

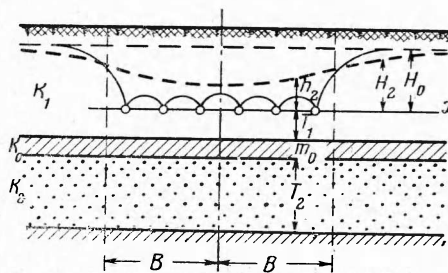
О СНИЖЕНИИ ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКИХ НАПОРОВ В ПОДСТИЛАЮЩИХ ДРЕНИРУЕМЫЕ ГРУНТЫ ВОДОНОСНЫХ ГОРИЗОНТАХ

Н. И. Гамаюнов, Б. С. Шержуков

(Калинин)

При дренировании грунтов, подстилаемых хорошо проницаемыми водоносными горизонтами, режим грунтовых вод существенно зависит от величины действующего напора. Ряд задач неустановившейся фильтрации в дрены при наличии питания через слабопроницаемый водоупор рассмотрен в условиях постоянства напора в подстилающем водоносном горизонте [1,2]. Такой подход может быть оправдан, если водоносный горизонт имеет значительную мощность и формируется в стороне от дренируемой территории, охватывающей небольшую площадь в плане. В случае же относительно малой мощности водоносного горизонта и действия дренажа на значительной площади имеет место уменьшение запасов подземных вод водоносного пласта и снижение его напора, что требует специального учета в инженерных расчетах. Параметры установившегося потока в дрены в условиях сниженного и уравновешенного напора в подстилающем водоносном горизонте определены С. Ф. Аверьяновым [3] для круговой в плане площади дренирования. Ниже приводится решение этой задачи для условий неустановившейся фильтрации.

§ 1. Площадь дренирования имеет в плане форму неограниченной полосы. В расчетной схеме (фиг. 1) систематический дренаж, заложенный на расстоянии T_1 от верхней кровли слабопроницаемого водоупора мощностью m_0 с коэффициентом фильтрации k_0 на полосе шириной $2B$, обеспечивает понижение уровня грунтовых вод в верхнем пласте с коэффициентом фильтрации k_1 . Результатом этого является снижение напора и в подстилающем водоносном горизонте мощностью T_2 с коэффициентом фильтрации k_2 . Динамика напоров в последнем рассматривается в предположении, что во внутренней зоне ($-B < x < +B$) имеет место восходящий ток жидкости из водоносного горизонта в дренируемый пласт, а во внешней зоне ($-B > x > +B$) — нисходящий. Полагая далее, что это течение осуществляется нормально к слоям с коэффициентом фильтрации k_0 и k_1 при их мощности m_0 и T_1 , а градиент напорного подпитывания снизу определяется разностью напора подстилающего слоя h_2 (в начале процесса H_0) и некоторого сниженного дренами напора в верхнем слое H^0 (в общем случае переменного во времени), получим обычным способом дифференциальное уравнение для напоров в подстилающем водоносном горизонте (t — время)



Фиг. 1

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} - \alpha^2\eta = 0 \quad (1.1)$$

Здесь

$$\eta = h_2(x, t) - H^0, \quad \alpha^2 = \frac{k_0 k_1}{k_2 T_2 (k_1 m_0 + k_0 T_1)}$$

Общее решение $\eta = C_1 \operatorname{ch} \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x$ уравнения (1.1) для граничного условия $dh_2/dx = 0$ при $x = 0$ дает $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$\eta = h_2 - H^\circ = C_1 \operatorname{ch} \alpha x \quad (1.2)$$

Постоянную C_1 определяем из условия $h_2 = h_2(B, t)$ на границе $x = B$. Таким образом, в расчет вводится переменный во времени расход, поступающий из внешней зоны, что обуславливает параметрическую зависимость искомого напора h_2 от времени. Приняв очевидное равенство $h_2(B, t) = H_2(B, t)$, где H_2 — напор в подстилающем горизонте во внешней области ($B < x < \infty$), напомним систему уравнений, определяющих течение в ней

$$k_2 T_2 \frac{d^2 H_2}{dx^2} + \frac{k_0}{m_0} (H_1 - H_2) = 0 \quad (1.3)$$

$$k_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[(H_1 + T_1) \frac{\partial H_1}{\partial x} \right] - k_0 \frac{H_1 - H_2}{m_0} = \delta \frac{\partial H_1}{\partial t} \quad (1.4)$$

где δ — коэффициент водоотдачи.

Определив H_1 из уравнения (1.3), подставив в (1.4) и опустив производные порядка выше второго, получим при осреднении $H_1 + T_1 \approx H_0 + T_1$

$$a_2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} = \frac{\partial H_2}{\partial t} \quad \left(a_2 = \frac{k_1 (H_0 + T_1) + k_2 T_2}{\delta} \right) \quad (1.5)$$

Последнее уравнение рассматривается при начальном и граничном условиях

$$H_2(x, 0) = H_0 \quad (1.6)$$

$$H_2(\infty, t) = H_0 \quad \text{или} \quad [\partial H_2 / \partial x]_{x=\infty} = 0 \quad (1.7)$$

Второе граничное условие получается из следующих рассуждений. Подставив $h_2 = h_2(B, t)$ в уравнение (1.2), найдем $C_1 = [h_2(B, t) - H^\circ] / \operatorname{ch} \alpha B$; следовательно, (1.2) примет вид

$$h_2(x, t) - H^\circ = \frac{h_2(B, t) - H^\circ}{\operatorname{ch} \alpha B} \operatorname{ch} \alpha x \quad (1.8)$$

На границе $x = B$

$$\frac{\partial h_2(B, t)}{\partial x} = \alpha [h_2(B, t) - H^\circ] \operatorname{th} \alpha B$$

Учитывая, что $h_2 = H_2$ при $x = B$, получим граничное условие третьего рода в виде

$$\frac{\partial H_2(B, t)}{\partial x} + \beta [H^\circ - H_2(B, t)] = 0 \quad (\beta = \alpha \operatorname{th} \alpha B) \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.5) при начальном (1.6) и граничных условиях (1.7), (1.9) (задача Римана), как известно, имеет вид

$$H_2(x, t) = H_0 - (H_0 - H^\circ) \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{x - B}{2 \sqrt{a_2 t}} \right) - \exp [\beta (x - B) + a_2 \beta^2 t] \operatorname{erfc} \left(\frac{x - B}{2 \sqrt{a_2 t}} + \beta \sqrt{a_2 t} \right) \right\} \quad (1.10)$$

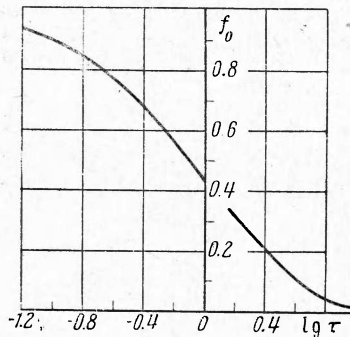
Так как на границе $x = B$

$$H_2(B, t) = h_2(B, t) = H_0 - (H_0 - H^\circ) [1 - \exp (\alpha_2 \beta^2 t) \operatorname{erfc} (\beta \sqrt{a_2 t})]$$

то подстановка в (1.8) дает выражение для напоров в подстилающем водоносном горизонте внутренней области

$$h_2(x, t) = H^\circ + (H_0 - H^\circ) \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha B} f_0(\tau) \quad (1.11)$$

График функции $f_0 = \exp (\tau^2) \operatorname{erfc} (\tau)$, где $\tau = \beta \sqrt{a_2 t}$, дан на фиг. 2.



Фиг. 2

Стационарному состоянию отвечает $h_2 = H^\circ$, однако процесс приближения к нему замедлен, так как стремление $\operatorname{erfc}(\tau)$ к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ сдерживается ростом экспоненты.

Для общей оценки напорности подстилающего водоносного горизонта может быть получено среднее значение h_{2m} пьезометрического напора

$$h_{2m}(t) = \frac{1}{B} \int_0^B h_2(x, t) dx = H^\circ + \frac{H_0 - H^\circ}{\alpha} f_0 \operatorname{th} \alpha B$$

§ 2. Площадь дренирования имеет в плане форму круга (осесимметричная задача). Рассматриваемый случай может иметь место, например, при дренировании торфяников сточных и бессточных котловин, а также некоторых месторождений водораздельного залегания. Если соотношение сторон дренируемого месторождения $L/B \leq 2$, то его площадь приводится к площади круга с радиусом $R = \sqrt{\omega/\pi}$, где ω — площадь, ограниченная реальным контуром.

Пусть в районе месторождения имеется бассейн грунтовых вод. Водовмещающие породы имеют на периферии торфяника коэффициент фильтрации k_2^* , а под ним водоносный пласт (фиг. 3) мощностью T_2 с коэффициентом фильтрации k_2 . Естественный уровень грунтовых вод в торфяной залежи залегает на расстоянии H_0 от плоскости заложения дрен; его отметка соответствует напору в подстилающем водоносном горизонте. Рассмотрение баланса расходов в последнем дает уравнение

$$\frac{d^2 h_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh_2}{dr} - \alpha^2 (h_2 - H^\circ) = 0 \quad (2.1)$$

В общем решении $h_2 - H^\circ = C_1 I_0(\alpha r) + C_2 K_0(\alpha r)$ этого уравнения, где $I_0(\alpha r)$ и $K_0(\alpha r)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода, постоянная $C_2 = 0$, как это видно из очевидного условия $dh_2/dr = 0$ при $r = 0$. Постоянная C_1 определяется из условия на границе $h_2 = h_2(R, t)$; получим

$$h_2(r, t) - H^\circ = [h_2(R, t) - H^\circ] \frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha R)} \quad (2.2)$$

Неустановившаяся фильтрация во внешней области ($R \leq r < \infty$) описывается дифференциальным уравнением

$$a \left(\frac{\partial^2 H_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} \right) = \frac{\partial H_2}{\partial t} \quad \left(a = \frac{k_2^* H_m}{\delta} \right) \quad (2.3)$$

Здесь H_m — средняя мощность потока грунтовых вод во внешней области, которая может быть принята равной $H_m = T_2 + m_0 + T_1 + H_0$.

Вводя новую переменную $u = H_2 - H_0$, представим (2.3) в виде

$$a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.4)$$

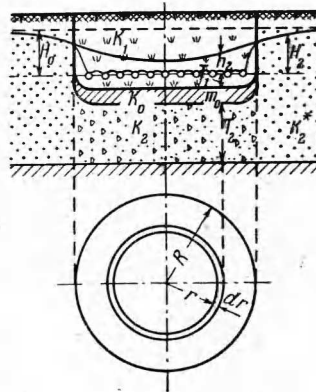
Условия однозначности, из которых третье формулируется на тех же началах, что и для плоской задачи, имеют вид

$$u(r, 0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, t) = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial u(R, t)}{\partial r} - \frac{k_2^*}{k_2} \alpha \frac{I_1(\alpha R)}{I_0(\alpha R)} [u(R, t) - H^\circ] = 0 \quad (2.5)$$

Применив к уравнению (2.4) преобразование Лапласа, получим

$$U''(r, p) + \frac{1}{r} U'(r, p) - \frac{p}{a} U = 0 \quad \left(U(r, p) = \int_0^\infty u(r, t) e^{-pt} dt \right) \quad (2.6)$$



Фиг. 3

Общее решение уравнения (2.6) имеет вид [4]

$$U(r, p) = C_3 I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{a}} r \right) + C_4 K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{a}} r \right) \quad (2.7)$$

Здесь следует принять $C_3 = 0$, так как

$$I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{a}} r \right) \rightarrow \infty, \quad K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{a}} r \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

Переходя к изображениям $U(R, p) \doteq u(R, p)$ в третьем граничном условии (2.5)

$$U'(R, p) - \frac{k_2^*}{k_2} \alpha \frac{I_1(\alpha R)}{I_0(\alpha R)} \left[U(R, p) - \frac{H^0}{p} \right] = 0 \quad (2.8)$$

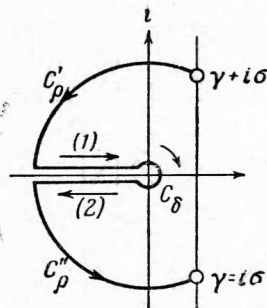
найдем постоянную

$$C_4 = \frac{H^0}{p} \left[K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{a}} R \right) + \frac{k_2 I_0(\alpha R)}{\alpha k_2^* I_1(\alpha R)} \sqrt{\frac{p}{a}} K_1 \left(\sqrt{\frac{p}{a}} R \right) \right]^{-1}$$

С учетом постоянных решение уравнения (2.6) имеет вид

$$U(r, p) = \frac{H^0}{p} \frac{K_0(\beta r)}{K_0(\beta R) + \beta / m K_1(\beta R)} \quad \left(m = \alpha \frac{k_2^*}{k_2} \frac{I_1(\alpha R)}{I_0(\alpha R)}, \beta = \sqrt{\frac{p}{a}} \right) \quad (2.9)$$

Оригинал изображения (2.9) по формуле обращения Римана — Меллина будет



Фиг. 4

$$u(r, t) = \frac{H^0}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{K_0(\beta r) e^{pt} dp}{p [K_0(\beta R) + \beta / m K_1(\beta R)]}$$

Введем в рассмотрение замкнутый контур (фиг. 4), составленный из отрезка $(\gamma - i\sigma, \gamma + i\sigma)$, дуг C_ρ' и C_ρ'' окружности $|p| = \rho$, двубережного разреза (1), (2) и окружности c_δ ($|p| = \varepsilon$). Внутри этого контура подынтегральная функция аналитична и однозначна, поэтому по теореме Коши интеграл вдоль отрезка $(\gamma - i\sigma, \gamma + i\sigma)$ можно заменить интегралом вдоль остальной части контура (направление интегрирования показано стрелками).

Так как $t > 0$, то на дугах C_ρ' и C_ρ'' подынтегральная функция стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$; к этому же пределу по лемме Жордана стремится рассматриваемый интеграл.

Найдем интеграл по малой окружности c_δ ($p = \varepsilon \exp i\varphi$), для чего при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($p \rightarrow 0$) воспользуемся разложением функций Макдональда в ряды

$$K_0(z) = -\left(\ln \frac{1}{2} z + c \right) + \left[1 - \left(\ln \frac{1}{2} z + c \right) \right] \left(\frac{1}{2} z \right)^2 + \dots$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z} - \left[\frac{1}{2} - \left(\ln \frac{1}{2} z + c \right) \right] \frac{1}{2} z + \dots$$

Получив при $|p| \rightarrow 0$ неопределенность вида ∞/∞ , раскроем ее по правилу Лопиталя, дифференцируя по β , что дает

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\varepsilon} = 1$$

Учитывая равенства

$$K_0(\pm iz) = \mp \frac{\pi}{2} i [J_0(z) \mp i Y_0(z)], \quad K_1(\pm iz) = -\frac{\pi}{2} [J_1(z) \mp i Y_1(z)]$$

найдем интеграл по берегам разреза (1), (2)

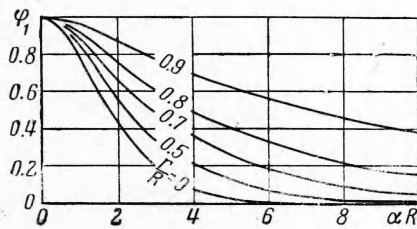
$$\begin{aligned} \int_{(1),(2)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{J_0(\beta r) - i Y_0(\beta r)}{[J_0(\beta R) - i Y_0(\beta R)] - \beta/m [J_1(\beta R) - i Y_1(\beta R)]} \frac{d\rho}{\rho} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{J_0(\beta r) + i Y_0(\beta r)}{[J_0(\beta R) + i Y_0(\beta R)] + \beta/m [J_1(\beta R) + i Y_1(\beta R)]} \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned}$$

Собирая результаты и полагая $\mu = \beta R = \sqrt{\rho/a} R$, получим уравнение депрессионной поверхности грунтовых вод во внешней зоне

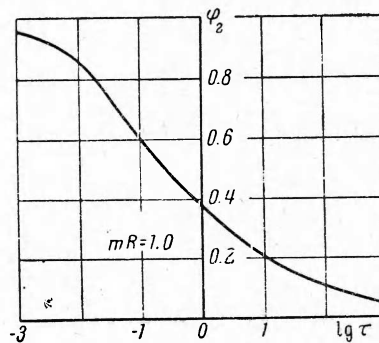
$$\begin{aligned} \frac{H_0 - H_2(r, t)}{H_0 - H^\circ} = \\ = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{[Y_0(\mu') J_0(\mu) - J_0(\mu') Y_0(\mu)] + \mu/mR [Y_0(\mu') J_1(\mu) - J_0(\mu') Y_1(\mu)]}{[J_0(\mu) + \mu/mR J_1(\mu)]^2 + [Y_0(\mu) + \mu/mR Y_1(\mu)]^2} \times \\ \times \exp(-\mu^2 \tau) \frac{d\mu}{\mu} \quad \left(\tau = \frac{at}{R^2}, \mu' = \mu \frac{r}{R} \right) \end{aligned}$$

После определения из последнего выражения $h_2(R, t)$ при $r = R$ и подстановки в (2.2) уравнение поверхности пьезометрических напоров подстилающего водоносного горизонта можно представить в виде

$$h_2(r, t) = H^\circ + (H_0 - H^\circ) \varphi_1 \varphi_2 \quad (2.10)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Здесь введены вспомогательные функции понижения напора

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{I_0(\alpha r)}{I_0(\alpha R)} \\ \varphi_2 &= \frac{1}{mR} \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-\mu^2 \tau)}{[J_0(\mu) + \mu/mR J_1(\mu)]^2 + [Y_0(\mu) + \mu/mR Y_1(\mu)]^2} \frac{d\mu}{\mu} \end{aligned}$$

Вид функции $\varphi_1 = \varphi_1(\alpha R)$ представлен на фиг. 5. На фиг. 6 приведен вид функции $\varphi_2 = \varphi_2(\tau)$ при значении $mR = 1$.

При $\tau \rightarrow 0$, имея в виду асимптотические разложения функций Макдональда и полагая в (2.9) $r = R$, получим

$$\begin{aligned} u(R, t) \approx H^\circ mR \left\{ 2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \left(mR + \frac{1}{2} \right) \tau + \left[(mR)^2 + mR + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{8} \right] \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \tau^{3/2} - \left[(mR)^3 + \frac{3}{2} (mR)^2 + mR + \frac{3}{8} \right] \frac{1}{2} \tau^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Переход к оригиналу с учетом $H_2(R, t) = H_0 - u(R, t) = h_2(R, t)$ дает для напоров в подстилающем водоносном горизонте следующее приближенное выражение

$$h_2(r, t) = H^0 + (H_0 - H^0) \varphi_1 \{1 - mR [1.1284 \sqrt{\tau} - (mR + 0.5) \tau + ((mR)^2 + mR + 0.375) 0.752 \tau^{3/2} - ((mR)^3 + 1.5(mR)^2 + mR + 0.375) 0.5 \tau^2 + \dots]\}$$

Полученный ряд хорошо сходится при $mR < 1$ и $\tau < 0.25$.

Возвращаясь к структуре области дренирования, рассмотренной в первой задаче (фиг. 1), можно характеризовать течение во внешней области системой уравнений

$$k_1 H_1 \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r} \right) - \frac{k_0}{m_0} (H_1 - H_2) = \delta \frac{\partial H_1}{\partial t} \quad (2.11)$$

$$k_2 T_2 \left(\frac{d^2 H_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH_2}{dr} \right) - \frac{k_0}{m_0} (H_1 - H_2) = 0 \quad (2.12)$$

Решая (2.12) относительно H_2 , подставляя в (2.11) и пренебрегая производными порядка выше второго, получим дифференциальное уравнение (2.3), но с новым значением коэффициента пьезопроводности

$$a_1 = (k_1 H_1 + k_2 T_2) / \delta$$

Следовательно, для этого случая действительно выражение (2.10), только вместо τ надо положить $\tau_1 = a_1 t / R^2$.

Среднее значение напора в верхнем слое H_{1m} находится из [2]

$$H_{1m}(t) = \eta f(\alpha_0, \tau_0) - (\eta - H_0) e^{-b_0 t} f(0, \tau_0) \quad \left(\eta = H_0 + \frac{\varepsilon m_0}{k_0} \right)$$

Здесь

$$f(\alpha_0, \tau_0) = 1 - \frac{\tanh \alpha_0}{\alpha_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^2 + \alpha_0^2} \exp [- (\mu_n^2 + \alpha_0^2) \tau_0]$$

$$f(0, \tau_0) = \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} f(\alpha_0, \tau_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^2} \exp (-\mu_n^2 \tau_0)$$

где

$$\mu_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} l, \quad \tau_0 = \frac{a_0 t}{l^2} \quad \left(a_0 = \frac{k_1 H_{cp}}{\delta}, \quad b_0 = \frac{k_0}{\delta m_0} \right)$$

$2l$ — расстояние между дренами; ε — интенсивность инфильтрации.

Авторы с благодарностью отмечают полезность обсуждения ряда вопросов с Н. Н. Веригиным.

Калининский торфяной институт

Поступила 26 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехтеориздат, М., 1952.
2. Шержуков В. С. Неустановившаяся фильтрация в горизонтальные дренаы при осушении торфяных месторождений напорно-грунтового питания. ПМТФ, 1960, № 3.
3. Аверьянов С. Ф. Горизонтальный дренаж при борьбе с засолением орошаемых земель. М., Изд-во АН СССР, 1959.
4. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ИИЛ, 1953.