

УДК 532+533(075.8)+519.67

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИНЕРАЛИЗАЦИИ АЙДАР-АРНАСАЯ

Атабеков И.У.

ученый секретарь Нац. Ком. РУз. МАБ ЮНЕСКО при АН РУз,
тел.: (+99871)2321181, e-mail: atabekovi@mai.ru

Общая тенденция гидрометеорологического режима Айдар - Арнасайской системы озер (ААСО) состоит в снижении уровня и росте минерализации воды в озерах, вызванных сокращением поступления воды в озерную систему. В последние годы, в первую очередь сократились попуски из Шардаринского водохранилища. Тем не менее, к факторам замедляющим прогрессивное осолонение водоемов следует отнести постепенное возрастание объемов коллекторно-дренажного стока, происходящих на фоне повышенных (по сравнению с предшествующим периодом) значений атмосферных осадков. Для расчетов распределения минерализации воды по акватории (ААСО) разработана модель трехмерной гидродинамической задачи в приближении «мелкой воды». Учитывая тот факт, что в условиях сложной конфигурации (ААСО), принятие в расчетах единой глубины озерной системы снижает точность расчетов в ряде акваторий водоемов, вся ААСО разделена на несколько зон различной глубины. На общих границах выдержаны условия непрерывности потоков. Численное решение проведено применением метода граничных интегральных уравнений для зонально неоднородных сред, на основе которых разработана методика прогноза качества воды на предстоящие годы.

Ключевые слова: численная модель, гидромеханика, граничные интегральные уравнения.

MATHEMATICAL MODEL OF MINERALIZATION OF AYDAR-ARNASAY LAKE SYSTEM

Atabekov I.U.

Because of the water coming into Aydar-Arnasay Lake System having decreased in the last years its mineralization is going to increase. On level with increasing atmospheric pollutions the volume of manifold water is increasing what is one of the factors reducing of progressive mineralization. It has conducted hydro mechanical calculations for binary fluid in shallow water's approach to model the mineralization of Aydar-Arnasay Lake System. Taking into consideration the complicated boundary configuration whole lake system divided into several zone with various depth. It has conducted continuity conditions of flow on the common boundaries. Numerical solution has provided by Boundary Element Methods for zone heterogeneous mechanics of continua. On this basic it has modeled the mineralization of water for coming years.

Keywords: numerical model, hydrodynamics, boundary integral equations.

AYDAR-ARNASOY SUV HAVZASI SHO'RLANISHINING MATEMATIK MODELI

Atabekov I.U.

Aydar-Arnasoy ko'l tizimi (AAKT)ga suv kelishi kamayib borayotganligi sabab uning tuzliligi ko'payib borayapti. Oxirgi paytlarda birinchi navbatda Shardara suv omboridan suv tashlash kamayib ketdi. Shunga qaramay, suv tuzligini progressiv ravishda oshishini sekinlashtiruvchi omillardan biri ob-havo yo'g'ingarchiligi ko'payishi bilan birgalikda kollektor drenag suvlar miqdorini ortib borishi hisoblanadi. AAKT suvining tuz miqdorini aniqlash maqsadida binar qorishmadan iborat suyuqlik gidromexanikasi masalasi sayoz suyuqlik havzalari uchun tatbiq etilgan. AAKT chegarasi juda murakkab bo'lganligi sababli butun ko'l tizimi har xil chuqurlikdagi bir nechta zonalarga bo'lingan. Umumiy chegaralarda suv oqimi uzluksizligi ta'minlangan. Raqamli yechim chegaraviy integrallar tenglamalar metodi bilan hisoblangan. Uning asosida kelgusi yillarga AAKT suv tuzligi miqdori modellashirilgan.

Tayanch iboralar: raqamli model, gidrodinamika, chegaraviy integral tenglamalar.

1. Введение

Основная причина нестабильности биопродуктивности Айдаро-Арнасайской заключается в том, что биоресурсы озер, и ихтиофауна в частности, формировались стихийно из речных пресноводных сообществ. В результате практически все виды рыб Айдаро-Арнасай испытывают значительные трудности воспроизведения в условиях солоноватоводного водоема. Ряд видов (толстолобики, белый амур), имея хорошие условия для нагула, не имеют возможности размножаться вообще. Пополнение популяций рыб в значительной степени происходит за Айдаро Арнасайской системы озер. В последние годы наметилась тенденция ухудшения состояния его водных ресурсов. Важнейшим абиотическим фактором снижения биопродуктивности Айдаро Арнасайской озерной системы является снижение уровня воды и рост минерализации. Отчасти это вызвано сокращением попусков пресных вод из Шардары и осолонением Арнасай. Использование гидродинамических моделей является перспективным методом оценки распределения минерализации воды по акватории водоемов. Предлагаемая модель «мелкой воды» для трехмерной гидродинамической задачи, приемлемой для расчетов распределения минерализации воды по акватории Айдаро Арнасайской озерной системы показала адекватность результатов ее решений с фактическими данными. В то же время в условиях сложной конфигурации озер, принятие в расчетах единой глубины озерной системы снижает точность расчетов в ряде акваторий водоемов. Для этой цели усовершенствованы методы численных расчетов гидродинамических моделей, детализирована численную модель современного состояния тестовых участков котловины озера, оптимизированы гидродинамические показатели по фактическим данным. На основе совершенствования гидродинамического моделирования современного состояния ААСО рассчитаны минерализация важнейших участков при различных вариантах попусков из Шардаринского (Арнасайского) водохранилища. Выявлены и картированы зоны распреснения Арнасай и стабильность их гидрохимического режима. А также разработаны методики прогноза качества воды на предстоящие годы. Анализ состояния Айдаро Арнасайских озер за 2005 -2013 годы выявил общую тенденцию снижения экологического потенциала водоемов происходящих под влиянием ряда разнонаправленных процессов. Общая тенденция гидрометеорологического режима озер состоит в снижении уровня и росте минерализации воды в озерах, вызванных сокращением поступления воды в озерную систему. В последние годы, в первую очередь сократились попуски из Шардаринского водохранилища. Тем не менее к факторам замедляющим прогрессивное осолонение водоемов следует отнести постепенное возрастание объемов коллекторно-дренажного стока, происходящих на фоне повышенных (по сравнению с предшествующим периодом) значений атмосферных

осадков. По материалам летней экспедиции 2014 г установлено, что на водоемах Айдаро Арнасайской озерной системы наблюдается летнее снижение уровня и рост минерализации воды. Уровень воды к сентябрю по сравнению с окончанием весеннего периода понизился примерно на 50 см, что привело к сокращению площади водной поверхности на 10000 га и повышению минерализации воды в различных зонах ААСО на 200-500 мг/дц3. Отсутствие попусков пресных вод из Арнасайского водохранилища в весенний период 2014 г привело к наибольшему росту минерализации воды в мелководных зонах Арнасай. В новых складывающихся гидрометеорологических условиях (Сокращение попусков пресных вод из Арнасайского водохранилища) нами проведено усовершенствование численных методов расчетов уравнений гидродинамики с учетом влияния различных глубин водоемов на формирование режима минерализации. Результаты полученных фактических гидрохимических анализов адаптированы к уточненной цифровой модели рельефа и подготовлены к расчетам различных вариантов режима минерализации воды с учетом складывающихся гидрометеорологических ситуаций на водоемах. Качество воды является одним из лимитирующих факторов развития рыбного хозяйства на озерах, в частности в Айдар-Арнасайской системе озер (ААСО). На современном этапе развития ААСО минерализация воды в водоемах меняется по акватории в несколько раз. Для примера в таблице.1 приведены реально измеренные данные.

Таблица 1. Минерализация основных водных масс ААСО в сентябре 2011 года

Основные водные массы ААСО	Минерализация, г/л
Западный плес озера Айдаркуль	10,5
Центральный плес озера Айдаркуль	10,2
Восточный плес озера Айдаркуль	10,0
Западная часть озера Тузкан	9,8
Центральная часть озера Тузкан	9,0
Восточная часть озера Тузкан	8,8
Зона впадения коллекторов	7,0
Арнасайские озера	9,8
Арнасайское водохранилище (центральная часть)	1,5
Арнасайское водохранилище (юго-западные заливы)	5,0
Озера, отсоединяющиеся от основной водной массы	15-20
Прибрежные озера грунтового питания	20-50
Прибрежные солончаки	< 200

Для рационального разведения рыб в ААСО с использованием техники садкового рыбоводства требуется прогноз на ближайшую перспективу минерализации воды, для чего необходимо проводить водохозяйственные расчеты. Их можно проводить по-разному, например, составляя балансовые уравнения воды и соли в среднем по всей озерной системе. Но этот метод не дает представления о локальном распределении минерализации в зависимости от объема и солёности поступающих вод из Центрального Голодностепского Коллектора (ЦГК), реки Клы и попусков из Шардаринского водохранилища в многоводные годы. Более перспективный метод прогнозирования – это использование уравнений гидромеханики для бинарной смеси, решение которых, в случае пространственных задач, сталкивается с большими трудностями даже в численном виде, не говоря уж об аналитическом. Правда, их можно упрощать, делая различного рода предположения, сохраняя при этом главные свойства изучаемого процесса. Дополнительную сложность составляет конфигурация береговой линии ААСО, сложенной рыхлыми песками, которые интенсивно переформируются. Размываются значительные участки, образуются новые пляжи, происходит снос песчаного материала вглубь водоема и заиливание.

2. Постановка задачи

Применительно к большим озерам в работе [1] разработано решение задачи бинарной гидромеханики в приближении мелкой воды. Движения водной массы и распределение соли и температуры в море описываются уравнениями перемещения масс в жидких бинарных смесях [2]:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \otimes \bar{u} \right] = -\nabla P + \mu \Delta \bar{u} + \rho g, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \otimes \bar{u} = -\rho \nabla \cdot \bar{u}, \quad (2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot S \otimes \bar{u} \right] = \nabla \cdot (\rho D \nabla S + k_T \frac{\nabla T}{T}) + I_1, \quad (3)$$

$$c_p \rho \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot T \otimes \bar{u} \right] = \nabla \cdot (\lambda \nabla T + D \rho Q^* \nabla S) + (h_1 - h_2) I_2. \quad (4)$$

Здесь $\bar{u}$ - скорость, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ - плотность смеси, ρ_1 - плотность соли, ρ_2 - плотность воды, P - давление, $S = \rho_1/\rho_2$, T - абсолютная температура, μ - вязкость раствора, λ и D - константы теплопроводности и диффузии, k_T - константа термодиффузии, I_1 , I_2 - интенсивность химических (фазовых) преобразований одного компонента соединения в другой без выделения и поглощения тепла, $c_p = c_{p1} + c_{p2}$ - теплоёмкость смеси, $h = h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2$ - энтальпия, Q^* - удельная теплота изотермического переноса, g - ускорение свободного падения, ∇ - оператор-градиент, Δ - оператор Лапласа.

Воспользуемся приближением Буссинеска, т.е. будем считать, что

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho},$$

где ρ_0 - плотность при гидростатическом равновесии; здесь

$$\tilde{\rho} / \rho_0 \ll 1,$$

и члены

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \rho \frac{\partial S}{\partial t}, \rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

в уравнениях (1), (3), (4) заменяем на

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \rho_0 \frac{\partial S}{\partial t}, \rho_0 \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Преобразуем систему уравнений (1) - (4) применительно к случаю мелкой воды, т.е. когда один из размеров рассматриваемой задачи, в этом случае это вертикальное направление, во много раз меньше, чем другие. Обозначаем вертикальную координату свободной поверхности моря через $z_s(x_1, x_2, t)$ и морского дна через $z_f(x_1, x_2, t)$. Интегрируем уравнение несжимаемости (2) вдоль $x_3 = z$:

$$\int_{z_f}^{z_s} \nabla \cdot \bar{u} dz = u_3(z_s) - u_3(z_f) + \nabla_{12} : \left(\int_{z_f}^{z_s} \bar{u} dz \right) = 0, \quad (5)$$

где ∇_{12} - оператор градиента по x_1 и x_2 .

Но по определению v_3

$$\frac{dz_s}{dt} = \frac{\partial z_s}{\partial t} + v_1 \frac{\partial z_s}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial z_s}{\partial x_2} = v_3(z_s),$$

$$\frac{dz_f}{dt} = u_3(z_f) = 0. \quad (6)$$

Усредняя $\bar{u}$, по z , получаем

$$\int_{z_f}^{z_s} \bar{u} dz = (z_s - z_f) \bar{u}(x_1, x_2, t). \quad (7)$$

Подставляя (6) - (7) в (5) и используя правило дифференцирования определенного интеграла с переменными пределами интегрирования, можем переписать уравнение (5) для полного потока zu , где $z = z_s - z_f = H + \xi$ (H - глубина моря, ξ - возмущение горизонтальной поверхности моря):

$$z_{,t} + \nabla \cdot (z \bar{u}) = 0. \quad (8)$$

Если пренебречь влиянием z на u_3 , то третье уравнение (1) дает

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g. \quad (9)$$

Считается, что плотность воды незначительно меняется из-за изменения концентрации соли в растворе и температуры, и ρg заменяем на

$$(1 + \Delta S + \beta \Delta T) \rho_0 g,$$

где ρ_0 - плотность при гидростатическом равновесии; ΔS , ΔT - разность концентрации соли и температуры при гидростатическом равновесии, β - коэффициент объемного расширения.

Обозначив

$$\bar{S} = \frac{1}{z} \int_{z_f}^{z_s} S dz, \bar{T} = \frac{1}{z} \int_{z_f}^{z_s} T dz$$

и подставляя $p = \rho g z$ в оставшиеся два уравнения (1) и интегрируя по x_3 , получаем

$$\begin{aligned} & (\bar{z}u)_{,t} + \nabla \cdot (\bar{z}u \otimes \bar{u}) + \\ & + g z \nabla z + \frac{1}{2} g (z_s^2 - z_f^2) [\nabla (\bar{S} + \beta \bar{T}) - \\ & - \frac{\mu}{\rho_0} \Delta (\bar{z}u) - \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=z_s}^{z=z_f}] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу принятых допущений о мелкой воде последний член уравнения (10) представляет собой разность тангенциальных напряжений на поверхности (силы ветра) и сопротивление движению воды на дне, деленной на ρ_0 . В случае больших озер и морей силы Кариолиса $l_k \omega \otimes v$, где l_k – коэффициент, ω – вектор угловой скорости вращения Земли как целое, могут оказать заметное влияние на движения водных масс, и добавляются в правую часть уравнения (10). Подобным образом усредняем уравнения (3) и (4). Добавляя к левой части, равной нулю, выражение $S \nabla^* v$ и $T \nabla^* v$, комбинируя с конвективным членом и интегрируя по z , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \frac{1}{z} \frac{\partial (z u_1 \bar{S})}{\partial x_1} + \frac{1}{z} \frac{\partial (z u_2 \bar{S})}{\partial x_2} = \\ & = D(\Delta_{12} \bar{S} + \frac{1}{z} \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} \Big|_{z_f}^{z_s}) + \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{k_T}{T^*} (\Delta_{12} \bar{T} + \frac{1}{z} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \Big|_{z_f}^{z_s}) + \frac{1}{\rho_0} \bar{I}_1, \\ & \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{1}{z} \frac{\partial (z u_1 \bar{T})}{\partial x_1} + \frac{1}{z} \frac{\partial (z u_2 \bar{T})}{\partial x_2} = \\ & = \lambda (\Delta_{12} \bar{T} + \frac{1}{z} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \Big|_{z_f}^{z_s}) + \\ & + Q^* \frac{D}{c_p} (\Delta_{12} \bar{S} + \frac{1}{z} \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} \Big|_{z_f}^{z_s}) + \frac{(h_1 - h_2)}{c_p \rho_0} \bar{I}_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь учтено, что величина k_T/T изменяется незначительно и считается постоянной и равной k_T/T^* , где T^* – средняя абсолютная температура воды.

На поверхности $z=z_s$ имеем следующие уравнения баланса:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} \Big|_{z=z_s} = -S \Delta b + \gamma_1 (T_0 - T), \\ & \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \Big|_{z=z_f} = \gamma_2 (T_0 - T), \end{aligned} \quad (13)$$

где Δb – разность скорости испарения и выпадения осадков.

На дне $z=z_f$ отсутствует солевой поток и имеется геотермический градиент γ_g :

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial z} \Big|_{z=z_f} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \Big|_{z=z_f} = \gamma_g (T_0 - T), \quad (14)$$

$$\gamma_1 = \frac{h T^*}{\lambda T^* - D \rho Q^* k_T}, \quad \gamma_2 = \frac{h k_T}{\lambda T^* - D \rho Q^* k_T}.$$

Здесь T_0 – температура атмосферы.

В уравнения (11)-(12) подставляем $\partial S/\partial n$ и $\partial T/\partial n$ из уравнений (13)-(14), заменяя при этом S , T и z их средними значениями. Эта модель принимает во внимание особенности солёности, температуры и движения воды в различных частях акватории моря, но глубинные параметры усреднены, из-за чего эффекты вертикального перемешивания оценены в среднем, и деление глубоководной части моря в эпилимнион и гипolimнион не производилось. Под концентрацией соли подразумевается суммарное количество солей, растворённых в воде, и последний член в формуле (3) учитывает общее количество выпадающих в осадок солей.

3. Метод решения

Чтобы решить систему уравнений (8), (11), (12), сначала заменяем производные по времени их разностными аналогами. В результате получаем некоторые уравнения для U , V , S , T следующего типа:

$$U^n - k_{uv} \Delta U^n = f_u + U^{n-1}. \quad (15)$$

Коэффициенты k определяются следующими формулами:

$$k_{uv} = \frac{\Delta t}{Re}, \quad k_T = \frac{k_{T0} \Delta t}{Pr}, \quad k_S = \frac{k_{s0} \Delta t}{Re_D},$$

$$k_{s0} = \frac{1}{(1 + \frac{\Delta b D}{u_0} \Delta t)},$$

$$k_{T0} = \frac{1}{[1 + \frac{(\gamma_2 - \gamma_g) \lambda}{u_0} \Delta t + \frac{Q^* D \gamma_1}{c_p u_0} \Delta t]}.$$

Функции f выражаются значениями U , V , S , T по времени n -го шага и такими постоянными, как Re , Re_T , Re_D , Fr , Pr , Gr . Здесь Re – число Рейнольдса, Re_T , Re_D – аналогичные постоянные, характеризующие отношения массовых скоростей к скоростям диффузии тепла и соли, Fr , Pr , Gr – числа Фруда, Прандтля и Грасгофа соответственно, U, V – горизонтальные составляющие потока $z\bar{u}$.

Отклонение ξ в каждом временном шаге рассчитывается формулой

Уравнения (15) решаем методом граничных элементов [3]. Интегральные уравнения этого метода построены на основе фундаментальных решений соответствующих уравнений (15) и имеют стандартную форму:

$$\xi^n = -(\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial V^{n-1}}{\partial x_2} + \Delta b) \Delta t + \xi^{n-1}.$$

$$c u + \int_{\Gamma} f^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* f d\Gamma + \int_{\Omega} b d\Omega,$$

где $f = \partial v/\partial n$, Γ – граница рассматриваемого тела, Ω – область, занятая рассматриваемым телом, b – правая часть соответствующих уравнений (1) – (4); u^* и f^* – решения соответствующих фундаментальных уравнений: $u_j^* - \lambda \Delta u_j^* = \delta(\xi, x) e_j$.

Для двумерных задач u^* имеют следующий вид:

$$u_j^* = \frac{1}{2\pi\lambda} K_0\left(\frac{|x-\xi|}{\sqrt{\lambda}}\right), f_j^* = -\frac{1}{2\pi\lambda\sqrt{\lambda}} K_1\left[\frac{|x-y|}{\sqrt{\lambda}}\right] \frac{(x_i - y_i)n_i}{|x-y|}.$$

Здесь δ - дельта-функция Дирака, $K_m(x)$ - модифицированная функция Бесселя второго рода порядка m , $x(x_1, x_2)$ - точка, к которой прикладывается нагрузка, $y(y_1, y_2)$ - некоторая точка области Ω и $n(n_1, n_2)$ - нормаль в точке x границы Γ .

4. Обсуждение результатов и выводы

Для численной реализации задачи граница ААСО построена на основе совместного анализа космических снимков Landsat, Google Earth, топографических карт масштаба М:100 000, материалов оцифровки рельефа, выполненные Узгеодезкадастром [4, 5]. На рис.1 показаны

границные и внутренние точки для отладочного варианта расчета минерализации, выполненного на уровне 246 м. На этом уровне число граничных точек, опоясывающих ААСО, составляет 1406, а внутренних - 42. Из-за ограничения машинного времени расчет двумерных сингулярных интегралов, входящих в формулу граничных интегральных уравнений, производился в более грубой сетке (большие треугольники), а для аппроксимации сингулярных интегралов по границе использовался весь набор из 1406 точек.

Полученные в результате решения задачи значения солености по истечению 1-го и 4-х месяцев по средним значениям притока воды из реки Клы неплохо согласуются с наблюдаемыми данными.

Сравнением расчетных и натурных данных установлено адекватное реагирование модели на изменения коллекторно-дренажного притока, осадков и испарения озерной системы.

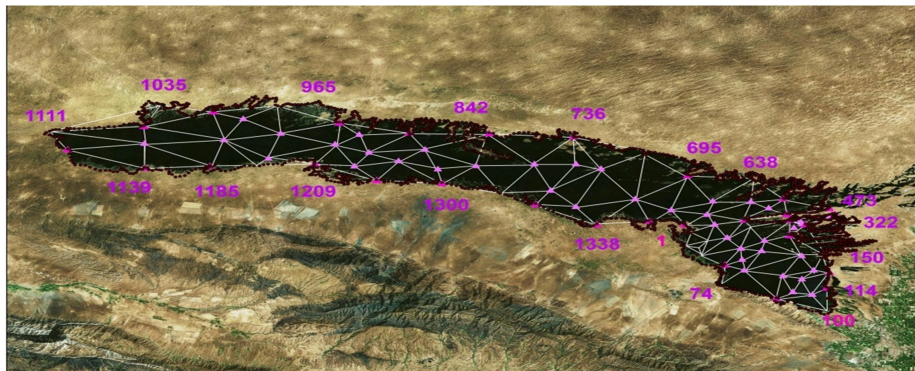


Рис.1. Граничные и внутренние точки для отладочного варианта расчета минерализации

Выявлено, что при отсутствии попусков из Шардаринского водохранилища, характерного для 2013 г., минерализация Арнасайского озера формируется под влиянием более минерализованных вод озер Айдар и Тузкан, и достигла в июле 9,2-9,7 г/л. В то же время, несмотря на то, что часть стока ЦГК в 2013 г. переключили на отводящий канал Арнасайского водохранилища, минерализация Тузкана в районе впадения ЦГК не превышала 6 г/л.

Также проведены контрольные замеры минерализации воды коллектора ЦГК и в озерах Тузкан, Арнасай и Арнасайском водохранилище в летний период 2013 г. для их последующего использования в расчетах реального режима озер.

Автор выражает благодарность к.г.н. Горелкину Н.Е. за предоставленные фактические материалы по ААСО для построения модели.

Литература

- [1] Таимухамедов Б.А., Атабеков И.У. Численная модель солености Аральского моря // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. – Ташкент, 2006. – Вып. 115. – С. 58-70.
- [2] Лыков А.В. Тепломассообмен. Справочник. – М.: Энергия, 1978. – 489 с.
- [3] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
- [4] Горелкин Н.Е., Милькис И.Б. Испарение с водоемов Арнасайского озерного комплекса // Труды САНИГМИ. – Ташкент, 1979. – Вып. 66 (147). – С. 59-69.
- [5] Экспедиционное обследование Айдаро-Арнасайской системы озер в период с 21 сентября по 5 октября 2011 года. – Ташкент: НИЦ МКВК, 2011. – 76 с.