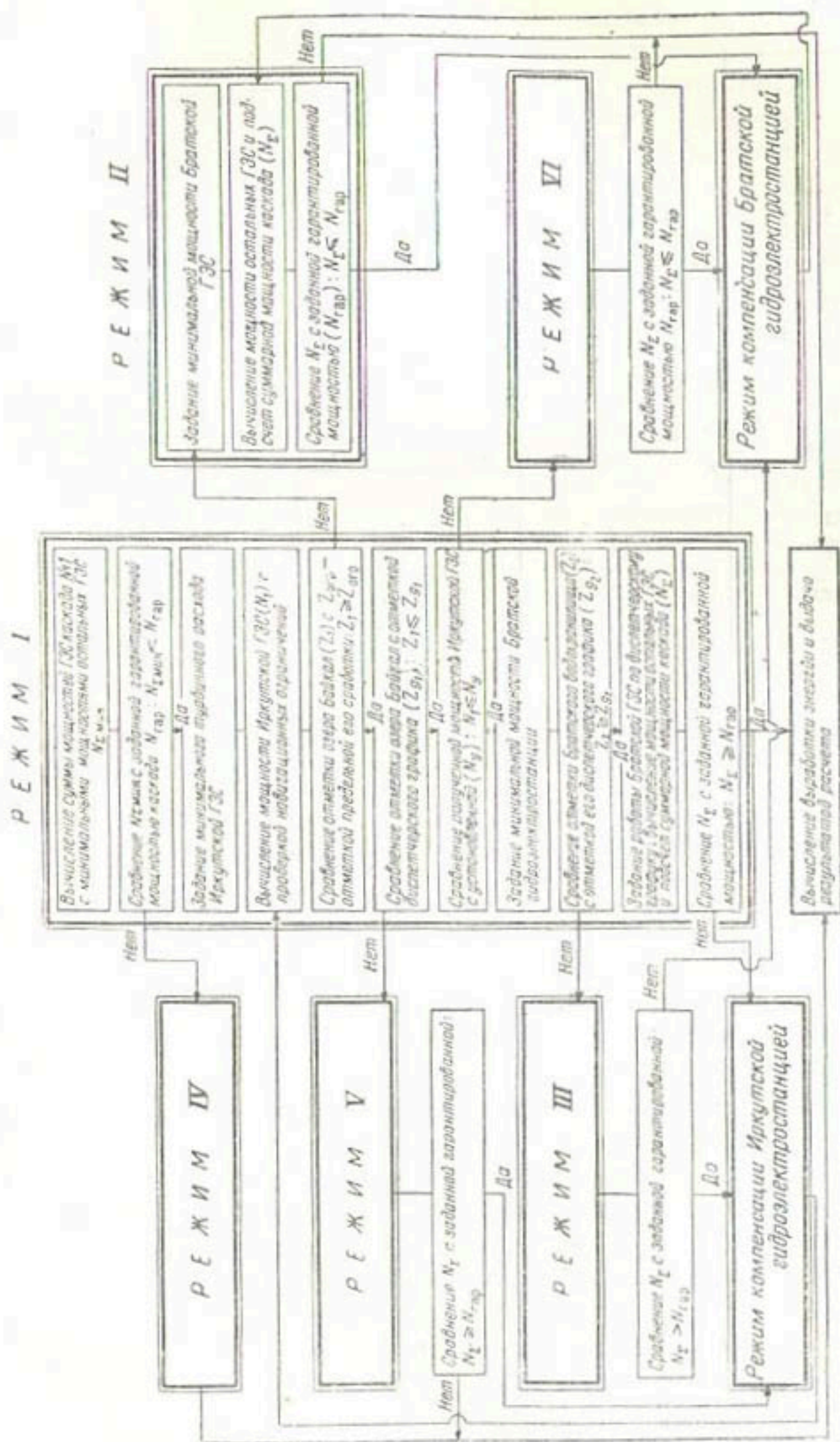
2. Очень похожую логическую схему имеет программа компенсированного регулирования стока в каскаде гидроузлов одним компенсирующим водохранилищем.

Наиболее распространенным является случай, когда компенсирующее водохранилище располагается в верховьях реки. Остальные гидроузлы каскада либо не имеют регулирующей емкости, либо обладают водохранилищами сезонного регулирования стока, причем правила регулирования этих водохранилищ заранее определены. Наличие ГЭС выше компенсирующей и совместное компенсированное регулирование стока еще одного каскада принципиально не изменяют схемы программы, а лишь дополняют ее операторами вычисления мощности верховых ГЭС или компенсируемых каскадов.

Рассмотрим операторную схему регулирования каскада ГЭС, состоящего из четырех компенсируемых и одной верховой компенсирующей ГЭС. Эта схема была разработана применительно к проектируемому каскаду на р. Витиме, а программа составлена для ЭЦВМ «Урал-2». Схема имеет достаточно простой вид, все обозначения в ней указывались выше; символом B обозначены операторы, относящиеся к Мокской компенсирующей ГЭС.



По сравнению с (7-5) в этой схеме появился лишь оператор M , в котором производится вычисление мощ-



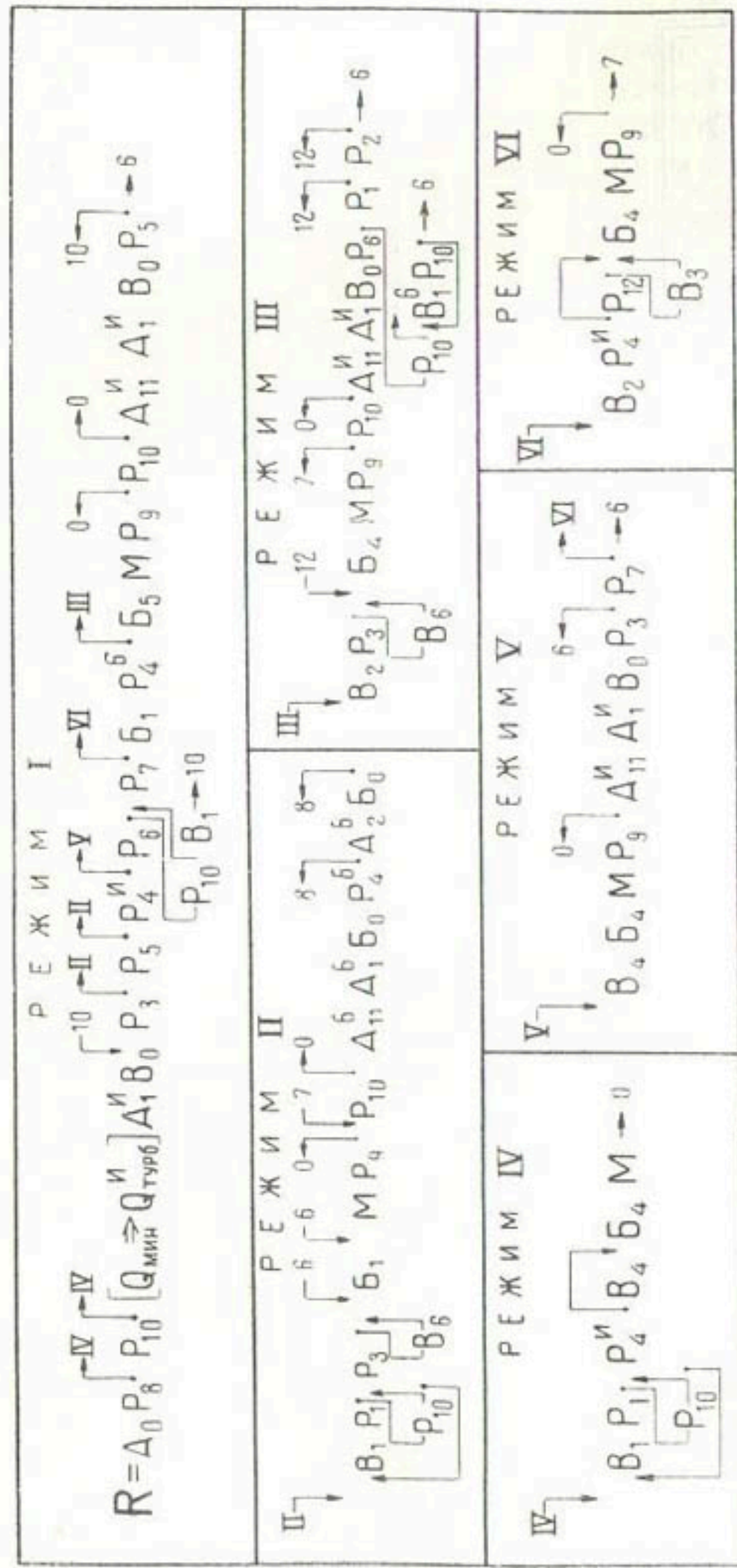


Рис. 7-2. Логическая схема программы расчета режимов компенсированного регулирования стока Ангаро-Енисейским каскадом ГЭС.

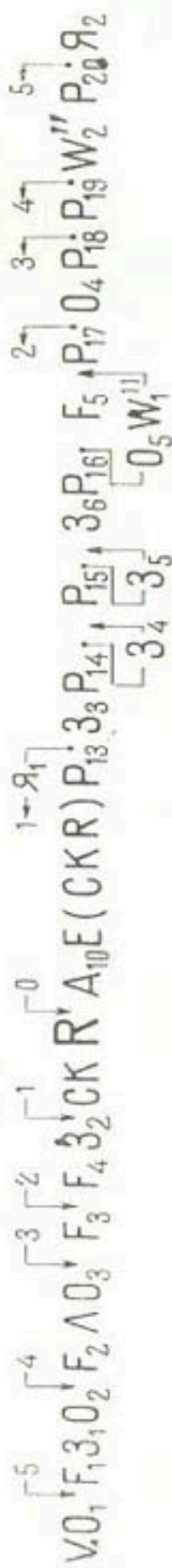


Рис. 7-3. Логическая схема организации программы водноэнергетических расчетов (статическая задача).

ности компенсируемых ГЭС и осуществляется вычисление пусков, которые необходимо давать из компенсирующего водохранилища для удовлетворения требований неэнергетических участников водохозяйственного комплекса и энергосистемы при исчерпании регулирующих возможностей водохранилищ всех компенсируемых ГЭС.

3. Значительно менее частым, однако более сложным случаем компенсированного регулирования стока является регулирование двумя компенсирующими водохранилищами, расположенными на одной реке. Примером такого случая может служить Ангаро-Енисейский каскад ГЭС, подробно рассмотренный нами в предыдущей главе. Там же были подробно изложены диспетчерские правила работы компенсируемых и компенсирующих водохранилищ каскада и распределение функций между последними.

Для реализации в программе изложенных в гл. 6 правил работы и наполнения двух компенсирующих водохранилищ при решении статической задачи были разработаны шесть специальных режимов регулирования; принципиальные логические схемы расчета этих режимов и связи между ними в графическом виде представлены на рис. 7-1, а в операторной форме — на рис. 7-2.

Краткое описание указанных режимов дано в [Л. 69, 78]. В операторной схеме символом В обозначены обобщенные операторы, относящиеся к Иркутской ГЭС, а символом Б — к Братской. В операторе М производится вычисление отдач всех гидростанций, расположенных на рр. Ангаре и Енисее ниже Братской ГЭС. Вычисление отдач Красноярской и Саянской ГЭС производится в логической схеме программы до начала работы части программы, обозначенной на рис. 7-2, символом R, т. е. отдача этих ГЭС при работе R известна и компенсируется Ангаро-Енисейским каскадом, расположенным ниже Братской ГЭС.

4. Приведенные выше логические схемы вычислений вместе с массивом элементарных и обобщенных операторов и СПП являются основой для составления программы водноэнергетических и водохозяйственных расчетов. Однако для проведения самих расчетов необходимы правила использования исходных данных. В программах, подобных водноэнергетическим, в которых используются длинные гидрологические ряды, немаловажное значение приобретает организация необходимых пересылок исходных данных из ячеек памяти, где они хранятся, в так называемые рабочие и стандартные ячейки, с которыми производит операции программа.

Особенностью рассматриваемых расчетов является то, что результаты расчета с одним комплектом исходных данных служат основой для проведения их с последую-

щими комплектами исходных данных. Число указанных комплектов и способы получения их и ввода в ЭЦВМ зависят от вида гидрологической информации, используемой в данном расчете.

Кроме того, существенное значение приобретают вопросы проверки качества расчетов. На ЭЦВМ имеют место нарушения нормальной работы, что приводит к так называемым сбоям, т. е. ошибкам в вычислениях. Контроль правильности расчетов иногда поручается самой машине и достигается так называемым двойным просчетом.

Таким образом, для окончательной разработки программы водноэнергетических расчетов требуется составить так называемую схему организации программы. Изложению схем организации программ водноэнергетических и водохозяйственных расчетов, разработанных в Энергосетьпроекте, будет посвящен следующий параграф. В качестве гидрологической основы этих расчетов для простоты сначала будут приняты наблюдаемые календарные гидрологические ряды.

7-4. СХЕМЫ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОГРАММ И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Схемы организации программ расчетов регулирования стока по календарному ряду остаются практически неизменными для различных каскадов ГЭС и практически не зависят от используемой ЭЦВМ.

Основными элементами указанной схемы являются: а) организация ввода программы и исходных констант в оперативную память ЭЦВМ; б) организация засылки переменных в течение времени величин, используемых в расчете, в стандартные ячейки, которыми оперирует ЭЦВМ; в) организация ввода гидрологических исходных данных из внешних накопителей в оперативную память ЭЦВМ и последовательная пересылка их в стандартные ячейки¹; г) организация двойного просчета по программе и проверка совпадения результатов; д) организация отбора окончательных результатов расчета и выдача необходимых промежуточных результатов;

¹ Схема записи рядов во внешние накопители различна в зависимости от того, используются ли наблюдаемые или искусственные ряды.

е) проверка завершения расчета и выдача окончательных результатов.

Первый элемент указанной схемы (рис. 7-3, оператор V_1) обычно не представляет особого труда при программировании; он достаточно подробно рассмотрен [Л. 6, 44].

В качестве исходных констант (массив № 1) в оперативную память машины вводятся все необходимые диспетчерские графики, кривые и номограммы, заданные в виде таблиц, величины НПУ и установленных мощностей ГЭС, величины ограничений на режим регулирования и т. д.

Большой объем гидрологической информации (многолетние стоковые ряды¹ в рассматриваемых створах делает невозможным одновременный ввод всех гидрологических данных в оперативную память машины. Поэтому в ЭЦВМ гидрологические данные целесообразно хранить во внешних накопителях (на ЭЦВМ «Стрела» — это магнитная лента, на ЭЦВМ «Урал-2» — перфолента или магнитный барабан). В оперативную память эти данные переносятся (оператор Л) последовательно сравнительно небольшими частями, каждая из которых содержит данные за n гидрологических лет (n изменяется для разных каскадов от 1 до 10).

Формирование и переадресация команд последовательного ввода исходных данных в оперативную память производятся при выполнении операторов O_2 и F_2 (см. схему на рис. 7-3).

Засылка очередного месячного комплекта гидрологических исходных данных и переменных величин из массива № 1 в стандартные ячейки производится при выполнении операторов Z_1 и Z_2 , команды которых восстанавливаются и переадресуются в зависимости от величины гарантированной мощности каскада, номера календарного года и месяца расчета при выполнении операторов O_1 , F_1 , O_3 , F_3 , O_4 , F_4 .

Весь рабочий цикл подбора заданной мощности каскада в логической схеме организации программы обозначен буквой **Р**. Буквами **К** и **С** обозначены расчеты компенсируемых ГЭС на других водотоках.

После выполнения части расчета **Р** следует оператор A_{10} , в котором по известным уже подобранным мощно-

¹ Гидрологические ряды, использованные в рассматриваемых водноэнергетических расчетах, имели расчетный интервал времени, равный 1 мес.

стям отдельных ГЭС определяются соответствующие выработки энергии, а также накапливающаяся сумма выработок за весь расчетный период времени. Последняя величина может быть использована для подсчета средне-многолетней выработки энергии каскада.

Для контроля правильности произведенных расчетов в программе предусмотрен второй просчет E (KCR), результаты которого по оператору P_{13} сопоставляются с результатами первого просчета.

При совпадении результатов двойного просчета управление передается оператору Z_3 , при выполнении которого происходит засылка в стандартные ячейки некоторых полученных результатов, необходимых для последующего расчета.

Далее выполняются операторы P_{14} , Z_4 , P_{15} , Z_5 , которые производят отбор результатов расчета. В этой части программы производятся отбор и запоминание самых глубоких отметок сработки компенсирующих водохранилищ и дат наступления их. В этом же элементе производится выдача на печать необходимых промежуточных результатов расчета. Организация выдачи осуществляется операторами P_{16} , O_5 , F_5 , W_1 .

В последнем элементе схемы при выполнении логических операторов P_{17} , P_{18} , P_{19} , P_{20} проверяется, не окончился ли расчет соответственно по очередному гидрологическому году, пятилетке, расчетному периоду, заданной серии гарантированных мощностей. В зависимости от результатов проверок расчет продолжается или повторяется в соответствии со стрелками 2, 3, 4 или 5. После окончания расчета машина останавливается (оператор $Я_2$).

Следует отметить, что применение ЭЦВМ дает возможность значительно расширить число рассматриваемых вариантов и тем самым сделать проектные проработки более глубокими. Кроме того, может быть значительно повышена точность расчетов по сравнению с расчетами, выполняемыми вручную.

В ЭЦВМ подбор на заданную гарантированную мощность каскада осуществляется с определенной точностью ϵ_N . Последняя величина может быть различной в зависимости от количества и мощностей ГЭС в каскаде. Следует отметить, что чрезмерная точность расчета ведет к увеличению итерационных циклов и тем самым к увеличению общего времени расчета. Наиболее целесообразной точностью расчета для рассмотренных каскадов

явилась величина, приблизительно равная 0,1% суммарной гарантированной мощности каскада.

Общее время, необходимое для подбора по одной строчке (месячному интервалу времени), существенно зависит от количества и регулирующих функций ГЭС в каскаде, т. е. от схемы регулирования, а также от объема выдаваемой на печать промежуточной информации.

Опыт эксплуатации программы показал, что время расчета по одной строчке может колебаться от 1 до 12 сек. В соответствии с этим в зависимости от длины исходного гидрологического ряда общее время расчета может изменяться от нескольких минут до нескольких часов машинного времени, т. е. по сравнению с ручным счетом сокращается примерно в 200—400 раз.

При поэтапном проектировании каскадов гидроузлов возникает необходимость рассмотрения режимов регулирования стока и выбора параметров ГЭС при меньшем числе станций в каскаде, чем при полном развитии его. Эта же задача возникает при оценке эффективности ввода той или иной станции, участвующей в компенсированном регулировании стока, и выявлении влияния ее на характеристики запроектированных или построенных ГЭС.

При изменении числа ГЭС в каскаде или рассмотрении ряда сочетаний ГЭС и режимов работы при том же составе разработка новой программы регулирования стока представляется нецелесообразной. Гораздо проще оказалось вносить в уже составленные программы некоторые несложные изменения. Общим принципом указанных изменений, который был хорошо проверен при проведении расчетов для Ангара-Енисейского каскада ГЭС, является исключение из расчета тех частей программы, где расположены команды, касающиеся станций, исключенных из данного расчета. В большинстве случаев изменения касались обобщенного оператора **М** (расчет компенсируемых ГЭС, расположенных на одном водотоке с ГЭС-компенсаторами: Усть-Илимской, Богучанской и т. д.) и частей программы, где производится расчет компенсируемых ГЭС, не связанных гидравлически с компенсирующими ГЭС (Саянская или Красноярская ГЭС).

Для ЭЦВМ типа «Стрела», на которой ввод осуществляется с помощью перфокарт, указанные изменения

программы осуществляются путем замены ряда перфокарт в программе и исходных данных в соответствии с рассматриваемыми условиями.

Для ЭЦВМ «Урал-2», на которой ввод осуществляется с помощью перфоленды, указанный способ оказался неудобным. Ввиду этого все изменения в составе и характеристиках гидроузлов производятся путем изменения только исходных данных, которые хранятся во внешних накопителях (магнитный барабан). Так, например, чтобы исключить из расчета Богучанскую ГЭС, достаточно записать нуль в ячейку, где хранится величина ее установленной мощности. Аналогичным образом можно производить изменения величины любого параметра любой из рассматриваемых в программе ГЭС.

Программа расчетов регулирования стока какого-либо каскада ГЭС может быть использована для водно-энергетических расчетов при различных составе и сочетании ГЭС в каскаде, а также при различных параметрах и характеристиках входящих в каскад гидроузлов. Таким образом, указанные программы для данного каскада (или подобных каскадов) можно считать универсальными.

В следующем параграфе будут рассмотрены особенности программ водноэнергетических и водохозяйственных расчетов с учетом динамики развития систем, а также особенности проведения этих расчетов по длинным искусственным гидрологическим рядам.

7-5. ОСОБЕННОСТИ ПРОГРАММ ВОДНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ СИСТЕМ

Рассмотренные в гл. 6 особенности проведения водохозяйственных и водноэнергетических расчетов в динамике потребовали некоторых изменений в программах расчетов на ЭЦВМ по сравнению с программами, описанными выше в данной главе.

Программу расчетов с учетом динамики оказалось целесообразным разделить (для ЭЦВМ «Урал-2») на две части. Для обмена информацией между частями используются внешние накопители машины.

В первой части производятся: 1) моделирование среднегодовых притоков к створам ГЭС и водохранилищу; описание этого блока программы приведено в гл. 6; 2) проведение упрощенных расчетов регулирования сто-

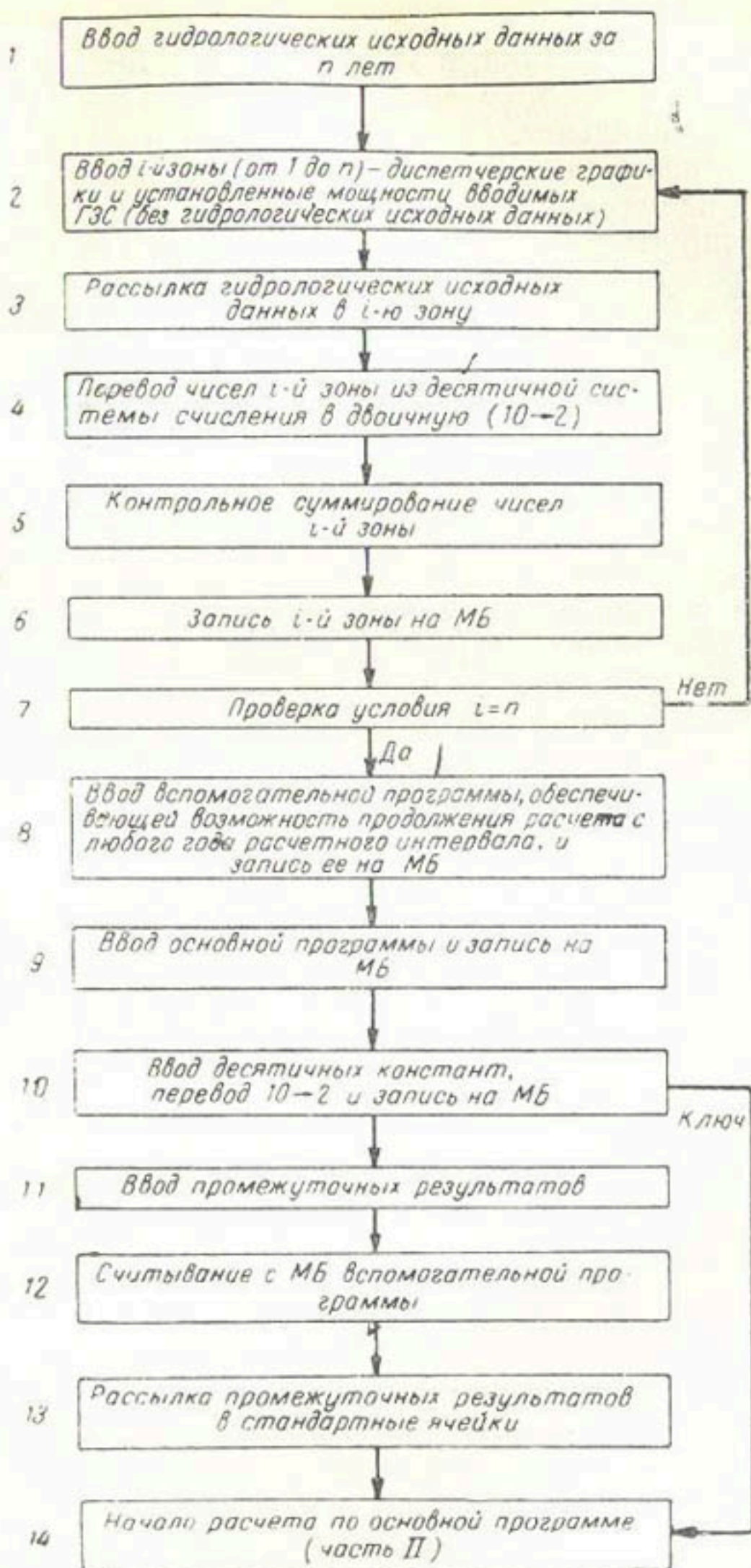


Рис. 7-4. Блок-схема программы ввода и формирования исходных данных в программе водно-энергетических расчетов (динамическая задача).

ка с учетом динамики; в этом блоке для заданного варианта развития энергосистемы учитываются: отъемы воды на начальное заполнение строящихся водохранилищ; б) переменность напоров ГЭС; в) изменение с течением времени энергетического эквивалента емкостей компенсирующих верховых водохранилищ за счет ввода нижележащих гидростанций в эксплуатацию и пропуска запасов воды, накопленных в этих водохранилищах, через большее количество ГЭС на более высоком напоре; г) переменность с течением времени гарантированных совокупных отдач ГЭС системы и отъемов воды на нужды неэнергетических участников водохозяйственного комплекса, причем при определении величины совокупной отдачи ГЭС системы учитываются возможности получения водноэнергетического эффекта асинхронности стока и компенсированного регулирования его; 3) построение кривой обеспеченности совокупных гарантированных отдач ГЭС при заданном алгоритме изменения их с течением времени и отбор расчетных периодов, дающих отдачи в соответствии с принимаемыми градациями обеспеченности¹; 4) моделирование для каждого года отобранных расчетных периодов внутригодового распределения стока. Схема моделирования была дана в гл. 5; она сводится к последовательному вычислению относительных (в долях среднегодового стока) среднемесячных (или среднедекадных) притоков к створам ГЭС. Процесс стока в общем случае описывается многозвенной марковской цепью; в качестве закона распределения вероятностей принимается либо биномиальный, либо логарифмически нормальный закон. Характеристика связи между рядами учитывается путем преобразования независимого случайного вектора с равномерным в интервале (0; 1) законом распределения вероятностей в равномерный вектор с заданной корреляционной матрицей. Условно принимается, что учитываемые при моделировании расходы

¹ В простых случаях, когда исследуются лишь одна-две гидростанции в каскаде, при сравнительно небольшом периоде развития системы возможно существенное упрощение описанной схемы первой части. Здесь можно не включать пп. 2 и 3, а подробный расчет регулирования стока (вторая часть программы) производить для всех смоделированных расчетных периодов. В этом случае оказывается возможным несколько упростить и схему моделирования среднемесячных расходов и применить для этой цели метод фрагментов.

для первого года каждого расчетного периода являются расходами последнего года предыдущего расчетного периода. Для первого расчетного периода эти данные берутся из ряда наблюдений.

Полученные в результате моделирования относительные величины месячных расходов для каждой ГЭС умножаются на соответствующий среднегодовой расход данного года. Абсолютные величины месячных расходов записываются во внешние накопители (магнитная лента или магнитный барабан) и могут быть использованы в дальнейшем для работы второй части программы.

Логическая схема программы формирования исходных данных в виде, необходимом для работы второй части, представлена на рис. 7-4. В блоке 1 осуществляется ввод в оперативную память ЭЦВМ гидрологических исходных данных за расчетное n -летие. Здесь возможны различные варианты ввода: с перфоленты, с магнитной ленты, с магнитного барабана в зависимости от того, каким образом были получены исходные гидрологические данные. Если расчет ведется по календарному ряду наблюдений, то обычно используется перфолента, если по искусственному ряду, то удобно использовать магнитную ленту или магнитный барабан.

Далее в блоке 2 производится ввод комплекта исходных данных, которые изменяются от года к году периода развития системы. В составе этих данных величины установленных мощностей отдельных ГЭС, характеристики их диспетчерских графиков и т. д.

В блоках 3—6 производятся формирование комплекта исходных данных в виде, необходимом для расчета по основной части программы для i -го года, перевод всех исходных данных в двоичную систему, контрольное суммирование и запись его в соответствующую зону магнитного барабана.

Далее расчет повторяется для остальных лет периода развития системы. После этого в оперативную память вводятся основная программа (вторая часть) и постоянные исходные данные. Блоки 10—13 предназначены для проведения расчета с некоторого нена начального момента времени (продолжение расчета).

Вторая часть программы расчетов для сложного каскада ГЭС отработана на примере Ангара-Енисейского каскада ГЭС, работающего совместно с ГЭС европей-

ской части СССР в Единой энергосистеме Советского Союза. Эта часть программы выполнена на базе разработанной в Энергосетьпроекте системы элементарных и обобщенных операторов и СПП для водохозяйственных расчетов (см. § 7-2 и 7-3).

Программа для расчетов ГЭС Единой энергосистемы Центральной Сибири выполнена в двух вариантах: 1) элементарные и обобщенные операторы для всех ГЭС, кроме Иркутской, являются одними и теми же; перед расчетом данной ГЭС в массив стандартных ячеек, с которыми работают операторы, пересылается комплект исходных данных, соответствующих данной ГЭС; 2) элементарные и обобщенные операторы разработаны для каждой ГЭС в отдельности. Каждая группа операторов работает со своими исходными данными.

В первом варианте программы для схемы регулирования используется не вся оперативная память, поэтому гидрологическая и структурная информация переносится в оперативную память большими порциями. Во втором варианте для схемы регулирования практически использована вся оперативная память, поэтому гидрологическую и структурную информацию из внешних накопителей приходится переносить малыми порциями (лишь для одного расчетного интервала времени). Частые обращения к внешним накопителям во втором варианте и многократные переносы числового материала из одних мест оперативной памяти в другие в первом делают время работы обоих вариантов программы примерно одинаковым. В обоих вариантах программы номограммы и кривые объемов для сокращения занимаемого ими места в оперативной памяти записывались в неполные ячейки.

В схеме регулирования программы, которая одинакова для обоих вариантов, предусмотрено следующее:

1. Компенсированный режим регулирования производится двумя водохранилищами, правила ведения которого изложены выше (см. § 7-3).

2. В отличие от программы, рассмотренной в § 7-3, все компенсируемые ГЭС на рр. Ангаре и Енисее работают в соответствии с их собственными диспетчерскими правилами и осуществляют сработку собственных водохранилищ для удовлетворения требования водного транспорта в нижних бьефах гидроэлектростанций, выдачи в энергосистему некоторой минимальной гарантирован-

ной мощности и регулирования боковой приточности между створами.

3. Время начала эксплуатации строящихся ГЭС не фиксируется; задается лишь момент, когда по строительным условиям можно начать заполнение водохранилища. Темпы начального заполнения водохранилищ зависят от водности рек в рассматриваемый период, темпов строительных работ, а также степени заполнения компенсирующего водохранилища Братской ГЭС.

В условиях начального наполнения строящихся водохранилищ предусмотрено правило «не снижающейся отметки», по которому уровень воды в водохранилище поддерживается не ниже отметки наполнения в предыдущий интервал времени в условиях, когда Братское водохранилище сработано ниже некоторой контрольной отметки ($h_{\text{ср}} = 3 \text{ м}$). В условиях, когда водохранилище Братской ГЭС наполнено выше указанной отметки, в наполняемых водохранилищах за счет специальных пусков из Братского водохранилища уровень поддерживается не ниже некоторой переменной во времени линии на диспетчерском графике. Сработка наполняемого водохранилища допускается в некоторой зоне (см. рис. 6-6), ограниченной сверху по строительным условиям.

Указанная зона диспетчерского графика в пусковой период выполняет роль «избыточной зоны». Если уровень водохранилища соответствует отметкам этой зоны, гидростанцию следует загружать на полную мощность, а при превышении ее предусматриваются соответствующие холостые сбросы из водохранилища.

Если требования водного транспорта удовлетворить невозможно, а после установления на ГЭС мощности и достижения пусковой отметки и требований энергосистемы за счет собственного водохранилища, эти требования последовательно (до полной сработки полезной емкости водохранилища) удовлетворяются вышележащими водохранилищами. После завершения строительства и начального наполнения водохранилища аннулируется обеспечение в нижнем бьефе действующего гидроузла обязательных пусков для удовлетворения требований судоходства.

4. После достижения на строящейся ГЭС пусковой отметки в течение некоторого периода времени на ГЭС производится наращивание с заданным темпом выдавае-

мой в систему минимальной гарантированной мощности (проверка непревышения этой величиной установленной к данному моменту времени мощности на ГЭС производится в любом случае).

5. Суммарная средняя за год гарантированная мощность всех ГЭС системы с учетом эффекта асинхронности стока и компенсированного регулирования его задается на каждый интервал времени в соответствии с разработанным специальным алгоритмом. В нем производится учет: а) минимальных мощностей действующих в данный момент ГЭС; б) эффекта повышения гарантированных отдач за счет асинхронности стока и компенсированного регулирования; в) оптимального распределения гарантированной энергии ГЭС в течение года, которое принимается для упрощения одинаковым в разные годы и производится заблаговременно при составлении балансов энергии и мощности системы; оно задается в виде процентного распределения годовой гарантированной энергии ГЭС по месяцам.

6. В программе предусмотрена возможность проведения компенсированного режима регулирования не только Ангара-Енисейских гидростанций, но также ГЭС европейской территории Союза в условиях строительства и ввода в эксплуатацию ЛЭП Сибирь — Европа.

7. В схеме регулирования предусмотрено обеспечение нормальной и сниженной гарантированной суммарной отдачи гидростанций в зависимости от степени заполнения компенсирующих водохранилищ. Контроль заполнения осуществляется по уровню Братского водохранилища (например, $h_{ср} = 10$ м).

В остальном вторая часть рассматриваемой программы подобна описанной в [Л. 78] и § 7-3. В частном случае она может работать с исходными гидрологическими данными, взятыми из ряда наблюдений, а также решать для данной системы статическую задачу.

Время работы первой части программы сравнительно невелико (в пределах 10—15 мин), производство же расчетов по второй части связано с большими затратами машинного времени. Так, для рассматриваемой системы Восточной Сибири расчет по ряду в 12 мес. требует до 3—4 мин машинного времени. Это приводит при расчете нескольких периодов даже сравнительно малой продолжительности к необходимости затраты значительного количества машинного времени.

Разработанные в Энергосетьпроекте способы сокращения объема вычислений при использовании искусственных рядов («отбор периодов») рассмотрены выше. Однако даже при этом время расчетов на ЭЦВМ среднего класса весьма велико. Радикальным способом сокращения времени расчетов является переход на более быстродействующие ЭЦВМ.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Соответствие гидрологических рядов теоретическим законам распределения

Река, пункт	Число лет наблюдений	Распределение					
		Пирсона III типа $C_s = 2C_v$			логнормальное		
		Число степеней свободы	χ^2	χ^2_q	Число степеней свободы	χ^2	χ^2_q
Ока — г. Орел	75	2,0	1,06	6,0	4,0	1,29	9,5
Ока — г. Муром	78	2,0	2,77	6,0	4,0	1,02	9,5
Днепр — г. Смоленск	77	2,0	1,53	6,0	4,0	2,83	9,5
Днепр — г. Орша	77	2,0	2,19	6,0	4,0	5,25	9,5
Днепр — г. Речица	64	2,0	1,36	6,0	3,0	5,41	7,8
Днепр — г. Кременчуг	77	2,0	1,42	6,0	4,0	9,17	9,5
Днепр — с. Лоцманская Каменка	66	2,0	1,50	6,0	3,0	7,42	7,8
Березина — г. Борисов	59	2,0	1,16	6,0	2,0	0,864	6,0
Березина — г. Бобруйск	78	2,0	4,76	6,0	4,0	3,92	9,5
Сож — г. Гомель	59	2,0	0,638	6,0	2,0	0,83	6,0
Припять — г. Мозырь	62	2,0	3,72	6,0	3,0	3,90	7,8
Десна — г. Брянск	64	2,0	2,92	6,0	3,0	3,33	7,8
Десна — г. Чернигов	64	2,0	1,22	6,0	3,0	2,38	7,8
Томь — г. Новокузнецк	64	2,0	1,21	6,0	3,0	1,22	7,8
Иртыш — г. Тобольск	67	2,0	2,86	6,0	3,0	4,77	7,8
Тобол — г. Ялуторовск	67	2,0	0,65	6,0	3,0	3,94	7,8
Тобол — с. Липовка	65	2,0	0,86	6,0	3,0	1,32	7,8
Ница — г. Ирбит	67	2,0	3,86	6,0	3,0	4,88	7,8
Тавда — г. Тавда	50	1,0	2,32	3,8	1,0	1,38	3,8
Енисей — п. Базаиха	56	2,0	0,48	6,0	2,0	1,10	6,0
Енисей — г. Енисейск	56	2,0	4,06	6,0	2,0	1,92	6,0
Ангара — с. Пашки	58	2,0	1,38	6,0	2,0	0,28	6,0
Амур — г. Хабаровск	63	2,0	0,94	6,0	3,0	2,91	7,8
Зея — ур. Зейские Ворота	58	2,0	1,71	6,0	2,0	2,94	6,0
Чирчик — с. Ходжикент	58	2,0	2,24	6,0	2,0	1,05	6,0
Вента — г. Кулдига	61	2,0	1,28	6,0	3,0	1,20	7,8
Вента — х. Абава	61	2,0	0,64	6,0	3,0	1,73	7,8
Зап. Двина — г. Даугавпилс	78	2,0	2,99	6,0	4,0	2,06	9,5
Кама — г. Березники	60	2,0	2,88	6,0	2,0	5,09	6,0
Кама — пристань Добрянская	55	2,0	5,0	6,0	2,0	1,68	6,0
Кама — г. Пермь	78	2,0	0,93	6,0	4,0	2,17	9,5
Вятка — г. Киров	81	2,0	4,19	6,0	4,0	4,32	9,5

Река, пункт,	Число лет наблю- дений	Распределение					
		Пирсона III типа $C_s = 2C_v$			логнормальное		
		Число степеней свободы	χ^2	χ^2_q	Число степеней свободы	χ^2	χ^2_q
Волга — г. Старица	68	2,0	2,13	6,0	3,0	2,86	7,8
Волга — г. Чкаловск	75	2,0	3,55	6,0	4,0	3,64	9,5
Волга — г. Горький	82	2,0	2,16	6,0	5,0	3,11	11,1
Волга — с. Вязовые	56	2,0	0,65	6,0	2,0	0,75	6,0
Молога — г. Весьегонск	56	2,0	2,99	6,0	2,0	2,52	6,0
Нарва — пристань Кулгау и г. Нарва	55	2,0	0,24	6,0	2,0	1,43	6,0
Зап. Двина — г. Витебск	82	2,0	1,12	6,0	5,0	4,53	11,1
Белая — г. Уфа	81	2,0	1,24	6,0	4,0	3,50	9,5
Волга — г. Волгоград	76	2,0	0,40	6,0	4,0	3,36	9,5
Сев. Двина — с. Усть- Пинега	77	2,0	5,86	6,0	4,0	6,16	9,5
Нева — г. Петрокрепость	100	2,0	2,25	6,0	6,0	12,02	12,6
Тихвинка — дер. Горелуха	78	2,0	0,55	6,0	4,0	3,78	9,5
Унжа — г. Макарьев	63	2,0	5,7	6,0	3,0	6,07	7,8
Чусовая — дер. Н. Ша- лыги	75	2,0	1,61	6,0	4,0	2,54	9,5
Белая — г. Бирск	78	2,0	2,64	6,0	4,0	5,01	9,5
Ока — г. Калуга	78	2,0	2,75	6,0	4,0	4,26	9,5
Волга — г. Калинин	57	2,0	2,07	6,0	2,0	1,79	6,0
Волга — устье Шоши	55	2,0	3,30	6,0	2,0	3,39	6,0
Волга — г. Ярославль	79	2,0	1,16	6,0	4,0	1,72	9,5
Волга — г. Кинешма	79	2,0	2,85	6,0	4,0	4,63	9,5
Волга — пос. Поляна им. Фрунзе	78	2,0	3,22	6,0	4,0	2,40	9,5
Чирчик — с. Чарвак	75	2,0	2,74	6,0	4,0	5,25	9,5
Свирь — ГЭС XII	60	2,0	4,38	6,0	2,0	2,44	6,0
Сухона — дер. Камчуга	75	2,0	1,68	6,0	4,0	5,05	9,5
Дон — г. Калач	70	2,0	1,97	6,0	3,0	1,49	7,8
Дон — ст. Раздорская	68	2,0	1,28	6,0	3,0	1,18	7,8
Припять — г. Мозырь	60	2,0	1,22	6,0	2,0	4,32	6,0
Чусовая — дер. Копчик	52	2,0	2,89	6,0	2,0	2,23	6,0
Иргыш — г. Усть-Каме- ногорск	53	2,0	3,94	6,0	2,0	4,49	6,0
Обь — г. Камень-на-Оби	64	2,0	4,79	6,0	3,0	5,34	7,8
Обь — г. Новосибирск	64	2,0	5,27	6,0	3,0	0,95	7,8
Шилка — г. Сретенск	62	2,0	3,69	6,0	3,0	2,33	7,8
Дунай — г. Штайн-Кремс	129	7,0	9,39	14,1	9,0	13,26	16,9
Рейн — г. Базель	150	7,0	2,71	14,1	11,0	9,99	19,7
Лаба — г. Дечин	107	7,0	9,66	14,1	7,0	13,8	14,1
Миссисипи — г. Сент-Луис	96	2,0	2,48	6,0	6,0	4,66	12,6
Приток к оз. Сайма	100	2,0	2,86	6,0	6,0	9,28	12,6
Нил — г. Асуан	92	2,0	2,84	6,0	6,0	4,78	12,6

Каждое обращение дает очередное значение нормальной величины, которое находится в ячейке $k+66$ и на сумматоре в момент выхода из программы.

Программа нормальной последовательности ($\sigma^2 = 1$; $a = 0$)

$k+00$	00	0000	0	36	0	0	0
01	27	$k+45$	0	37	46	$k+72$	4
02	11	0050	0	$k+40$	56	$k+62$	4
03	16	$k+36$	0	41	42	$k+66$	4
04	02	$k+47$	0	42	46	$k+70$	4
05	21	$k+14$	0	43	41	$k+62$	4
06	10	$k+53$	0	44	56	$k+66$	4
07	16	$k+47$	0	45	00	0000	0
$k+10$	02	$k+50$	4	46	22	$k+0$	0
11	16	$k+64$	4	47	00	0000	0
12	02	$k+60$	0	$k+50$	51	7062	0
13	16	$k+36$	0	51	66	0345	0
14	11	0050	0	52	61	4457	4
15	16	$k+62$	4	53	36	4500	0
16	25	0010	4	54	50	7534	0
17	02	$k+64$	4	55	50	7543	0
$k+20$	11	0003	0	56	76	0507	0
21	14	$k+65$	0	57	56	1000	0
22	26	$k+64$	0	$k+60$	22	$k+44$	0
23	16	$k+64$	4	61	0	0	0
24	02	$k+64$	4	62	0	0	0
25	41	$k+62$	4	63	0	0	0
26	56	$k+62$	4	64	0	0	0
27	24	$k+17$	0	65	0	0	0
$k+30$	46	$k+52$	4	66	0	0	0
31	56	$k+62$	4	67	0	0	0
32	46	$k+62$	4	$k+70$			
33	46	$k+54$	4	71		r	
34	41	$k+56$	4	72			
35	46	$k+62$	4	73		$\sqrt{1-r^2}$	

Равномерное распределение

Для получения равномерного в интервале $(0; 1)$ стационарного процесса с заданным коэффициентом корреляции ρ между смежными членами применен следующий алгоритм:

- 1) вычисление коэффициента корреляции r для соответствующей нормальной последовательности по формуле $r = 2 \sin \frac{\pi}{6} \rho$;
- 2) построение одномерного нормального процесса ξ_i с параметрами 0 и 1 и коэффициентом корреляции r между смежными членами при помощи программы, рассмотренной выше в данном приложении;
- 3) построение искомого процесса η_i по формуле:

$$\eta_i = \Phi(\xi_i),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Способ вычисления $\Phi(x)$ приведен в приложении IV (блок 8).

Соответствующая программа занимает 130 восьмеричных ячеек. Перед первым обращением необходимо: 1) послать p (в двоичной системе) в ячейку $m+116$ (полную); 2) послать 0 в ячейку $m+63$; 3) послать 0 в ячейку $k+47$ (k — начало программы получения нормальной последовательности).

Обращение к программе:

22 m 4 (k и m — четные числа).

Очередное равномерное число получается после каждого обращения в полной ячейке $m+126$ и на сумматоре в момент выхода из программы.

Данная программа работает совместно с программой моделирования нормального процесса и подпрограммой извлечения квадратного корня.

Для статистической проверки работы программы были проведены испытания, которые дали следующий результат ($N=4\,000$): среднее $\bar{x}=0,51$; дисперсия $\sigma^2=0,091$; коэффициент корреляции $\rho=0,306$. Заданы были следующие параметры соответственно: 0,5; 0,083; 0,3.

Доверительные интервалы, построенные для полученных оценок показывают, что наиболее вероятный ($p=90\%$) диапазон возможных ошибок равен $\pm 0,01$. Полученные оценки входят в доверительный интервал. Соответствие равномерному в интервале (0; 1) распределению проверено с помощью критерия χ^2 . Уровень значимости q был выбран равным 5%. Расчеты показали, что гипотеза о равномерном распределении не противоречит критерию согласия χ^2 .

Программа стационарной одномерной равномерной в интервале (0; 1) последовательности

$m+00$	0	0000	0	33	56	$m+120$	4
01	27	$m+61$	0	34	44	$m+74$	4
02	02	$m+63$	0	35	21	$m+54$	4
03	21	$m+31$	0	36	25	0012	4
04	20	$m+65$	0	37	42	$m+76$	4
05	16	$m+63$	0	$m+40$	46	$m+120$	4
06	42	$m+116$	4	41	10	$m+40$	0
07	44	$m+112$	4	42 —	41	$m+112$	4
$m+10$	21	$m+124$	4	43	24	$m+40$	0
11	42	$m+116$	4	44	25	0003	0
12	46	$m+64$	4	45	56	$m+122$	4
13	56	$m+120$	4	46	46	$m+122$	4
14	46	$m+120$	4	47	24	$m+45$	0
15	46	$m+66$	4	$m+50$	56	$m+122$	4
16	43	$m+70$	4	51	43	$m+112$	4
17	46	$m+120$	4	52	47	$m+122$	4
$m+20$	46	$m+120$	4	53	22	$m+55$	0
21	41	$m+114$	4	54	42	$m+112$	4
22	46	$m+120$	4	55	10	$m+120$	0
23	56	$k+70$	4	56	41	$m+112$	4
24	46	$k+70$	4	57	47	$m+114$	4
25	10	$m+65$	0	$m+60$	56	$m+126$	4
26	41	$m+112$	4	61	00	0000	0
27	22	СПП $\sqrt{x}$	4	62	22	$m+0$	0
$m+30$	56	$k+72$	4	63	00	0000	0
31	22	$k+0^*$	4	64	41	4052	0
32	47	$m+72$	4	65 —	07	0100	0

66	42	1042	0		07	34	4342	0
67	24	5442	4		$m+1$ 10	44	0671	4
$m+7$ 0	52	5252	4		11	34	7441	4
71	52	5340	4		12	77	7777	4
72	52	2023	4		13	— 77	7700	0
73	— 14	6400	4		14	40	0000	0
74	40	0000	0		15	00	0001	0
75	00	0001	4		16			
76	55	1175	4		17		ρ	
77	34	7147	0		$m+1$ 20	0	0	0
$m+1$ 00	44	2000	4		21	0	0	0
01	— 42	6445	4		22	0	0	0
02	47	6630	0		23	0	0	0
03	34	3346	0		24	42	$m+1$ 16	4
04	45	7615	4		25	22	$m+2$ 3	0
05	43	0643	0		26			
06	53	2277	4		27		η_k	

* k — начало программы нормального процесса (k — четное число).

Логнормальное распределение

Для получения логнормальной последовательности с заданными математическим ожиданием M , дисперсией D и коэффициентом корреляции ρ между смежными членами применен следующий алгоритм:

1. Вычисление параметров a и σ логнормального распределения по формулам:

$$a = \ln \frac{M}{\sqrt{1 + \frac{D}{M^2}}};$$

$$\sigma = \sqrt{\ln \left(1 + \frac{D}{M^2} \right)}.$$

Эти формулы легко выводятся исходя из определений математического ожидания и дисперсии.

2. Вычисление коэффициента корреляции r для соответствующей нормальной последовательности по формуле

$$r = \frac{\ln [1 + \rho (e^{\sigma^2} - 1)]}{\sigma^2}.$$

3. Построение одномерного нормального процесса ξ_i с математическим ожиданием 0, дисперсией 1 и коэффициентом корреляции r при помощи программы, описанной выше в настоящем приложении.

4. Построение нормального процесса η_i с параметрами a , σ и r по формуле

$$\eta_i = \sigma \xi_i + a.$$

5. Построение искомого процесса ζ_i по формуле

$$\zeta_k = e^{\eta_k}.$$

Соответствующая программа занимает 100 восьмеричных ячеек. Перед первым обращением необходимо: 1) послать M в ячейку $e+60$ (полную); 2) послать D в ячейку $e+62$ (полную); 3) послать ρ в ячейку $e+64$ (полную) (все числа в двоичной системе); 4) послать 0 в ячейку $e+56$.

Обращение 22e4 (e — четное число).

Каждое обращение дает очередное число моделируемой последовательности, которое находится в полной ячейке $e+74$ и на сумматоре в момент выхода из программы. Данная программа работает совместно с датчиком нормальной последовательности и стандартными подпрограммами извлечения квадратного корня, $\ln$ и e^x .

Для проверки работы датчика были смоделированы три последовательности с разными параметрами и для них были найдены статистические оценки (при $N=4\,000$).

Получены следующие результаты:

Параметры	Заданные	Полученные
M	1,000	1,018
D	0,250	0,260
ρ	0,300	0,308
M	1,000	1,030
D	1,000	1,060
ρ	0,300	0,306
M	2,000	2,010
D	0,250	0,257
ρ	0,300	0,308

Доверительные интервалы, построенные для полученных оценок, показывают, что наиболее вероятный (90%) диапазон возможных ошибок равен $\pm 0,01$, т. е. полученные оценки входят в доверительный интервал.

Программа логнормальной последовательности с заданными параметрами

$e + 00$	00	0000	0	27	22	СПП e^x	4
01	27	$e + 52$	0	$e + 30$	43	$e + 54$	4
02	02	$e + 56$	0	31	46	$e + 64$	4
03	21	$e + 45$	0	32	41	$e + 54$	4
04	10	$e + 55$	0	33	22	СПП $\ln x$	2
05	16	$e + 56$	0	34	47	$e + 70$	4
06	42	$e + 62$	4	35	56	$k + 70^*$	4
07	47	$e + 60$	4	36	46	$k + 70$	4
$e + 10$	47	$e + 60$	4	37	10	$e + 55$	0
11	41	$e + 54$	4	$e + 40$	41	$e + 54$	4
12	56	$e + 74$	4	41	22	СПП $\sqrt{x}$	4
13	22	СПП $\sqrt{x}$	4	42	56	$k + 72$	4
14	56	$e + 76$	4	43	11	0050	0
15	42	$e + 60$	4	44	16	$k + 47$	0
16	47	$e + 76$	4	45	22	$k + 00$	4
17	22	СПП $\ln x$	4	46	46	$e + 72$	4
$e + 20$	56	$e + 66$	4	47	41	$e + 66$	4
21	42	$e + 74$	4	$e + 50$	22	СПП e^x	4
22	22	СПП $\ln x$	4	51	56	$e + 74$	4
23	56	$e + 70$	4	52	0	0	0
24	22	СПП $\sqrt{x}$	4	53	22	e	0
25	56	$e + 72$	4	54	77	7777	4
26	42	$e + 70$	4	55	77	7700	0

56		0	67	b
57	0		$e + 70$	
$e + 60$			71	σ^2
61	M		72	
62			73	σ
63	D		74	
64			75	р. яч. 1
65	p		76	
66			77	р. яч. 2

* k — начало программы нормального процесса (k — четное число).

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Моделирование случайных векторов с заданными коэффициентами корреляции

Постановка задачи

Для многих практических приложений теории вероятностей требуется программировать датчики случайных векторов с заданными функциями распределения координат и заданной матрицей коэффициентов корреляции. В литературе дано решение этой задачи для вектора с нормальной совместной плотностью (см., например, [Л. 19]). В настоящем приложении дается решение еще для двух частных случаев: 1) когда все координаты случайного вектора распределены равномерно; 2) когда все координаты случайного вектора распределены логнормально.

Основные выводы были приведены в § 5-3. Здесь даются блок-схемы и программы датчиков на ЭЦВМ «Урал-2». Кроме того, здесь приводятся некоторые сведения и свойства полиномов Эрмита, которые были использованы в выводах § 5-3.

Полиномы Эрмита

Определение:

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} = (-1)^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)}.$$

Непосредственная подстановка дает:

$$H_0(x) = 1; H_1(x) = x; H_2(x) = x^2 - 1.$$

Свойства:

$$1, H'_n(x) = xH_n(x) - H_{n+1}(x),$$

где

$$H'_n(x) = \frac{dH_n(x)}{dx}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
 H_n(X) &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} \text{ — по определению, значит: } H'_n(x) = \\
 &= (-1)^n \left[x e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} + e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n+1)} \right] = \\
 &= x (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} - (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n+1)} = \\
 &= x H_n(x) - H_{n+1}(x).
 \end{aligned}$$

$$2. H_n(x) = x H_{n-1}(x) - (n-1) H_{n-2}(x) \text{ и } H'_n(x) = n H_{n-1}(x).$$

Доказательство проведем индукцией по n .

Для $n=1$ $H_1(x) = x H_0(x) - 0 \cdot H_{-1}(x)$ и $H'_1(x) = 1 \cdot H_0(x)$;

для $n=2$ $H_2(x) = x H_1(x) - 1 \cdot H_0(x)$ и $H'_2(x) = 2 \cdot H_1(x)$.

Справедливость этих равенств проверяется непосредственно.

Пусть свойство 2 справедливо для $n-1$ и n . Докажем тогда, что оно будет справедливо и для $n+1$; тем самым свойство 2 будет доказано.

$$\begin{aligned}
 H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n+1)} = \\
 &= (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \left[(-1)^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right]' = -e^{\frac{x^2}{2}} \left(H'_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - \right. \\
 &\quad \left. - x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = x H_n(x) - H'_n(x) = \\
 &= x H_n(x) - n H_{n-1}(x);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H'_{n+1}(x) &= [x H_n(x) - n H_{n-1}(x)]' = H_n(x) + \\
 &+ x H'_n(x) - n H_{n-1}(x) = H_n(x) + x n H_{n-1}(x) - \\
 &- n(n-1) H_{n-2}(x) = H_n(x) + n(x H_{n-1}(x) - \\
 &- (n-1) H_{n-2}(x)) = H_n(x) + n H_n(x) = (n+1) H_n(x).
 \end{aligned}$$

$$3. H_{2\nu}(x) = H_{2\nu}(-x);$$

$$H_{2\nu+1}(x) = -H_{2\nu+1}(-x),$$

так как производная от четной или нечетной функции есть функция противоположной четности:

если $f(x) = f(-x)$, то $f'(x) = -f'(-x)$;

если $f(x) = -f(-x)$, то $f'(x) = f'(-x)$.

$$4. H_n(x) = \frac{h_n(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2}^n},$$

где

$$h_n(u) = (-1)^n e^{u^2} (e^{-u^2})^{(n)}; \quad n \geq 1.$$

Доказательство проводится индукцией по n ; для $n=1$ имеем:

$$h_1(u) = 2u; \quad h_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} x;$$

$$H_1(x) = x = \frac{x \sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

т. е. для $n=1$ формула верна.

Пусть она будет верна для n ; тогда для $n+1$ получим:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= xH_n(x) - H'_n(x) = \\ &= x \frac{h_n(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2}^n} - \frac{h'_n(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2}^n} - \end{aligned}$$

(свойство 1 и предположение индукции).

Найдем $h'_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$;

$$\begin{aligned} h'_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-1)^n 2 \frac{x}{\sqrt{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n)} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(n+1)} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} x h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - h_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] = \\ &= x h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} h_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right); \\ H_{n+1}(x) &= x \frac{h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}^n} - x \frac{h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}^n} + \\ &\quad + \frac{h_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}^{n+1}} = \frac{h_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}^{n+1}}. \end{aligned}$$

Свойство 4 доказано.

Блок-схема программ. Описание отдельных блоков

По алгоритмам § 5-4 составлены программы на ЭЦВМ «Урал-2». Блок-схемы этих программ мало отличаются друг от друга и представлены на рис. IV-1 в общем для обеих программ виде.

Рассмотрим содержание некоторых блоков программы.

1. Равномерный случай

Блок 3. Вычисление матрицы $\|k_{ij}\|$ коэффициентов корреляции происходит по формуле

$$k_{ij} = 2 \sin \frac{\pi}{6} r_{ij},$$

где r_{ij} — заданные коэффициенты корреляции.

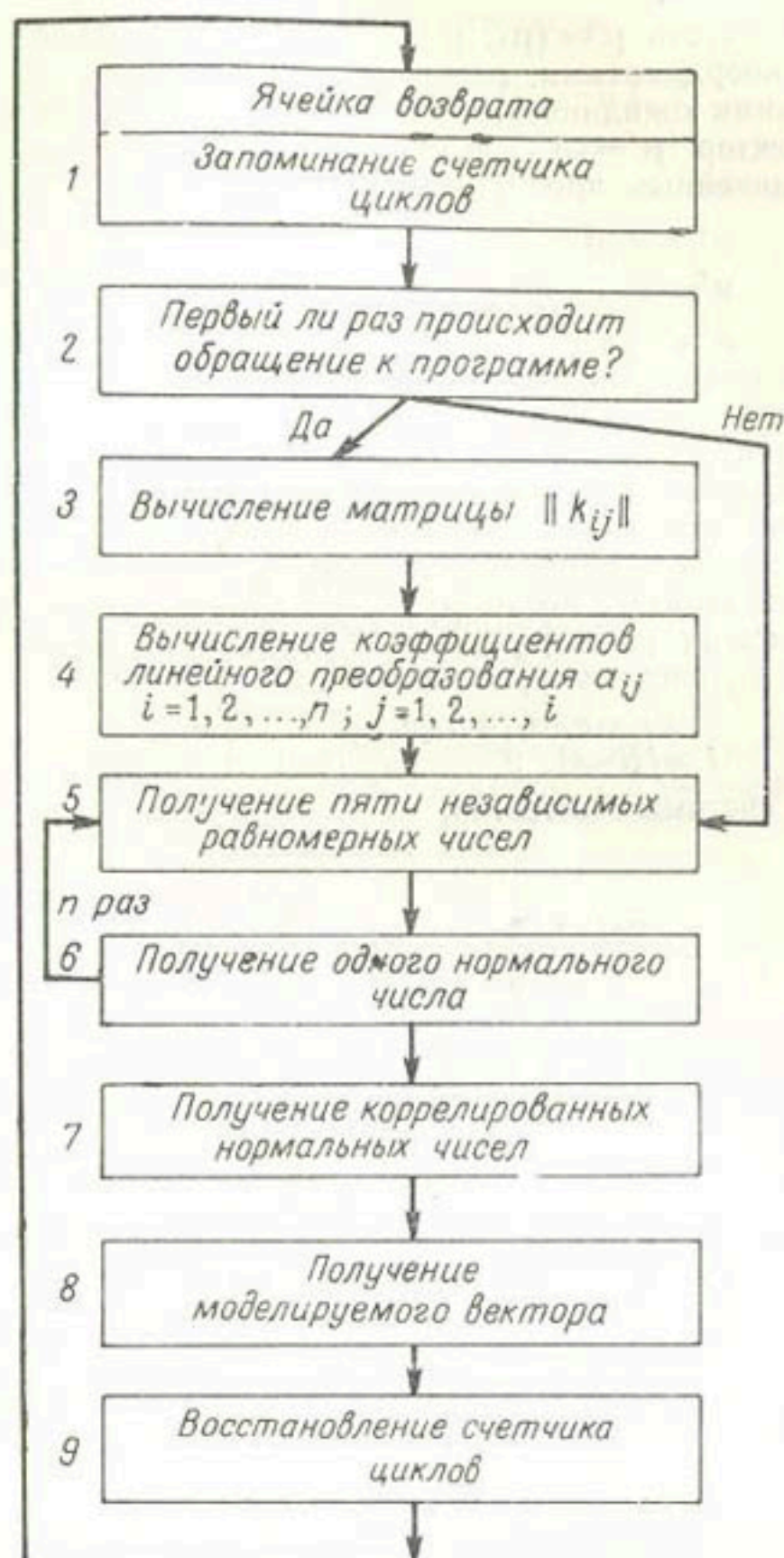


Рис. IV-1. Блок-схема программы моделирования рядов.

Для программирования функция $k_{ij} = 2 \sin \frac{\pi}{6} r_{ij}$ раскладывается в ряд по степеням r_{ij} , который ограничивался первыми тремя членами:

$$2 \sin \frac{\pi}{6} r_{ij} = \frac{\pi}{3} r_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{6} r_{ij} \right)^3 + \frac{1}{60} \left(\frac{\pi}{60} r_{ij} \right)^5.$$

Погрешность вычисления меньше $3,5 \cdot 10^{-6}$.

Б л о к 4. Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ — случайный вектор с независимыми координатами, распределенными нормально с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями.

Тогда вектор $\mu' = (\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_n)$, полученный из $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ линейным преобразованием

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= a_{11}\mu_1; \\ \mu'_2 &= a_{21}\mu_1 + a_{22}\mu_2; \\ \mu'_n &= a_{n1}\mu_1 + a_{n2}\mu_2 + \dots + a_{nn}\mu_n,\end{aligned}$$

будет тоже иметь нормально распределенные координаты с нулевым математическим ожиданием.

Величина a_{ij} подбирается так, чтобы корреляция между μ'_i и μ'_j была равна k_{ij} . Так как $k_{ii} = 1$, то дисперсия σ^2 каждой величины μ'_i тоже равна, и корреляция совпадает с коэффициентом корреляции. Коэффициенты a_{ij} линейного преобразования находятся из условия независимости μ_i и μ_j . Учитывая, что коэффициент корреляции между μ_i и μ_j равен 0 при $i \neq j$ и равен 1 при $i = j$, получим для a_{ij} систему уравнений:

$$\begin{aligned}k_{ij} &= a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{ij}a_{jj}; \\ i &\geq j (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, i),\end{aligned} \quad (\text{IV-1})$$

откуда, если система совместна,

$$\begin{aligned}a_{jj} &= \sqrt{k_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2}; \\ a_{ij} &= \frac{k_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}a_{jk}}{a_{jj}} \quad i > j.\end{aligned}$$

Вопрос о совместности системы уравнений (IV-1) решается следующей теоремой: для того чтобы система (IV-1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\|k_{ij}\|$ была положительно определенной. Для доказательства этой теоремы заметим, что система уравнений (IV-1) эквивалентна следующему матричному уравнению:

$$\|k_{ij}\| = AA', \quad (\text{IV-2})$$

где A — нижняя треугольная матрица; A' — матрица, транспонированная к A . Значит, вопрос о совместности системы сводится к задаче о возможности представления матрицы $\|k_{ij}\|$ в виде произведения (IV-2). Если такое представление существует и ни один из элементов a_{ii} матрицы A не равен нулю [т. е. если решение систем (IV-1) независимо], то для всех миноров

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= k_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}, \dots; \\ \Delta_n &= \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

матрицы $\|k_{ij}\|$ будет справедливо соотношение

$$\Delta_i = |A_i| \times |A'_i| = |A_i|^2 > 0; i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2}, \dots, & a_{ii} \end{vmatrix}$$

— минор матрицы A , соответствующий Δ_i .

Обратно, всякая симметрично положительно определенная матрица может быть представлена в виде (IV-2) (см. [Л. 17, стр. 225]).

Так как матрица $\|k_{ij}\|$ является симметричной, то теорема доказана.

Если система (IV-1) не имеет решения (это будет, как только что доказано, в том и только том случае, когда матрица $\|k_{ij}\|$ не является положительно определенной), то в программе произойдет останов. Извлечение квадратного корня происходит с помощью стандартной программы.

Блок 5. Программа получения независимых равномерных чисел в интервале $(-1, +1)$ взята из литературы (см. [Л. 6, стр. 160]).

Блок 6. Для получения одного независимого нормального числа использован метод суммирования m независимых равномерных чисел с поправкой, а именно:

$$\eta_i = \omega_m + \frac{1}{20m} (\omega_m^3 - 3\omega_m),$$

где

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \frac{1}{3}}} \sum_{k=1}^m y_k;$$

y_k — равномерно распределенная на отрезке $(-1, +1)$ величина, полученная в блоке 5. Число m равно 5 [Л. 19]. Непосредственно для программирования формула приводилась к виду:

$$\eta_i = (\omega_5^2 \cdot 0,01 + 0,97) \omega_5,$$

где

$$\omega_5 = \sqrt{\frac{3}{5}} \sum_{k=1}^5 y_k.$$

Блок 7. Коррелированные нормальные числа $\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_n$ вычисляются по формулам, приведенным выше (блок 4).

Блок 8. Коррелированный равномерный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ вычисляется по формулам:

$$\begin{aligned}\xi_i &= \Phi(\mu'_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\mu'_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \\ &+ \operatorname{sgn} \mu'_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{|\mu'_i|} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{1 + \operatorname{sgn} \mu'_i \operatorname{erf}\left(\frac{|\mu'_i|}{\sqrt{2}}\right)}{2},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} x &= \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x = 0; \\ -1 & \text{при } x < 0; \end{cases} \\ \operatorname{erf}(|x|) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{|x|} e^{-t^2} dt.\end{aligned}$$

Для вычисления функции $\operatorname{erf}(|x|)$ при $|x| < 4$ использовано следующее приближенное выражение [Л. 116, стр. 187]:

$$\operatorname{erf}(|x|) = 1 - \frac{1}{(1 + a_1|x| + a_2|x|^2 + a_3|x|^3 + a_4|x|^4 + a_5|x|^5 + a_6|x|^6)^{16}},$$

где

$$\begin{aligned}a_1 &= 0,0705230784; & a_4 &= 0,0001520143; \\ a_2 &= 0,0422820123; & a_5 &= 0,0002705672; \\ a_3 &= 0,0092705272; & a_6 &= 0,0000430638.\end{aligned}$$

При $|x| \geq 4$ полагаем $\operatorname{erf}(|x|) = 1$. Погрешность вычисления меньше $\pm 3 \cdot 10^{-7}$.

2. Логнормальный случай

Для этого случая опишем только те блоки, содержание которых отличается от предыдущего.

Блок 3. Вычисление матрицы $\|q_{ij}\|$ коэффициентов корреляции происходит по формуле:

$$q_{ij} = \frac{\ln \left[1 + \rho_{ij} \sqrt{(e^{\frac{\sigma_i^2}{2}} - 1)(e^{\frac{\sigma_j^2}{2}} - 1)} \right]}{\sigma_i \sigma_j},$$

где ρ_{ij} — заданные коэффициенты корреляции;
 σ^i и σ^j — заданные стандартные отклонения. Вычисление e^x и квадратного корня производится с помощью стандартной программы.

Блок 7. Коррелированный нормальный вектор $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ с нулевыми математическими ожиданиями координат и единичными дисперсиями вычисляется по формулам, приведенным выше (блок 4).

Коррелированный нормальный вектор $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, координата v_i которого имеет математическое ожидание a_i и дисперсию σ_i^2 , получается по формуле

$$v_i = \sigma_i \mu'_i + a_i; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Блок 8. Коррелированный логнормальный вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, координата η_i которого имеет параметры a_i и σ_i , получается из вектора $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ преобразованием

$$\eta_i = e^{v_i}.$$

Формулы (5-36) и (5-37) могут использоваться не только для решения рассмотренных задач. Все случайные процессы, которые могут быть реализованы для нормального случая и зависят только от корреляционной функции, могут быть теперь реализованы для логнормального и равномерного вариантов. Последнее особенно важно, так как случайную величину η с любой функцией распределения $F(x)$ можно получить из равномерной в интервале $(0; 1)$ величины ξ по формуле

$$\eta = F^{-1}(\xi),$$

где $F^{-1}(x)$ — функция, обратная $F(x)$.

Исследование функциональной зависимости между коэффициентами корреляции величин ξ и η следует для каждой функции $F(x)$ проводить особо.

Характеристика программ на ЭЦВМ «Урал-2» и краткая инструкция по использованию их

1. Равномерный случай

Программа занимает 344 восьмеричные ячейки оперативной памяти машины, рабочее поле программы — 64 восьмеричные ячейки. Всего занято место, начиная с ячейки k до ячейки $k+427$. Программа рассчитана на получение коррелированных векторов с равномерно распределенными в интервале $(0; 1)$ координатами. Максимальная разность n вектора, получаемого с помощью данной программы, равна 10. При $n=10$ время получения 1 000 векторов равна 7 мин.

Отрезок аperiodичности равен $\frac{400\,000}{5n}$.

В программе используется стандартная подпрограмма извлечения квадратного корня с плавающей запятой.

Перед первым обращением к программе необходимо:

а) элементы заданной матрицы $\|r_{ij}\|$ (в двоичной системе), расположенные в нижнем треугольнике, поместить последовательно по строкам в полные ячейки, начиная с ячейки $e+430$, т. е. следует выписать последовательно по строкам все те элементы r_{ij} , у которых $i \geq j$:

$r_{11}, r_{21}, r_{22}, r_{31}, r_{32}; \quad r_{33}, r_{41}, \dots, r_{44}, \dots, r_{n1}; \quad r_{n2}, \dots, r_{nn};$

б) записать в ячейку $k+274$ число $n(n+1)-2$, а в ячейку $k+275$ число $2n-2$ в восьмеричных адресных кодах;

в) в ячейку $k=273$ заслать нуль.

Обращение к программе по команде:

22 k 4.

Каждое обращение к программе дает очередную реализацию моделируемого вектора, координаты которого расположены в полных ячейках, начиная с ячейки $k+404$.

При помещении программы в память в качестве k и e необходимо выбрать четные числа.

Если после первого обращения к программе происходит останов по адресу $k+130$ («деление на нуль») или в подпрограмме извлечения квадратного корня, то для данной матрицы $\|p_{ij}\|$ программа неприменима (см. описание блока 4 настоящего приложения).

2. Логнормальный случай

Программа получения векторов с логнормально распределенными координатами работает совместно с программой получения нормальных векторов. Последняя вынесена в виде отдельной подпрограммы, что позволяет использовать ее самостоятельно.

Собственно программа для логнормального случая занимает 142 восьмеричные ячейки ($a-2$, $a+137$), программа для нормальных векторов — 240 восьмеричных (b , $b+237$) ячеек. Заданные параметры и рабочее поле занимают ячейки с $a+140$ до $a+233$, заданные коэффициенты корреляции — с l до $l+n(n+1)-1$, где n — размерность вектора. Максимум n равен 10. При $n=10$ время получения 1 000 векторов равно 7 мин. Отрезок аперiodичности равен $\frac{400\,000}{5n}$.

В программе используются (кроме датчика нормальных векторов) следующие стандартные подпрограммы с плавающей запятой: подпрограмма «ln x», подпрограмма «e^x» и подпрограмма извлечения квадратного корня.

Перед первым обращением к программе необходимо:

а) элементы заданной матрицы $\|p_{ij}\|$ (в двоичной системе), расположенные в нижнем треугольнике, поместить последовательно по строкам в полные ячейки, начиная с ячейки l (всего $\frac{n(n+1)}{2}$ шт.);

б) заданные средние квадратичные отклонения σ_i координат (в двоичной системе) записать в полные ячейки, начиная с $a+140$ (n шт.);

в) заданные математические ожидания координат M_i (в двоичной системе) записать в полные ячейки, начиная с $a+164$ (n шт.);

г) записать число $2n-2$ в восьмеричном адресном коде в ячейку $a+127$;

б) в ячейку $a+130$ заслать нуль.

Обращение к программе по команде

22 a 4

Каждое обращение к программе дает очередную реализацию моделируемого вектора, координаты которого расположены в полных ячейках, начиная с $a+210$.

При помещении программы в память в качестве a , b и l необходимо выбрать четные числа. Для данного случая также справедливо последнее замечание в конце предыдущего пункта этого раздела.

При желании использовать датчик нормальных векторов самостоятельно необходимо перед первым обращением:

а) элементы нижнего треугольника заданной матрицы коэффициентов корреляции $\|r_{ij}\|$ поместить (в двоичной системе) последовательно в полные ячейки, начиная с ячейки l ;

б) число $2n-2$ в восьмеричном адресном коде поместить в ячейку $b+212$;

в) в ячейку $b+210$ послать нуль.

Обращение к программе

22 b 4

Каждое обращение дает очередную реализацию нормального вектора, координаты которого расположены в n полных ячейках, начиная с $b+264$. Здесь также справедливо последнее замечание, данное в конце п. 1 настоящего раздела. В качестве b и l должны быть выбраны четные числа.

**Программа получения случайного вектора с равномерно
распределенными координатами**

$k + 00$	00	0000	0	64	16	$k + 350$	0
01	27	$k + 271$	0	65	14	$k + 276$	0
02	02	$k + 273$	0	66	21	$k + 137$	4
03	21	$k + 145$	0	67	27	$k + 136$	0
04	10	$k + 13$	0	$k + 70$	11	0050	0
05	16	$k + 273$	0	71	16	$k + 356$	4
06	02	$k + 302$	4	72	30	$k + 345$	0
07	16	$k + 300$	4	73	25	0000	4
$k + 10$	30	$k + 274$	0	74	02	$k + 345$	0
11	25	0000	4	75	01	$k + 347$	0
12	30	$k + 274$	0	76	16	$k + 352$	0
13	—	$e + 430$	4	77	02	$k + 345$	0
14	44	$k + 304$	4	$k + 100$	01	$k + 351$	0
15	21	$k + 33$	4	01	16	$k + 353$	0
16	30	$k + 274$	0	02	02	$k + 350$	0
17	—	$e + 434$	4	03	01	$k + 351$	0
$k + 20$	46	$k + 304$	4	04	16	$k + 354$	0
21	56	$k + 344$	4	05	30	$k + 352$	0
22	46	$k + 344$	4	06	—	$e + 430$	4
23	46	$k + 306$	4	07	30	$k + 353$	0
24	43	$k + 310$	4	$k + 110$	—	$e + 430$	4
25	46	$k + 344$	4	11	41	$k + 356$	4
26	46	$k + 344$	4	12	56	$k + 356$	4
27	41	$k + 342$	4	13	24	$k + 105$	0
$k + 30$	46	$k + 344$	4	14	30	$k + 344$	0
31	30	$k + 274$	0	15	42	$e + 430$	4
32	—	$e + 430$	4	16	43	$k + 356$	4
33	24	$k + 12$	0	17	56	$k + 356$	4
34	11	0050	0	$k + 120$	02	$k + 350$	0
35	16	$k + 344$	0	21	14	$k + 346$	0
36	16	$k + 346$	0	22	21	$k + 126$	0
37	16	$k + 347$	0	23	42	$k + 356$	4
$k + 40$	30	$k + 275$	0	24	22	$\text{СПП}\sqrt{x}$	0
41	25	0000	4	25	22	$k + 131$	0
42	02	$k + 346$	0	26	42	$k + 356$	4
43	01	$k + 347$	0	27	30	$k + 354$	0
44	16	$k + 347$	0	$k + 130$	47	$e + 426$	4
45	02	$k + 346$	0	31	30	$k + 344$	0
46	01	$k + 276$	0	32	56	$e + 430$	4
47	16	$k + 346$	0	33	02	$k + 345$	0
$k + 50$	27	$k + 143$	0	34	01	$k + 276$	0
51	11	0050	0	35	16	$k + 345$	0
52	16	$k + 345$	0	36	00	0000	0
53	16	$k + 350$	0	37	02	$k + 344$	0
54	16	$k + 351$	0	$k + 140$	01	$k + 276$	0
55	30	$k + 275$	0	41	16	$k + 244$	0
56	—	0000	4	42	24	$k + 57$	0
57	02	$k + 350$	0	43	00	0000	0
$k + 60$	01	$k + 351$	0	44	24	$k + 42$	0
61	16	$k + 351$	0	45	30	$k + 275$	0
62	02	$k + 350$	0	46	25	0000	4
63	01	$k + 276$	0	47	24	$k + 172$	0

$k + 150$	11	0050	0
51	16	$k + 344$	4
52	25	0010	4
53	02	$k + 300$	4
54	11	0003	0
55	14	$k + 301$	0
56	26	$k + 300$	0
57	16	$k + 300$	4
$k + 160$	02	$k + 300$	4
61	41	$k + 344$	4
62	56	$k + 344$	4
63	24	$k + 153$	0
64	46	$k + 316$	4
65	56	$k + 344$	4
66	46	$k + 344$	4
67	46	$k + 320$	4
$k + 170$	41	$k + 322$	4
71	46	$k + 344$	4
72	00	0000	0
73	30	$k + 275$	0
74	— 56	$k + 360$	4
75	24	$k + 147$	0
76	11	0050	0
77	16	$k + 344$	0
$k + 200$	30	$k + 275$	0
01	25	0000	4
02	27	$k + 226$	0
03	11	0050	0
04	16	$k + 356$	4
05	16	$k + 345$	0
06	30	$k + 275$	0
07	— 25	0000	4
$k + 210$	30	$k + 344$	0
11	42	$k + 430$	4
12	30	$k + 345$	0
13	46	$k + 360$	4
14	41	$k + 356$	4
15	56	$k + 356$	4
16	02	$k + 344$	0
17	01	$k + 276$	0
$k + 220$	16	$k + 344$	0
21	02	$k + 345$	0
22	01	$k + 276$	0
23	16	$k + 345$	0
24	24	$k + 210$	0
25	42	$k + 356$	4
26	00	0000	0
27	30	$k + 275$	0
$k + 230$	56	$k + 404$	4
31	24	$k + 202$	0
32	30	$k + 275$	0
33	25	0000	4
34	30	$k + 275$	0
35	— 42	$k + 404$	4

36	47	$k + 312$	4
37	56	$k + 344$	4
$k + 240$	44	$k + 314$	4
41	21	$k + 262$	4
42	27	$k + 260$	0
43	25	0012	4
44	42	$k + 324$	4
45	46	$k + 344$	4
46	10	$k + 245$	0
47	— 41	$k + 340$	4
$k + 250$	24	$k + 245$	0
51	25	0003	0
52	56	$k + 356$	4
53	46	$k + 356$	4
54	24	$k + 252$	0
55	56	$k + 356$	4
56	43	$k + 340$	4
57	47	$k + 356$	4
$k + 260$	00	00000	0
61	22	$k + 263$	0
62	42	$k + 340$	4
63	10	$k + 344$	0
64	41	$k + 340$	4
65	47	$k + 342$	4
66	30	$k + 275$	0
67	— 56	$k + 404$	4
$k + 270$	24	$k + 234$	0
71	00	0000	0
72	22	$k + 0$	0
73	00	0000	0
74	$n(n-1)-2$		
75	$2n-2$		
76		0002	0
77	00	0000	0
$k + 300$	51	7062	0
01	— 66	0345	0
02	51	7062	0
03	— 66	0345	0
04	41	4052	0
05	— 07	0100	0
06	42	1042	0
07	24	5442	4
$k + 310$	52	5252	4
11	52	5340	4
12	52	2023	4
13	— 14	6400	4
14	40	0000	0
15	00	0001	4
16	61	4457	4
17	— 36	4500	0
$k + 320$	50	7534	0
21	50	7543	0
22	76	0507	4

Продолжение

23	56	1000	0	33	43	0643	0	
24	55	1175	4	34	53	2277	4	
25	34	7147	0	35	34	4342	0	
26	44	2000	4	36	44	0671	4	
27	—	42	6445	4	37	34	7441	4
$k + 330$	47	6630	0	$k + 340$	77	7777	4	
31	34	3346	0	41	—	77	7700	0
32	45	7615	4	42	40	0000	0	
				43	00	0001	0	

Программа получения случайного вектора с n логнормально распределенными координатами

$a - 2^*$	00	0000	0	42	30	$a + 127$	0
$a - 1$	00	0000	0	43	25	0000	4
$a + 00$	00	0000	0	44	30	$a + 127$	0
01	27	$a + 125$	0	45	— 42	$a + 210$	4
02	02	$a + 130$	0	46	56	$a - 2$	4
03	21	$a + 110$	0	47	30	$a + 127$	0
04	10	$a + 011$	0	$a + 50$	— 42	$a + 140$	4
05	16	$a + 130$	0	51	56	$a + 134$	4
06	30	$a + 127$	0	52	27	$a + 102$	0
07	25	0000	4	53	11	0050	0
$a + 10$	30	$a + 127$	0	54	16	$a + 133$	0
11	— 42	$a + 140$	4	55	30	$a + 127$	0
12	30	$a + 127$	0	56	— 25	0000	4
13	— 47	$a + 164$	4	57	30	$a + 133$	0
14	30	$a + 127$	0	$a + 60$	42	$a + 210$	4
15	— 56	$a + 210$	4	61	46	$a - 2$	4
16	30	$a + 127$	0	62	30	$a + 132$	0
17	— 46	$a + 210$	4	63	46	l^{**}	4
$a + 20$	41	$a + 136$	4	64	41	$a + 136$	4
21	56	$a + 132$	4	65	22	СПП $\ln x$	4
22	22	СПП $\ln x$	4	66	47	$a + 134$	4
23	22	СПП $\sqrt{x}$	4	67	30	$a + 133$	0
24	30	$a + 127$	0	$a + 70$	47	$a + 140$	4
25	— 56	$a + 140$	4	71	30	$a + 132$	0
26	42	$a + 132$	4	72	56	l	4
27	22	СПП $\sqrt{x}$	4	73	02	$a + 132$	0
$a + 30$	56	$a + 132$	4	74	01	$a + 131$	0
31	30	$a + 127$	0	75	16	$a + 132$	0
32	— 42	$a + 164$	4	76	02	$a + 133$	0
33	47	$a + 132$	4	77	01	$a + 131$	0
34	22	СПП $\ln x$	4	$a + 100$	16	$a + 133$	0
35	30	$a + 127$	0	01	24	$a + 057$	0
36	— 56	$a + 164$	4	02	00	0000	0
37	24	$a + 010$	0	03	24	$a + 044$	0
$a + 40$	11	0050	0	04	02	$a + 127$	0
41	16	$a + 32$	0	05	16	$b + 212$	0

* Ячейки $a - 2$ и $a - 1$ — рабочие.** l — начальный адрес заданных коэффициентов корреляции.

Продолжение

06	11	0050	0	24	24	$a + 113$	0
07	16	$b + 210$	0	25	00	0000	0
$a + 110$	22	b^{***}	4	26	22	a	0
11	30	$a + 127$	0	27		$2n - 2$	0
12	25	0000	4	$a + 130$		0	0
13	30	$a + 127$	0	31		0002	0
14	42	$b + 264$	4	32		0	0
15	30	$a + 127$	0	33		0	0
16	— 46	$a + 140$	4	34		0	0
17	30	$a + 127$	0	35		0	0
$a + 120$	— 41	$a + 164$	4	36	40	0000	0
21	22	СПП e^x	4	37	00	0000	4
22	30	$a + 127$	0				
23	— 56	$a + 210$	4				

*** b — начало программы получения нормальных векторов.

Программа получения случайного вектора с нормально распределенными координатами

$b + 00$	00	0000	0	41	14	$b + 211$	4
01	27	$b + 206$	0	42	21	$b + 113$	0
02	02	$b + 210$	0	43	27	$b + 112$	0
03	21	$b + 121$	0	44	11	0050	0
04	10	$b + 032$	0	45	16	$b + 224$	0
05	16	$b + 210$	0	46	30	$b + 217$	0
06	02	$b + 230$	4	47	25	0000	4
07	16	$b + 226$	4	$b + 50$	02	$b + 217$	0
$b + 10$	11	0050	0	51	01	$b + 221$	0
11	16	$b + 216$	0	52	16	$b + 213$	0
12	16	$b + 220$	0	53	02	$b + 217$	0
13	16	$b + 221$	0	54	01	$b + 223$	0
14	30	$b + 212$	0	55	16	$b + 214$	0
15	25	0000	4	56	02	$b + 222$	0
16	02	$b + 220$	0	57	01	$b + 223$	0
17	01	$b + 221$	0	$b + 60$	16	$b + 215$	0
$b + 20$	16	$b + 221$	0	61	30	$b + 213$	0
21	02	$b + 220$	0	62	— 42	l^*	4
22	01	$b + 211$	0	63	30	$b + 214$	0
23	16	$b + 220$	0	64	— 46	l	4
24	27	$b + 117$	0	65	41	$b + 224$	4
25	11	0050	0	66	56	$b + 224$	4
26	16	$b + 217$	0	67	24	$b + 061$	0
27	16	$b + 222$	0	$b + 70$	30	$b + 216$	0
$b + 30$	16	$b + 223$	0	71	42	l	4
31	30	$b + 212$	0	72	43	$b + 224$	4
32	— 25	0000	0	73	56	$b + 224$	4
33	02	$b + 222$	0	74	02	$b + 222$	0
34	01	$b + 223$	0	75	14	$b + 220$	0
35	16	$b + 223$	0	76	21	$b + 102$	0
36	02	$b + 222$	0	77	42	$b + 224$	0
37	01	$b + 211$	0	$b + 100$	22	СПП $\sqrt{x}$	4
$b + 40$	16	$b + 222$	0	01	22	$b + 105$	0

Продолжение

02	42	$b + 224$	4	64	30	$b + 216$	0
03	30	$b + 215$	0	65	42	l	4
04	47	$l - 2$	4	66	30	$b + 217$	0
05	30	$b + 216$	0	67	46	$b + 240$	4
06	56	l	4	$b + 170$	41	$b + 224$	4
07	02	$b + 217$	0	71	56	$b + 224$	4
$b + 110$	01	$b + 211$	0				
11	16	$b + 217$	0	72	02	$b + 216$	0
12	00	0000	0	73	01	$b + 211$	0
13	02	$b + 216$	0	74	16	$b + 216$	0
14	01	$b + 211$	0	75	02	$b + 217$	0
15	16	$b + 216$	0	76	01	$b + 211$	0
16	24	$b + 033$	0	77	16	$b + 217$	0
17	00	0000	0				
$b + 120$	24	$b + 016$	0	$b + 200$	24	$b + 164$	0
21	30	$b + 212$	0	01	42	$b + 224$	4
22	25	0000	4	02	00	0000	0
23	27	$b + 146$	0	03	30	$b + 212$	0
24	11	0050	0	04	— 56	$b + 264$	4
25	16	$b + 216$	4	05	24	$b + 156$	0
26	25	0010	4	06	00	0000	0
27	02	$b + 226$	4	07	22	b	0
$b + 130$	11	0003	4	$b + 210$	00	0000	0
31	14	$b + 227$	0	11		0002	0
32	26	$b + 226$	0	12		$2n - 2$	0
33	16	$b + 226$	0	13		0	0
34	02	$b + 226$	4	14		0	0
35	41	$b + 216$	4	15		0	0
36	56	$b + 216$	4	16		0	0
37	24	$b + 127$	4	17		0	0
$b + 140$	46	$b + 232$	4	$b + 220$		0	0
41	56	$b + 216$	4	21		0	0
42	46	$b + 216$	4	22		0	0
43	46	$b + 234$	4	23		0	0
44	41	$b + 236$	4	24		0	0
45	46	$b + 216$	4	25		0	0
46	00	0000	0	26	51	7062	0
47	30	$b + 212$	0	27	— 66	0345	0
$b + 150$	— 56	$b + 240$	4				
51	24	$b + 123$	0	$b + 230$	51	7062	0
52	11	0050	0	31	— 66	0345	0
53	16	$b + 216$	0	32	61	4457	4
54	30	$b + 212$	0	33	— 36	4500	0
55	25	0000	4	34	50	7534	0
56	27	$b + 202$	0	35	50	7543	0
57	11	0050	0				
$b + 160$	16	$b + 224$	0	36	76	0507	4
61	16	$b + 217$	0	37	56	1000	0
62	30	$b + 212$	0				
63	— 25	0000	4				

* l —начальный адрес заданных коэффициентов корреляции.

Результаты статистической проверки программ

1. Равномерный случай

Для проверки закона распределения семи координат вектора использования критерий соответствия χ^2 [гипотетическое распределение: равномерное в интервале (0, 1)].

Величина χ^2 получила для каждой из семи координат следующие значения: 3,8; 3,8; 3,4; 3,4; 0,8; 3,4; 7,6. Величина χ_q^2 для $q = 10\%$ равна 7,8. Таким образом (так как $\chi_q^2 > \chi^2$), гипотеза о равномерном распределении соответствует критерию χ^2 . Для нахождения статистических параметров распределения были выбраны следующие оценки:

для математического ожидания

$$\tilde{a}_i = \frac{\sum_{k=1}^N \xi_{ik}}{N}; i = 1, 2, \dots, n;$$

для дисперсии

$$\tilde{D}_i = \frac{\sum_{k=1}^N \xi_{ik}^2}{N} - \tilde{a}_i^2; i = 1, 2, \dots, n;$$

для коэффициента корреляции между координатами

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^N \xi_{ik} \xi_{jk}}{N \sqrt{\tilde{D}_i \tilde{D}_j}} - \frac{\tilde{a}_i \tilde{a}_j}{\sqrt{\tilde{D}_i \tilde{D}_j}}; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i;$$

для коэффициентов корреляции между смежными членами

$$\tilde{k}_i = \frac{\sum_{v=1}^N \xi_{iv} \xi_{i,v+1}}{N \tilde{D}_i} - \frac{\tilde{a}_i^2}{\tilde{D}_i}; i = 1, 2, \dots, n.$$

Число испытаний N равно 1 000.

Доверительные интервалы, построенные для оценок математического ожидания и дисперсии при $N=1\,000$, показывают, что с вероятностью 90% диапазон возможных ошибок есть $\pm 0,1$.

Заданные числа и результаты вычисления соответствующих оценок параметров представлены в табл. IV-1.

2. Логнормальный случай

Для вычисления статистических параметров распределения оценки были выбраны такие же, как в п. 1 настоящего параграфа. Результаты вычислений сведены в табл. IV-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авакян А. Б., Шарапов В. А., Водохранилища гидроэлектростанций СССР, Госэнергоиздат, 1962.
2. Авакян А. Б., Шарапов В. А., Требования отраслей хозяйства к водным ресурсам и режиму эксплуатации гидроузлов и некоторые вопросы оптимизации водохозяйственных комплексов, Доклады к научно-техническому совещанию «Оптимальные режимы работы ГЭС в энергосистемах», 1966, вып. 2.
3. Андреянов В. Г., Внутригодовое распределение речного стока, Гидрометеиздат, 1960.
4. Андреянов В. Г., Циклические колебания годового стока и их учет при гидрологических режимах, Труды ГГИ, вып. 68, Гидрометеиздат, 1959.
5. Андреянов В. Г., Воскресенский К. П. и др., Исследование повторяемости и продолжительности периодов различной водности на реках СССР, Труды ГГИ, вып. 127, Гидрометеиздат, 1965.
6. Биркган А. Ю., Воскресенский Г. П., Программирование для цифровой вычислительной машины «Урал-2», изд-во «Советское радио», 1962.
7. Блохинов Е. Г., Об особенностях распределения выборочных оценок параметров речного стока, Труды ГГИ, вып. 134, Гидрометеиздат, 1966.
8. Блохинов Е. Г., О систематических погрешностях в оценках параметров речного стока, вычисленных методом моментов, «Метеорология и гидрология», 1966, № 4.
9. Блохинов Е. Г., Оценка параметров случайных колебаний речного стока методом наибольшего правдоподобия, Труды Гидропроекта, сб. 12, изд-во «Энергия», 1964.
10. Блохинов Е. Г., Сарманов О. В., Гамма-корреляция и ее использование при расчетах многолетнего регулирования речного стока, Труды ГГИ, вып. 143, Гидрометеиздат, 1967.
11. Бусленко И. П., Голенко Д. И. и др., Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), Физматгиз, 1962.
12. Бусленко И. П., Шрейдер Ю. А., Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на цифровых вычислительных машинах, Физматгиз, 1961.
13. Вань-Юн-Хуа, Асинхронность колебаний речного стока и межбассейновое компенсированное регулирование, Автореферат, 1964.
14. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, Физматгиз, 1958.
15. Воскресенский К. П., Норма и изменчивость годового стока рек Советского Союза, Гидрометеиздат, 1962.
16. Вычислительные методы и программирование, изд-во МГУ, 1962.

17. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, Физматгиз, 1951.
18. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
19. Голенко Д. И., Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах, Физматгиз, 1965.
20. Горбунев А. Д., Соколин А. П., Товбис А. Б., О некоторых способах программного получения случайных величин на ЭВМ, сб. «Вычислительные методы и программирование», изд-во МГУ, 1965, № 3.
21. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
22. Гриневич Г. А., Опыт композиционного анализа закономерно-стохастической структуры гидрографов стока, сб. «Исследования характеристик режима возобновляющихся источников энергии», Изд-во АН Узб. ССР, Ташкент, 1963.
23. Гуглий И. В., К расчету многолетнего регулирования речного стока с учетом коррелятивных связей между величинами стока смежных лет, сб. «Проблемы регулирования речного стока», Изд-во АН СССР, 1959, вып. 8.
24. Гуглий И. В., Современные способы расчета емкости водохранилищ многолетнего регулирования, сб. «Проблемы гидроэнергетики и регулирования речного стока», Изд-во АН СССР, 1960.
25. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, Физматгиз, 1963.
26. Дружинин И. П., О гипотезах в теории регулирования речного стока, Доклады научно-техн. конференции МЭИ, 1965.
27. Дружинин И. П., Коноваленко З. П. и др., К вопросу о моделировании гидрологических рядов, Известия АН СССР, сер. «Энергетика и транспорт», 1964, № 5.
28. Дружинин И. П., и др., Речной сток и геофизические процессы, изд-во «Наука», 1966.
29. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, изд-во «Наука», 1965.
30. Ефимович П. А., Вопросы водохозяйственных расчетов и гидрологии, ОНТИ, 1936.
31. Езекиэл М., Фокс К. А., Методы анализа корреляций и регрессий, изд-во «Статистика», 1966.
32. Железняк И. А., Внутригодовое распределение стока рек Украины, Киев, Изд-во АН УССР, 1959.
33. Железняк И. А., Регулирование паводочного стока, Гидрометеониздат, 1965.
34. Захаров В. П., Ким В. Я., Непрерывная периодичность гидрологического процесса, сб. «Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», вып. 1, Изд-во АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1963.
35. Захаров В. П., Чоккин Ш. Ч., Обобщенный прием практических расчетов многолетнего регулирования стока, «Гидротехническое строительство», 1950, № 3.
36. Зубарев В. В., Расчет оптимальных режимов использования стока участниками комплексного гидроузла, Доклады к научно-техническому совещанию «Оптимизация режимов работы ГЭС в энергосистемах», 1966, вып. 1.

37. Зубарев В. В., Цветков Е. В., Расчет оптимальных правил многолетнего регулирования стока водохранилищами ГЭС на цифровых вычислительных машинах, Материалы конференции «Применение вычислительной техники в электроэнергетике», сб. 2, изд-во Московского дома научно-технической пропаганды, 1964.
38. Картвелишвили Н. А., Гидрологические основы вероятностной теории режимов энергосистем с гидростанциями, Труды ВНИИЭ, вып. 13, Госэнергоиздат, 1961.
39. Картвелишвили Н. А. и др., К статистической обработке стоков некоторых рек, Доклады к научно-техническому совещанию «Применение вероятностных и статистических методов при проектировании и эксплуатации энергетических систем и электрических сетей», вып. 1, Киев, 1963.
40. Картвелишвили Н. А., О математическом описании и методике расчетов регулирования стока, Известия АН СССР, ОТН, 1956, № 1.
41. Картвелишвили Н. А., Статистический метод в теории регулирования речного стока, Труды III Всесоюзного гидрологического съезда, т. VI, Гидрометеониздат, 1959.
42. Картвелишвили Н. А., Теория вероятностных процессов в гидрологии и регулировании речного стока, Гидрометеониздат, 1967.
43. Картвелишвили Н. А., Сванидзе Г. Г., Хомерики И. В., Цветков Е. В., О вероятностной модели речного стока, сб. «Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», вып. 5, изд-во «Наука» АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1967.
44. Китов А. И., Крицкий Н. А., Электронные цифровые машины и программирование, Физматгиз, 1961.
45. Кленина Г. И., Цветков Е. В., Использование методов теории вероятностей для составления водноэнергетического плана эксплуатации Дубоссарской ГЭС, Доклады к научно-техническому совещанию «Применение вероятностных и статистических методов при проектировании и эксплуатации энергетических систем и электрических сетей», вып. 1, Киев, 1963.
46. Коваленко Б. И., Энерго-ирригационное использование рек (технико-экономические основы), Изд-во АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1965.
47. Коноваленко З. П., Внутривековая цикличность годового стока рек СССР, автореферат, 1966.
48. Коробова Д. Н., Применение метода динамического программирования для оптимизации режима начального наполнения водохранилищ многолетнего регулирования, «Гидротехническое строительство», 1968, № 5.
49. Кочукова Т. Н., Колебания годового стока рек СССР, Труды ГГИ, вып. 50 (104), Гидрометеониздат, 1955.
50. Крамер Г., Математические методы статистики, Государственное изд-во иностранной литературы, 1948.
51. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Водохозяйственные расчеты, Гидрометеониздат, 1952.
52. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Выбор кривых распределения вероятностей для расчетов речного стока, Известия АН СССР, ОТН, 1948, № 6.
53. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Гидрологические основы речной гидротехники, Изд-во АН СССР, 1950.

54. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Многолетнее регулирование стока, «Гидротехническое строительство», 1935, № 11.
55. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., О приемах исследования случайных колебаний речного стока, сб. «Сток и гидрологические расчеты», сер. IV, вып. 29, Гидрометеониздат, 1946.
56. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., О применении метода статистических испытаний к исследованию колебаний речного стока и к расчетам режима использующих его установок, сб. «Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», вып. 2, Изд-во АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1964.
57. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., О соответствии теоретических кривых распределения вероятностей данным наблюдений по речному стоку, сб. «Проблемы регулирования речного стока», вып. 3, Изд-во АН СССР, 1948.
58. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Расчет многолетнего регулирования речного стока с учетом коррелятивной связи между стоком смежных лет, сб. «Проблемы регулирования речного стока», вып. 8, Изд-во АН СССР, 1959.
59. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Расчет многолетнего регулирования стока на основе теории вероятностей, Труды ВИСУ, Гидротехнический сборник № 4, 1934.
60. Маматканов Д., Дружинин И. П., К вопросу о построении обобщенных графиков для расчета многолетнего регулирования стока рек, сб. «Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», вып. 1, Изд-во АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1963.
61. Митропольский А. К., Техника статистических вычислений, Физматгиз, 1961.
62. Монин А. С., О макротурбулентном обмене в земной атмосфере, Известия АН СССР, сер. геофизическая, 1956, № 4.
63. Никольская Н. В., К вопросу о систематических погрешностях в оценках выборочных параметров речного стока, вычисленных методом моментов, «Метеорология и гидрология», 1966, № 4.
64. Обрезков В. И., Некоторые возможные методы оптимизации режимов работы каскада ГЭС при длительном регулировании, Труды МЭИ, вып. 62, 1965.
65. Обрезков В. И., Применение вычислительной техники в гидроэнергетических расчетах, Госэнергоиздат, 1963.
66. Плешков Я. Ф., Регулирование речного стока, Гидрометеониздат, 1961.
67. Проектирование схем комплексного использования водных ресурсов, пер. с английского под редакцией Т. Л. Золотарева и В. И. Обрезкова, изд-во «Энергия», 1966.
68. Расчетные максимальные расходы воды при проектировании гидротехнических сооружений на реках (нормы проектирования), СНиП II-И 7-65, 1966.
69. Резниковский А. Ш., Великанов А. Л., Соловьева И. Ю., Водноэнергетические расчеты компенсированного регулирования стока на цифровых вычислительных машинах, «Гидротехническое строительство», 1962, № 12.
70. Резниковский А. Ш., Гидрологические характеристики ГЭС в объединенных энергосистемах, сб. «Проблемы гидроэнергетики и регулирования речного стока», вып. 9, Изд-во АН СССР, 1960.
71. Резниковский А. Ш., Зубарев В. В., Номограммы для определения многолетней составляющей емкости водохранилищ, «Гидротехническое строительство», 1966, № 11, 12; 1967, № 1, 2, 3, 4.

72. Резниковский А. Ш., Костина С. Г., О связности гидрологических рядов, сб. «Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», вып. 5, изд-во «Наука», АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1967.
73. Резниковский А. Ш., Костина С. Г., Соловьева И. Ю., О влиянии учета цикличности стока рек на результаты расчетов его многолетнего регулирования, сб. «Многолетние колебания стока и вероятностные методы его расчета», изд-во МГУ, 1967.
74. Резниковский А. Ш., Моделирование гидрологических рядов и расчет многолетнего регулирования стока каскадом ГЭС, Известия АН СССР, сер. «Энергетика и транспорт», 1964, № 2.
75. Резниковский А. Ш., Рубинштейн М. И., Водно-энергетические расчеты сложных каскадов гидроузлов с учетом динамики развития энергосистем, Доклады к научно-техническому совещанию «Оптимальные режимы работы ГЭС в энергосистемах», вып. 1, 1966.
76. Резниковский А. Ш., Рубинштейн М. И., О построении диспетчерских графиков работы комплексных водохранилищ многолетнего регулирования стока, Доклады к научно-техническому совещанию «Оптимальные режимы работы ГЭС в энергосистемах», вып. 1, 1966.
77. Резниковский А. Ш., Рубинштейн М. И., Учет динамики развития энергосистем при проведении водноэнергетических расчетов, Известия АН СССР, сер. «Энергетика и транспорт», 1966, № 1.
78. Резниковский А. Ш., Соловьева И. Ю., Применение ЭВМ в водноэнергетических расчетах при проектировании каскадов ГЭС Восточной Сибири, Известия АН СССР, сер. «Энергетика и транспорт», 1963, № 4.
79. Романовский И. В., О методах моделирования непрерывных случайных величин из величин с равномерным распределением, сб. «Методы вычислений», изд-во ЛГУ, 1966, вып. 3.
80. Румянцев А. М., Регулирование использования водных ресурсов водохранилищ, изд-во «Энергия», 1966.
81. Рыбкин С. И., Эмпирические формулы и номограммы для расчета многолетнего регулирования стока, «Гидротехническое строительство», 1938, № 1.
82. Саваренский А. Д., Метод расчета регулирования стока, «Гидротехническое строительство», 1940, № 2.
83. Саваренский А. Д., Регулирование речного стока водохранилищами, Изд-во АН СССР, 1951.
84. Сванидзе Г. Г., Метод стохастического моделирования гидрологических рядов и некоторые вопросы многолетнего регулирования стока, Труды Института энергетики АН Груз. ССР, т. XIV, 1961.
85. Сванидзе Г. Г., Моделирование гидрологических рядов с учетом внутригодового распределения стока (метод фрагментов), Труды Института энергетики АН Груз. ССР, т. XVII, 1963.
86. Сванидзе Г. Г., Моделирование теоретического гидрологического ряда методом Монте-Карло, Сообщения АН Груз. ССР, 1961, т. XXVI, № 5.
87. Сванидзе Г. Г., Основы расчета регулирования речного стока методом Монте-Карло, изд-во «Мецниереба», Тбилиси, 1964.
88. Сванидзе Г. Г., Применение метода Монте-Карло к за-

- дачам регулирования речного стока, Доклады АН СССР, 1961, т. 140, № 6.
89. Сванидзе Г. Г., Резниковский А. Ш., Зубарев В. В., Графики для расчета водохранилищ многолетнего регулирования, Труды Института энергетики Груз. ССР, т. XVII, 1963.
90. Сванидзе Г. Г., Резниковский А. Ш., Зубарев В. В., Графики $F(C_v, r, \alpha, \beta, p) = 0$ для расчета многолетней составляющей емкости водохранилища, Сообщения АН Груз. ССР 1964, т. XXXIV, № 3.
91. Сванидзе Г. Г., Резниковский А. Ш., Опыт применения метода Монте-Карло к расчетам многолетнего регулирования стока в каскадах ГЭС, «Гидротехническое строительство», 1964, № 1.
92. Серебренников М. Г., Первозванский А. А., Выявление скрытых периодичностей, изд-во «Наука», 1965.
93. Слуцкий Е. Е., Сложение случайных причин как источник циклических процессов, в кн. «Избранные труды», Изд-во АН СССР, 1960.
94. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Краткий курс математической статистики для технических приложений, Физматгиз, 1959.
95. Соколовский Д. Л., Некоторые вопросы гидрологии и водного хозяйства засушливых районов, сб. «Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», Алма-Ата, 1963, вып. 1.
96. Соколовский Д. Л., Речной сток (методы исследования и расчеты), Гидрометеиздат, 1952.
97. Сомов Н. В. Асинхронность колебаний стока крупных рек СССР, «Метеорология и гидрология», 1963, № 5.
98. Хеннан Э. Д., Анализ временных рядов, изд-во «Наука», 1964.
99. Хомерики И. В., К вопросу исследования циклических вариаций речного стока, Сообщения АН Груз. ССР, т. XXXVI, № 3, 1964.
100. Хомерики И. В., Расчет многолетней емкости регулирующего водохранилища с учетом цикличности колебаний стока, Автореферат, Тбилиси, 1965.
101. Цветков Е. В., Методы расчета оптимального регулирования речного стока водохранилищами гидроэлектростанций на ЦВМ, изд-во «Энергия», 1967.
102. Цветков Е. В., Оптимальные режимы ГЭС длительного регулирования, Известия АН СССР, ОТН, 1958, № 8.
103. Цветков Е. В., Эксплуатационные и проектные задачи регулирования речного стока, сб. «Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства», вып. 1, Изд-во АН Каз. ССР, Алма-Ата, 1963.
104. Шимельмиц И. Я., Баранов В. А., Резниковский А. Ш., Рубинштейн М. И., Об эффективности учета асинхронности и цикличности колебания речного стока для крупных энергетических объединений, сб. «Многолетние колебания стока и вероятностные методы его расчета», изд-во МГУ, 1967.
105. Щавелев Д. С. (ред.) и др., Использование водной энергии, изд-во «Энергия», 1965.
106. Эйгенсон М. С., Солнце, погода и климат, Гидрометеиздат, 1963.
107. Ямпольский А. Д., О спектральных методах исследования океанологических процессов, «Океанология», 1965, № 5.
108. Bestchinsky A. A., Reznikovsky A. Sh., Hydro-

electric power in the centralized power economy of the future, World Power Conference, Tokyo Sectional Meeting, II A(1), paper 126, Tokyo, 1966.

109. Bestchinsky A. A., Water power in energy systems, VI World Power Conference, sub-div. III-12, paper 162, III 12/8, Melbourne, 1962.

110. Climatic change, World Meteorological Organization, Technical Note 79, WMO-195, Tp. 100, Geneva, 1966.

111. Fathy A., Shukry S., The problem of reservoir capacity for long-term storage, J. of the Hydraulics Div., Proc. ASCE, vol. 82, № 5—6, 1956.

112. Fiering M. B., Multivariate technique for synthetic hydrology, Proc. ASCE, J. of the Hydraulics Div., vol. 90, NHY5, p. 43—60, IX, 1964.

113. Fiering M. B., Queuing theory and simulations in reservoir design, J. of the Hydraulics Div. Proc. ASCE, vol. 87, № 6, pt I, 1961.

114. Fuchao T., Jamazaki T., A computational method of economic operation of hydro-thermal power systems including flow-interconnected hydro-power plants, Abudy Trans. Inst. Electr. Engrs, Japan, 79, № 5, 1959.

115. Hardison C. H., Reservoir storage on streams having log-normal distributions of annual discharge, Geol. Surv. Profes. Paper № 475-D, article 164, Washington, 1964.

116. Hastings C., Approximation for digital computers, New Jersey, Princeton University Press, 1955.

117. Hazen A., Storage to be provided in impounding reservoirs for municipal water supply, Trans. of ASCE, 1914.

118. Hurst H. E., Black R. P., Simaika J. M., Long-term storage (an experimental study), London, 1965.

119. Hurst H. E., Methods of using long-terms storage in reservoirs, Proc. of the Institute of Civil Engineers, vol. 5, pt I, London, 1956.

120. Yevdjevich V. M., Fluctuations of wet and dry years, pt II, Analysis by Serial Correlation, Hydrology, Papers, Colorado State University, Colorado, June 1964 (БТИ перевод 50114).

121. Koopmans T. C., Water storage policy in a simplified hydroelectric system, Proc. of the First International Conference on Operational Research, Oxford, September 1957.

122. Lavrenko K. D., USSR power developments and international cooperation, General Adress, Trans. of the 6-th, World Power Conference, Melbourne, 1962.

123. Little D. C., The use of storage water in a hydroelectric system, J. of the Operations Research Society of America, vol. 3, № 2, 1955.

124. Moran P. A., Probability theory of dams and storage systems, Australian Journal of Applied Science, 1954.

125. Moran P. A., The theory of storage, London—New York, 1959, Methuen and Co., Ltd.

126. Sudler C. E., Storage required for the regulation of stream flow, Trans. of ASCE, 1927.

127. Shenton L. R., Johnson W. L., Moments of a serial correlation coefficient, J. Roy Statist. Soc., London, 27, № 2, 1965.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
Глава первая. Гидрологические основы водохозяйственных и водноэнергетических расчетов	6
1-1. Общие положения	6
1-2. Исследования законов распределения вероятностей годового стока рек	8
1-3. Математическое описание процесса речного стока	14
1-4. Моделирование искусственных гидрологических рядов методом Монте-Карло	31
1-5. Оценка тесноты связи между смежными членами гидрологических рядов	46
1-6. Влияние степени связности гидрологических рядов на выборочные оценки их статистических параметров	56
Глава вторая. Расчеты многолетнего регулирования стока одним водохранилищем при описании процесса стока простой цепью Маркова	76
2-1. Краткий обзор методов расчета многолетнего регулирования стока рек	76
2-2. Использование искусственных гидрологических рядов в простейших водохозяйственных расчетах	79
2-3. Использование метода Монте-Карло при построении номограмм для определения многолетней составляющей емкости водохранилищ	88
2-4. Сопоставление календарного и статистического методов расчета многолетнего регулирования стока рек	103
Глава третья. О цикличности годового стока рек и учете ее в расчетах многолетнего регулирования	120
3-1. Общие положения и постановка задач	120
3-2. Метод исследования и выбор гипотезы	124
3-3. Групповой анализ цикличности стока рек	134
3-4. Методика моделирования гидрологических рядов при описании процесса стока многозвенной цепью Маркова	139
Глава четвертая. Учет внутригодовых колебаний речного стока	153
4-1. Общие положения	153
4-2. Некоторые статистические закономерности месячных колебаний стока рек	154

4-3. Способы моделирования внутригодового распределения стока рек и пример расчета по искусственным гидрологическим рядам	158
4-4. Некоторые статистические закономерности суточных колебаний стока рек	166
4-5. К вопросу о моделировании гидрографов паводков	171
Глава пятая. Математическое моделирование гидрологических рядов в нескольких створах	175
5-1. Объединение энергосистем и водноэнергетический эффект совместной работы ГЭС	175
5-2. Некоторые упрощенные схемы моделирования рядов в нескольких створах	181
5-3. Моделирование случайных векторов с заданными коэффициентами корреляции	188
5-4. Общая схема моделирования гидрологических рядов в нескольких створах при различных временных интервалах осреднения	205
5-5. Моделирование паводочных приточностей к водохранилищам каскада гидроузлов и иллюстративные расчеты пропуска высоких вод	209
Глава шестая. Учет динамики развития систем при проведении водноэнергетических и водохозяйственных расчетов	218
6-1. Особенности водноэнергетических и водохозяйственных расчетов с учетом динамики развития систем	218
6-2. Гидрологическая основа и общая схема водноэнергетических расчетов с учетом динамики развития систем	220
6-3. Пример диспетчеризации долгосрочных режимов работы каскадов комплексных гидроузлов с водохранилищами	230
Глава седьмая. Водноэнергетические и водохозяйственные расчеты на ЭЦВМ при проектировании каскадов ГЭС	240
7-1. Общие положения	240
7-2. Краткие сведения о стандартных элементах программ водноэнергетических и водохозяйственных расчетов	246
7-3. Некоторые логические схемы программы водноэнергетических расчетов	251
7-4. Схемы организации программ и некоторые результаты их применения	256
7-5. Особенности программ водноэнергетических расчетов с учетом динамики развития систем	260
Приложение I. Соответствие гидрологических рядов теоретическим законам распределения	268
Приложение II. Статистические параметры годового стока некоторых рек СССР и мира	270
Приложение III. Моделирование случайных стационарных одномерных последовательностей с заданным коэффициентом корреляции между смежными членами	272
Приложение IV. Моделирование случайных векторов с заданными коэффициентами корреляции	278
Литература	295