303082

К. В. Гришанин

Динамика РУСЛОВЫХ ПОТОКОВ

Издание второе,
переработанное
и дополненное



ЛЕНИНГРАД
ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ
1979

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА

УДК 556.536

Монография освещает современное состояние динамики русловых потоков. Рассматриваются вопросы турбулентного движения жидкости в открытых руслах, одномерные и пространственные задачи движения естественных потоков, вопросы гидравлического сопротивления русел, транспорт влекомых и взвешенных наносов, деформации русел и закономерности руслового процесса. Значительное внимание уделено методам расчета.

Книга предназначена для гидрологов и гидротехников, аспирантов и студентов старших курсов гидрологических и гидротехнических факультетов гидрометеорологических, воднотранспортных, строительных и гидромелиоративных институтов.

The monograph elucidates the modern state of the dynamics of alluvial flows. There are considered problems of open channel flows turbulence, one-dimensional and spatial mean motion of water in natural channels, hydraulic resistance of movable beds, sediment transportation, variations of beds and some regularities of alluvial processes.

Г $\frac{20806\text{-}029}{069(02)\text{-}79}$ 52-79

© Гидрометеоиздат, 1979 г.

Посвящается
Марии Владимировне
Гришаниной

Предисловие

Динамика русловых потоков изучает движение воды в деформируемых открытых руслах. К таким руслам принадлежат русла всех естественных потоков и русла неукрепленных земляных каналов.

Занимаясь природными объектами и пользуясь при их изучении методами механики жидкостей, динамика русловых потоков стоит в одном ряду с такими науками, как океанология и динамическая метеорология. Сформировавшись в качестве самостоятельной дисциплины значительно позднее этих наук, она, однако, успела полностью определить круг своих задач. К главным из них относится задача о движении воды в руслах сложных пространственных форм, задача о гидравлическом сопротивлении подвижного дна, задача о транспорте наносов и задача о деформациях русел. Своим практическим значением она обязана главным образом последней задаче. Деформации русел оказывают сильное влияние на судоходные условия рек, пропускную способность каналов, работу разнообразных гидротехнических сооружений, а часто и на судьбу сооружений промышленного и гражданского характера, расположенных в прибрежной зоне. В связи с этим динамика русловых потоков служит в СССР и в ряде других стран ареной интенсивной исследовательской работы. Число публикаций по ее вопросам в мировой журнальной литературе составляет 150—200 в год, создалась и продолжает расти монографическая литература.

Первое издание этой книги было выпущено в 1969 г. и сразу же разошлось. При подготовке настоящего издания книга подверглась значительной переработке. Учтен ряд результатов, опубликованных после первого издания, произведена перегруппировка глав и параграфов, добавлены введение и три новых параграфа по одномерному движению руслового потока. В связи

с уменьшением объема книги исключено несколько второстепенных вопросов и изменен характер изложения — оно сделано более лаконичным, опущены детали некоторых выводов. Сохранена (при небольшом сокращении) первая глава книги, посвященная общим законам движения вязкой несжимаемой жидкости. Входившие в нее в первом издании сведения по математическому аппарату гидродинамики вынесены в приложение. Так же как в первом издании, книга не имеет целью обзор исследований. Ее цель состоит в систематическом изложении основ механики русловых потоков — тех теоретических и экспериментальных результатов, которые могут рассматриваться как отправные для дальнейшего прогресса науки.

Введение

Изменяемость твердых граничных поверхностей потока под механическим действием текущей жидкости, составляя специфику объектов динамики русловых потоков, обусловливает и особый подход к их изучению. Поток и подвижное русло не могут изучаться раздельно, на них необходимо смотреть, как на две части единой физической системы. Взаимодействие этих частей осуществляется по принципу обратной связи: поток⇄русло.

Поток деформирует русло, деформации русла изменяют поля скоростей и давления в потоке. На входе в систему действуют внешние факторы: колеблющийся жидкий сток, колеблющийся сток внерусловых наносов, деятельность человека. На выходе мы имеем реакцию системы: колебания уровня, выделение тепла, деформации русла.

В современную климатическую эпоху, во всяком случае в последние несколько тысяч лет, колебания стока имеют характер стационарного случайного процесса — статистические характеристики колебаний остаются неизменными. Такой же характер у большинства рек, в особенности крупных, имеют в наше время и изменения русел. Стадия интенсивного эрозионного врезания ими пройдена и они находятся, по выражению Н. И. Маккавеева [87], в стадии «нормальной» эрозии. У рек в стадии нормальной эрозии зоны размыва и отложения наносов в данный момент времени чередуются по длине русла. В данном поперечном сечении размыв и намыв дна циклически сменяют друг друга во времени. Каждые сто лет такая река пропускает не только один и тот же объем воды, но и один и тот же объем наносов и, если человек не вмешался в ее жизнь, она в течение ряда столетий сохраняет неизменными свой средний уклон и средние размеры русла. Реки в стадии нормальной эрозии статистически стабильны. За вычетом случайных флуктуаций они находятся в состоянии динамического равновесия.

Чтобы уяснить специфические свойства потоков с деформируемым руслом, полезно проанализировать это состояние подробнее.

Рассмотрим простой случай. Пусть река образована слиянием нескольких притоков на высоте Z над уровнем моря и далее до впадения в море остается бесприточной. Пусть, кроме того, долина ее заполнена сыпучим грунтом с мало изменяющимся гранулометрическим составом. Жидкий и твердый сток во входном створе, запас потенциальной энергии Z и грунт

ложа есть то, что Природа (предшествующая история бассейна) дала этой реке и что река не может изменить.

Какие же задачи надо решить реке, чтобы обеспечить себе статистически стабильное состояние? Прежде всего ей надо иметь русло, способное пропускать жидкий и твердый сток. Для пропуска твердого стока требуется, чтобы скорости течения были не ниже определенной величины, позволяющей поддерживать внерусловые наносы во взвешенном состоянии. В силу подвижности дна скорости течения не должны быть и больше определенного крайнего значения — той скорости, превышение которой вызовет массовое взвешивание донного материала и вынос его в море. Таким образом, твердый сток с поверхности бассейна и подвижность дна обязывают реку соблюдать неравенства

$$U_1 < U < U_2, \qquad \text{(В.1)}$$

где U — скорость течения; U_1 и U_2 — предельные скорости. Скорость U_1 зависит от крупности частиц, смываемых с поверхности бассейна, а скорость U_2 — от крупности частиц, слагающих дно. Для рек, получающих с поверхности бассейна илистые и глинистые частицы и имеющих песчаное дно, значения предельных скоростей примерно следующие: $U_1 = 0{,}2 \div 0{,}7$ м/с, $U_2 = 2{,}0 \div 2{,}5$ м/с.

Условием (В.1) определяется *связь между размерами поперечных сечений реки и ее жидким стоком.* Выдерживать это условие реке помогают законы сохранения жидкой и твердой компонент и существование прямой связи между расходом наносов и скоростью течения. Если вдоль какого-нибудь участка русла происходит возрастание скоростей и дно размывается, то вызванное размывом увеличение площадей живых сечений демпфирует процесс — ведет к ослаблению роста скорости и затуханию размыва. При уменьшении скоростей вниз по потоку и отложении наносов демпфирующим фактором служит сокращение площадей живых сечений.

Однако иметь определенный диапазон абсолютных значений скоростей для статистической стабильности русла недостаточно. Уравнение сохранения наносов и закон прямой связи между расходом наносов и скоростью течения требуют, кроме того, чтобы скорость течения вдоль реки не изменялась монотонно. Монотонное изменение (рост или падение) скорости по всей длине реки означало бы монотонное изменение расхода наносов и, как его следствие, монотонное изменение во времени поперечных сечений русла, т. е. нарушение его статистической стабильности. Скорости течения на приустьевом участке реки должны быть примерно такими же, как в истоке. Но это значит, что на своем пути до моря речной поток обязан диссипировать всю потенциальную энергию, которая ему дана, сделать

так, чтобы потери энергии на трение были равны начальному запасу энергии

$$Z=\int_0^L I_f\,dl, \qquad \text{(B.2)}$$

где L — длина реки; I_f — местный градиент потерь.

Ключевая задача реки состоит в том, чтобы обеспечить совместное выполнение условий (B.1) и (B.2). Так как абсолютная температура θ воды в реке практически постоянна (отклоняется от среднего значения $\theta_{ср}\approx 285$K не более чем на $\pm 4\%$), то равенство (B.2) с термодинамической точки зрения есть требование сохранения потоком постоянного уровня энтропии. Энтропия, порожденная в единице массы воды на пути L

$$\eta=\frac{g}{\theta}\int_0^L I_f\,dl=\frac{g}{\theta}Z, \qquad \text{(B.3)}$$

должна быть вся выделена в окружающую среду.

Если снять упрощающие условия бесприточности и неизменного состава грунта, задача реки окажется более сложной, но существо ее не изменится. Во всех случаях, для того чтобы оставаться статистически стабильной, река должна *уметь гасить свою потенциальную энергию (сохранять постоянный уровень энтропии), не выходя при этом за границы определенного диапазона малых по абсолютной величине скоростей течения.*

Скорость порождения энтропии единицей массы воды составляет

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{g}{\theta}I_f U. \qquad \text{(B.4)}$$

Отсюда видно, что условие малости скоростей течения при заданном уклоне свободной поверхности равносильно условию малой скорости порождения энтропии. Этот результат согласуется с постулатом Великанова [17] о минимальной скорости диссипации энергии и с постулатом Л. Леопольда и В. Ланг-бейна [201] о минимальной скорости порождения энтропии в русловом потоке[1]. Первое из неравенств (B.1) есть ограничение, наложенное на этот минимум законами транспорта наносов.

Так как запас потенциальной энергии может варьировать в широких пределах, а физико-географические условия бассейнов

[1] Общую основу указанных постулатов можно видеть в экстремальном принципе, сформулированном И. Пригожиным [107]: стационарному состоянию открытой диссипативной системы отвечает наименьшая скорость порождения энтропии. Так как система поток—русло стационарна лишь в среднем, то применение к ней этого принципа имеет приближенный характер.

разнообразны, то рекам при решении их ключевой задачи *пришлось проявить большую изобретательность.* Гидравлическое сопротивление ровного дна, сложенного из мелких обломочных частиц, очень мало. Чтобы увеличить сопротивление дна, реки развивают на нем вторичную систему шероховатости — донные волны, имеющие асимметричный профиль и обтекаемые с отрывом струй. Этим путем реке с песчаным дном удается увеличить сопротивление русла в 3—5 раз. Однако этого оказывается мало и реки вынуждены прибегать к дополнительным, крупномасштабным средствам гашения энергии. Такими средствами служат: увеличение длины русла, деление его на рукава и образование крупных препятствий движению воды в самом русле. Увеличение длины русла достигается приданием ему извилистой формы. В бассейнах с крутыми склонами и глубокой врезкой русел извилистый вид придается долине реки. В сильно уположенных равнинных бассейнах реки извиваются в пределах своих широких пойм — меандрируют (рис. 1 *а*). Делясь, река развивает сеть пойменных рукавов, активно работающих при повышенном стоке (рис. 1 *б*). Крупные внутрирусловые препятствия движению воды формируются рекой или в форме шахматной цепочки побочней (рис. 1 *в*), или в форме островов и осередков (рис. 1 *г*).

Разным видам русел отвечает разная интенсивность транспорта русловых наносов. По И. В. Попову [106], наибольшие удельные расходы донных наносов наблюдаются на участках рек с русловой многорукавностью и с побочневым рельефом дна, наименьшие — у меандрирующих рек. В. В. Ромашин [115] и В. И. Антроповский [5] показали, что в таком же направлении убывают скорости течения. Река, таким образом, стремится течь с наименьшей скоростью, достаточной для транспорта наносов.

Так как движение всех открытых потоков с подвижным дном описывается одной и той же системой уравнений, то *различия в поперечных размерах и форме русел могут обусловливаться только различиями граничных условий.* В процессе формирования участка русла основными граничными условиями служат: жидкий и твердый сток во входном сечении, грунт дна и ширина долины. Жидкий и твердый сток вместе с грунтом дна определяют поперечные размеры русла. Опираясь на обширный фактический материал, Б. Ф. Снищенко показал, что морфология русла (вид используемых рекой крупномасштабных средств гашения энергии) определяется отношением $B_п/B$ ширины поймы (затопляемой части долины) к ширине русла. Последовательности видов русел (меандрирующих, с пойменной многорукавностью, побочневых, с русловой многорукавностью) отвечает монотонное убывание отношения $B_п/B$, монотонное уменьшение извилистости русла и монотонный рост внутрирусловых сопротивлений.

Сохранять достигнутое состояние равновесия реки должны в условиях переменного стока. Связанные с этим трудности они преодолевают путем регулирования шероховатости дна и циклического (сезонного) переотложения русловых наносов.

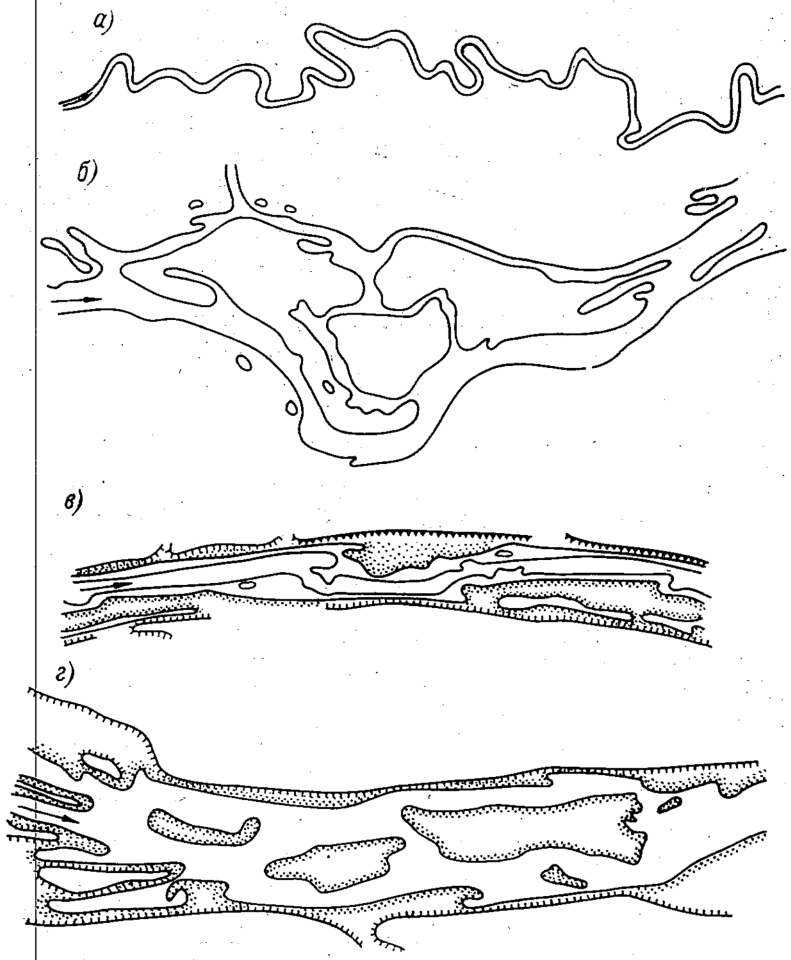


Рис. 1. Характерные участки естественных русел.

а — р. Иртыш, 880—1050 км, *б* — р. Днепр, 783—800 км (до постройки Каневской ГЭС), *в* — р. Вятка, 518—524 км, *г* — р. Б. Северная Двина, 323—330 км.

При возрастании, во время паводка, расходов воды и скоростей течения донные волны перестраиваются. Происходит сильное увеличение их длин, а затем понижение высоты, в результате чего сопротивление русла уменьшается. При очень больших паводочных расходах донные волны могут быть местами смыты и сопротивление дна становится минимальным.

С началом спада уровней и уменьшением расходов воды волновой рельеф дна быстро восстанавливается, обеспечивая рост руслового сопротивления. Поток в ходе паводка меняет сопротивление подвижного дна в сторону, обратную изменению скорости, добиваясь в итоге малой изменчивости уклона свободной поверхности. Способность руслового потока *управлять шероховатостью своего дна* выделяет его из всех течений, известных в Природе и технике.

С большими паводочными расходами русловых наносов река справляется, аккумулируя наносы на перекатах. С переходом к межени отложившийся слой наносов начинает постепенно срабатываться потоком. Этот ежегодно повторяющийся цикл переформирований составляет важное звено в обеспечении статистической стабильности русла, но к сожалению, затрудняет поддержание судоходных глубин.

Таково в кратком описании поведение рек. Оно дает картину сложного, многостороннего природного процесса, организованность которого не имеет аналогов в неживой Природе. *Речной поток и его русло представляют, возможно, наиболее совершенную из самоуправляющихся систем неорганического мира.*

Странным образом, несмотря на то, что человеческая цивилизация возникла и развивалась по берегам рек и реки как источники водоснабжения и транспортные пути всегда играли в жизни людей огромную роль, они сделались предметом специального изучения лишь недавно. Особенности поведения подвижных русел были впервые описаны в конце прошлого столетия инженерами, занимавшимися улучшением судоходных рек (В. М. Лохтин, 1897 г.) и строительством оросительных каналов (Р. Кеннеди, 1895 г.). Первое крупное экспериментальное исследование транспорта влекомых наносов относится к 1914 г. (Г. Гильберт), но широко развиваться такие исследования, а также исследования движения взвешенных наносов стали лишь в 30-х годах. В это же время Н. М. Бернадский и В. М. Маккавеев начали разрабатывать вопросы двумерного и трехмерного движения воды в естественных руслах. Статистический подход к движению донных наносов был развит Г. Эйнштейном и М. А. Великановым к началу 50-х годов. Немного позже А. Н. Колмогоров и Г. И. Баренблатт построили теорию движения взвешенных наносов. Ставшее сейчас привычным деление речных русел на прямолинейные, извилистые и разветвленные было введено К. И. Россинским и И. А. Кузьминым в 1947 г. Подробная классификация видов русел и типов руслового процесса была создана Н. Е. Кондратьевым и И. В. Поповым в начале 60-х годов. Возникновение в конце 60-х годов математической теории устойчивости подвижного дна относится уже к современному этапу развития динамики русловых потоков.

Возникнув на стыке гидродинамики, геоморфологии и гидрологии, динамика русловых потоков по своим методам и точности результатов остается пока неоднородной. В разделах, касающихся одномерного и двумерного движения воды в реках, дифференциальные уравнения гидродинамики позволяют получать результаты, точность которых близка к обычной точности решений в прикладной механике жидкостей.

Теория движения взвешенных наносов есть, по существу, раздел теории турбулентности. Так как введение в поток твердых частиц добавочно усложняет картину турбулентного движения, затруднения возникают еще на стадии составления дифференциальных уравнений. Решения приходится искать полуэмпирическими способами. Движение влекомых наносов представляет собою область, где соображения размерности и подобия сочетаются с методами теории вероятностей. Центральная задача теории движения наносов — определение расхода наносов — решается пока с недостаточной точностью. Наконец, в теории руслового процесса математическими приемами постановки и решения задач завоевана пока лишь небольшая территория и большинство результатов имеет качественный характер. Столь пестрая картина есть следствие молодости науки и чрезвычайной сложности ее предмета.

Дальнейший прогресс динамики русловых потоков зависит от накопления новых опытных данных и от успехов в математическом моделировании ее задач.

Глава I

Основы динамики вязкой несжимаемой жидкости

1. Кинематика жидкости

1.1 Частица жидкости. Системы координат. Линии тока и траектории

Уравнения гидродинамики описывают движение частиц жидкости. *Частица жидкости* представляет собой материальную точку сплошной среды, мы приписываем ей конечную массу, но считаем не имеющей протяжения. Реальный объект, который стоит за этой абстракцией, есть объем жидкости, малый по сравнению с размерами области движения, но достаточно большой, для того чтобы его импульс не испытывал флуктуаций под влиянием хаотического движения молекул. Так как жидкости содержат в единице объема громадные количества молекул, то последнее требование не создает никаких осложнений в задачах, которыми занимается гидродинамика [1].

При установлении дифференциальных соотношений между переменными гидродинамики в жидкости мысленно вырезают *элементарный (бесконечно малый) объем.* Это удобно потому, что разлагая какую-нибудь функцию координат в окрестности центра или полюса элементарного объема в ряд Тэйлора, мы в силу малости объема имеем право отбросить члены второго и высших порядков, т. е. считать, что функция координат меняется поперек объема линейно. Форма элементарного объема выбирается в соответствии с характером решаемой задачи.

Элементарный объем не следует смешивать с частицей жидкости. Из условий сплошности среды и непротяженности частиц вытекает, что их число в элементарном объеме бесконечно.

Возможны два способа описания движения жидких частиц. По первому из них (Эйлера) мы регистрируем скорости и ускорения частиц, которые проходят через интересующие нас фик-

[1] Поперечный размер молекулы воды равен $5{,}6 \cdot 10^{-8}$ см. В одном грамме воды содержится $3{,}3 \cdot 10^{22}$ молекул.

сированные точки пространства. По второму (Лагранжа) мы следим за скоростями и ускорениями, а следовательно, и за положением в пространстве фиксированных частиц. Более удобен первый способ, который преимущественно и применяется в гидродинамике.

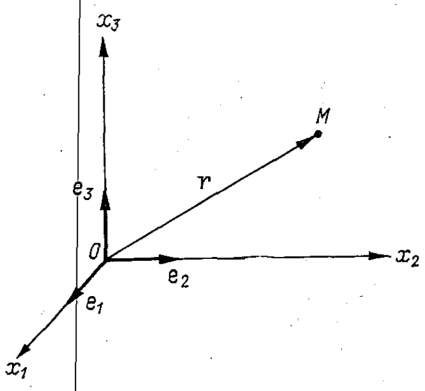


Рис. 2.

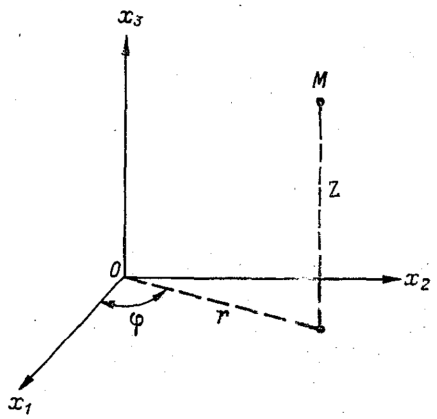


Рис. 3.

Уравнения движения могут быть записаны в векторной или в координатной форме. В последнем случае обычно используется система прямоугольных, прямолинейных, декартовых координат. В этой книге применяется правая система декартовых координат и отвечающее ей правило обхода замкнутых контуров против часовой стрелки (рис. 2). При записи общих уравнений движения оси координат обозначаются x_1, x_2, x_3, единичные векторы (орты) осей $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и компоненты скорости v_1, v_2, v_3. В частных случаях движения применяются более привычные для инженеров обозначения осей x, y, z, ортов $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ и компонент скорости u, v, w. В уравнениях, записанных в векторной форме, положение точки определяется ее радиус-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 2).

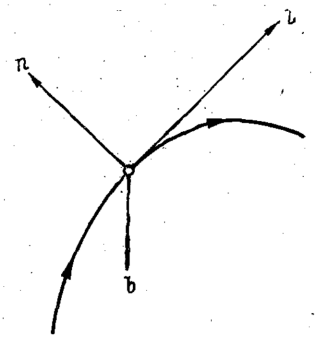


Рис. 4.

В некоторых задачах динамики русловых потоков приходится пользоваться системами криволинейных координат — цилиндрической и натуральной. Цилиндрическая система координат r, φ, z удобна для описания вращательных движений жидкости (рис. 3). Натуральной называется система координат, оси которой l, n, b в каждой точке области движения направлены по касательной, главной нормали и бинормали к линии тока (рис. 4). Применение натуральных

координат в динамике русловых потоков вызвано сложностью и неправильностью форм естественных русел.

Наглядное представление о движении жидкости можно получить с помощью линий тока и траекторий жидких частиц. Линии тока представляют собой векторные линии мгновенного поля скоростей: касательная к линии тока и вектор мгновенной скорости в точке касания коллинеарны. Дифференциальные уравнения линий тока имеют вид

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t_0)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t_0)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t_0)}, \tag{1.1}$$

где t_0 — фиксированный момент времени. Совокупность линий тока данного поля скоростей называется спектром течения. Последовательная смена во времени спектров течения соответствует эйлерову способу описания движения.

Дифференциальные уравнения траекторий записываются

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} = dt. \tag{1.2}$$

Время, играющее в уравнениях линий тока роль параметра, входит в уравнения траекторий в виде независимой переменной. Если отмечать у отдельных точек траекторий соответствующие им моменты времени, мы получим совокупность данных лагранжева способа описания движения.

При установившемся движении жидкости спектр течения остается неизменным и траектории совпадают с линиями тока. При неустановившемся движении совпадают только мгновенные поля направлений линий тока и траекторий. Такие поля направлений (в виде множества коротких черточек) можно видеть на фото- или кинокадрах турбулентного потока, в который введены какие-нибудь пассивные индикаторы (обычно шарики эмульсии). Один из наиболее простых и широко распространенных способов изучения кинематики речных потоков состоит в наблюдениях за движением поверхностных поплавков. Так как пульсационные скорости на свободной поверхности малы, а поплавок имеет относительно большие размеры и массу, то можно считать, что его траектория приблизительно совпадает с линией тока осредненного движения. Однако это верно лишь на ограниченной длине пути поплавка, с течением времени турбулентные пульсации неминуемо отклонят поплавок от линии тока. Вблизи границ водоворотных зон, где интенсивность пульсаций велика, траектория поплавка и на небольшом ее отрезке может сильно отличаться от линий тока мгновенного и осредненного движения.

1.2. Мгновенное состояние движения в элементарном объеме жидкости

Пусть нам дано поле скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0)$ потока жидкости в момент времени t_0. Фиксируем в пространстве некоторую точку M_0 и примем ее за полюс бесконечно малого объема жидкости dV. Мгновенную скорость $\mathbf{v}(M_0, t_0)$ в точке M_0 обозначим v_0 (рис. 5). Движение частиц жидкости в объеме dV относительно точки M_0 ввиду малости объема полностью определяется взятой в этой точке производной $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ от поля скорости по радиус-вектору. Эта векторная производная по векторному

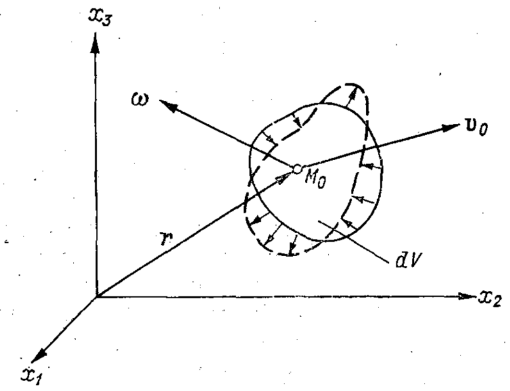


Рис. 5. Поступательное, вращательное и деформационное движение жидкости в окрестности фиксированной точки пространства в фиксированный момент времени.

аргументу есть тензор второго ранга, называемый *дифференциальным тензором скоростей.* Его компонентами служат девять скалярных производных от трех компонент скорости по трем координатным направлениям

$$\left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\| = \begin{Vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{Vmatrix}. \tag{1.3}$$

Свидетельством тензорной природы производной $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ является то, что девять ее скалярных компонент представляют собой коэффициенты линейного преобразования дифференциала радиус-вектора $d\mathbf{r}$ в дифференциал вектора скорости $d\mathbf{v}$

$$dv_i = \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Разлагая дифференциальный тензор скоростей $\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}$ на симметричную и антисимметричную части, имеем

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{1.4}$$

Три независимые компоненты антисимметричного тензора

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right),$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \tag{1.5}$$

образуют вектор $\boldsymbol{\omega}$, равный половине вектора ротации поля скоростей и представляющий собой вектор мгновенной угловой скорости элементарного объема dV относительно мгновенной оси, проходящей через полюс объема. Ротацию поля скоростей принято называть *вихрем скорости*. Для вектора вихря удобно ввести специальное обозначение

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}. \tag{1.6}$$

Если бы объем dV двигался как твердое тело, задав его поступательную скорость $\mathbf{v}_0$ и угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$, мы полностью определили бы мгновенное состояние его движения. Однако в жидкости, как и в любом другом деформируемом теле, дело обстоит сложнее — помимо поступательного и относительного вращательного движения, частицы жидкости участвуют в относительном деформационном движении. С течением времени меняются расстояния между частицами и составленные частицами углы. Это деформационное движение жидких частиц описывается симметричной частью дифференциального тензора скоростей. Ее называют *тензором скоростей деформации*. Матрица компонент тензора скоростей деформации имеет вид

$$\|D_{ij}\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{array} \right\|. \tag{1.7}$$

Элементы матрицы, расположенные на главной диагонали, представляют скорости относительного удлинения жидких линий, параллельных осям координат [1]. Три независимых недиагональных элемента равны половинам скоростей перекашивания плоских углов, образованных этими линиями. В системе

[1] Жидкой линией называется материальная линия, состоящая во все время движения из одних и тех же жидких частиц.

координат, оси которой совпадают с главными осями тензора D, скорости перекашивания углов (скорости сдвига) равны нулю — существует только деформация вытягивания (укорачивания) жидких линий по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Разложение мгновенной скорости жидких частиц, принадлежащих выделенному в жидкости бесконечно малому объему, на поступательную, общую с полюсом объема, вращательную вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс, и деформационную можно записать в следующей краткой форме:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\frac{1}{2}(\Omega\times d\mathbf{r})+Dd\mathbf{r}. \tag{1.8}$$

1.3. Ускорение частицы жидкости

303082

Скорость перемещающейся частицы жидкости меняется по ходу движения в силу двух обстоятельств: 1) вследствие того, что состояние движения изменяется со временем во всех тех точках пространства, через которые проходит путь данной частицы; 2) вследствие того, что в любой фиксированный момент времени состояние движения переменно вдоль этого пути. Так, частица воды, движущаяся в реке во время паводка, изменяет свою скорость по причине роста или уменьшения расхода реки, а также по причине того, что на своем пути она проходит через участки, различно ориентированные на земной поверхности и имеющие разные площади живых сечений.

Чтобы выразить это в аналитической форме, достаточно учесть, что вектор скорости движущейся жидкой частицы есть сложная функция времени t, зависящая от t не только явно, но и через координаты x_1, x_2, x_3. Полное ускорение частицы выразится при этом следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}. \tag{1.9}$$

Так как $\frac{dx_1}{dt}=v_1$ и т. д., то равенство (1.9) переписывается

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+v_1\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_3}. \tag{1.10}$$

Проектируя его на оси координат, получаем

$$\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_j v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j},\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3. \tag{1.11}$$

Величина, стоящая в левой части (1.10), называется *субстанциональным*, или *индивидуальным*, ускорением. Производная

Ленинградский Гидрометеорологический ин-т БИБЛИОТЕКА

$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ выражает *локальное* ускорение, а сумма трех последних членов правой части (1.10) — *конвективное* ускорение жидкой частицы. При установившемся движении локальное ускорение равно нулю и частица может испытывать ускорение лишь вследствие пространственной неоднородности поля скоростей.

2. Уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости

2.1. Физические основы гидродинамики. Уравнение неразрывности

В основе зависимостей гидродинамики лежат три физических закона: закон сохранения вещества, закон изменения импульса и закон сохранения энергии. В задачах движения русловых потоков термодинамическая сторона процессов обычно несущественна и для решения большинства этих задач достаточно двух первых законов. Мы будем, впрочем, пользоваться уравнением баланса механической энергии жидкости, в котором тепло, образующееся за счет вязкостного трения, фигурирует в виде потери механической энергии. Вытекая из уравнения изменения импульса и не составляя поэтому самостоятельного закона, это уравнение позволяет, тем не менее, получить ряд полезных результатов.

Закон сохранения вещества выражается в гидродинамике уравнением неразрывности. В случае несжимаемой жидкости вывод уравнения неразрывности очень прост. Пусть S — замкнутая поверхность, ограничивающая некоторый конечный объем жидкости V. В силу несжимаемости и однородности жидкости результирующий перенос массы через поверхность S всегда равняется нулю

$$\int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS = 0,$$

где ρ — плотность жидкости; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S. Согласно теореме Гаусса—Остроградского,

$$\int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS = \int_V \rho \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV.$$

Подставив это равенство в предшествующее и приняв во внимание произвольность объема V, находим

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \qquad (2.1)$$

Формула (2.1) и представляет собой уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости.

Если рассмотреть деформацию элементарного жидкого параллелепипеда с ребрами, параллельными главным осям тензора скоростей деформации, нетрудно обнаружить, что величина div **v** имеет общий физический смысл скорости относительного объемного расширения жидкости. Для несжимаемой жидкости эта скорость равна нулю, для сжимаемой жидкости она определяет взятую с обратным знаком скорость относительного изменения плотности жидкости.

Задача о движении жидкости существенно упрощается, когда движение допустимо считать плоским, т. е. не изменяющимся вдоль одной из координатных осей. Обозначив плоскость движения (x, y), имеем при этом уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{2.2}$$

Взятое вместе с уравнением двумерных линий тока, уравнение (2.2) показывает, что в плоскости движения существует функция тока ψ, определяемая соотношениями:

$$v_x=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y=-\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2.3}$$

На каждой линии тока функция ψ сохраняет постоянное значение. Разность значений функции ψ в двух точках плоской области движения равна расходу жидкости, проходящему через произвольную кривую, проведенную между этими точками.

2.2. Силы, действующие в сплошной среде. Уравнения движения в напряжениях

В сплошной среде действуют непрерывно распределенные *объемные* и *поверхностные силы*. К объемным силам, действующим в водной оболочке земного шара, относятся: сила притяжения Земли, силы притяжения Луны и Солнца и силы инерции, из которых для движения вод в океане наибольшее значение имеет кориолисова, а для движения речных вод — центробежная сила инерции. Так как в дальнейшем нам часто придется говорить о силах инерции, напомним сразу же, что отнесение сил инерции к «реальным» или «фиктивным» определяется выбором системы отсчета. В любой инерциальной системе, относительно которой жидкость движется, силы инерции фиктивны — они появляются в расчетах как следствие введенного Даламбером формального приема сведения задач динамики к задачам статики. В неинерциальной системе, а значит и в системе отсчета движущейся (ускоренно) вместе с жидкостью, силы

инерции реальны. Они создают ускорения и отличаются от действующих на жидкость физических сил только тем, что они не подчиняются закону равенства действия противодействию. Сделав это замечание, мы дальше не будем называть силы инерции реальными или фиктивными, так как их характер в каждом конкретном вопросе ясен из контекста.

Поверхностные силы, действующие на сплошное тело, могут быть внешними или внутренними. В механике сплошной среды главная роль принадлежит внутренним поверхностным силам, в которых проявляется взаимодействие отдельных частей тела.

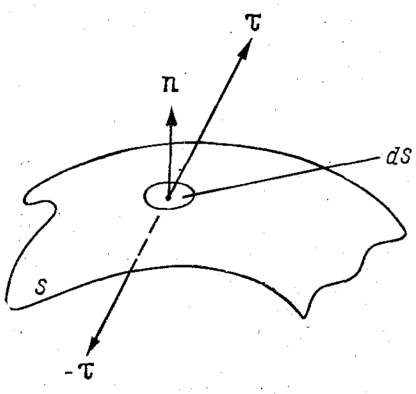


Рис. 6. Вектор напряжения на элементарной площадке.

В уравнения движения входят *интенсивности* объемных и поверхностных сил. Интенсивность объемной силы в точке пространства, занятого сплошной средой, равна пределу

$$\gamma = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V}, \qquad (2.4)$$

где ΔV — элементарный объем, стягиваемый в эту точку; $\Delta \mathbf{F}$ — действующая на него сила. Интенсивность $\boldsymbol{\gamma}$ образует векторное поле.

Интенсивность поверхностных сил называют *напряжением*. На проведенной в сплошной среде и ориентированной путем выбора положительного направления нормали поверхности S напряжения выражаются пределом

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S}, \qquad (2.5)$$

где $\Delta \mathbf{P}$ — поверхностная сила, распределенная на элементарной площадке ΔS. В точках обратной стороны поверхности приложены напряжения $-\boldsymbol{\tau}$, равные по модулю, но противоположные по направлению напряжениям $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 6). Так как через каждую точку пространства проходит бесконечное множество поверхностей, то в каждой точке области, занятой сплошной средой, может быть реализовано бесконечное множество векторов напряжения. Способ определения всего этого множества можно найти, введя систему декартовых координат x_i и рассмотрев равновесие сил, приложенных к элементарному тетраэдру с вершиной в интересующей нас точке и с ребрами, параллельными осям координат (рис. 7). Независимо от состояния движения среды, условие равновесия имеет вид линейной связи между

вектором τ напряжения на косой грани тетраэдра и векторами τ_i на гранях, перпендикулярных осям x_i,

$$\tau = \sum_i \alpha_i \tau_i, \tag{2.6}$$

где коэффициенты равны направляющим косинусам нормали к косой грани: $\alpha_i = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i)$. Из равенства (2.6) следует, что располагая в данной точке тройкой векторов τ_i, можно найти вектор напряжения на площадке, ориентированной любым образом.

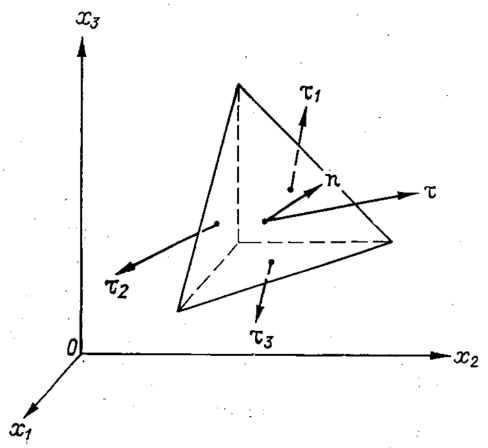


Рис. 7. Векторы напряжений на гранях элементарного тетраэдра.

При повороте системы координат векторы напряжений τ_i преобразуются по закону, аналогичному закону преобразования скалярных компонент фиксированного вектора

$$\tau_i' = \sum_j \alpha_{ij} \tau_j, \tag{2.7}$$

где α_{ij} — направляющие косинусы новых осей относительно старых. Отсюда следует, что совокупность трех векторов τ_1, τ_2, τ_3 представляет тензор второго ранга. Этот тензор называется *тензором напряжений*. Мы будем обозначать его T. Проекции трех векторов τ_i на оси координат составляют девять скалярных компонент тензора T, записываемых в виде матрицы

$$\| \tau_{ij} \| = \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{Vmatrix}.$$

Здесь первый индекс указывает направление нормали к элементарной площадке, второй — направление компоненты вектора

напряжения на этой площадке. При $i=j$ имеем три нормальных напряжения, при $i\neq j$ — шесть касательных напряжений. Вырезав в сплошной среде элементарный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям, и применив к нему уравнения моментов, можно доказать теорему *взаимности касательных напряжений*

$$\tau_{12}=\tau_{21},\quad \tau_{13}=\tau_{31},\quad \tau_{23}=\tau_{32}. \tag{2.8}$$

Таким образом, тензор напряжений симметричный, из щести его недиагональных компонент независимы три. В каждой точке пространства, занятого сплошной средой, можно указать по крайней мере одну систему трех взаимно перпендикулярных осей — главных осей тензора T, таких, что на элементарных площадках, нормалями к которым служат эти оси, касательные напряжения равны нулю. Действующие на этих площадках нормальные напряжения называются *главными напряжениями.*

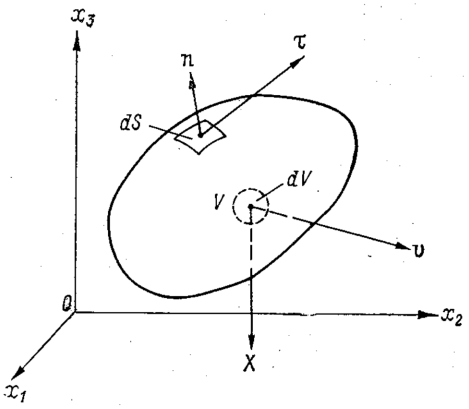


Рис. 8. К выводу уравнения изменения импульса материальной точки сплошной среды.

Из симметричности тензора напряжений следует, в частности, что в плоскостях поперечных сечений открытого равномерного потока действуют касательные напряжения, распределенные по глубине потока точно так же, как распределены по глубине касательные напряжения, действующие в плоскостях, параллельных дну. Напряжения в плоскостях поперечных сечений не выполняют, однако, работы и поэтому ими обычно не интересуются.

Зная действующие в сплошной среде силы, легко написать уравнение изменения импульса для массы среды, заключенной в конечном объеме V (рис. 8). Пусть ρ — плотность среды, $\mathbf{v}$ — векторное поле скоростей ее частиц, $\mathbf{X}$ — поле интенсивности объемных сил и $\boldsymbol{\tau}$ — векторы напряжений на поверхности S выделенного объема. Согласно второму закону Ньютона, имеем

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\mathbf{v}\,dV=\int_V \mathbf{X}\,dV+\int_S \boldsymbol{\tau}\,dS. \tag{2.9}$$

Используя тензорный аналог теоремы Гаусса—Остроградского, можем заменить поверхностный интеграл в правой части

(2.9) объемным, после чего, учтя неизменность массы в объеме V и произвольный выбор этого объема, получим

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{X} - \operatorname{div} T = 0. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) есть уравнение изменения импульса для частицы сплошной среды. Вектор $\operatorname{div} T$ дивергенции тензора напряжений представляет равнодействующую приложенных к частице поверхностных сил. Воспользовавшись выражением дивергенции тензора через его векторные компоненты, можем представить уравнение изменения импульса (2.10) в чисто векторной форме

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{X} - \sum_{1}^{3} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i} = 0. \tag{2.11}$$

Наконец, спроектировав члены этого уравнения на i-тую ось координат, учтя симметричность тензора T и раскрыв обозначение субстанциональной производной, будем иметь закон изменения импульса в координатной записи

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \mathrm{X}_i + \sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \tag{2.12}$$

Уравнения (2.12) называют *уравнениями движения в напряжениях* или уравнениями Коши. При применении принципа Даламбера левые части уравнений (2.12) получают смысл отнесенных к единице объема проекций силы инерции.

Уравнения Коши (2.12) вместе с уравнением неразрывности (2.1) образуют незамкнутую систему: четыре уравнения содержат девять неизвестных — три компоненты вектора скорости и шесть независимых компонент тензора напряжений. Для замыкания системы служат добавочные реологические уравнения, которыми устанавливаются соотношения между напряжениями, с одной стороны, и деформациями или скоростями деформаций, с другой.

2.3. Уравнения Навье—Стокса

Если положить касательные напряжения в движущейся жидкости равными нулю, тензор напряжений станет сферическим, таким же как в покоящейся жидкости

$$\| \tau_{ij} \| = \begin{Vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Vmatrix}. \tag{2.13}$$

Знак минус перед диагональными компонентами указывает, что нормальные напряжения направлены внутрь выделенного

элементарного объема, т. е. представляют давление. Подставив выражение τ_{ij} по (2.13) в уравнения Коши (2.12), получим систему уравнений движения идеальной жидкости Леонарда Эйлера.

При движении вязкой (реальной) жидкости в ней обнаруживаются нормальные и касательные напряжения, вызванные действием молекулярных сил. Ньютон дал этому общему свойству реальных жидкостей негативное определение, назвав его «недостатком скользкости». Действующие в данной точке напряжения молекулярной вязкости, как и любые другие напряжения сплошной среды, образуют симметричный тензор второго ранга. Мы обозначим его через $T^{(v)}$, а компоненты через $\tau_{ij}^{(v)}$.

Согласно обобщенной гипотезе Ньютона, тензор вязких напряжений в несжимаемой жидкости является линейной однородной функцией тензора скоростей деформации

$$T^{(v)}=2\mu D \tag{2.14а}$$

или

$$\tau_{ij}^{(v)}=\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \tag{2.14б}$$

где μ — динамический (абсолютный) коэффициент вязкости.

Как известно, вязкость капельных жидкостей связана обратной зависимостью с температурой. При колебаниях температуры воды в реках от 0 до 25°С динамический коэффициент вязкости меняется соответственно от 0,179 до 0,089 Н · с/м², т. е. почти в два раза. Зависимость вязкости воды от давления в задачах, которыми мы будем заниматься, несущественна. В расчетах обычно пользуются кинематическим коэффициентом вязкости $\nu=\frac{\mu}{\rho}$, имеющим размерность L^2T^{-1}.

Формула (2.14б) показывает, что нормальные напряжения молекулярной вязкости могут иметь оба знака: если движение жидкости вдоль данной оси ускоряется $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}>0\right)$, напряжение является растягивающим, если движение замедляется $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}<0\right)$, напряжение становится сжимающим.

Полная величина напряжений в реальной жидкости представляет сумму вязких напряжений и гидродинамического давления. Используя обозначение тензорной единицы, напишем эту сумму в виде

$$\tau_{ij}=\delta_{ij}(-p)+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.15}$$

Как видно из уравнений Коши, проекции главного вектора поверхностных сил, приложенных к частице жидкости, определяются суммами

$$\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

Подставляя в эти суммы величины τ_{ij} по формуле (2.15), получаем

$$\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j}.$$

Вследствие несжимаемости жидкости последний член правой части равен нулю. Используя для записи второго члена обозначение оператора Лапласа, будем иметь

$$\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i. \tag{2.16}$$

Подставляя это выражение в уравнения Коши (2.12), получаем *уравнения Навье—Стокса*

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i. \tag{2.17}$$

В векторной форме уравнения Навье—Стокса записываются

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{X} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v}. \tag{2.18}$$

Уравнения Навье—Стокса представляют наиболее общий вид уравнений движения вязкой жидкости. Справедливость этих уравнений (т. е. справедливость лежащей в их основе обобщенной гипотезы Ньютона) подтверждена широким рядом экспериментальных данных, относящихся к разнообразным случаям движения.

Три уравнения (2.17) и уравнение неразрывности (2.1) содержат четыре неизвестных: три компоненты скорости и давление. Таким образом, система (2.17), (2.1) замкнутая. Вследствие нелинейности уравнений (2.17) их интегрирование сопряжено с большими трудностями и точные решения этой системы получены только для немногих простейших случаев движения.

Для получения частных решений системы уравнений движения вязкой жидкости необходимо задавать начальные и граничные условия. Граничное условие на твердой границе для вязкой жидкости сводится к условию прилипания

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_s = 0, \tag{2.19}$$

где $\mathbf{v}_s$ — вектор скорости твердой границы.

Таким образом, частицы воды, непосредственно прилегающие к стенке набережной, остаются в покое, частицы воды, непосредственно прилегающие к обшивке корпуса судна, движутся вместе с судном. Проведя на неподвижной твердой поверхности замкнутый контур L и записав для площадки, ограниченной этим контуром, теорему Стокса, будем иметь в соответствии с условием прилипания (2.19)

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS = \oint_L (\mathbf{v} \cdot \sigma)\, dL = 0,$$

откуда на твердой границе

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{2.20}$$

Это значит, что вектор вихря вязкой жидкости может быть направлен на твердой границе только по касательной к этой границе. Указанное следствие условия прилипания важно для понимания структуры дискретных вихрей в вязкой жидкости.

Граничные условия на свободной поверхности могут быть представлены в виде

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{2.21}$$

$$p(h) - p_a = 0. \tag{2.22}$$

Согласно условию (2.21), проекция скорости жидкости на нормаль к свободной поверхности совпадает с такой же проекцией скорости $\mathbf{v}_w$ движения самой свободной поверхности. Согласно условию (2.22), давление $p(h)$ на свободной поверхности равно атмосферному давлению p_a. При рассмотрении больших водных пространств необходимо считаться с изменением атмосферного давления по этому пространству (например, в задаче о сейшах). В обычных же случаях считают $p(h) = p_a = \text{const}$.

2.4. Безразмерная запись уравнений движения. Критерии подобия

Установим некоторые масштабы (характерные величины) длин l_0, времени t_0, скоростей v_0 и давлений p_0. Используя эти масштабы, а также физические параметры жидкости ρ и μ, выразим элементы движения и пространственно-временные координаты, фигурирующие в уравнениях (2.17) в безразмерном виде. Записывая в безразмерном виде интенсивность объемных сил, будем считать, что объемной силой, влияющей на движение жидкости, является сила тяжести, характеризуемая вектором гравитационного ускорения $\mathbf{g}$. В результате члены уравнений (2.17) перепишутся в виде произведений безразмерных

сил на соответствующие комбинации масштабов. Отмечая безразмерные величины тильдой, будем иметь

$$\rho \frac{v_0}{t_0} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} + \rho \frac{v_0^2}{l_0} \sum_j \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} = \rho g \tilde{X}_i - \frac{p_0}{l_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \mu \frac{v_0}{l_0^2} \tilde{\Delta} \tilde{v}_i.$$

Представленные здесь комбинации масштабов длины, времени и т. д. являются масштабами отнесенных к единице объема сил инерции, тяжести, давления и вязкости.

Чтобы получить уравнения движения в полностью безразмерном виде, надо принять одну из сил за масштаб всех остальных. Удобно воспользоваться с этой целью выражением, которое стоит множителем при безразмерном конвективном ускорении. Деля все члены уравнений на $\rho v_0^2 / l_0$ и пользуясь общеизвестными обозначениями для отношений сил, получаем

$$\mathrm{Sh} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} + \sum_j \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{1}{\mathrm{Fr}} \tilde{X}_i - \mathrm{Eu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \tilde{\Delta} \tilde{v}_i. \quad (2.23)$$

Безразмерные величины Sh, Fr, Eu и Re представляют собой характеристические числа или критерии подобия движений вязкой несжимаемой жидкости. Роль этих критериев в установлении условий подобия неодинакова. Так, легко показать, что критерий Эйлера

$$\mathrm{Eu} = \frac{p_0}{\rho v_0^2}$$

не является определяющим. Действительно, давление входит в уравнения движения только под знаком производной и значит выбор характерного давления p_0 произволен. Положив $p_0 = \mathrm{const}\, \rho v_0^2$, получим Eu = const. Число Струхала

$$\mathrm{Sh} = \frac{l_0}{v_0 t_0}$$

служит критерием кинематического подобия неустановившихся течений. Если характерное время t_0 представляет, так же как l_0 и v_0, задаваемую величину, число Струхала, наравне с числами Fr и Re, есть определяющий критерий. Если t_0 — искомая величина (например, наблюдаемый в экспериментах период отрыва вихрей от обтекаемой водой сваи), число Струхала есть функция определяющих критериев

$$\mathrm{Sh} = \mathrm{fct}\,(\mathrm{Fr},\ \mathrm{Re}).$$

Число Фруда

$$\mathrm{Fr} = \frac{v_0^2}{g l_0}$$

выражает отношение сил инерции к силе тяжести и служит критерием динамического подобия течений со свободной поверхностью. Для русловых потоков в качестве масштабов скорости

и длины берут обычно среднюю скорость и среднюю глубину потока

$$U=\frac{Q}{\omega}, \quad H=\frac{\omega}{B},$$

где Q — расход воды; ω — площадь поперечного сечения потока; B — ширина сечения по зеркалу воды. Записанное в этих масштабах число Фруда

$$\mathrm{Fr}=\frac{U^2}{gH}$$

представляет собой квадрат отношения средней скорости течения к скорости распространения малых возмущений свободной поверхности жидкости $c=\sqrt{gH}$. Скорость c кратко называют *волновой*. Иногда пользуются отношением средней скорости к волновой в первой степени

$$\frac{U}{c}=\frac{U}{\sqrt{gH}},$$

называя его также числом Фруда. Потоки с числами $\mathrm{Fr}<1$ принадлежат к категории *спокойных*, потоки с числами $\mathrm{Fr}>1$ — к категории *бурных*. За исключением отдельных участков горных рек, все естественные потоки относятся к категории спокойных. Для больших равнинных рек характерны значения числа Фруда порядка 10^{-2}.

В динамике русловых потоков более существенна, однако, предложенная Б. А. Бахметевым [9] энергетическая трактовка числа Фруда. Она основана на том, что взяв за масштаб длин максимальную глубину (наполнение) сечения, соответствующее число Фруда можно представить в виде удвоенного отношения кинетической слагаемой удельной энергии сечения к ее потенциальной слагаемой

$$\mathrm{Fr}_к=\frac{U^2}{gh_{макс}}=2\,\frac{U^2}{2g}\,\frac{1}{h_{макс}}.$$

Число $\mathrm{Fr}_к$ Бахметев называет «коэффициентом кинетичности». В потоках с числами $\mathrm{Fr}_к<1$ удельная энергия сечения с повышением уровня увеличивается, в потоках с числами $\mathrm{Fr}_к>1$ — уменьшается. Поскольку среднюю глубину живого сечения можно рассматривать как удельную потенциальную энергию потока, определенную относительно плоскости среднего дна, то трактовка числа Фруда как меры отношения кинетической энергии потока к его потенциальной энергии распространяется и на число Fr. В руслах широкого прямоугольного сечения числа Fr и $\mathrm{Fr}_к$ совпадают.

Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}=\rho\frac{v_0 l_0}{\mu}=\frac{v_0 l_0}{\nu}$$

выражает отношение сил инерции к силам вязкости. Когда это отношение невелико, т. е. при числах Рейнольдса, меньших нижнего критического значения этого числа: $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_{cr1}$, движение вязкой жидкости устойчиво (ламинарное). При $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{cr1}$ устойчивость движения может нарушиться и движение станет турбулентным. Для открытого потока в лотке прямоугольного сечения при отношениях ширины к глубине $\frac{B}{h}>7$, взяв за масштаб длин гидравлический радиус сечения $R=\frac{\omega}{\chi}=\frac{Bh}{B+2h}$, А. П. Зегжда [56] получил нижнее критическое значение числа Рейнольдса, равное 900—1000. При других формах поперечного сечения это значение может быть несколько другим. Напомним, что для напорного потока в круглой трубе нижнее критическое значение числа Рейнольдса при $l_0=R=\frac{r_0}{2}$ составляет 500—600.

Естественные потоки характеризуются очень большими числами Рейнольдса — порядка 10^5—10^7. Так как, к тому же, они имеют шероховатые русла, то они, как правило, автомодельны по числу Рейнольдса — потери энергии на трение не зависят у них от вязкости воды. Исключения из этого правила могут встретиться лишь среди малых водотоков с медленным течением.

2.5. Диссипация механической энергии

Умножим скалярно все члены уравнения движения сплошной среды (2.11) на произведение $\mathbf{v}dV$, где dV — дифференциал движущегося объема среды. Принимая во внимание, что

$$\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt},$$

будем иметь

$$\frac{1}{2}\rho\frac{dv^2}{dt}dV=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{X})\,dV+\mathbf{v}\cdot\sum_i\frac{\partial\tau_i}{\partial x_i}dV$$

и после интегрирования по некоторому движущемуся конечному объему V

$$\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}\rho v^2\,dV=\int_V(\mathbf{v}\cdot\mathbf{X})\,dV+\int_V\mathbf{v}\cdot\sum_i\frac{\partial\tau_i}{\partial x_i}dV. \quad (2.24)$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение сохранения энергии (уравнение живых сил) для массы среды, заключенной в объеме V. Левая часть уравнения (2.24) есть скорость изменения кинетической энергии этой массы. Первый член правой части представляет мощность объемных сил, второй член — мощность внешних и внутренних поверхностных сил, приложенных к выделенному объему среды.

Наше понимание работы поверхностных сил станет более полным, если мы составим отдельные выражения для мощностей внешних и внутренних поверхностных сил. Мощность поверхностных сил, приложенных к поверхности S, ограничивающей объем V, равна $\int\limits_S (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})\, dS$.

Выражая вектор напряжения на площадке dS через векторные компоненты тензора напряжений по формуле (2.6) и применяя теорему Гаусса—Остроградского, получаем

$$\int\limits_S (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})\, dS = \int\limits_S \mathbf{v} \cdot \sum_i \alpha_i \boldsymbol{\tau}_i\, dS = \int\limits_V \sum_i \frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)}{\partial x_i}\, dV.$$

Мощность поверхностных сил, действующих внутри объема V, определится как разность полной мощности поверхностных сил и мощности внешних поверхностных сил

$$\int\limits_V \mathbf{v} \cdot \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial x_i}\, dV - \int\limits_V \sum_i \frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)}{\partial x_i}\, dV = -\int\limits_V \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}\, dV.$$

Обозначая кинетическую энергию массы среды, заключенной в объеме V, через $E_к$ и принимая следующие обозначения для удельных мощностей:

объемных сил

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{X}) \equiv N_V,$$

внешних поверхностных сил

$$\sum_i \frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)}{\partial x_i} \equiv N_S$$

и внутренних поверхностных сил

$$\sum_i \boldsymbol{\tau}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \equiv \Phi,$$

перепишем уравнение сохранения энергии (2.24) в виде

$$\frac{dE_к}{dt} = \int\limits_V N_V\, dV + \int\limits_V N_S\, dV - \int\limits_V \Phi\, dV. \qquad (2.25)$$

Теперь положим, что наша среда есть вязкая несжимаемая жидкость. Представив удельную мощность Ф внутренних поверхностных сил в компонентах векторов $\boldsymbol{\tau}_i$ и $\mathbf{v}$

$$\Phi=\sum_i \boldsymbol{\tau}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}=\sum_i \sum_j \tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i},$$

заменим величины τ_{ij} их выражениями по формуле (2.15). После простых преобразований, учтя несжимаемость жидкости, получим

$$\Phi=\mu\left[2\sum_i\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2\right]; \qquad (2.26а)$$

или кратко

$$\Phi=2\mu\sum_i\sum_j D_{ij}^2. \qquad (2.26б)$$

Это значит, что удельная мощность внутренних поверхностных сил Ф есть линейная однородная функция квадратичного инварианта тензора скоростей деформации. Величина давления, входящая в формулу (2.15), выпала из полученного результата вследствие соблюдения условия несжимаемости. Физически это представляется очевидным: работа сил давления внутри объема несжимаемой жидкости должна равняться нулю.

Второй, более глубокий вывод можно сделать, заметив, что в неоднородном поле скоростей величина Ф существенно положительна: $\Phi > 0$. Так как интеграл от Ф по объему V входит в правую часть уравнения энергии (2.25) со знаком минус, то этот интеграл определяет скорость потери механической энергии или, как обычно говорят, *скорость диссипации механической энергии*. Работа внутренних сил вязкости, с механической точки зрения, полностью теряется, она вся переходит в энергию молекулярного движения — в тепло. Поэтому величина Ф носит название *диссипативной функции*.

Если объемной силой является сила тяжести, можно ввести потенциал G векторного поля $\mathbf{X}$, т. е. положить

$$X_i=-\frac{\partial G}{\partial x_i}. \qquad (2.27)$$

При этом

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{X}=\sum_i v_i\frac{\partial G}{\partial x_i}=\sum_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial G}{\partial x_i}=\frac{dG}{dt}.$$

Так как потенциал G, взятый с обратным знаком, представляет потенциальную энергию единицы объема жидкости, будем иметь

$$\int_V N_V\,dV = \int_V (\mathbf{v}\cdot\mathbf{X})\,dV = \int_V \frac{dG}{dt}\,dV = -\frac{dE_p}{dt}, \qquad (2.28)$$

где E_p — потенциальная энергия жидкости, заключенной в объеме V. Подставляя выражение (2.28) в (2.25), получаем

$$\frac{d(E_к + E_p)}{dt} = \int_V N_S\,dV - \int_V \Phi\,dV. \qquad (2.29)$$

Таким образом, механическая энергия несжимаемой жидкости, заключенной в конечном объеме V, меняется в результате работы сил давления и вязкости, приложенных к поверхности этого объема, и в результате происходящего внутри объема V перехода механической энергии в тепло.

Глава II

Турбулентность

3. Уравнения турбулентного движения

3.1. Свойства турбулентного движения

Турбулентный режим движения воды оказывает решающее влияние на рассеяние энергии и транспорт наносов в реках и каналах. Поэтому теория турбулентности представляет основу динамики русловых потоков.

Развитое турбулентное движение, какое мы наблюдаем в реках и каналах, есть движение вязкой жидкости со следующими свойствами:

1) скорости всех жидких частиц имеют трехмерную случайную составляющую;

2) если граничные условия движения не изменяются, все статистические характеристики его стационарны;

3) каждая жидкая частица одновременно участвует в движениях разных масштабов;

4) масштабы движений (линейные, временные и т. д.) образуют плотные последовательности.

Это определение требует некоторых пояснений. Хаотический характер перемещения жидких частиц представляет наиболее легко обнаруживаемую особенность турбулентных течений. Беспорядочное движение частиц приводит к перемешиванию жидкости и создает явление пульсации скорости и давления в фиксированных точках пространства. Если граничные условия течения (например, расход воды во входном сечении открытого потока или состояние поверхности его дна) не меняются со временем, то колебания скорости и давления в каждой точке совершаются около устойчивых средних значений. Столь же устойчивы и остальные статистические характеристики колебаний, такие, например, как моменты корреляции между пульсациями в двух фиксированных точках пространства или в данной точке через фиксированный интервал времени. Если граничные условия меняются со временем, то эволюционируют и все статистические характеристики течения.

Первые два из указанных свойств турбулентности роднят картину турбулентного движения с картиной «молекулярного хаоса», изучаемой в кинетической теории газов. Свойство многомасштабности, о котором говорится в двух последних пунктах нашего определения, имеет специфический характер, именно это свойство делает турбулентное движение жидкостей отличным от всех остальных видов механического движения. Линейные масштабы турбулентных движений меняются в широком диапазоне — от масштабов характерного поперечного размера самого потока до весьма малых масштабов, характерных для явлений перехода механической энергии в тепло. В широком диапазоне меняются временные масштабы движений (т. е. периоды колебаний), а значит и масштабы скоростей. Когда мы называем последовательность масштабов *плотной*, это значит, что при наличии движений с масштабами l_1 и $l_2 > l_1$ в данном, полностью развитом турбулентном течении возможны также движения с любым масштабом из интервала $l_1 < l < l_2$.

Турбулентные течения в реках и каналах, а также в трубах и в пограничном слое обтекаемых жидкостью тел *неоднородны и анизотропны*, их характеристики меняются от точки к точке и в каждой точке зависят от направления. Однако, если обратиться к мелкомасштабным турбулентным движениям, то, как показал А. Н. Колмогоров [74], при очень больших числах Рейнольдса они оказываются однородными, изотропными и статистически стационарными независимо от того, каков характер крупномасштабных движений. Мелкомасштабная турбулентность этого вида получила название *локально-изотропной*. Теория Колмогорова позволила получить ряд важных результатов относительно свойств мелкомасштабной турбулентности и оказалась в хорошем согласии с опытными данными.

Случайный характер турбулентных пульсаций предопределяет статистический подход к их изучению. Поэтому в механике турбулентных потоков методы динамики вязкой жидкости сочетаются с методами теории вероятностей, или точнее, с методами теории случайных функций. Согласно представлениям теории случайных функций, непрерывно идущая смена мгновенных полей скорости и давления турбулентно движущейся жидкости есть случайный процесс, для статистического описания которого необходимо исследование совокупности его реализаций, т. е. полей скорости и давления ряда течений с одними и теми же начальными и граничными условиями. Практическая неосуществимость такого способа исследования очевидна. Поэтому, имея дело со стационарными случайными процессами, исследование совокупности реализаций заменяют исследованием одной достаточно длинной реализации. Если результаты статистического исследования одной достаточно длинной реализации совпадают с результатами статистического исследования большой совокупности реализаций, говорят, что данный случайный процесс об-

ладает *эргодическим свойством.* Эргодичность некоторых случайных процессов может быть доказана математически. Существование эргодического свойства у турбулентных течений представляет собой общепринятую гипотезу. Эргодическая гипотеза позволяет использовать для исследования турбулентных течений временно́е, пространственное и смешанное (пространственно-временно́е) осреднение.

Операция временно́го осреднения случайной функции координат пространства и времени выражается формулой

$$\overline{f}(x_1, x_2, x_3, t)=\frac{1}{T_0}\int\limits_{t-\frac{1}{2}T_0}^{t+\frac{1}{2}T_0} f(x_1, x_2, x_3, t+\tau)\,d\tau. \quad (3.1)$$

Величина T_0 называется периодом осреднения. Период T_0 должен быть велик по сравнению с наибольшим периодом случайных колебаний функции f и мал по сравнению с наименьшим периодом возможных неслучайных изменений этой функции.

При выполнении операций осреднения (статистического по совокупности реализаций и пространственно-временно́го) руководствуются следующими правилами, сформулированными О. Рейнольдсом. В приводимых ниже формулах f и g — случайные функции, a — постоянная, черта сверху означает символ осреднения:

$$\overline{f+g}=\overline{f}+\overline{g}, \quad \text{(I)}$$

$$\overline{af}=a\overline{f}, \quad \text{(II)}$$

$$\overline{\overline{f}g}=\overline{f}\,\overline{g}, \quad \text{(III)}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}=\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{f}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial t}}=\frac{\partial}{\partial t}\overline{f}. \quad \text{(IV)}$$

Положив в правиле (III) $g=1$, получим $\overline{\overline{f}}=\overline{f}$, а отсюда, обозначая $f-\overline{f}\equiv f'$ и учитывая правило (1), находим $\overline{f'}=\overline{f-\overline{f}}=0$.

3.2. Уравнения Рейнольдса

Исходная идея Рейнольдса в его основополагающей работе [222] состояла в разложении мгновенной скорости жидкости и мгновенного давления на осредненную и пульсационную слагаемые:

$$\left.\begin{aligned} v_i&=\overline{v}_i+v_i', \\ p&=\overline{p}+p'. \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

Перенеся представленные в таком виде скорости и давление в уравнения Навье—Стокса и уравнение неразрывности и произведя над всеми членами этих уравнений операцию осреднения, получаем уравнения осредненного турбулентного движения, известные под названием уравнений Рейнольдса.

Покажем, как выполняется осреднение нелинейных членов уравнений Навье—Стокса. Используя условие несжимаемости, предварительно сделаем следующее преобразование:

$$\sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} - v_i \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j}.$$

Подставляя в это выражение компоненты скорости по (3.2) и осредняя, находим

$$\sum_j \frac{\partial \overline{v_i v_j}}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial \overline{[(\bar{v}_i + v_i')(\bar{v}_j + v_j')]}}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_j \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_i \sum_j \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_j}.$$

Осреднение остальных членов уравнений Навье—Стокса и линейного уравнения неразрывности выполняется без труда. Из осредненного уравнения неразрывности следует, что в несжимаемой жидкости сумма $\sum_j \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0$.

В результате система уравнений Рейнольдса получает вид:

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \sum_j \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right) = X_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \Delta \bar{v}_i - \rho \sum_j \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_j}, \quad (3.3)$$

$$\sum_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.4)$$

Вследствие нелинейности уравнений Навье—Стокса в осредненных уравнениях движения появились дополнительные члены, содержащие осредненные произведения пульсационных слагаемых скорости. Физически величины вида $-\rho \overline{v_i' v_j'}$ представляют добавочные напряжения, обусловленные переносом импульса пульсациями. Чтобы убедиться, что это действительно так, возьмем в области турбулентного движения элементарную площадку, нормаль к которой совпадает по направлению с одной из координатных осей, например x_3 (рис. 9). Пульсационное движение переносит через площадку dS_3 массы жидкости, обладающие определенными мгновенными скоростями и, следовательно, создает поток импульса через эту площадку. В среднем за единицу времени компонента импульса по оси x_1 пере-

носится в количестве $\rho\overline{v'_1 v'_3}dS_3$, а компоненты импульса по осям x_2 и x_3 в количествах соответственно $\rho\overline{v'_2 v'_3}dS_3$ и $\rho\overline{v'^2_3}dS_3$. Деля на dS_3, получаем плотности потока импульса, которые будучи взяты с обратным знаком, составляют компоненты силы реакции на единице площади, т. е. напряжения $-\rho\overline{v_1' v_3'}$, $-\rho\overline{v_2' v_3'}$ и $-\rho\overline{v_3'^2}$.

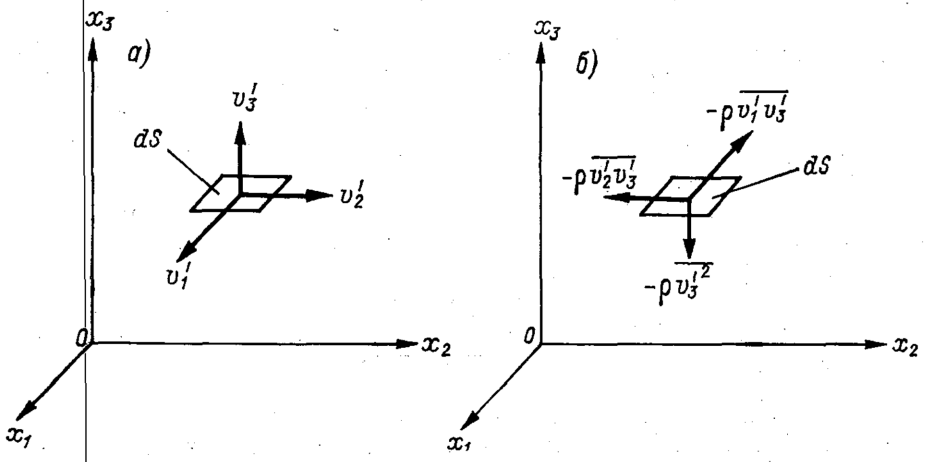


Рис. 9. Турбулентные напряжения как взятые с обратным знаком плотности потока импульса.

а — компоненты пульсационной скорости, *б* — компоненты вектора турбулентного напряжения на элементарной площадке.

Напряжения, вызванные переносом импульса пульсациями, называются *напряжениями турбулентной вязкости*, или *напряжениями Рейнольдса*. Эти напряжения образуют симметричный тензор второго ранга

$$\left\| -\rho\overline{v_i' v_j'} \right\| = \begin{Vmatrix} -\rho\overline{v_1'^2} & -\rho\overline{v_1' v_2'} & -\rho\overline{v_1' v_3'} \\ -\rho\overline{v_2' v_1'} & -\rho\overline{v_2'^2} & -\rho\overline{v_2' v_3'} \\ -\rho\overline{v_3' v_1'} & -\rho\overline{v_3' v_2'} & -\rho\overline{v_3'^2} \end{Vmatrix}. \qquad (3.5)$$

Диагональные компоненты тензора представляют *турбулентное давление*, недиагональные компоненты — *турбулентные касательные напряжения*. Шесть независимых компонент тензора напряжений Рейнольдса являются в системе уравнений (3.3), (3.4) лишними неизвестными.

Тензор полных напряжений в осредненном турбулентном движении записывается в следующем виде:

$$\tau_{ij} = \delta_{ij}(-\bar{p}) + \mu\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}\right) - \rho\overline{v_i' v_j'}. \qquad (3.6)$$

Если представить компоненты тензора полных напряжений в безразмерном виде, отнеся их к масштабам длины l_0, скорости v_0 и давления $p_0 = \rho v_0^2$ то, пользуясь для безразмерных величин обозначениями размерных, будем иметь

$$\tau_{ij} = \delta_{ij}(-\overline{p}) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i}\right) - \overline{v_i' v_j'}. \qquad (3.7)$$

Из формулы (3.7) видно, что при больших числах Рейнольдса вязкие напряжения в осредненном течении жидкости становятся малыми по сравнению с турбулентными напряжениями.

В потоках, ограниченных твердыми стенками, можно ввести местное число Рейнольдса, построенное по осредненной скорости в точке и расстоянию этой точки от ближайшей твердой поверхности. Так, если имеется плоский открытый поток, движущийся вдоль оси x_1 по плоскому дну $x_3 = 0$, то можно составить местное число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_{x_3} = \frac{\overline{v}_1(x_3)\, x_3}{\nu}.$$

Если дно гладкое (стеклянное, латунное и т. д.), то по мере приближения к нему число Re_{x_3} будет стремиться к нулю и, следовательно, вблизи дна вязкие напряжения будут преобладать над турбулентными — у дна будет существовать *вязкий подслой*. Физически существование вязкого подслоя на гладкой твердой поверхности объясняется граничным условием прилипания, исключающим возможность значительных пульсаций скорости в непосредственной близости к этой поверхности. Толщина вязкого подслоя связана обратной зависимостью с числом Рейнольдса для течения в целом.

В области движения, удаленной от дна, где число Re_{x_3} велико, вязкие напряжения будут малы по сравнению с турбулентными. Эту область принято называть *турбулентным ядром течения*. Между ядром течения и вязким подслоем располагается переходной, или *буферный слой*, в котором вязкость и турбулентность вносят сравнимые вклады в величину суммарных напряжений.

Если поверхность дна *шероховатая*, значения местного числа Рейнольдса ограничены снизу тем значением, которое это число принимает на уровне Δ вершин выступов шероховатости

$$\mathrm{Re}_\Delta = \frac{\overline{v}_1(\Delta)\,\Delta}{\nu}.$$

В руслах с шероховатыми стенками возможны, как известно, три режима турбулентного движения: 1) режим гладкостенного сопротивления, когда толщина вязкого подслоя значительно пре-

восходит высоту выступов шероховатости и последние не оказывают влияния на сопротивление русла; 2) переходной режим, при котором толщина подслоя сравнима с высотой выступов и сопротивление русла определяется суммарным эффектом вязкости жидкости и отрывного обтекания выступов; 3) режим квадратичного сопротивления, при котором высота выступов шероховатости значительно больше толщины вязкого подслоя, отвечающей числу Рейнольдса для данного течения. Русловое сопротивление в этом случае полностью определяется явлением отрывного обтекания выступов. Шероховатое русло при первом режиме движения является *гидравлически гладким*, а при третьем — не только геометрически, но и *гидравлически шероховатым*. При гидравлически шероховатом дне турбулентное ядро течения простирается до плоскости $x_3 = \Delta$, вязкого подслоя не существует.

Границы между тремя режимами движения могут быть определены с помощью соответствующих значений введенного выше числа Re_Δ. Так, например, используя данные экспериментов И. Никурадзе и А. П. Зегжда, можно установить, что переход к режиму квадратичного сопротивления происходит при значениях $\mathrm{Re}_\Delta = 350 \div 400$. Теоретически более обоснованным и на практике более удобным оказывается, однако, применение числа Рейнольдса, в котором скорость $\overline{v}_1(\Delta)$ заменена *динамической скоростью*

$$v_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \tag{3.8}$$

где τ_0 — касательное напряжение на твердой границе потока.

При равномерном течении в трубе или открытом русле величина динамической скорости может быть найдена из уравнения

$$v_*^2 \equiv \frac{\tau_0}{\rho} = gRI, \tag{3.9}$$

где I — гидравлический уклон. В руслах с большим отношением ширины к глубине гидравлический радиус R заменяется средней глубиной сечения $H = \frac{\omega}{B}$.

Число Рейнольдса, составленное по высоте выступов шероховатости и динамической скорости, будем обозначать

$$\mathrm{Re}_{\Delta *} \equiv \frac{v_* \Delta}{\nu}.$$

На основании своих опытов с течением воды в открытых лотках, дно и боковые стенки которых имели искусственно

нанесенную песчаную шероховатость. А. П. Зегжда [56] получил следующие границы режимов течения:

1) $\mathrm{Re}_{\Delta *} \leqslant 6$ — режим гладкостенного сопротивления;
2) $6 < \mathrm{Re}_{\Delta *} \leqslant 45$ — переходный режим;
3) $\mathrm{Re}_{\Delta *} > 45$ — режим квадратичного сопротивления.

В задачах гидродинамики, к которым принадлежат и задачи динамики русловых потоков, применяется т. н. двухслойная модель турбулентного течения, предусматривающая деление потока на две зоны: вязкий подслой и турбулентное ядро. Существование буферного слоя во внимание не принимается. На основании экспериментальных данных Никурадзе [211] толщина вязкого подслоя считается равной $\delta = 12\nu/v_*$ (буферный слой заканчивается на высоте $x_3 \approx 30\nu/v_*$).

В турбулентном ядре течения, независимо от режима сопротивления, т. е. независимо от того, есть вязкий подслой или нет, напряжения молекулярной вязкости считаются пренебрежимо малыми. Уравнения Рейнольдса при этом принимают вид

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \sum_j \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right) = X_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \rho \sum_j \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_j}. \qquad (3.10)$$

Граничное условие (2.19) прилипания вязкой жидкости к твердой стенке, очевидно, действительно и при турбулентном движении жидкости, однако, если русло гидравлически шероховатое, представляет интерес состояние движения не на самой твердой поверхности, а на поверхности $x_3 = \Delta$, проходящей по вершинам выступов шероховатости. Граничные условия здесь можно записать в следующем виде (осредненное движение происходит вдоль оси x_1):

$$\bar{v}_3(\Delta) = 0, \qquad (3.11)$$

$$\bar{v}_1(\Delta) = k_0 v_*, \qquad (3.12)$$

$$\sqrt{\overline{[v_i'(\Delta)]^2}} = k_i v_*, \qquad (3.13)$$

где k_0, k_1, k_2, k_3 — числа, которые, возможно, несколько меняются при изменениях в геометрии шероховатой поверхности стенки. Если высота $\Delta \ll H$, то нормальная к стенке компонента осредненной скорости может приравниваться на этой высоте к нулю во всех случаях движения. Согласно условиям (3.12) и (3.13), продольная компонента осредненной скорости и все пульсационные скорости на высоте Δ пропорциональны динамической скорости. Эта пропорциональность следует из общих соображений о подобии турбулентых течений вблизи твердой поверхности (см. § 4). Множитель k_3 мал по сравнению с множителями k_1 и k_2.

3.3. Уравнения турбулентного движения жидкости в естественных руслах

Если покрывающие речное дно песчаные волны, а также местные неправильности берегов отнести к элементам макрошероховатости русла и выполнить их статистическое сглаживание, мы в большинстве случаев придем к довольно плавному рельефу. Плавность русловых форм нарушается лишь на отдельных коротких участках рек, таких как пороги и перекаты, крутые изгибы, места выхода в берегах неразмываемых пород или стеснения потока искусственными сооружениями. На многих из таких участков наблюдается отрыв потока от дна или берегов.

На основном протяжении рек, где их русла имеют плавные очертания, течение воды удовлетворяет сформулированным Ж. Беланже (1828 г.) условиям *плавной* (иногда говорят: медленной) *изменяемости движения*: кривизна линий тока и кривизна ортогональных к ним поверхностей живых сечений малы. Плавность (распластанность) руслового рельефа, а с ней и плавная изменяемость движения воды в значительной мере обусловлены центральной особенностью геометрии естественных русел — *малостью их вертикальных размеров по сравнению с горизонтальными.* Эта особенность естественных русел делает течения в них сходными с течениями пограничного слоя и позволяет, так же как в теории пограничного слоя, существенно упростить уравнения Рейнольдса [1].

Прежде чем сформулировать эти упрощения, условимся перейти к принятой в динамике русловых потоков системе обозначений осей координат x, y, z и соответственных компонент скорости u, v, w, а также фиксируем расположение осей координат. Считая, что высоты дна плавно колеблются относительно некоторой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, примем эту плоскость за плоскость координат x, y, направив ось y по нормали к вектору силы тяжести. Положительную полуось z направим вверх (рис. 10). Полагая, что наклон плоскости (x, y) к горизонту мал: $i_0 \equiv \sin\alpha \ll 1$, расстояния, отсчитываемые вдоль оси z и расстояния по вертикали различать не будем. Высоты точек свободной поверхности и высоты точек дна относительно плоскости (x, y) будем обозначать соответственно z' и z_0.

Внешней объемной силой в уравнениях движения русловых потоков является сила тяжести $\mathbf{X} = \rho\mathbf{g}$.

При указанном расположении осей координат компоненты ускорения свободного падения записываются так:

$$g_x = gi_0, \quad g_y = 0, \quad g_z = -g\sqrt{1 - i_0^2} \approx -g. \qquad (3.14)$$

[1] В теории длинных волн условие $H \ll B$ определяет модель «течений мелкой воды», применительно к которой выполняется упрощение уравнений Эйлера [131].

Упрощения, которые допустимо ввести в уравнения Рейнольдса, состоят в следующем.

1. Учтя малость вертикальных размеров русловых потоков и плавность рельефа дна, можно приравнять к нулю ускорения воды по оси z — заведомо малые по сравнению с ускорениями по осям x и y (напоминаем, что речь идет об ускорениях в осредненном, а не в актуальном движении и что обтекание потоком местных неровностей дна исключается из рассмотрения).

2. Ввиду того, что вертикальные размеры потоков малы, а горизонтальные велики и течение предполагается безотрывным, в уравнениях можно сохранить производные от касательных напряжений лишь по координате z, отбросив аналогичные производные по осям x и y.

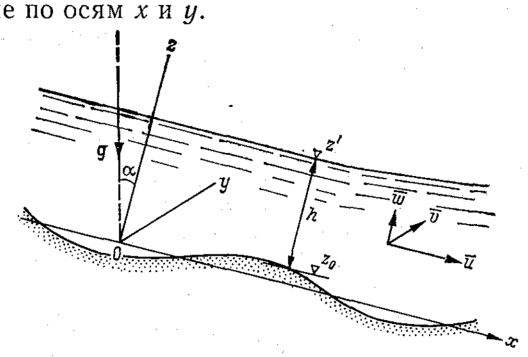


Рис. 10. Система координат руслового потока.

3. В силу плавной изменяемости движения и небольших скоростей течения воды в реках (малости чисел Фруда) могут быть полностью опущены пространственные производные от нормальных турбулентных напряжений — они малы по сравнению с градиентом давления.

Введя эти упрощения в систему уравнений (3.10), подставив компоненты объемной силы по соотношениям (3.14) и разделив все члены на плотность жидкости ρ, будем иметь следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}=gi_0-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z},\\
&\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}-\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z},\\
&0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (3.15)$$

Интегрируя последнее из уравнений (3.15) по z, находим

$$\bar{p}=-\rho g z+F(x, y, t). \quad (3.16)$$

Произвольная функция F определяется с помощью граничного условия на свободной поверхности (2.22). Оперируя, как

обычно, величиной манометрического давления, имеем $\overline{p}(z') = 0$. Подставив это равенство в формулу (3.16), получим $F(x, y, t) = \rho g z'$ и отсюда

$$\overline{p} = \rho g (z' - z), \quad z \geqslant z_0, \tag{3.17}$$

если вертикальные ускорения жидкости малы, давление распределяется по гидростатическому закону. Подставив величину $\overline{p}$ по формуле (3.17) в два первых уравнения (3.15) и присоединяя к уравнениям движения уравнение неразрывности, получаем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = g\left(i_0 - \frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}, \\ &\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} = -g\frac{\partial z'}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}, \\ &\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Система (3.18) значительно проще системы полных уравнений Рейнольдса (3.10) и (3.4), однако и она незамкнутая — три уравнения (3.18) содержат шесть функций координат и времени: $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{u'w'}$, $\overline{v'w'}$ и z'. Рельеф свободной поверхности $z'(x, y, t)$ должен быть задан. В принципе, его можно получить, решив двумерную (плановую) задачу движения руслового потока. Для определения отнесенных к единице массы касательных напряжений $\overline{u'w'}$ и $\overline{v'w'}$ нужны дополнительные соотношения.

В приосевой области широких и прямых участков русел элементы потока практически не изменяются по его ширине, а движение, таким образом, приближается к плоскому. Отклонения движения от плоского обусловлены здесь лишь кориолисовым ускорением, которое даже в высоких широтах мало́ по сравнению с обычными значениями продольной компоненты ускорения свободного падения и которое поэтому не фигурирует в уравнениях динамики русловых потоков. Положив в уравнениях (3.18) $\overline{v} = 0$ и $\frac{\partial z'}{\partial y} = 0$, получим следующую систему уравнений плоского движения жидкости в открытом русле:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = g\left(i_0 - \frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}, \\ &\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

Семейство профилей свободной поверхности $z'(x, t)$ можно получить из независимого решения одномерной задачи. Напряжение $\overline{u'w'}$ ищется, так же как в трехмерном случае.

Граничные условия на дне и на свободной поверхности для уравнений (3.18) и (3.19) те же, что для полной системы уравнений Рейнольдса.

Заметим, что при установившемся осредненном движении уравнения (3.18) и (3.19) лишь членами, содержащими силу тяжести, отличаются от уравнений соответственно трехмерного и плоского пограничного слоя несжимаемой жидкости.

На участках открытых потоков с резкими изменениями движения (в частности, при наличии водоворотных зон), где уравнения (3.18) и (3.19) неприменимы, необходимо обращаться к полным уравнениям Рейнольдса (3.10), (3.4), видоизменяя их в соответствии с характером решаемой задачи (см. п. 11.1).

3.4. Гипотеза турбулентной вязкости и аналогия Рейнольдса

Свойственное турбулентным течениям перемешивание макроскопических масс жидкости сообщает этим течениям способность к интенсивному диффузионному переносу различных содержащихся в жидкости «субстанций». Вследствие этого распределения таких субстанций, как тепло, импульс, вихрь скорости, растворенные или взвешенные в жидкости вещества, бывают в турбулентном потоке гораздо более выравненными, чем в ламинарном.

Детальное рассмотрение процессов турбулентного переноса показывает, что эти процессы значительно сложнее процесса молекулярной диффузии. Тем не менее соблазнительно приближенно описать эти процессы тем же способом, какой принят в феноменологической теории молекулярной диффузии, а именно положить, что плотность потока субстанции (т. е. величина потока субстанции через единицу площади в единицу времени) пропорциональна градиенту субстанции. В 1877 г. Буссинеск первый предложил определять турбулентное касательное напряжение (т. е. взятую с обратным знаком плотность потока импульса) в плоскопараллельном течении вдоль оси x_1 по формуле

$$\tau_{31} = -\rho\overline{v_1' v_3'} = A\frac{d\overline{v_1}}{dx_3}, \qquad (3.20)$$

где A — коэффициент турбулентной вязкости (турбулентного обмена). Уже в то время Буссинеск отчетливо понимал, что коэффициент A, в отличие от коэффициента молекулярной вязкости μ, не есть физическая константа жидкости, а представляет собой некоторую функцию координат пространства (а при нестационарном осредненном движении — и времени), функцию, сложным образом связанную с обстоятельствами данного турбулентного течения. В простейшем случае плоскопараллельного течения в открытом гидравлически шероховатом канале,

где турбулентное касательное напряжение распределяется по известному линейному закону, значения коэффициента A могут быть найдены из измеренного распределения скоростей с помощью формулы

$$A = \tau_0 \frac{h - x_3}{h - \Delta} \Big/ \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}, \tag{3.21}$$

где h — глубина потока. Определенные таким путем значения A на середине глубины открытого потока (или на середине радиуса трубы), где интенсивность турбулентного обмена наиболее велика, обычно превосходят значение коэффициента молекулярной вязкости на 3—6 порядков.

Переходя к общему случаю пространственного осредненного движения, естественно обобщить гипотезу Буссинеска подобно тому, как в уравнениях Навье—Стокса обобщена гипотеза, Ньютона, т. е. положить, что тензор турбулентных напряжений пропорционален тензору осредненных скоростей деформации

$$-\rho \overline{v_i' v_j'} = A \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) = 2A \bar{D}_{ij}. \tag{3.22}$$

Нетрудно, однако, видеть, что при такой гипотезе нормальные турбулентные напряжения будут определяться лишь для $\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} \neq 0$, а при $\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0$ они тоже будут равны нулю, что не согласуется с действительной картиной явления (нормальные напряжения имеются в любом случае турбулентного движения). Чтобы устранить указанную некорректность, А. Н. Колмогоров [75] предложил видоизмененную гипотезу турбулентной вязкости

$$-\rho \overline{v_i' v_j'} = A \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \rho b, \tag{3.23}$$

где $b \equiv \frac{1}{2} \sum_i \overline{v_i'^2}$ — кинетическая энергия турбулентности в единице массы.

При равномерном осредненном течении из формулы (3.23) вытекает условие изотропности нормальных напряжений

$$\overline{v_1'^2} = \overline{v_2'^2} = \overline{v_3'^2} = \frac{2}{3} b. \tag{3.24}$$

В действительности такая изотропность наблюдается лишь вблизи оси потока в круглой трубе. Вблизи твердых поверхностей значения нормальных турбулентных напряжений по разным направлениям существенно различны.

Таким образом, гипотеза (3.23), улучшая результат Буссинеска, не снимает полностью затруднений, связанных с определением нормальных напряжений.

Для спокойных открытых потоков, в которых нормальные турбулентные напряжения малы и могут не учитываться, различия между обобщенной гипотезой Буссинеска (3.22) и гипотезой Колмогорова (3.23) нет. Феноменологические уравнения осредненного турбулентного движения воды в открытых руслах, удовлетворяющие упрощениям п. 3.3, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)&=\rho g\left(i_0-\frac{\partial z'}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right),\\ \rho\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)&=-\rho g\frac{\partial z'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Читатель, конечно, понимает, что введение в уравнения движения коэффициента турбулентной вязкости не решает вопроса об их замыкании. Использование этого коэффициента в теории турбулентности оправдывается двумя соображениями: во-первых, по-видимому (хотя об этом можно спорить), составить гипотезу о поведении коэффициента A легче, чем составить гипотезу о величине самого турбулентного напряжения; во-вторых, коэффициент A представляет собой хотя и условную, но удобную характеристику одного из важнейших эффектов турбулентности — эффекта турбулентной диффузии. Пожалуй, именно этим можно объяснить, что несмотря на не раз раздававшуюся критику по адресу коэффициента A, он прочно удерживает свои позиции, особенно в прикладных разделах теории турбулентности.

Современный этап развития гипотезы турбулентной вязкости связан с учетом зависимости коэффициента A от направления переноса, т. е. с отказом от первоначальных представлений о скалярной природе A. Л. В. Келлер, а затем А. С. Монин предложили рассматривать в каждой точке потока симметричный тензор коэффициентов A_{ij}. При этом в соответствии с правилом тензорного умножения тензоров второго ранга и, учитывая симметричность тензора турбулентных напряжений, имеем, по Монину [97].

$$-\rho\overline{v_i'v_j'}=\sum_k\left(A_{ik}\bar{D}_{kj}+A_{jk}\bar{D}_{ki}\right)-\delta_{ij}\frac{2}{3}\rho b. \tag{3.26}$$

Нормальные турбулентные напряжения по формуле (3.26) получаются изотропными, как и в более простой модели Колмогорова (3.23). Можно пойти дальше и постулировать существование между тензорами $-\rho\overline{v_i'v_j'}$ и $\bar{D}_{ij}$ линейной связи общего вида. Это равносильно представлению турбулентной вязкости A в виде тензора четвертого ранга. Однако, как показали Н. М. Дмитриев и М. В. Лурье [43], и такое предположение недостаточно для того, чтобы получить качественно верную кар-

тину распределения нормальных напряжений. Опытные данные о полях пульсационных скоростей заставляют признать, что связь между тензорами $-\rho\overline{v_i' v_j'}$ и $\bar{D}_{ij}$ не только анизотропна, но и нелинейна. В работе Дмитриева и Лурье это приводит к представлению турбулентной вязкости в виде тензора шестого ранга.

Столь сложное строение величины A возвращает к мысли о неполной адекватности самой гипотезы турбулентной вязкости истинной природе турбулентного переноса. Предположению о том, что турбулентный перенос имеет такой же градиентный характер, как перенос при молекулярном движении, можно противопоставить гипотезу, что к градиентному типу принадлежит лишь часть турбулентного переноса, а именно та, которая связана с мелкомасштабными пульсациями скорости. Другая же часть переноса имеет конвективный характер и обусловлена движением крупных вихрей турбулентного потока. Такая трактовка турбулентного переноса не раз обсуждалась в литературе, но расчетного выражения она до сих пор не получила.

В задачах о турбулентных течениях в трубах, открытых руслах и пограничном слое гипотеза Буссинеска со скалярным коэффициентом A остается пока основным расчетным средством. Если ограничиваться определением поля осредненных скоростей, результаты, которые она дает, в целом достаточно достоверны.

В одной из своих ранних работ Рейнольдс (в 1874 г.) высказал мысль о том, что механизм турбулентного переноса тепла и механизм турбулентного переноса импульса идентичны. В дальнейшем эта мысль, получившая название «*аналогии Рейнольдса*», была распространена также и на другие субстанции, содержащиеся в движущейся жидкости, в частности на взвешенные твердые частицы.

В случае турбулентного переноса вдоль оси x_3 мы имеем следующие феноменологические выражения для плотностей потоков тепла и вещества:

$$q_\Theta = c_p \rho \overline{\theta' v_3'} = -c_p \rho K_\Theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_3}, \tag{3.27}$$

$$q_s = \overline{s' v_3'} = -K \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_3}, \tag{3.28}$$

где c_p — удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении; θ — температура; s — объемная концентрация; K_Θ и K — коэффициенты соответственно турбулентной теплопроводности и диффузии. По Рейнольдсу, должно быть

$$K_\Theta = K = \frac{A}{\rho} \equiv \nu_т, \tag{3.29}$$

где $\nu_т$ — кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

Экспериментальные данные показывают, что в действительности в течениях, ограниченных твердыми поверхностями, $K_\Theta = (1{,}1 \div 1{,}4)\nu_т$, а равенство $K = \nu_т$ приближенно соблюдается лишь при взвешивании частиц малой гидравлической крупности и невысоких значениях концентрации.

Таким образом, аналогия Рейнольдса имеет приближенный характер. Особенности переноса различных субстанций, нарушающие точность аналогии, сводятся к следующему.

1. Величина импульса может меняться в процессе переноса под действием пульсаций давления. Поэтому импульс не является консервативной субстанцией.

2. Количество тепла может меняться в процессе переноса вследствие выделения тепла за счет диссипации механической энергии жидкости. Поэтому тепло также не является консервативной субстанцией.

3. Наличие в потоке твердых частиц изменяет интенсивность турбулентных пульсаций, т. е. оказывает обратное влияние на механизм переноса.

Вопрос об определении коэффициентов $\nu_т$, K_Θ и K по-разному решается в различных полуэмпирических теориях турбулентности. Для «старых» полуэмпирических теорий, созданных в период между двумя мировыми войнами, характерно стремление связать величину $\nu_т$ (а значит и K_Θ и K) с элементами осредненного течения. В современных теориях доминирует стремление связать величину $\nu_т$ с характеристиками поля пульсаций.

3.5. Баланс энергии турбулентности

Если умножить каждое из уравнений Навье—Стокса (2.17) на v_i и затем их почленно сложить, мы получим уравнение сохранения энергии для мгновенного состояния движения частицы жидкости. Представив в этом уравнении компоненты скорости и давления суммами (3.2) и произведя операцию осреднения, получим средний во времени баланс энергии частицы жидкости. В соответствии со способом получения этого баланса он будет определять полную энергию частицы, т. е. будет содержать в неразделенном виде кинетическую энергию ее осредненного и пульсационного движения.

Умножив на $\overline{v_i}$ каждое из уравнений Рейнольдса (3.3) и почленно сложив их, будем иметь уравнение сохранения энергии для осредненного движения частицы. Вычитая из уравнения сохранения полной энергии частицы уравнение сохранения энергии ее осредненного движения, получаем уравнение сохранения осредненной энергии пульсационного движения, т. е. баланс энергии турбулентности. Математическую запись описанных операций читатель может найти в любом из подробных руководств по теории турбулентности (см., например, [141, с. 80—84]).

В приводимом ниже уравнении баланса турбулентной энергии все члены отнесены к единице массы, b по-прежнему обозначает осредненную величину кинетической энергии пульсаций, причем под $\frac{db}{dt}$ подразумевается субстанциональная производная

$$b \equiv \frac{1}{2}\sum_i \overline{v_i'^2}, \quad \frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \bar{v}_j b}{\partial x_j}.$$

Кроме того, использованы следующие обозначения:

$$D'_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\Phi_т \equiv \frac{\mu}{2}\sum_i\sum_j \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

Величина D'_{ij} представляет тензор скоростей деформации пульсационного движения, величина $\Phi_т$ — его диссипативную функцию.

Уравнение баланса записывается в виде

$$\frac{db}{dt} = \underbrace{-\sum_i\sum_j \overline{v'_i v'_j}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}}_{\text{I}} \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \frac{\partial \overline{v'_j v'^2_i}}{\partial x_j}}_{\text{II}} -$$

$$-\underbrace{\frac{1}{\rho}\sum_i \frac{\partial \overline{v'p'}}{\partial x_i}}_{\text{III}} + \underbrace{2\nu\sum_i\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v'_i D'_{ij}}}_{\text{IV}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\overline{\Phi}_т}_{\text{V}}. \qquad (3.30)$$

Рассмотрим физический смысл членов правой части этого уравнения. Первый член представляет главную приходную часть баланса энергии турбулентности — он определяет величину энергии, отбираемой турбулентностью в единицу времени от осредненного движения, или, что то же самое, величину производимой осредненным движением турбулентной энергии. Второй член выражает эффект переноса кинетической энергии турбулентности пульсационным движением, или, другими словами, диффузию энергии. Третий член определяет вклад, вносимый в изменение кинетической энергии турбулентности пульсациями давления. Мгновенные градиенты давления, создаваемые этими пульсациями, вызывают движение жидкости, т. е. способствуют пульсациям скорости. Четвертый и пятый члены выражают влияние сил вязкости. Влияние сил вязкости на кинетическую энергию турбулентности двоякое. С одной стороны, вязкие напряжения способствуют передаче турбулентной энергии — вслед-

ствие вязкого трения более быстрые струи турбулентно движущейся жидкости увлекают за собой окружающую жидкость. Эта сторона работы сил вязкости отражена четвертым членом. С другой стороны, вязкость вызывает переход кинетической энергии турбулентности в энергию молекулярного движения — тепло. Эта сторона работы сил вязкости отражена последним, диссипативным членом правой части уравнения (3.30).

Уравнение турбулентной энергии дает ясный ответ на вопрос о том, как влияет на интенсивность турбулентности неравномерность осредненного течения. Если течение ускоряется вдоль какой-нибудь координатной оси, например, x_1, т. е. производная $\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} > 0$, то стоящая в правой части уравнения (3.30) величина $-\overline{v'^2_1}\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1}$ является отрицательной — ускорение движения способствует снижению энергии турбулентности. В замедленном течении, т. е. при $\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} < 0$, величина $-\overline{v'^2_1}\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1}$ является положительной — замедление движения ведет к повышению турбулентной энергии. Эти выводы полностью подтверждаются опытными данными. Снижение уровня турбулентности при стеснении потока и резкое возрастание этого уровня с соответствующим резким ростом потерь энергии при расширении хорошо известны из инженерной практики.

Дальнейшие важные выводы относительно механизма турбулентности можно сделать, если составить уравнения сохранения отдельно для каждого из слагаемых энергии турбулентности, т. е. для величин $\overline{v'^2_1}$, $\overline{v'^2_2}$, $\overline{v'^2_3}$, и рассмотреть затем плоскопараллельное или равномерное осесимметричное течение вдоль одной из координатных осей. При этом окажется, что член, выражающий отбор энергии от осредненного движения, сохраняется только в уравнении, составленном для продольной координаты. Это значит, что в прямолинейных потоках *энергия отбирается от осредненного движения только продольными пульсациями скорости.* Поперечные пульсации не получают энергии непосредственно от осредненного движения, а заимствуют ее из энергии продольных пульсаций. Роль посредника, осуществляющего передачу энергии от продольных к поперечным пульсациям, играют пульсации давления.

В равномерном открытом течении в плоскости x, z, энергия, отбираемая в единицу времени от осредненного движения, выражается в соответствии с уравнением (3.30) величиной

$$-\overline{u'w'}\frac{d\bar{u}}{dz}.$$

Если дно потока гидравлически шероховатое, то турбулентное касательное напряжение распределяется вдоль оси z по линейному закону, и для энергии, теряемой в ядре течения, т. е. при $\Delta \leqslant z \leqslant h$, мы имеем простое выражение

$$\frac{\tau_0}{\rho}\frac{h-z}{h-\Delta}\frac{d\bar{u}}{dz} \approx \frac{\tau_0}{\rho}\left(1-\frac{z}{h}\right)\frac{d\bar{u}}{dz}. \qquad (3.31)$$

Из этого выражения видно, что скорость диссипации энергии быстро растет с уменьшением z. Так как значительная часть энергии теряется также в слое выступов шероховатости $(0 < z < \Delta)$, то в гидравлически шероховатом русле «производство турбулентности» оказывается почти целиком сосредоточенным у дна. Хотя вязкая диссипация турбулентной энергии также имеет максимум вблизи дна, придонные слои потока всегда содержат значительно больше турбулентной энергии, чем верхняя часть потока. Поэтому диффузионный поток турбулентной энергии направлен снизу вверх — от дна к свободной поверхности.

4. Распределение осредненных скоростей и гидравлическое сопротивление жестких русел

4.1. Логарифмический закон распределения скоростей

Незамкнутость уравнений Рейнольдса не позволяет вывести из них законы распределения осредненных скоростей. Однако, как показали Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [82], в простейшем гипотетическом случае турбулентного течения в полупространстве, ограниченном бесконечной, плоской, твердой поверхностью, величина градиента осредненной скорости устанавливается соображениями размерности. Факторами, определяющими движение в этом случае, служат три величины: касательное напряжение на стенке τ_0, расстояние от стенки z и плотность жидкости ρ. Отсюда имеем

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{1}{z} = \frac{1}{\varkappa}\frac{v_*}{z}, \qquad (4.1)$$

где $\varkappa$ — число, называемое постоянной Кармана.

Масштабом расстояний от гладкой стенки может служить величина ν/v_*, а масштабом расстояний от шероховатой стенки — высота выступов Δ. Имеющее структуру числа Рейнольдса отношение двух этих масштабов $v_*\Delta/\nu$ уже использовалось нами как критерий режима сопротивления. Произведя

интегрирование уравнения (4.1) и выразив z в указанных масштабах, получим: в случае гладкой стенки

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v_* z}{\nu} + C_1, \tag{4.2}$$

в случае шероховатой стенки

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{z}{\Delta} + C_2, \tag{4.3}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, которые так же как постоянная $\varkappa$, подлежат определению из опыта. Формулы (4.2) и (4.3) являются двумя частными выражениями *логарифмического закона распределения осредненных скоростей.*

Первое обоснование логарифмического закона было дано Л. Прандтлем в 1925 г. на основании построенной им модели турбулентного перемешивания. Еще раньше чисто эмпирическим путем к нему пришли в результате гидрометрических работ на реках Зее, Туре и Чусовой Н. Н. Соколов и С. И. Моисеенко (1913—1914 гг.) и в результате гидрометрических работ на р. Эльбе Р. Ясмунд (1893 г.).

Тщательно выполненные И. Никурадзе [211, 212] измерения осредненных скоростей в трубах показали, что логарифмическое распределение весьма хорошо соответствует опыту в пределах ближайшей к стенке $^1/_5$ радиуса трубы. С приближением к оси трубы обнаруживаются систематические, хотя и небольшие отклонения от логарифмического закона, обусловленные конечностью поперечного размера потока. Д. Коулз [164], проанализировав обширные материалы измерений, относящихся к потокам в трубах, к пограничному слою и к открытому потоку, нашел, что логарифмический закон удовлетворяется в пристенной зоне даже тогда, когда течение заметно уклоняется от равномерного. Эксперименты, подтвердившие применимость логарифмического закона к открытым потокам, были выполнены Зегждой [56], В. Ванони [239] и другими исследователями.

Пренебрегая возможными небольшими погрешностями, допустим, что логарифмический закон действителен на вертикали открытого потока вплоть до свободной поверхности, и составим разность между максимальной (поверхностной) скоростью течения $\bar{u}_{\text{макс}} = \bar{u}(h)$ и скоростью на некоторой другой высоте над дном $z < h$. В случае гидравлически гладкого дна наложим на расстояние z добавочное условие $z \gg \nu/v_*$, исключив тем самым область влияния вязкости. В случае гидравлически шероховатого дна будем считать, что при $\Delta \ll h$ расстояние z может иметь любые значения из полуоткрытого интервала $h > z \geqslant \Delta$. Для составления разности скоростей можно воспользоваться после

этого любой из формул (4.2) и (4.3), в обоих случаях будем иметь один и тот же результат

$$\frac{\bar{u}_{\text{макс}} - \bar{u}(z)}{v_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{h}{z}. \qquad (4.4)$$

Величина, стоящая слева, называется *безразмерным дефицитом скорости.* Формула (4.4) показывает, что распределение безразмерного дефицита скорости универсально — при введенных выше условиях оно не зависит от характера дна. Экспериментальные оценки постоянной Кармана $\varkappa$ колеблются около среднего значения 0,4, которое обычно и применяется в расчетах. Подставив это значение в формулу (4.4) и перейдя к десятичным логарифмам, получим

$$\frac{\bar{u}_{\text{макс}} - \bar{u}(z)}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{h}{z}. \qquad (4.5)$$

В руслах с сильно шероховатым дном, т. е. при высоте Δ, сравнимой с глубиной потока, картина усложняется. Вихри, срывающиеся с выступов шероховатости, имеют здесь крупные размеры и существенно усиливают турбулентное перемешивание. В результате безразмерный градиент скорости $\frac{z}{v_*}\frac{d\bar{u}}{dz}$ оказывается вблизи дна меньшим, чем в потоках с гладким или умеренно шероховатым дном. Меньшие значения безразмерного градиента скорости равнозначны бóльшим значениям постоянной Кармана. Данные опытов Никурадзе [212], Ф. А. Шевелева [149] и Ванони [239] показывают, что при $\Delta/h > 10^{-2}$ величина $\varkappa$ имеет значения, которые на 10—15% больше, чем в гладких руслах.

Легко убедиться, что постоянная C_2 в формуле распределения скоростей (4.3) равна отношению $\bar{u}(\Delta)/v_*$ донной скорости к динамической. Численная оценка этого отношения в экспериментах затруднена недостаточной точностью определения высоты выступов Δ. Никурадзе, создававший шероховатость в своих трубах наклейкой на их внутреннюю поверхность зерен откалиброванного песка, приравнивал высоту Δ диаметру песчинок d. Отношение $\bar{u}(\Delta)/v_*$ получалось при этом равным 8,5. Анализ опытов Никурадзе, произведенный автором [28], показал, что действительная высота выступов была в этих опытах меньше d, а именно, составляла около $\frac{2}{3}d$. Введя в расчет такую высоту выступов, получаем $\bar{u}(\Delta)/v_* = 7{,}5$. В. И. Ефремов [48], измерявший осредненные скорости в лотке, на дне которого были закреплены частицы гравия, нашел, что $\bar{u}(\Delta)/v_* = 7{,}4$. Из опытов Ванони в лотке с закрепленными песчаными частицами

диаметром 0,9 мм, при соотношении $\Delta = \frac{2}{3} d$ значение $\overline{u}(\Delta)/v_*$ получено равным 6,6. Приняв среднюю из имеющихся оценок $\overline{u}(\Delta)/v_* = 7{,}5$, можем переписать формулу (4.3) для русел с умеренной шероховатостью дна ($\varkappa = 0{,}4$) в следующем виде:

$$\frac{\overline{u}}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{z}{\Delta} + 7{,}5. \tag{4.6}$$

Постоянная C_1 в формуле (4.2), по данным Коулза, равна 5,1.

Таким образом, распределение скоростей на вертикали при гидравлически гладком дне записывается

$$\frac{\overline{u}}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{v_* z}{\nu} + 5{,}1. \tag{4.7}$$

Важной интегральной характеристикой распределения скоростей, не зависящей от режима сопротивления, служит безразмерный дефицит средней скорости. В плоском потоке он выражается следующим образом:

$$\mathrm{Def}\, U \equiv \frac{\overline{u}_{\text{макс}} - U}{v_*} = \frac{1}{\varkappa h} \int_{\Delta,\ \delta}^{h} \ln \frac{h}{z}\, dz = \frac{1}{\varkappa}. \tag{4.8}$$

В круглой трубе $\mathrm{Def}\, U = 1{,}5/\varkappa$. При гидрометрических работах представляет интерес высота над дном z_m, на которой местная осредненная скорость равна средней на вертикали: $\overline{u}(z_m) = U$. Применив формулы (4.4) и (4.8), можно найти

$$z_m = \frac{h}{e} = 0{,}37h. \tag{4.9}$$

Сравнение теоретического закона (4.4) распределения безразмерного дефицита скорости с опытными данными дано на рис. 11. Измерения Никурадзе [210] и Дж. Лауфера [198] были выполнены в напорных каналах широкого прямоугольного сечения, измерения Зегжды [56] — в открытом лотке. Стенки и дно были во всех трех сериях опытов гидравлически гладкими.

Обзор сведений о логарифмическом законе распределения скоростей закончим выводами, которые следуют из этого закона в отношении коэффициента турбулентной вязкости.

Подставив в общее выражение коэффициента турбулентной вязкости (3.21) величину градиента скорости по формуле (4.1), положив $\Delta \ll h$ и деля на плотность жидкости ρ, получаем

$$\nu_т = \varkappa v_* h \left(1 - \frac{z}{h}\right) \frac{z}{h}. \tag{4.10}$$

Согласно формуле (4.10), коэффициент $\nu_т$ имеет весьма малое значение на высоте выступов шероховатости (или на гра-

нице вязкого подслоя), достигает максимума при $z = \frac{1}{2} h$ и обращается в нуль при $z = h$. На рис. 12 распределение (4.10) при значении $\varkappa = 0{,}4$ сопоставлено с опытными данными Никурадзе [210] и Коркорана и др. [166], полученными в плоских напорных потоках с гладкими стенками.

В пристенной области опытные точки тесно располагаются около теоретической кривой. Однако, начиная уже с $z/h = 0{,}2$,

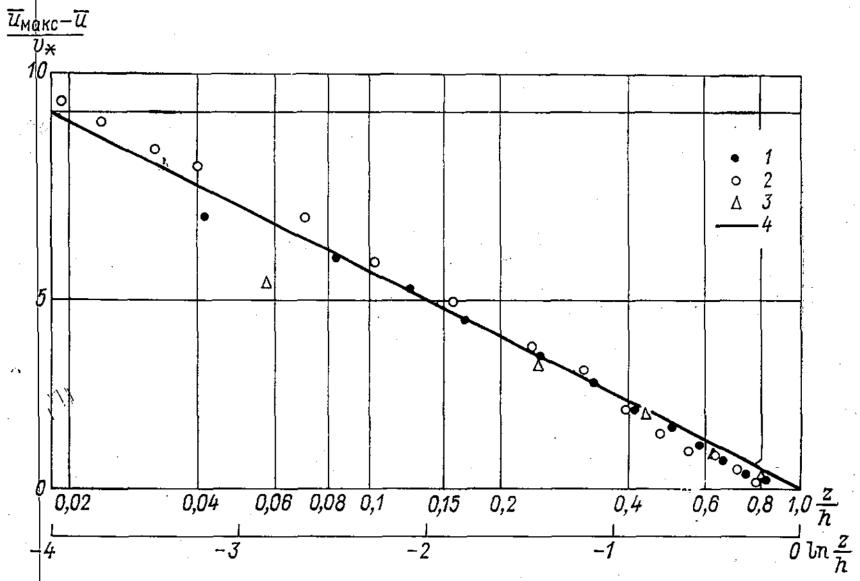


Рис. 11. Распределение безразмерного дефицита скорости в плоском турбулентном потоке.

1 — измерения Никурадзе, $\mathrm{Re}_R \equiv \frac{Uh}{\nu} = 33{,}5 \cdot 10^3$, *2* — измерения Лауфера, $\mathrm{Re}_R = 56{,}2 \cdot 10^3$, *3* — измерения Зегжды, $\mathrm{Re}_R = 16{,}5 \cdot 10^3$, *4* — логарифмический профиль при $\varkappa = 0{,}40$.

они отклоняются от нее — сначала в сторону меньших, а затем больших значений $\nu_т$. Указывая на существование минимума $\nu_т$ при $z = h$, т. е. в плоскости симметрии потока, опытные точки не подтверждают обращения здесь $\nu_т$ в нуль. Этот результат не является неожиданным, так как равенство $\nu_т = 0$, получающееся при подстановке в формулу (4.10) значения $z = h$, есть следствие неточности исходной формулы градиента скорости (4.1), дающей при $z = h$ физически невозможное ненулевое значение градиента.

Что касается самого факта существования минимума $\nu_т$ в плоскости симметрии напорного потока, то он имеет простое

гидромеханическое объяснение. По разные стороны от плоскости симметрии вектор вихря осредненного течения

$$\operatorname{rot}\bar{\mathbf{v}} = e_2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}$$

направлен противоположно. Векторы вихря наиболее крупных структур турбулентности имеют такую же ориентировку. Вследствие этого они не могут пересекать плоскость симметрии. Самое большее на что они способны это возмущать мгновенную поверхность перемены знака $\operatorname{rot}\bar{\mathbf{v}}$. Плоскость симметрии оказывается «проницаемой» лишь для мелких образований, которые по условию локальной изотропии не имеют какого-либо избранного направления вектора вихря. То обстоятельство, что турбулентный перенос вблизи плоскости симметрии производится только мелкими образованиями, и обусловливает существование здесь минимума функции $\nu_т(z)$.

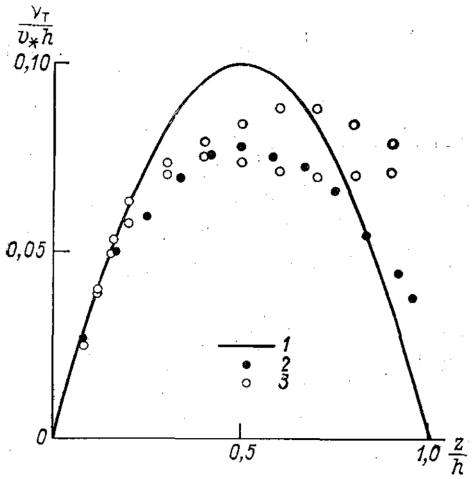


Рис. 12. Распределение коэффициента турбулентной вязкости в плоском напорном потоке.

1 — кривая по уравнению (4.10) при $\varkappa=0{,}40$, *2* — опытные точки Никурадзе, $\mathrm{Re}_R=33{,}5\cdot10^3$, *3* — опытные точки Коркорана и др., $\mathrm{Re}_R=9{,}1\cdot10^3$.

В открытом потоке интенсивность турбулентного переноса вблизи свободной поверхности зависит от числа Фруда. Установившиеся спокойные потоки с малыми числами Фруда имеют неподвижную свободную поверхность, которая ведет себя по отношению к вертикальным движениям жидкости так же, как твердая стенка. Скалярный коэффициент турбулентной вязкости должен обращаться на ней в нуль и отсюда следует думать, что в спокойных открытых потоках закон (4.10) удовлетворяется лучше, чем в трубах.

4.2. Формулы гидравлического сопротивления по длине

Гидравлическим сопротивлением по длине называется сила трения, приложенная со стороны русла к текущей жидкости на единице длины пути: $\tau_0\chi\cdot 1$. Если в качестве единицы длины выбрать гидравлический радиус, то отношение мощности сил

трения $\tau_0 \chi RU$ к потоку кинетической энергии через живое сечение $\frac{1}{2}\rho U^3\omega$ определит безразмерную величину, называемую *коэффициентом гидравлического трения*

$$\lambda_R = \frac{2\tau_0}{\rho U^2} \equiv 2\frac{v_*^2}{U^2}. \qquad (4.11)$$

Этот коэффициент измеряет способность системы поток—русло диссипировать механическую энергию. В расчетах сопротивления открытых русел наряду с коэффициентом λ_R пользуются *коэффициентом Шези* C, связанным с λ_R обратной зависимостью $C = \sqrt{2g/\lambda_R}$.

Коэффициенты λ_R и C являются функциями числа Рейнольдса и относительной шероховатости русла. Соответствующие функциональные связи называются формулами сопротивления по длине.

Простой и теоретически обоснованный способ получения формулы сопротивления для гидравлически шероховатых русел состоит в совместном использовании формулы распределения скоростей (4.3) и формулы дефицита средней скорости (4.8). Положив в первой из них $z = h$ и избавившись затем от $\bar{u}_{\text{макс}}/v_*$, найдем

$$\frac{U}{v_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{h}{\Delta} + C_2 - \frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{h}{\Delta} + C_3, \qquad (4.12)$$

где $C_3 \equiv \bar{u}(\Delta)/v_* - 1/\varkappa$.

В соответствии с исходными предпосылками формул (4.3) и (4.8) равенство (4.12) действительно в русле широкого прямоугольного сечения, где глубина вертикали h совпадает со средней глубиной, а средняя глубина пренебрежимо мало отличается от гидравлического радиуса. Примем в качестве постулата, что равенство (4.12) будет действительным в открытых руслах достаточно правильного произвольного сечения, если вместо глубины h подставлять в него гидравлический радиус сечения R. Сделав такую подстановку и перенеся результат в (4.11), получим следующую стандартную запись формулы сопротивления по длине для гидравлически шероховатых русел:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_R}} \equiv \frac{C}{\sqrt{2g}} = \frac{1}{\sqrt{2}\varkappa}\ln\frac{R}{\Delta} + C_4, \qquad (4.13)$$

где $C_4 \equiv C_3/\sqrt{2}$. В формулах (4.12) и (4.13) величину Δ можно заменить любой величиной, пропорциональной Δ. При этом требуется лишь скорректировать соответствующим образом постоянные C_3 и C_4.

В опытах с течением воды в открытых лотках с закрепленной песчаной шероховатостью Зегжда нашел, что $\varkappa = 0{,}4$, $C_4 = 4{,}25$, и тогда формула сопротивления получила вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_R}} \equiv \frac{C}{\sqrt{2g}} = 4 \lg \frac{R}{\Delta} + 4{,}25. \qquad (4.14)$$

Значениям эмпирических постоянных в формуле (4.14) отвечает отношение $\bar{u}(\Delta)/v_* = 8{,}5$, т. е. то же, что принял ранее Никурадзе.

При применении формул сопротивления, содержащих высоту выступов шероховатости Δ, к водоводам с разным характером стенок (сталь, чугун, бетон, песчаное дно, травяной покров и т. д.) наиболее трудным является вопрос об определении расчетного (эффективного) значения Δ. Для нас главный интерес представляет связь между величиной Δ и размером частиц несвязного грунта, слагающих дно большинства естественных потоков. Имея дело с закрепленными на стенке однородными частицами, Никурадзе принимал величину Δ равной диаметру частиц. Дополнительный анализ данных Никурадзе говорит в пользу несколько иного соотношения $\Delta \approx \frac{2}{3} d$. Песок, который наклеивался на стенки лотка в опытах Зегжды, не был однородным (в отдельных опытах отношение наибольшего диаметра частиц наклеенной фракции к наименьшему достигало 2,0) и ввиду этого условия опытов Зегжды были ближе к условиям естественных потоков, чем условия опытов Никурадзе. При неоднородном составе частиц центральным становится вопрос о связи Δ со средним диаметром частиц, а иногда и более широкий вопрос о выборе репрезентативного диаметра, ответственного за величину Δ. На основании своих опытов Зегжда построил кривую связи между высотой выступов и средним диаметром частиц (за средний диаметр принималось среднее арифметическое из наибольшего и наименьшего диаметров наклеенной фракции). По кривой Зегжды видно, что в области $d_{ср} \leqslant 1{,}5$ мм удовлетворяется приближенное соотношение $\Delta \approx 1{,}6 d_{ср}$, а с переходом к более крупным частицам коэффициент пропорциональности уменьшается и при $d_{ср} > 3$ мм становится близким к единице.

На рис. 13 показан полученный Зегждой график сопротивления открытых русел в гладкостенной, переходной и квадратичной областях сопротивления

$$\lg \lambda_R = \mathrm{fct}\left(\mathrm{Re}_R, \frac{R}{\Delta}\right). \qquad (4.15)$$

В связи с тем, что определение эффективной высоты выступов шероховатости в естественных руслах и каналах сопряжено с трудностями, коэффициент Шези C в практических расчетах

обычно вычисляют не по зависимостям вида (4.13), а по эмпирическим формулам, содержащим вместо Δ/R особые «коэффициенты шероховатости». В СССР чаще других используются формулы Н. Н. Павловского и Р. Маннинга. Более простой из двух является формула Маннинга

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}, \tag{4.16}$$

где n — коэффициент шероховатости с размерностью $L^{-\frac{1}{3}}T$.

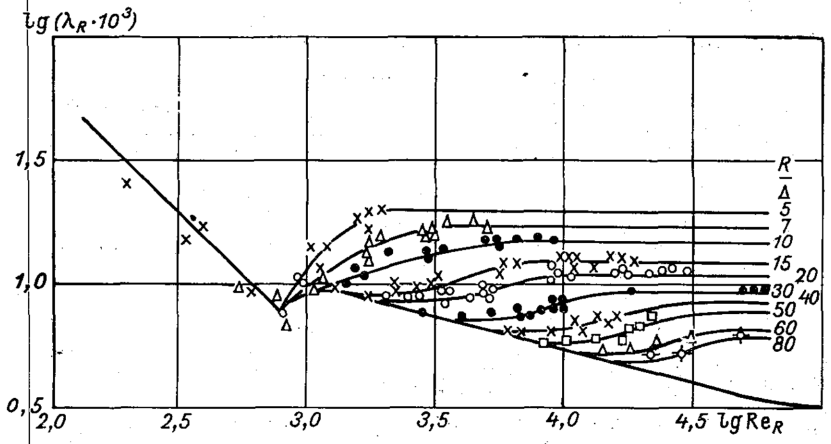


Рис. 13. График сопротивления открытых русел по опытам Зегжды.

Совместное применение формулы Маннинга и формулы сопротивления (4.13) дает следующую связь между коэффициентом шероховатости n и относительной гладкостью дна R/Δ:

$$n=\frac{\varkappa}{\sqrt{g}}\frac{R^{1/6}}{\ln\frac{R}{\Delta}+\varkappa C_3}. \tag{4.17}$$

Если подставить сюда значения эмпирических параметров, полученные Зегждой, и перейти к десятичным логарифмам, будем иметь

$$n=\frac{0{,}17}{\sqrt{g}}\frac{R^{1/6}}{\lg\frac{11R}{\Delta}}. \tag{4.18}$$

Выбор расчетных значений коэффициентов шероховатости нередко содержит элементы субъективности. Однако вытекающая отсюда неточность формулы Маннинга и ей подобных искупается возможностью применять эти формулы в руслах с произвольным строением поверхности дна.

При пользовании формулами сопротивления логарифмического типа, так же как лежащими в их основе формулами распределения скоростей, нельзя забывать об условиях, при которых они получены,— равномерном движении воды по жесткому, плоскому дну, имеющему однообразную шероховатость. Как увидим в главе III, картина, наблюдающаяся в руслах с подвижным дном, гораздо сложнее.

4.3. Распределение скоростей и трение в потоке под ледяным покровом

При образовании ледяного покрова течение в реке или канале становится напорным. Так как шероховатость нижней поверхности льда и шероховатость дна в общем случае неодинаковы, то распределения касательного напряжения и осредненных скоростей в таком потоке несимметричны (рис. 14).

Мы рассмотрим задачу о движении воды подо льдом в тех же предположениях, что в двух предшествующих пунктах: дно плоское, с однообразной шероховатостью, течение плоское и равномерное.

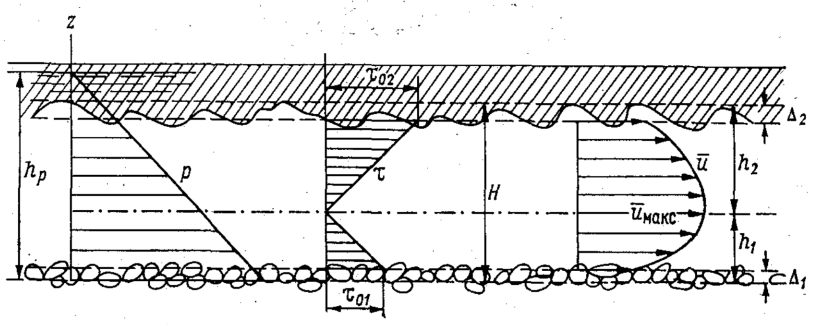


Рис. 14. Равномерное течение под ледяным покровом.

На большинстве рек ледоставу предшествует осенний ледоход. Ледяной покров образуется при этом из отдельных смерзшихся льдин и шероховатость его нижней поверхности оказывается более высокой, чем шероховатость дна. Поэтому, как показано на рис. 14, максимум скоростей смещается от середины вертикали вниз. В процессе нарастания толщины льда его нижняя поверхность выглаживается и во второй половине зимы шероховатость ледяного покрова бывает меньше шероховатости дна. Максимум скоростей располагается при этом выше середины вертикали.

На рис. 15 показана эволюция некоторых характеристик речного потока за зимний период. Данные относятся к р. Енисею,

где наблюдается бурный осенний ледоход. Наблюдения над распределением скоростей, проводившиеся в течение 10 зим, были обработаны У. С. Рось [119]. На рис. 15 *а* дан график изменения во времени отношения h_2/H, где h_2 — расстояние от линии максимума скоростей до нижней поверхности льда, H — расстояние от нижней поверхности льда до дна. На рис. 15 *б* дан график изменения коэффициента шероховатости ледяного покрова. Графики указывают на существование тесной прямой связи между шероховатостью нижней поверхности льда и отношением h_2/H.

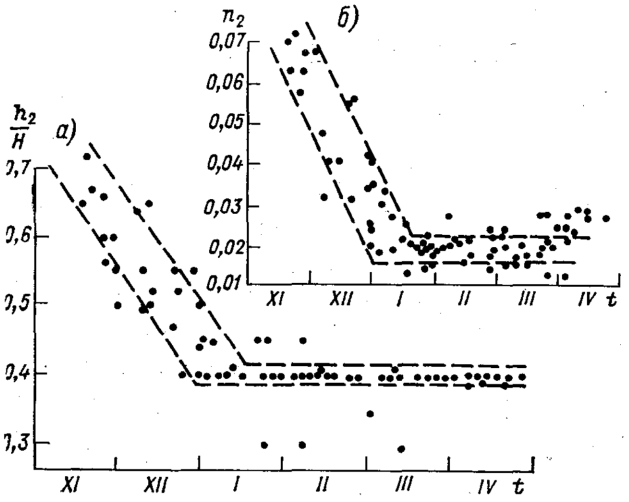


Рис. 15. Изменение характеристик течения подо льдом в зимний период на р. Енисее (по У. С. Рось).

В первом приближении две части потока, разделенные плоскостью нулевого касательного напряжения, могут рассматриваться как два самостоятельных течения, в каждом из которых осуществляется логарифмическое распределение скоростей. Это распределение удобно представить в виде

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{a_0 z}{\Delta}, \qquad (4.19)$$

где постоянная a_0 связана с отношением $\bar{u}(\Delta)/v_* \equiv C_2$ формулой

$$\frac{1}{\varkappa} \ln a_0 = \frac{\bar{u}(\Delta)}{v_*}.$$

При $\bar{u}(\Delta)/v_* = 7{,}5$ и $\varkappa = 0{,}4$ постоянная $a_0 = 20$.

Напишем формулу (4.19) для каждой из частей потока подо льдом и положим в обоих выражениях $z = h_1$, $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = \overline{u}_{\text{макс}}$. В результате получим следующее соотношение между величинами касательного напряжения на нижней и верхней границах потока:

$$\frac{v_{*1}}{v_{*2}} = \frac{\ln(a_0 h_2) - \ln \Delta_2}{\ln(a_0 h_1) - \ln \Delta_1}. \tag{4.20}$$

Наряду с этим при линейном распределении касательного напряжения поперек потока должно быть

$$\frac{v_{*1}}{v_{*2}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}. \tag{4.21}$$

Исключая из формул (4.20) и (4.21) отношение динамических скоростей, имеем

$$\sqrt{h_1} \ln \frac{a_0 h_1}{\Delta_1} = \sqrt{h_2} \ln \frac{a_0 h_2}{\Delta_2}. \tag{4.22}$$

Если характеризовать сопротивление дна и нижней поверхности ледяного покрова соответствующими коэффициентами шероховатости, то основываясь на формулах Шези и Маннинга, вместо равенства (4.22) надо писать

$$\sqrt{h_1}\left(\frac{h_1^{1/6}}{n_1\sqrt{g}} + 1\right) = \sqrt{h_2}\left(\frac{h_2^{1/6}}{n_2\sqrt{g}} + 1\right). \tag{4.23}$$

Когда глубины велики, то в каждой из частей потока $h^{1/6} \gg n\sqrt{g}$ и формула (4.23) может быть заменена простым соотношением

$$\frac{h_1}{h_2} \approx \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1,5}. \tag{4.24}$$

Присоединяя к написанным формулам равенство $h_1 + h_2 = H$, получаем возможность найти по известным значениям H, Δ_1, Δ_2 (или H, n_1, n_2) значения h_1 и h_2, т. е. определить положение максимальной скорости. После этого формула (4.21) вместе с условием динамического равновесия

$$v_{*1}^2 + v_{*2}^2 = gHI \tag{4.25}$$

позволяют найти v_{*1} и v_{*2}. Величина максимальной скорости $\overline{u}_{\text{макс}}$ устанавливается с помощью формулы (4.19), записанной в плоскости нулевого касательного напряжения при значениях v_*, h и Δ, взятых для любой из частей потока.

Остается найти средние скорости U_1 и U_2 и удельный расход воды q. Для этого служат два уравнения вида

$$U = \overline{u}_{\text{макс}} - \frac{v_*}{\varkappa} \tag{4.26}$$

и условие неразрывности

$$U_1h_1+U_2h_2=q. \tag{4.27}$$

Задача, таким образом, решена. На основании исходных данных о расстоянии H между твердыми границами потока, уклоне I и характеристиках сопротивления граничных поверхностей Δ_1 и Δ_2 или n_1 и n_2 определяются восемь основных параметров течения воды подо льдом: h_1, h_2, v_{*1}, v_{*2}, $u_{макс}$, U_1, U_2 и q. С помощью написанных зависимостей можно решать также задачу, в которой задан удельный расход воды q и требуется знать величину H. Приведем дополнительно формулу, связывающую величину H с полной глубиной h_p потока, покрытого ледяным покровом

$$H=h_p-0{,}9\delta, \tag{4.28}$$

где δ — толщина льда.

Величина Δ_2 представляет собой эффективную высоту выступов шероховатости льда. Так же как коэффициент n_2, она должна находиться по измеренным величинам I, h_2 и U_2 или путем пересчета известной величины n_2.

Сравнение профилей скорости, построенных по изложенному методу, с данными натурных измерений произведено в статье [36].

4.4. Распределение скоростей при неравномерном и неустановившемся движении жидкости в открытом русле

Наши рассуждения в этом пункте будут иметь качественный характер.

Начнем с неравномерного установившегося движения. Будем считать его плоским, дно — плоским и гидравлически шероховатым. Координатную плоскость (x, y) проведем через основания выступов шероховатости. Высоту выступов положим малой: $\Delta \ll h$. Для анализа движения воспользуемся первым уравнением системы (3.19). Заменив высоты свободной поверхности z' глубинами h, обозначив касательное напряжение $-\rho\overline{u'w'}\equiv\tau$ и приравняв к нулю производную $\partial\bar{u}/\partial t$, напишем это уравнение в плоскости вершин выступов шероховатости $z=\Delta$. Учтя граничное условие непроницаемости дна $\bar{w}(\Delta)=0$, будем иметь

$$\bar{u}(\Delta)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\Big|_\Delta=g\left(i_0-\frac{dh}{dx}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial z}\Big|_\Delta. \tag{4.29}$$

Используя условие неразрывности, представим величину $g\dfrac{dh}{dx}$ в следующем виде:

$$g\frac{dh}{dx}=gq\frac{d}{dx}\frac{1}{U}=-g\frac{h}{U}\frac{dU}{dx}=-\frac{U}{\mathrm{Fr}}\frac{dU}{dx}. \tag{4.30}$$

Перенеся это выражение в уравнение (4.29), после перегруппировки членов получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial z}\Big|_{\Delta}=\bar{u}(\Delta)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\Big|_{\Delta}-\frac{U}{Fr}\frac{\partial U}{\partial x}-gi_0. \qquad (4.31)$$

В области малых чисел Фруда, где действительно исходное уравнение (3.19), второй член правой части (4.31) имеет заведомо бо́льшую абсолютную величину, чем первый. Отсюда следует, что в неравенстве

$$-\frac{\partial\tau}{\partial z}\Big|_{\Delta}\gtrless\rho g i_0 \qquad (4.32)$$

верхний знак отвечает ускоренному движению, а нижний — замедленному. Знак равенства отвечает равномерному движению и, следовательно, уравнение (4.31) свидетельствует о том, что при ускоренном движении касательное напряжение вблизи дна убывает с ростом z быстрее, а при замедленном — медленнее, чем при равномерном. При сильном замедлении потока (быстром возрастании глубин по x) производная $\partial\tau/\partial z$ у дна может стать больше нуля. *Касательное напряжение τ в неравномерном потоке распределяется по вертикали нелинейно* (рис. 16).

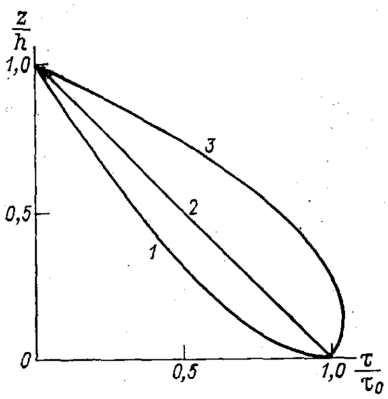


Рис. 16. Распределение касательного напряжения по вертикали.
1 — в ускоренном потоке, *2* — в равномерном, *3* — в замедленном.

Чтобы оценить, как меняется с переходом к неравномерному движению распределение осредненных скоростей, напишем в дополнение к уравнению (4.29) уравнение движения на свободной поверхности. Из равенства здесь касательного напряжения нулю следует равенство нулю производной $\partial\bar{u}/\partial z$. Таким образом, мы получаем уравнение такого же вида, как (4.29)

$$\bar{u}(h)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\Big|_{h}=g\left(i_0-\frac{dh}{dx}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial z}\Big|_{h}. \qquad (4.33)$$

Вычитая уравнение (4.29) из уравнения (4.33), находим

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\Big|_{h}-\frac{\partial\tau}{\partial z}\Big|_{\Delta}\right)=\bar{u}(h)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\Big|_{h}-\bar{u}(\Delta)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\Big|_{\Delta}. \qquad (4.34)$$

При очень быстром изменении скоростей вдоль потока силы трения могут оказаться малыми по сравнению с силами инерции, и, согласно уравнению (4.34), получим

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\Big|_{h}:\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\Big|_{\Delta}\approx\frac{\bar{u}(\Delta)}{\bar{u}(h)}. \qquad (4.35)$$

Это значит, что интенсивность изменения донной скорости больше, чем интенсивность изменения поверхностной и, следовательно, *в ускоренном потоке распределение скоростей по вертикали выравнивается, а в замедленном его неоднородность возрастает.*

Уравнение (4.34) показывает, что трение смягчает указанные тенденции: благодаря силам трения выравнивание скоростей при ускорении движения и «растягивание» эпюры скоростей при замедленном бывает более умеренным, чем это могло бы наблюдаться при отсутствии трения.

Имея дело с гидравлически гладким руслом и взяв вместо скорости $\overline{u}(\Delta)$ на высоте выступов шероховатости скорость $\overline{u}(\delta)$ на внешней границе вязкого подслоя, мы пришли бы к таким же качественным результатам. Эти результаты хорошо подтверждаются экспериментальными и натурными данными. На рис. 17 приве-

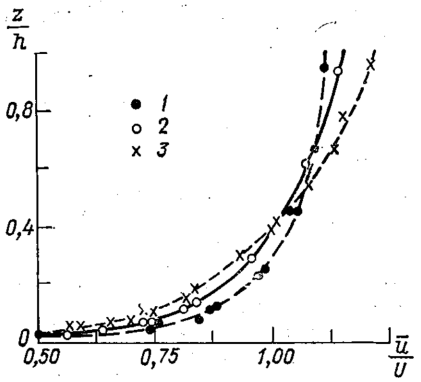


Рис. 17. Распределение скоростей по вертикали.

1 — в ускоренном потоке, *2* — в равномерном, *3* — в замедленном (опыты Залуцкого).

дены профили осредненных скоростей при равномерном, ускоренном и замедленном движении, полученные Э. В. Залуцким [54] в лабораторном лотке с гидравлически гладким дном. У ускоренного и замедленного потоков абсолютная величина производной $\frac{dh}{dx}$ составляла 0,02, что для открытого плавноизменяющегося потока означает высокую степень неравномерности.

Влиянию нестационарности движения на распределение осредненных скоростей и гидравлическое трение было посвящено теоретическое исследование О. Ф. Васильева и В. И. Квона [15] и работа автора [30]. В цилиндрических руслах с малой относительной шероховатостью дна движение прямой положительной волны $\left(\frac{\partial h}{\partial t}>0,\ \frac{\partial h}{\partial x}<0\right)$ сопровождается выравниванием скоростей на вертикалях, а движение прямой отрицательной волны $\left(\frac{\partial h}{\partial t}<0,\ \frac{\partial h}{\partial x}>0\right)$ — увеличением неоднородности распределения скоростей. Так же как в неравномерном движении, силы трения ослабляют эти эффекты. Так

как колебания стока совершаются медленно, а сопротивление естественных русел значительно, отклонения эпюр скоростей во время паводка от эпюр, свойственных установившемуся движению, гидрометрическими измерениями не улавливаются. Н. Н. Федоров [137], проанализировав данные измерений в нижнем бьефе ГЭС на р. Тверце, нашел, что эффекты перераспределения скоростей при внутрисуточных колебаниях расхода были близки к точности измерений. Влияние нестационарности движения на гидравлическое сопротивление естественных русел практически неощутимо.

5. Турбулентные пульсации

5.1. Способы статистического описания турбулентных пульсаций

К услугам читателя, желающего основательно познакомиться со статистической теорией турбулентности, в настоящее время имеется несколько прекрасных книг, из которых в первую очередь должны быть указаны монографии А. С. Монина и А. М. Яглома [98], И. О. Хинце [143] и А. А. Таунсенда [132]. Поэтому изложение в этом параграфе является сжатым. Вначале вводятся основные представления статистической теории, далее сообщаются сведения, полученные из наблюдений.

Статистическая теория турбулентности имеет дело с актуальными скоростями и актуальным давлением. Следуя идеям Рейнольдса, она рассматривает, однако, не сами актуальные скорости и давление, а их отклонения от осредненных величин, т. е. пульсационные скорости $v_i' = v_i - \overline{v_i}$ и пульсационное давление $p' = p - \overline{p}$. При изложении статистической теории ограничимся квазистационарными турбулентными течениями, т. е. такими течениями, все статистические характеристики которых не изменяются во времени.

Таким образом, объектами статистического исследования ниже будут четыре стационарные случайные функции координат пространства и времени:

$$\left.\begin{aligned} v_i' &= f_i(x_1, x_2, x_3, t), \\ p' &= f_p(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Можно говорить также о квазистационарном случайном векторном поле пульсационных скоростей и квазистационарном случайном скалярном поле пульсаций давления. Эргодическая гипотеза, сформулированная в начале данной главы, избавляет от необходимости рассматривать различные реализации функ-

ций (5.1), разрешая изучать их по одной достаточно продолжительной реализации.

Корреляционные функции. Основным средством статистического описания функций (5.1) служат *моменты связи* (корреляции) компонент пульсационных скоростей и давления в разных точках пространства или (и) в разные моменты времени. Различают пространственные, временные и пространственно-временные моменты связи. *Пространственным моментом связи* m-го порядка называется осредненное произведение m значений компонент пульсационных скоростей и, может быть, давления, одновременно наблюдаемых в одной или нескольких точках пространства.

Представляют наибольший интерес и наиболее изучены одноточечные и двухточечные моменты связи второго порядка между компонентами пульсационных скоростей. Совокупность всевозможных двухточечных моментов второго порядка образует тензор второго ранга

$$B_{ij}(M_0,\ M)=\overline{v_i'(M_0)v_j'(M)}, \tag{5.2}$$

где M_0 и M — точки, выделенные в области движения. Значения моментов, входящих в тензор $B_{ij}(M_0,\ M)$, зависят от размаха пульсаций скорости и от тесноты линейной статистической связи между пульсациями в двух рассматриваемых точках пространства.

Устремив точку M к точке M_0, получим тензор $B_{ij}(M_0)$ одноточечных моментов связи второго порядка. Корни квадратные из диагональных членов этого тензора $\left(\sqrt{\overline{v_1'^2}},\ \sqrt{\overline{v_2'^2}},\ \sqrt{\overline{v_3'^2}}\right)$ представляют средние квадратичные значения трех компонент пульсационных скоростей в точке M_0. Они выражают интенсивность турбулентности по трем координатным направлениям и служат важной характеристикой турбулентного движения.

Умножив тензор $B_{ij}(M_0)$ на плотность жидкости и изменив знаки всех входящих в него моментов на обратные, придем к знакомому нам тензору напряжений турбулентной вязкости

$$-\rho B_{ij}(M_0)=-\rho\overline{v_i'v_j'}. \tag{5.3}$$

Двухточечные моменты связи между компонентами пульсационных скоростей в одной точке области движения и давлением в другой образуют тензор моментов связи первого ранга (вектор) с компонентами $\overline{v_i'(M_0)p'(M)}$.

Если при составлении двухточечных моментов связи между компонентами пульсационных скоростей определять эти компоненты в точке M_0 в момент времени t_0, а в точке M в другой

момент времени $t = t_0 + \vartheta$, то получим *тензор пространственно-временны́х моментов связи*

$$B_{ij}(M_0, M, \vartheta) = \overline{v_i'(M_0, t_0)\, v_j'(M, t)}. \tag{5.4}$$

Вследствие стационарности функций f_i этот тензор зависит не от моментов времени t_0 и t, а только от разности ϑ этих моментов времени. Устремив в формуле (5.4) точку M к точке M_0, получим *тензор эйлеровых временны́х моментов связи*

$$B_{ij}(M_0, \vartheta) = \overline{v_i'(M_0, t_0)\, v_j'(M_0, t)}. \tag{5.5}$$

Значения моментов, стоящих в правой части выражения (5.5), отражают размах пульсаций в точке M_0 и тесноту линейной статистической связи между пульсациями в этой точке в разные моменты времени.

В качестве примера моментов связи третьего порядка приведем пространственные моменты вида

$$\overline{v_i'(M_0)\, v_j'(M_0)\, v_k'(M)}.$$

Всевозможные моменты этого вида образуют тензор третьего ранга.

Вследствие влияния на моменты размаха пульсаций значения моментов не позволяют судить с полной определенностью о статистической связанности пульсаций и тем более сравнивать степень связанности в разных частях области движения или в разных потоках. Чтобы устранить это неудобство, от моментов связи переходят к коэффициентам корреляции. *Коэффициент корреляции* представляет частное от деления момента связи на произведение средних квадратичных значений пульсирующих величин. Так, например, двухточечным пространственным моментам связи второго порядка соответствуют коэффициенты корреляции вида

$$R_{ij}(M_0, M) = \frac{\overline{v_i'(M_0)\, v_j'(M)}}{\sqrt{\overline{[v_i'(M_0)]^2}}\,\sqrt{\overline{[v_j'(M)]^2}}}. \tag{5.6}$$

Эти безразмерные величины уже не зависят от размаха пульсаций, они измеряют одну лишь тесноту статистической связи между компонентами пульсационных скоростей. В анизотропном турбулентом течении коэффициенты корреляции, в отличие от моментов связи, не образуют тензора.

Значения коэффициентов корреляции лежат в границах

$$-1 \leqslant R \leqslant +1. \tag{5.7}$$

Статистическая связанность пульсационного движения распространяется на ограниченные области времени и пространства и внутри этих областей изменяется сложным образом. Изучить

изменение статистической связанности пульсаций во времени, значит представить одноточечные коэффициенты корреляции R_{ij} в функции разности ϑ моментов времени t и t_0:

$$R_{ij}=R_{ij}(M_0, \vartheta). \tag{5.8}$$

Изучить изменение статистической связанности пульсаций в пространстве, значит представить двухточечные коэффициенты корреляции в функции разностей $\zeta_i = x_i - (x_i)_0$ координат фиксированной точки M_0 и переменной точки M

$$R_{ij}=R_{ij}(M_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3). \tag{5.9}$$

Пространственно-временна́я связанность пульсаций будет описываться зависимостью коэффициентов корреляции от четырех переменных — трех разностей координат и сдвига во времени

$$R_{ij}=R_{ij}(M_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \vartheta). \tag{5.10}$$

Зависимости видов (5.8)—(5.10) носят название *корреляционных функций.* Совокупность корреляционных функций дает исчерпывающее представление о статистической связанности компонент пульсационного движения.

В экспериментах чаще всего исследуется корреляция между продольными компонентами пульсационной скорости в два момента времени, в двух точках на продольной оси $0x_1$ или в двух точках на оси $0x_3$, нормальной ко дну (стенке трубы). Таким образом, наиболее изучены корреляционные функции $R_{11}(\vartheta)$, $R_{11}(\zeta_1, 0, 0)$ и $R_{11}(0, 0, \zeta_3)$.

Корреляционные функции знакопеременны. При малых значениях аргументов ϑ, ζ коэффициенты корреляции всегда положительны. Затем они переходят через нуль, достигают некоторого минимума и далее стремятся к нулю со стороны своих отрицательных значений. Среди эмпирически полученных корреляционных функций можно выделить два крайних типа. Функции, принадлежащие к первому типу, имеют слабый минимум $|R_{\min}| \ll 1$, приходящийся на большие значения аргумента. Практически такие функции можно считать неотрицательными. Функции второго типа переходят через нуль недалеко от начала оси абсцисс и имеют минимум с абсолютной величиной порядка 10^{-1}. Пренебрегать их знакопеременностью нельзя. При плоском осредненном движении ($\overline{v_2} = 0$) функции $R_{11}(\vartheta)$ и $R_{11}(\zeta_1, 0, 0)$ принадлежат к первому типу, функции $R_{11}(0, 0, \zeta_3)$ — ко второму. Измерения, сделанные в русловых потоках, весьма часто обнаруживают явную знакопеременность у всех трех функций. Иногда измерения дают картину двух- или трехкратной перемены знака коэффициента корреляции. График корреляционной функции напоминает в этих случаях график затухающих колебаний. Знакопеременность корреляционных функций связана

с движением больших вихрей турбулентного потока, но не требует в качестве необходимого условия, чтобы движение больших вихрей было периодическим.

Корреляционные функции $R_{ij}(\vartheta)$ и $R_{ij}(\zeta_k)$ позволяют построить интегральные масштабы времени и длины пульсационного движения

$$\theta_{ij}=\int_0^\infty R_{ij}(M_0, \vartheta)\,d\vartheta, \tag{5.11}$$

$$(l_{ij})_k=\int_0^\infty R_{ij}(M_0, \zeta_k)\,d\zeta_k. \tag{5.12}$$

Экспериментальные данные содержат преимущественно сведения о масштабах θ_{11}, $(l_{11})_1$ и $(l_{11})_3$.

Когда корреляционные функции принадлежат к первому типу, т. е. практически неотрицательны, масштабы θ_{ij} и $(l_{ij})_k$ имеют смысл средних взвешенных отрезков времени и длины, на протяжении которых пульсационные скорости остаются статистически связанными. При резко выраженной знакопеременности корреляционных функций (второй тип функций) этот смысл величин θ_{ij} и $(l_{ij})_k$ утрачивается. Возможен случай, когда знакопеременность такова, что величины θ_{11} и $(l_{11})_1$ равны нулю. Ясно, что это ничего не говорит о среднем периоде и средней протяженности крупномасштабных турбулентных возмущений.

При наличии знакопеременных корреляционных функций часто пользуются приемом приближенной оценки периодов и размеров крупномасштабных возмущений по тем значениям аргументов ϑ и ζ_k, при которых корреляционные функции переходят через нуль. Так, за характерный период Θ_1 крупномасштабных возмущений продольной скорости и за характерный продольный размер их L_1 принимают

$$\Theta_1=\vartheta\,(R_{11}=0), \quad L_1=\zeta_1\,(R_{11}=0). \tag{5.13}$$

Строгого обоснования этот прием не имеет. Очевидно, всегда $\Theta_1 > \theta_1$ и $L_1 > l_{11}$.

Если осредненное течение вдоль оси $0x_1$ равномерное и пульсационные скорости малы по сравнению с осредненными: $|v_1'| \ll \overline{v}_1$, то со статистической точки зрения хронограмма пульсаций в фиксированной точке идентична мгновенному распределению пульсационных скоростей на прямой, проходящей через данную точку в направлении движения. Это представление, введенное Дж. Тэйлором, известно под названием *гипотезы «замороженной турбулентности»*. Если гипотеза справедлива,

то коэффициенты корреляции для скоростей v_1', пространственный в направлении $0x_1$ и временной при всяком $\zeta_1 = \overline{v}_1\vartheta$, равны

$$R_{11}(M_0, \zeta_1=\overline{v}_1\vartheta, 0, 0)=R_{11}(M_0, \vartheta). \tag{5.14}$$

Отсюда имеем также простое соотношение между интегральными масштабами

$$(l_{11})_1=\overline{v}_1\theta_{11}. \tag{5.15}$$

Спектральные функции. Можно значительно углубить содержание статистической теории турбулентности, если от корреляционных функций перейти к спектральным. *Спектральной функцией* называется функция, выражающая плотность распределения энергии турбулентности по частотам пульсаций. Если энергия, приходящаяся на элемент частоты, выражена в долях суммарной энергии, т. е. представлена в безразмерном виде, говорят о нормированной спектральной функции. Определением нормированной спектральной функции $s_{ii}(n)$ служит формула

$$s_{ii}(n)\,dn=\frac{\overline{[v_i'(n,\ n+dn)]^2}}{\overline{v_i'^2}}. \tag{5.16}$$

Здесь n — частота пульсаций, $\overline{[v_i'(n, n+dn)]^2}$ — энергия пульсаций i-той компоненты скорости, приходящаяся на интервал частот от n до $n+dn$.

Нормированная спектральная функция удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty s_{ii}(n)\,dn=1. \tag{5.17}$$

Дж. Тэйлор [235] показал (в дальнейшем это было доказано более строго), что эйлерова временна́я корреляционная функция $R_{ii}(\vartheta)$ и спектральная функция $s_{ii}(n)$ связаны друг с другом преобразованием Фурье. Напомним, что интегральное преобразование Фурье двух четных функций $f_1(\mu)$ и $f_2(\nu)$ выражается формулами [1]

$$f_1(\mu)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_2(\nu)\cos\mu\nu\,d\nu, \tag{5.18}$$

$$f_2(\nu)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_1(\mu)\cos\mu\nu\,d\mu. \tag{5.19}$$

[1] Четная функция $y=y(x)$ удовлетворяет условию $y(x)=y(-x)$. Корреляционная и спектральная функции четные.

Подставив сюда $\mu = \vartheta$, $\nu = 2\pi n$, $f_1(\mu) = R_{ii}(\vartheta)$, $f_2(\nu) = \frac{s_{ii}(n)}{2\sqrt{2\pi}}$, получим

$$R_{ii}(\vartheta) = \int_0^\infty s_{ii}(n) \cos 2\pi n\vartheta \, dn, \tag{5.20}$$

$$s_{ii}(n) = 4 \int_0^\infty R_{ii}(\vartheta) \cos 2\pi n\vartheta \, d\vartheta. \tag{5.21}$$

Таким образом, спектральная функция может быть определена как путем прямых измерений (пропусканием сигнала прибора, записывающего пульсации, через узкополосный фильтр), так и путем пересчета по известной корреляционной функции. Приравняв в формуле (5.21) частоту n нулю, получим начальную ординату спектральной функции

$$s_{ii}(0) = 4 \int_0^\infty R_{ii}(\vartheta) \, d\vartheta = 4\theta_{ii}. \tag{5.22}$$

Определить начальную ординату спектральной функции путем прямых измерений невозможно. Формула (5.22) позволяет сделать это косвенным способом — по известному интегральному масштабу турбулентности.

Взаимосвязь между корреляционной и спектральной функциями иллюстрируется рис. 18, на котором представлены два крайних случая: а) корреляционная функция положительна при всех значениях аргумента (убывает по экспоненте); б) корреляционная функция знакопеременная и знакопеременность такова, что интегральный масштаб турбулентности равен нулю. При $n = 0$ спектральная функция имеет в первом случае максимум, а во втором равна нулю.

При равномерном осредненном течении вдоль оси x_1, когда можно воспользоваться гипотезой замороженной турбулентности, положив в формулах (5.20) и (5.21) $i = 1$ и $\vartheta = \zeta_1/\overline{v}_1$, получаем:

$$R_{11}(\zeta_1) = \int_0^\infty s_{11}(n) \cos 2\pi n \frac{\zeta_1}{\overline{v}_1} \, dn, \tag{5.23}$$

$$s_{11}(n) = \frac{4}{\overline{v}_1} \int_0^\infty R_{11}(\zeta_1) \cos 2\pi n \frac{\zeta_1}{\overline{v}_1} \, d\zeta_1, \tag{5.24}$$

причем $s_{11}(0) = 4\dfrac{(l_{11})_1}{\overline{v}_1}$.

Преобразование Фурье пространственных корреляционных функций в общем случае турбулентного движения дает функ-

цию, известную под названием *спектра по волновым числам.* Спектр по волновым числам не нормируется и записывается в виде

$$\varphi_{ii}(k_l) = 4\overline{v_i'^2}\int_0^\infty R_{ii}(\zeta_l)\cos k_l\zeta_l\, d\zeta_l, \qquad (5.25)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; λ — длина волны турбулентного возмущения; i — отмечает направление компоненты скорости;

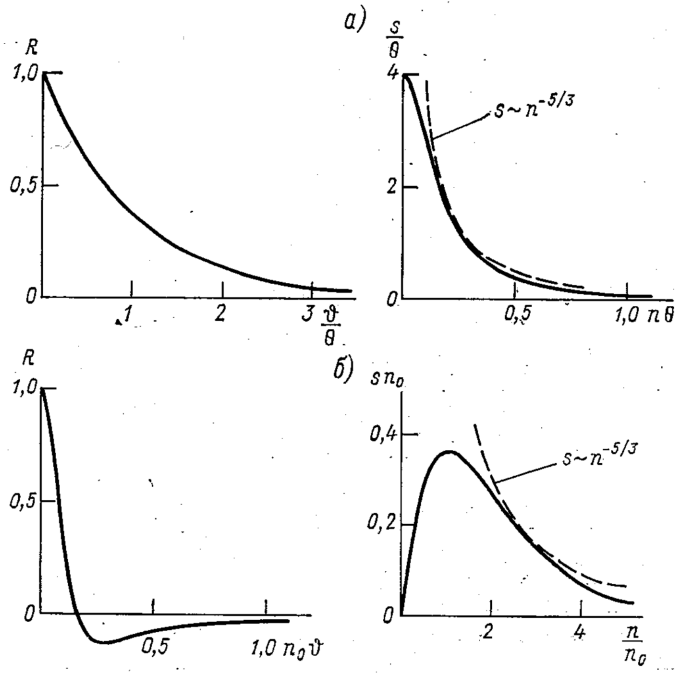


Рис. 18. Корреляционные и спектральные функции.

а — при положительном коэффициенте корреляции, *б* — при знакопеременном.

l — направление оси, на которой лежат сопоставляемые точки. Спектральная функция $\varphi_{ii}(k_l)$ с размерностью L^3T^{-2} выражает плотность распределения энергии i-той компоненты пульсаций по волновым числам. Совокупность волновых чисел k_1, k_2, k_3 определяет волновой вектор $\mathbf{k}$. Наряду со спектральными функциями вида (5.25) в теории турбулентности рассматриваются спектральные функции, выражающие плотность распределения энергии пульсаций по волновым векторам $\mathbf{k}$ и по модулям волновых векторов. Спектры по волновым числам не измеряют, а получают путем пересчета из измеренных корреляционных

функций. Спектр $\varphi_{11}(k_1)$ можно получить из измеренного частотного спектра $s_{11}(n)$, используя гипотезу замороженной турбулентности, т. е. применяя соотношение $k_1 = \dfrac{2\pi n}{\overline{v}_1}$.

Распределения вероятностей. В течение долгого времени считали (и сейчас нередко постулируют), что пульсации скорости в фиксированной точке пространства подчиняются закону нормального распределения (Гаусса) с симметричной функцией плотности распределения вероятностей. Современные экспериментальные данные показывают, что в действительности распределение пульсационных скоростей уклоняется от нормального. О характере и степени уклонения можно судить по знаку и абсолютным значениям коэффициента асимметрии распределения — безразмерной величине, составляемой из одноточечных моментов связи второго и третьего порядков

$$C_s \equiv \frac{\overline{v_i'^3}}{\left(\overline{v_i'^2}\right)^{3/2}}.$$

В случае нормального распределения величина C_s равна нулю. Тщательно выполненные измерения мгновенных продольных скоростей в напорном турбулентном потоке [78] показали, что в ядре течения распределения значений v_1' имеют отрицательную асимметрию: $C_s<0$, причем наибольшая асимметрия наблюдается вблизи оси трубы. Отрицательную асимметрию имеет также распределение производных $\dfrac{\partial v_1'}{\partial x_1}$ от продольных пульсационных скоростей по продольной координате. Этот результат, установленный экспериментально, соответствует полученному в теории локально-изотропной турбулентности выводу об отрицательной асимметрии распределения мгновенных разностей продольных скоростей в двух точках, лежащих на оси, параллельной осредненному движению.

Отрицательная асимметрия распределений продольных пульсационных скоростей и их производных по продольной координате отражает следующие свойства турбулентного движения.

1. Отрицательные отклонения мгновенных продольных скоростей от середины длятся меньше, но являются более глубокими, чем положительные отклонения.

2. На оси, параллельной осредненному движению, интервалы, вдоль которых мгновенная скорость нарастает, длиннее интервалов, где она падает. Иными словами, расхождение двух частиц жидкости в продольном направлении совершается медленнее, чем их сближение.

3. Продолжительность возрастания продольной скорости в фиксированной точке в среднем меньше продолжительности

падения скорости. Эту особенность турбулентных течений легко заметить в ветреный день — порывы ветра всегда короче периодов падения его силы.

5.2. Некоторые физические закономерности в спектре пульсаций

Изучение энергетического спектра турбулентных пульсаций приводит к очень важному для понимания природы турбулентности представлению о передаче энергии от движений одного масштаба к движению другого (всегда меньшего) масштаба. Это представление, выдвинутое в качественном виде Л. Ричардсоном, получило затем глубокое развитие в работах А. Н. Колмогорова [74] и А. М. Обухова [102].

В свете указанного представления наблюдаемый спектр пульсаций разбивается на три основных интервала: 1) интервал низких частот, где совершается отбор энергии от осредненного движения, или «производство турбулентности»; 2) интервал средних частот, для которого характерна передача энергии по спектру от малых к большим частотам; 3) интервал высоких частот, где происходит рассеяние механической энергии в тепло.

Если числа Рейнольдса не очень велики, вязкостная диссипация идет во всех интервалах спектра, а также и в осредненном движении и можно говорить лишь о том, что главная часть процесса диссипации приходится на высокие частоты колебаний. Если течение характеризуется очень большим числом Рейнольдса, то можно считать, что диссипация энергии полностью сосредоточена в высокочастотном интервале. При этом, согласно основной идее Колмогорова, турбулентные движения в области высоких и средних частот локально изотропны (см. п. 3.1).

Линейные размеры возмущений, относящихся к двум крайним интервалам спектра, принято характеризовать с помощью внутреннего и внешнего масштабов турбулентности. *Внутренний масштаб турбулентности* l_v, определяющий размеры наименьших высокочастотных вихрей, зависит от физических свойств жидкости и не имеет прямой связи с геометрией течения. *Внешний масштаб турбулентности* l, определяющий размеры наиболее крупных низкочастотных вихрей, если числа Рейнольдса очень велики, зависит только от геометрии течения. Крупные вихри, по выражению Обухова, «должны как-то приспосабливаться к размерам в форме русла» [102].

Особенности турбулентных движений в интервалах средних и высоких частот при очень большом числе Рейнольдса для течения в целом выражаются двумя гипотезами подобия Колмогорова. Согласно *первой гипотезе подобия*, все статистические характеристики высокочастотной турбулентности полностью определены тремя величинами: плотностью жидкости ρ, ее вязкостью μ и средней скоростью диссипации энергии турбулентности

в единице массы жидкости $\overline{\varepsilon}_т$. При достаточно больших числах Рейнольдса скорость диссипации $\overline{\varepsilon}_т$ равна полной скорости диссипации энергии $\overline{\varepsilon}$ (прямого перехода в тепло у энергии осредненного движения нет).

На основании первой гипотезы подобия, используя соображения размерности и равенство $\overline{\varepsilon}_т = \overline{\varepsilon}$, получаем следующее выражение внутреннего масштаба турбулентности:

$$l_v = \left(\frac{\nu^3}{\overline{\varepsilon}}\right)^{1/4}. \tag{5.26}$$

Соответствующий масштаб времени будет равен

$$\theta_v = \left(\frac{\nu}{\overline{\varepsilon}}\right)^{1/2}. \tag{5.27}$$

Величины l_v и θ_v определяют порядок длин волн и периодов высокочастотных возмущений в турбулентном потоке. Пользуясь ими как единицами длины и времени, будем получать во всех потоках с большими числами Рейнольдса одно и то же распределение вероятностей мелкомасштабных компонент скорости. Переход от величин l_v и θ_v к средним значениям длин и периодов волн совершается с помощью эмпирических коэффициентов пропорциональности.

Каковы значения l_v в русловом потоке? Чтобы ответить на этот вопрос, найдем среднюю скорость диссипации на вертикали. Считая движение равномерным, воспользуемся для энергии, рассеиваемой в ядре течения, формулой (3.31), а скорость рассеяния в слое выступов шероховатости ($0 < z \leqslant \Delta$, $\Delta \ll h$) определим произведением $\frac{\tau_0}{\rho}\overline{u}(\Delta)$. Будем иметь

$$(\overline{\varepsilon})_{ср} = \frac{\tau_0}{\rho h}\left[\int_{\Delta}^{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right)\frac{d\overline{u}}{dz}\,dz + \overline{u}(\Delta)\right]. \tag{5.28}$$

Введя сюда выражение градиента скорости (4.1), выполнив интегрирование и использовав равенство (4.12), получим

$$(\overline{\varepsilon})_{ср} = \frac{\tau_0 U}{\rho h} = gIU. \tag{5.29}$$

Если в формулу (5.29) подставить значения I и U, характерные для русловых потоков с небольшими числами Фруда, и перенести подсчитанные значения скорости диссипации энергии в формулу (5.26), получится, что значения внутреннего масштаба турбулентности имеют порядок десятых долей миллиметра, т. е. сравнимы с диаметром песчинок речного дна. С помощью формулы (5.27) можно найти, что соответствующие частоты колебаний измеряются десятками и сотнями герц.

Согласно *второй гипотезе подобия* Колмогорова, в области средних частот, именуемой *инерционным* интервалом спектра, статистические характеристики движения не зависят от плотности и вязкости жидкости и полностью определяются величиной $\bar{\varepsilon}$.

Вторая гипотеза позволяет судить о пространственной неоднородности поля пульсаций и о виде энергетического спектра в инерционном интервале. Пусть Δv есть разность абсолютных значений мгновенных скоростей в двух точках потока, разделенных расстоянием Δx, которое мало по сравнению с внешним масштабом турбулентности и велико по сравнению с внутренним масштабом: $l \gg \Delta x \gg l_v$. Тогда, согласно второй гипотезе и в соответствии с размерностями величин Δv, Δx и $\bar{\varepsilon}$, должно быть

$$\overline{(\Delta v)^2} \sim (\bar{\varepsilon}\,\Delta x)^{2/3}. \tag{5.30}$$

Спектральная функция $\varphi(k)$ в инерционном интервале волновых чисел k также должна определяться скоростью диссипации энергии. Соображения размерности сразу дают вид этой функции

$$\varphi(k) = \bar{\varepsilon}^{-2/3} k^{-5/3}. \tag{5.31}$$

В силу условия локальной изотропии расстояние Δx в формуле (5.30) и волновое число k в формуле (5.31) не различаются по направлениям. Формула (5.30) известна под названием «*закон двух третей*», а формула (5.31), впервые полученная А. М. Обуховым [102],— «*закон пяти третей*».

Опыт и некоторые теоретические расчеты показывают, что область действия закона пяти третей не ограничена инерционным интервалом, но простирается довольно далеко в низкочастотный интервал спектра, где условия локальной изотропии уже не соблюдаются (см. п. 5.4).

Соотношения (5.26), (5.27), (5.30) и (5.31) действительны для всех турбулентных течений, характеризующихся достаточно большими числами Рейнольдса. Получить столь же универсальные соотношения в интервале низких частот невозможно вследствие сложной зависимости масштабов низкочастотной турбулентности от геометрии течений.

Если, однако, ограничиться так называемой *пристеночной* турбулентностью, т. е. течениями в открытых руслах, трубах и пограничном слое, то можно прийти к некоторым полезным результатам, имеющим общее значение для всего этого класса течений. Будем при этом различать *локальные* внешние масштабы турбулентности, величины которых меняются в зависимости от положения точки по отношению к твердым границам потока, и *глобальные* внешние масштабы, связанные только с поперечными размерами потока в целом.

В придонной области открытого потока, так же как и в пристеночной части пограничного слоя или потока в трубе, можно

считаться с влиянием лишь одной ограничивающей поверхности и вводить соответственно лишь один определяющий геометрический параметр — расстояние z данной точки от этой поверхности. При этом поле крупномасштабных пульсаций, как и поле осредненных скоростей, будет полностью задано величинами ρ, τ_0 и z. Локальный внешний масштаб турбулентности напишется в виде

$$l=z, \tag{5.32}$$

а соответствующий масштаб времени — в виде

$$\theta=\frac{z}{v_*}. \tag{5.33}$$

Определенный формулой (5.32) масштаб l с точностью до постоянной совпадает с длиной «пути перемешивания» Прандтля. Записав турбулентную вязкость, по аналогии с молекулярной вязкостью, в виде произведения длины l на скорость поперечного переноса $l/\theta = v_*$, получим $\nu_т \sim v_* z$. Вместе с формулой (3.20) это соотношение дает формулу градиента скорости (4.1), т. е. логарифмический профиль скоростей.

Переходя к глобальным масштабам низкочастотной турбулентности, необходимо выделить два вида этих масштабов: масштабы, которые служат характеристиками самих движущихся в потоке больших вихрей, и масштабы, которые характеризуют их последовательность. Масштабы первого вида определяют порядок размеров вихрей и порядок времени, за которое вихрь проходит через фиксированное сечение (смещается на свой продольный размер). Масштабы второго вида определяют порядок расстояний между последовательно движущимися вихрями и порядок частоты их движения (появления в данном сечении).

Размеры больших вихрей ограничены поперечными размерами потока. Отсюда следует, что линейным масштабом больших вихрей плоского открытого потока служит его глубина

$$L=h. \tag{5.34}$$

Скорость движения больших вихрей может несколько отличаться от средней скорости течения, однако разность двух скоростей не должна быть больше масштаба пульсационных скоростей v_*. Поскольку же динамическая скорость v_* обычно на порядок меньше средней скорости U, то при построении временно́го масштаба больших вихрей разностью между скоростью вихрей и средней скоростью потока можно пренебрегать. Таким образом, временной масштаб больших вихрей записывается в виде

$$\Theta=\frac{h}{U}. \tag{5.35}$$

В равнинных речных потоках значения масштаба Θ равны 10^0—10^1 с.

Период времени между прохождением через данное сечение двух последовательных больших вихрей должен зависеть от темпа генерации этих вихрей, т. е. от интенсивности порождения турбулентности. Кроме того, он должен быть связан с размерами вихрей и, следовательно, с поперечным размером потока. Так как производство энергии турбулентности равно диссипации энергии, то мы получаем следующее выражение для временно́го масштаба цепочки больших вихрей:

$$T=\left[\frac{h^2}{(\bar{\varepsilon})_{\text{ср}}}\right]^{1/3}. \tag{5.36}$$

Подставив сюда выражение $(\bar{\varepsilon})_{\text{ср}}$ по формуле (5.29), имеем

$$T=\frac{h^{2/3}}{v_*^{2/3}U^{1/3}}=\frac{h}{U}\left(\frac{C^2}{g}\right)^{1/3}. \tag{5.37}$$

Линейный масштаб, определяющий порядок расстояний между смежными вихрями, найдем, умножив время T на скорость движения вихрей

$$\Lambda=TU=h\left(\frac{C^2}{g}\right)^{1/3}. \tag{5.38а}$$

Отношение h/Λ определяет величину числа Струхала для цепочки больших вихрей руслового потока

$$\text{Sh}=\frac{h}{TU}=\left(\frac{g}{C^2}\right)^{1/3}. \tag{5.38б}$$

При значениях коэффициента Шези C в пределах от 30 до 70 м$^{1/2}$/с, число Sh меняется от 0,22 до 0,13, а обратная ему величина — безразмерный шаг цепочки Λ/h — от 4,5 до 8.

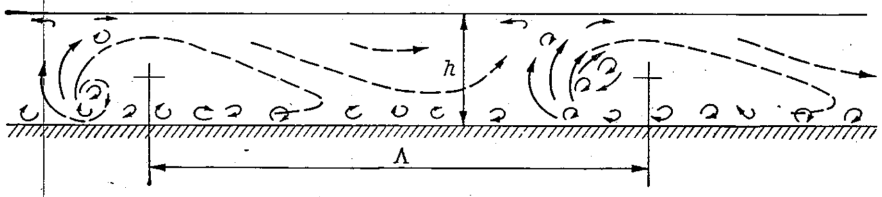


Рис. 19. Большие вихри руслового потока.

Схематическое изображение цепочки больших вихрей руслового потока дано на рис. 19. Как видно на этом рисунке, в тыловой части большого вихря идет сосредоточенный подъем сильно завихренной жидкости из придонного слоя потока к свободной поверхности. В его лобовой части жидкость, рассеявшая свою турбулентную энергию, но приобретшая большой продольный

импульс, опускается обратно на дно. Новая техника визуализации турбулентных течений с помощью пузырьков электролитически выделенного водорода позволила в последние годы детально изучить эти процессы. Первый из них обычно именуют «выбросом» (burst), второй — инжекцией. Выбросу отвечает мгновенный минимум продольных скоростей у дна, инжекции — максимум. За более подробными сведениями отсылаем читателя к обзорной статье У. Уилмарта [247], где указана и основная литература.

5.3. Эксперименты и натурные наблюдения

Турбулентность открытых потоков изучена меньше турбулентности напорных течений и пограничного слоя. Особенно ощутим недостаток опытных данных по естественным потокам. До начала 40-х годов XX в. эти данные ограничивались измеренными значениями интенсивности продольных пульсаций.

Лабораторные исследования структуры открытых турбулентных потоков были начаты в СССР по инициативе и под руководством М. А. Великанова. Его сотрудниками Е. М. Минским и Б. А. Фидманом было выполнено несколько ценных экспериментальных работ. Их результаты освещены в монографии Минского [90] и в статьях Фидмана [138—140]. Основная часть этих исследований велась путем фото- и киносъемки визуализированных течений. В дальнейшем та же техника была применена в экспериментах И. К. Никитина и А. Б. Клавена. А. Б. Клавен исследовал движение больших вихрей.

Переход к лабораторным исследованиям с помощью термоанемометров с пленочными датчиками (основного современного измерительного прибора для водных потоков) произошел лишь около 10 лет тому назад. К настоящему времени мы располагаем данными трех циклов таких исследований: Ф. Райхлена, Р. Мак-Квиви и Е. Ричардсона и Х. Имамото.

Статистические характеристики турбулентности естественного потока (одноточечные корреляционные функции продольных пульсаций) были впервые получены А. Калинским на р. Миссисипи в 1942 г. С конца 50-х до начала 70-х годов обширные исследования речной турбулентности были выполнены на реках Днестре и Турунчук Д. И. Гринвальдом. К этому же времени относятся (имевшие относительно узкую программу) исследования Ш. Иокоси на р. Уджи и канале Сосуи (в Японии).

Таким образом, за последние 10—15 лет объем опытных данных по турбулентности открытых и, в частности, естественных потоков существенно увеличился. Все измерения в реках велись с помощью малогабаритных вертушек. Так как турбулентность открытых потоков имеет много общего с турбулентностью

в трубах и пограничном слое, а последняя изучена более полно, то дальше, наряду с данными по открытым потокам, мы воспользуемся некоторыми экспериментальными результатами, относящимися к течениям в трубах и турбулентном пограничном слое.

Интенсивность турбулентности. На рис. 20 представлено распределение интенсивности турбулентности по радиусу аэродинамически гладкой круглой трубы по опытам Дж. Лауфера[1]. Средние квадратичные значения осевой v'_x, ра-

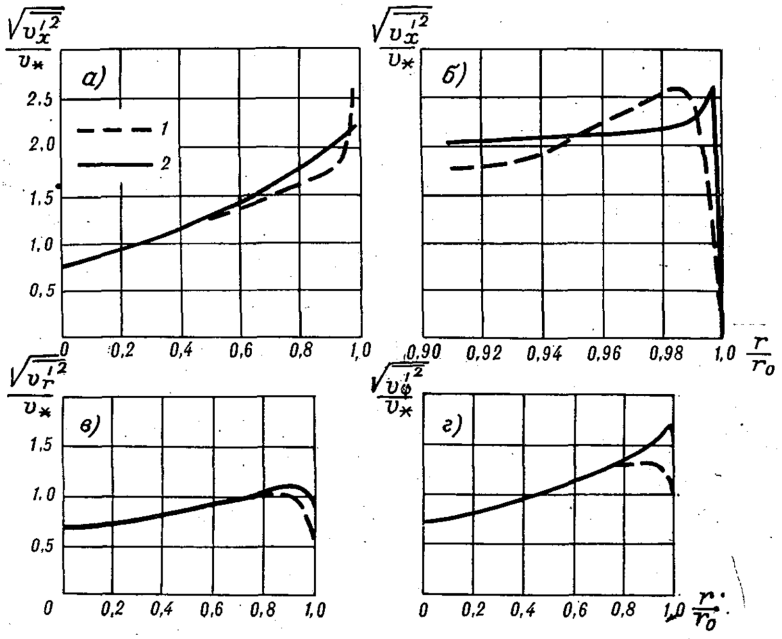


Рис. 20. Распределение интенсивности турбулентности по радиусу трубы (по Лауферу).

1 — Re=50 · 10³, *2* — Re=500 · 10³.

диальной v'_r и окружной v'_φ пульсационных скоростей отнесены к динамической скорости. Опыты Лауфера велись в латунной трубе с внутренним диаметром 24,7 см. Скорости воздушного потока измерялись термоанемометром. На рис. 20 показано распределение интенсивности турбулентности для двух чисел Рейнольдса: $\mathrm{Re} = U \cdot 2r_0/\nu$. Графики позволяют сделать следующие выводы.

[1] Автор не имел возможности воспользоваться оригинальным отчетом Лауфера. Приведенные графики взяты из книги Коркорана, Опфелла и Сейджа [165].

1. Влияние числа Рейнольдса на распределение пульсационных скоростей в обследованном диапазоне чисел Re проявляется лишь в пристенном слое, причем большему значению Re отвечает несколько большая неравномерность распределения.

2. На оси трубы соблюдается условие изотропии

$$\sqrt{\overline{v_x'^2}} = \sqrt{\overline{v_r'^2}} = \sqrt{\overline{v_\varphi'^2}} = 0{,}75v_*. \qquad (5.39)$$

3. Распределение осевой пульсационной скорости отличается наибольшей неравномерностью (рис. 20 *а*). Вблизи стенки ее значение достигает $2{,}6v_*$. Увеличение числа Рейнольдса способствует смещению максимума $\sqrt{\overline{v_x'^2}}$ к стенке и делает этот максимум более острым (рис. 20 *б*).

4. Распределение радиальной пульсационной скорости отличается наибольшей равномерностью (рис. 20 *в*). Ее максимум на расстоянии $\approx 0{,}1r_0$ от стенки составляет всего лишь $(1{,}0 \div 1{,}1)v_*$.

5. Распределение окружной пульсационной скорости имеет черты, промежуточные между распределениями осевой и радиальной скоростей (рис. 20 *г*). Пристенный максимум величины $\sqrt{\overline{v_\varphi'^2}}$ изменяется в обследованном диапазоне чисел Re от $1{,}3v_*$ до $1{,}7v_*$.

Если имеется два потока: один гладкостенный, с достаточно высоким числом Рейнольдса, другой в шероховатом русле с не очень большой относительной шероховатостью и динамическая скорость у них одинакова, пульсационные скорости у них также одни и те же. *Динамическая скорость является масштабом пульсационных скоростей.* Первым обратил на это внимание Б. А. Фидман [138]. В опытах Никитина [99], с течениями в открытых лотках с гладким и шероховатым дном придонный максимум $\sqrt{\overline{u'^2}}$ был получен равным $2{,}1v_*$. При гладком дне этот максимум наблюдался в зоне перехода от вязкого подслоя к ядру течения, при шероховатом дне — немного выше вершин выступов шероховатости. В более поздних опытах Никитин [100] обнаружил существование второго, более слабого максимума $\sqrt{\overline{u'^2}}$ на уровне свободной поверхности.

На рис. 21 представлен график распределения вертикальной составляющей пульсационной скорости в плоском открытом потоке, построенный Никитиным [99] по данным большого ряда лабораторных и натурных измерений. Он почти полностью совпадает с графиком Лауфера.

На рис. 22 показаны изолинии относительных продольных пульсационных скоростей $\sqrt{\overline{u'^2}}/\bar{u}$ в живом сечении р. Турун-

чук, по измерениям Гринвальда [26]. Интенсивность продольных пульсаций вблизи стрежня потока минимальная — 5÷7% от осредненных скоростей. Ко дну и берегам она увеличивается до 15—20%.

Корреляционные функции и размеры больших вихрей. На рис. 23 *а* представлена временна́я корреляционная функция $R_{xx}(\vartheta)$, полученная Райхленом [217] в открытом лотке с наполнением $h = 10{,}9$ см, при скорости течения 25,6 см/с, на расстоянии 3,8 см = $= 0{,}35h$ от дна. На рис. 23 *б* дана такая же функция по измерениям Гринвальда [27] на р. Турунчук. Глубина вертикали составляла 5,6 м, скорость течения 0,4 м/с. Измерения производились в точке, отстоявшей на 1,12 м = $0{,}2h$ от дна.

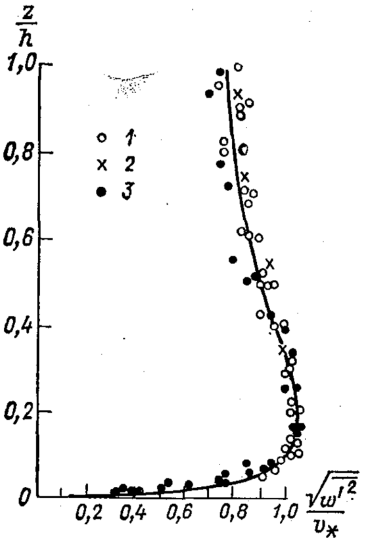


Рис. 21. Распределение вертикальной пульсационной скорости по глубине открытого потока.

1 — измерения в оросительных каналах, *2* — опыты Минского, *3* — опыты Никитина.

Обе функции имеют один и тот же общий вид. Переход через нуль приходится в лотке на сдвиг по времени $\Theta_x = 1{,}1$ с, что отвечает продольному размеру вихрей $L_x = U\Theta_x = 28$ см = $= 2{,}4h$. В реке переход корреляционной функции через нуль приходится на сдвиг по времени $\Theta_x = 30$ с, чему соответствует продольный размер вихрей $L_x = U\Theta_x = 12$ м = $2{,}1h$. Так как размеры вихрей имеют порядок глубины потока, то время Θ_x должно быть приблизительно одним и тем же во всех точках вертикали. Это хорошо подтверждается натурными измерениями Гринвальда [27]. Имамото [190], экспериментируя в лабораторном лотке, нашел, что в интервале $0{,}1 < \frac{z}{h} < 0{,}9$ не зависит от z и интегральный масштаб θ_{xx}. Так как опыты Имамото относятся к невысоким числам Рейнольдса (от $4{,}38 \cdot 10^3$ до $21{,}4 \times 10^3$), то нормированный масштаб $\theta_{xx}U/h$ оказался меняющимся (возрастающим) вместе с Re.

Приведенные опытные значения длины L_x более чем в два раза превосходят глубину потока. Это свидетельствует об *эллиптической форме* продольных сечений больших вихрей. Эллиптичность больших вихрей руслового потока была ранее установлена в опытах Фидмана [139]. Детальные наблюдения, произведенные с помощью скользящей киносъемки Клавеном, показали,

что вихри вытянуты вдоль потока тем сильнее, чем больше места они занимают по глубине. У вихрей с отношением малой (вертикальной) оси к глубине больше 0,7 отношение большой (продольной) оси к глубине достигает 5÷6 [64, 65]. Изменяя шероховатость дна лотка, Клавен нашел, что расстояние между смежными вихрями уменьшается при увеличении шероховатости [66]. Этот результат качественно согласуется с теоретическим

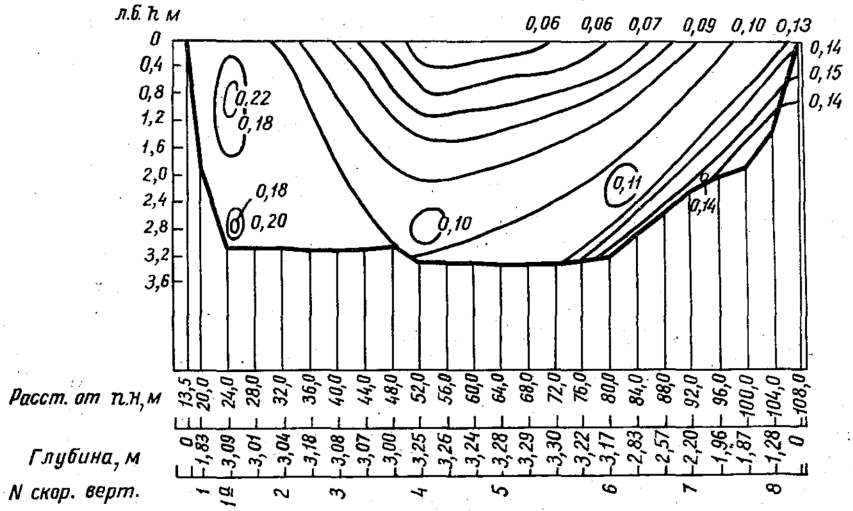


Рис. 22. Изолинии продольных пульсационных скоростей в живом сечении р. Турунчук (по Гринвальду).

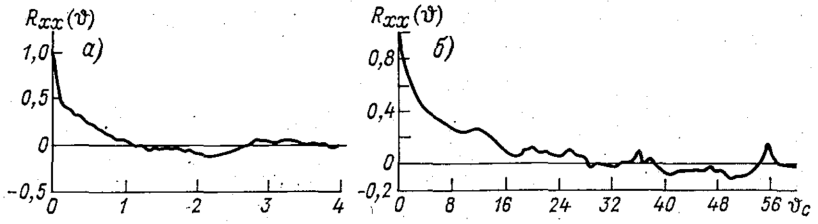


Рис. 23. Временны́е (одноточечные) корреляционные функции $R_{xx}(\vartheta)$.

а — по измерениям Райхлена в лабораторном лотке, *б* — по измерениям Гринвальда на р. Турунчук.

соотношением (5.38а). Для оценки среднего расстояния между вихрями данных пока недостаточно.

А. Фавр [135] исследовал двухточечную пространственно-временну́ю корреляцию между пульсационными скоростями в пограничном слое обтекаемой потоком воздуха плоской пластины. Изменяя величину времени сдвига $\vartheta = t - t_0$, он установил, что для каждой пары точек, расположенных в области движения,

существует некоторое значение $\vartheta = \vartheta_m$, при котором коэффициент корреляции достигает максимального значения. Величину ϑ_m Фавр назвал *оптимальным временем запаздывания*. Для точек, лежащих на оси, параллельной среднему движению, величина ϑ_m определяется в первом приближении как время, компенсирующее среднее движение

$$\vartheta_m = \frac{2\zeta_x}{\bar{u}(M_0) + \bar{u}(M)}. \qquad (5.40)$$

Фиксировав точку M_0, опишем вокруг нее сферу произвольного радиуса r и найдем затем путем вариации временем ϑ зна-

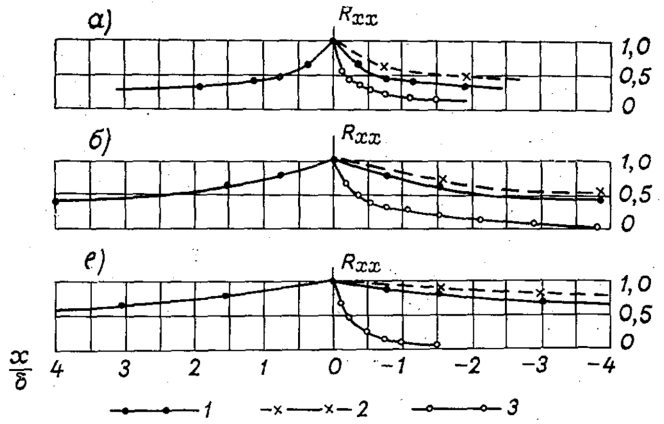


Рис. 24. Пространственно-временны́е корреляционные функции в пограничном слое на пластине вдоль линий наибольших из максимальных корреляций (по Фавру). $Re_\delta = 27{,}9 \cdot 10^3$. δ — толщина пограничного слоя.

1 — для полосы пропускаемых частот 1—2500 Гц, *2* — то же 1—275 Гц, *3* — на линии тока при $\vartheta = 0$; *а* — $\frac{z}{\delta} = 0{,}03$, *б* — $\frac{z}{\delta} = 0{,}15$, *в* — $\frac{z}{\delta} = 0{,}77$.

чения максимальных коэффициентов корреляции для конечного множества точек, лежащих на поверхности сферы. Если сфера проведена в области плоскопараллельного осредненного движения, то наибольшие из максимальных коэффициентов корреляции будут получены на концах диаметра, совпадающего с осредненной линией тока. В плоскопараллельном движении линии тока являются линиями наибольших из максимальных коэффициентов корреляции. В пограничном слое линии наибольших из максимальных коэффициентов корреляции не совпадают с линиями тока, хотя и расходятся с последними не очень сильно. На рис. 24 показаны полученные Фавром графики изменения коэффициентов двухточечной пространственно-временно́й корреляции продольных скоростей вдоль линии наибольших из максимальных корреляций. На рис. 24 видно, что оптимальному

времени запаздывания отвечают высокие значения коэффициента корреляции на расстояниях, для которых пространственная корреляция уже сделалась незаметной. Это свидетельствует о значительной «живучести» турбулентных вихрей, о способности их сохранять свои индивидуальные свойства на больших по длине участках пути. На этих графиках видно также, что сохраняемость усиливается с переходом к низкочастотным пульсациям, наибольшей «живучестью» обладают крупномасштабные вихри.

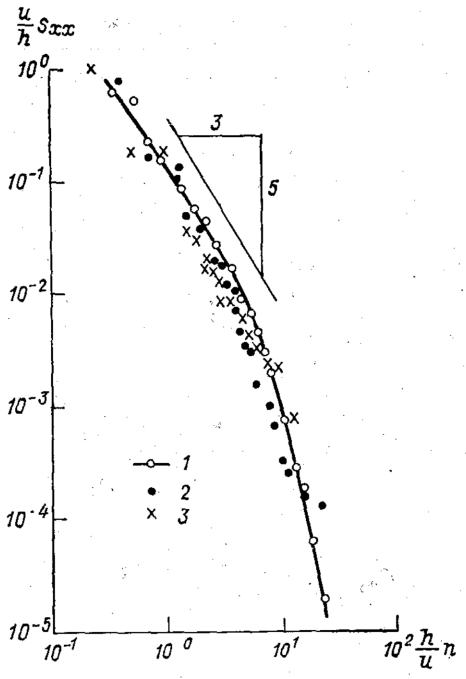


Рис. 25. Нормированные спектры продольных пульсаций.

1 — по опытам Лауфера в трубе прямоугольного сечения, $z/h=0{,}7$; *2* — по опытам Райхлена в открытом лотке, $z/h=0{,}75$; *3* — то же, $z/h=0{,}80$.

Энергетические спектры. Пульсации очень низкой частоты. На рис. 25 показаны нормированные энергетические спектры продольных пульсаций по опытам Лауфера в аэродинамически гладкой трубе прямоугольного сечения и по двум опытам Райхлена [217] в гидравлически гладком открытом лотке. Измерения Лауфера были выполнены в точке, отстоявшей от стенки на 0,7 полувысоты канала, измерения Райхлена — в точках, отстоявших от дна на 0,75 и 0,80 глубины. Спектральные функции представлены на рис. 25 в безразмерных координатах: Us_{xx}/h, hn/U. Как видно на этом рисунке, безразмерные нормированные спектры в трубе и в лотке практически совпадают. В интервале средних частот спектральные функции подчиняются «закону пяти третей».

На рис. 26 приведены спектральные функции, полученные Гринвальдом в трех точках вертикали на р. Турунчук [27]. Глубина вертикали составляла 5,45 м, средняя скорость — 0,44 м/с. Так как измерения велись вертушкой, они оставляют диапазон высоких частот (больше 3 рад/с$\approx$0,5 Гц) неосвещенным. В диапазоне круговых частот от 0,2 до 3,0 рад/с спектральные функции очень хорошо следуют «закону пяти третей» и лишь в зоне низкочастотного максимума плотности энергии опытные точки отходят от этого закона.

Хорошее согласие с «законом пяти третей» у измерений, сделанных в речном потоке, было установлено также в натурных исследованиях Иокоси [253].

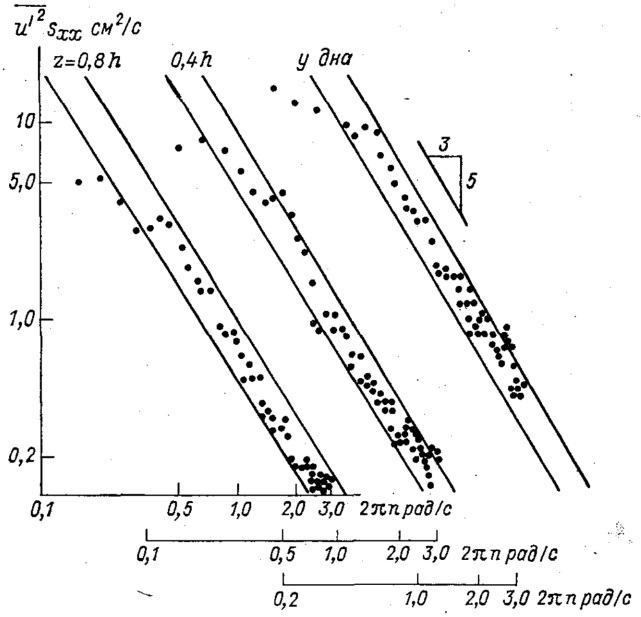


Рис. 26. Спектры продольных пульсаций в трех точках вертикали на р. Турунчук (по Гринвальду).

Длительные непрерывные наблюдения над пульсацией скоростей в одной и той же точке вертикали обнаруживают колебания скорости очень низкой частоты — на один-два порядка

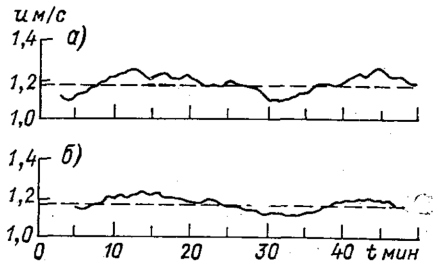


Рис. 27. Колебания поверхностной скорости на стрежневой вертикали на р. Угам у с. Ходжикент (по В. В. Дементьеву).

а — при сглаживании по скользящим 5-минутным интервалам, *б* — то же по 10-минутным интервалам.

меньше характерной частоты $1/T$ следования больших вихрей руслового потока. Ряд интересных данных о таких колебаниях был получен среднеазиатской экспедицией ГГИ в 1959—1961 гг. Некоторые из этих данных приведены в статье В. В. Дементьева

[41]. На рис. 27 показан заимствованный из этой статьи график колебания поверхностной скорости на стрежневой вертикали гидроствора на р. Угам, а на рис. 28 — график колебания скоростей в трех точках прибрежной вертикали гидроствора на р. Сырдарье. Наблюдения на обоих гидростворах производились в межень. Ширина р. Угам около 20 м, глубина на вертикали 1,75 м; ширина р. Сырдарьи около 100 м, глубина на вертикали 1,1 м. На графиках по р. Угам отчетливо выделяются колебания с периодом около 25 мин, а на графиках по р. Сырдарье — колебания с периодами в 15 и 30 мин, синхронные во всех трех точках вертикали. Графики на рис. 28, кроме синхронности колебаний, интересны и тем, что служат хорошей иллюстрацией отрицательной асимметрии распределения продольных пульсационных скоростей: падения скоростей резкие и глубокие, повышения плавные и растянутые. Наблюдения, проведенные экспедицией ГГИ на р. Варзоб у кишл. Даган-Ата, позволили выявить колебания расхода воды в этой реке с периодами около 10 и около 30 мин (ширина гидроствора 30 м, средняя глубина 1,2 м, средняя скорость течения 1,8 м/с).

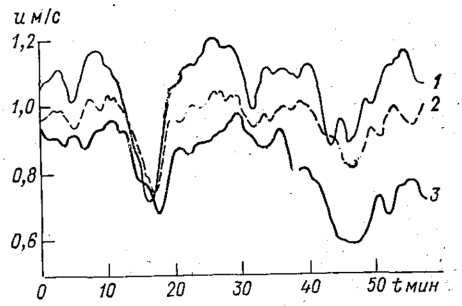


Рис. 28. Колебания скорости в трех точках прибрежной вертикали на р. Сырдарье у кишл. Ак-Джар, сглаженные по скользящим 2-минутным интервалам (по В. В. Дементьеву).

1 — на расстоянии от дна 0,8 *h*, *2* — то же, 0,4 *h*, *3* — то же, 0,2 *h*.

Аналогичные результаты получил Иокоси [253], производивший измерения вблизи свободной поверхности на стрежневой вертикали гидроствора на р. Уджи. При глубине вертикали 2,0 м и средней скорости 1,28 м/с он обнаружил колебания скорости с периодом около 10 мин, а в другом цикле измерений при примерно тех же значениях глубины и средней скорости — колебания с периодом около 15 мин. Ширина гидроствора на р. Уджи 100 м, уклон свободной поверхности 0,00026. Основываясь на полученных данных, Иокоси предложил гипотезу о существовании в открытых потоках плановой (по терминологии Иокоси, «горизонтальной») турбулентности с возмущениями, длина которых имеет порядок $10B$. Возмущения такого рода следует, по-видимому, представлять в виде шахматной дорожки двумерных вихрей, заставляющих поток попеременно отклоняться то к одному, то к другому берегу. Это представление используется в некоторых теоретических работах по устойчивости подвижного русла и дает возможность объяснить возникновение побочней. Учитывая, что у естественных потоков ширина всегда велика по сравнению с глубиной и что у них поэтому имеются не один,

а два характерных поперечных размера (h и B), гипотеза о существовании двух соответствующих масштабов турбулентности не может быть отвергнута априори.

Альтернативу гипотезе Иокоси составляет стохастическая концепция возникновения пульсаций очень низкой частоты. Согласно стохастической концепции, долгопериодные колебания скорости объясняются колебаниями частоты следования основных структурных элементов руслового потока — вихрей масштаба h, т. е. тем, что эти вихри по законам случайности составляют группы и среднее расстояние между группами вихрей на порядок больше среднего расстояния между отдельными вихрями. Групповой характер движения больших вихрей подтверждается наблюдениями Клавена [65] над визуализированным течением в лабораторном лотке. Известно принадлежащее Е. Е. Слуцкому [123] математическое доказательство того, что цикличность свойственна всем стационарным случайным последовательностям.

Приведенные выше численные данные о пульсациях очень низкой частоты говорят скорее в пользу стохастической природы этих пульсаций, чем в пользу гипотезы Иокоси. Это видно из того, что воспользовавшись наблюденными периодами пульсаций τ и подсчитав длины возмущений τU, нельзя обнаружить никакой их связи с ширинами русел, в то время, как их пропорциональность глубинам прослеживается. Окончательный вывод делать, однако, преждевременно, так как данных мало и они недостаточно точны.

Глава III

Осевая и плановая модели движения воды в открытом русле

6. Осреднение трехмерных уравнений по поперечному сечению потока

6.1. Осреднение уравнений по вертикали

В большинстве практических задач используются упрощенные модели движения воды в открытом русле — осевая и плановая. Существо этих моделей состоит в том, что к временно́му осреднению уравнений Навье—Стокса, выполненному в уравнениях Рейнольдса, добавляется пространственное осреднение по поперечным измерениям потока. В плановой модели элементы движения осредняются по глубине. Кинематически это дает двумерное векторное поле средних скоростей на вертикалях. Систему векторных линий этого поля называют *планом течения*. В осевой, или одномерной, модели элементы движения дополнительно осредняются по ширине живого сечения, становясь функциями одной пространственной переменной — расстояния, отсчитываемого по продольной (вообще говоря, криволинейной) оси l.

Теория одномерного движения интенсивно разрабатывалась в XIX и первой половине XX в., и в том, что касается плавно изменяющегося движения, представляется почти законченной. Теория планового движения, имеющая более узкую область применения и зародившаяся сравнительно недавно (в 1930-х годах), продолжает развиваться.

Составление уравнений планового и одномерного движения путем пространственного осреднения полных уравнений Рейнольдса было произведено Н. А. Картвелишвили [63]. Для получения законченных результатов потребовались, однако, два упрощающих предположения: русло имеет вертикальную плоскость симметрии, вектор скорости на дне равен нулю. Мы ограничимся здесь осреднением трехмерных уравнений движения в форме двух первых уравнений системы (3.18), т. е. будем иметь в виду открытые потоки с большим отношением ширины к глубине и удовлетворяющие условиям плавной изменяемости. При осреднении уравнения неразрывности достаточно считать, что высоты дна имеют непрерывные частные производные первого порядка по координатам. В этом пункте мы произведем осреднение уравнений (3.18) по вертикали, т. е. построим систему уравнений планового движения.

Оси координат расположим, как показано на рис. 10. Так же, как при составлении уравнений (3.18), будем исходить из представления о статистическом сглаживании грядового рельефа дна, т. е. будем считать, что дно потока представляет собой плавную поверхность, радиусы кривизны которой велики по сравнению с глубинами. Эту поверхность необходимо рассматривать как гидравлически шероховатую. Отсюда следует, что тангенциальные скорости на ней не равны нулю.

В общем случае дно может быть деформируемым. Поскольку, однако, вид интегралов, взятых по вертикали, не зависит от того, одна ли граничная поверхность подвижна или обе, положим, что меняется во времени только свободная поверхность, а дно остается неподвижным.

В соответствии со сделанными предположениями, будем иметь следующие граничные условия для компоненты осредненной скорости по оси z:

$$\overline{w}(z')=\overline{u}(z')\frac{\partial z'}{\partial x}+\overline{v}(z')\frac{\partial z'}{\partial y}+\frac{\partial z'}{\partial t}, \tag{6.1}$$

$$\overline{w}(z_0)=\overline{u}(z_0)\frac{\partial z_0}{\partial x}+\overline{v}(z_0)\frac{\partial z_0}{\partial y}. \tag{6.2}$$

Начнем с уравнения неразрывности. Взяв за исходное трехмерное уравнение из системы (3.18), произведем его почленное интегрирование по аргументу z в пределах от $z=z_0$ до $z=z'$. Использовав правило дифференцирования под знаком интеграла с верхним пределом, зависящим от параметра, учтя граничные условия (6.1) и (6.2) и сделав подстановку $\frac{\partial z'}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial t}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{z'}\overline{u}\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^{z'}\overline{v}\,dz+\frac{\partial h}{\partial t}=0, \tag{6.3}$$

или

$$\frac{\partial hU}{\partial x}+\frac{\partial hV}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial t}=0, \tag{6.4}$$

или также

$$\operatorname{div}\mathbf{q}+\frac{\partial h}{\partial t}=0. \tag{6.5}$$

Здесь U и V — компоненты вектора средней скорости на вертикали $\mathbf{W}=U\mathbf{e}_x+V\mathbf{e}_y$; $\mathbf{q}=h\mathbf{W}$ — вектор элементарного расхода.

Перейдем к осреднению уравнений движения. Чтобы облегчить операцию осреднения, преобразуем предварительно с помощью трехмерного уравнения неразрывности конвективные члены уравнений движения (3.18) так же, как были преобразованы конвективные члены уравнений Навье—Стокса при их осреднении по времени (см. п. 3.2). Обозначив касательные

напряжения $-\overline{\rho u' w'} \equiv \tau_{zx}$ и $-\overline{\rho v' w'} \equiv \tau_{zy}$, получим следующую систему:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = g\left(i_0 - \frac{\partial z'}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial z} = -g\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}. \tag{6.7}$$

Помимо граничных условий для вертикальной компоненты скорости $\bar{w}$ (6.1) и (6.2), нам понадобятся граничные условия для касательных напряжений. На свободной поверхности они имеют вид равенств

$$\tau_{zx}(z') = \tau_{zy}(z') = 0. \tag{6.8}$$

На дне представим их с помощью формул трения:

$$\frac{1}{\rho}\tau_{zx}(z_0) = g\frac{U^2}{C^2}\sqrt{1 + \frac{V^2}{U^2}}, \tag{6.9}$$

$$\frac{1}{\rho}\tau_{zy}(z_0) = g\frac{V^2}{C^2}\sqrt{1 + \frac{U^2}{V^2}}, \tag{6.10}$$

где C — коэффициент Шези.

Как следует из формул (6.9), (6.10), мы не делаем различия между законами гидравлического трения в неустановившемся неравномерном и в равномерном течениях. Допустимость этого упрощения при плавно изменяющемся движении подтверждена опытом гидравлических расчетов.

Интегрируя по z в пределах от $z = z_0$ до $z = z'$ члены левой части уравнения (6.6) при учете граничных условий (6.1) и (6.2) и интегрируя затем члены правой части с учетом граничных условий (6.8) и (6.9), получим следующее уравнение движения в проекциях на ось x:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_0}^{z'} \bar{u}\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{z'} \bar{u}^2\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^{z'} \bar{u}\bar{v}\,dz =$$

$$= gh\left(i_0 - \frac{\partial z'}{\partial x}\right) - g\frac{U^2}{C^2}\sqrt{1 + \frac{V^2}{U^2}}. \tag{6.11}$$

Так как мы не располагаем аналитическими выражениями функций $\bar{u}(z)$ и $\bar{v}(z)$ при неравномерном, неустановившемся движении, то единственный способ выразить интегралы от квадратов и произведений этих функций в компонентах U, V средней скорости на вертикали состоит в том, чтобы, следуя Буссинеску, ввести приближенные соотношения

$$\frac{1}{hU^2}\int_{z_0}^{z'} \bar{u}^2\,dz \approx \frac{1}{hV^2}\int_{z_0}^{z'} \bar{v}^2\,dz \approx \frac{1}{hUV}\int_{z_0}^{z'} \bar{u}\bar{v}\,dz \equiv \alpha_0 = \text{const} > 1, \tag{6.12}$$

где α_0 — известный в гидравлике корректив средней скорости в выражениях для импульса потока. Уравнение (6.11) принимает вид

$$\frac{\partial (hU)}{\partial t}+\alpha_0\frac{\partial (hU^2)}{\partial x}+\alpha_0\frac{\partial (hUV)}{\partial y}=$$
$$=gh\left(i_0-\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-g\frac{U^2}{C^2}\sqrt{1+\frac{V^2}{U^2}}.$$

Дифференцируя произведения элементов движения, заключенные в скобки и применив плановое уравнение неразрывности (6.4), получаем после деления всех членов на глубину h

$$\frac{\partial U}{\partial t}+(1-\alpha_0)\frac{U}{h}\frac{\partial h}{\partial t}+\alpha_0 U\frac{\partial U}{\partial x}+\alpha_0 V\frac{\partial U}{\partial y}=$$
$$=g\left(i_0-\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-g\frac{U^2}{C^2h}\sqrt{1+\frac{V^2}{U^2}}. \qquad (6.13)$$

Интегрирование уравнения (6.7) производится аналогично, давая второе уравнение планового движения

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(1-\alpha_0)\frac{V}{h}\frac{\partial h}{\partial t}+\alpha_0 U\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha_0 V\frac{\partial V}{\partial y}=$$
$$=-g\frac{\partial z'}{\partial y}-g\frac{V^2}{C^2h}\sqrt{1+\frac{U^2}{V^2}}. \qquad (6.14)$$

Допущение (6.12) о независимости корректива скорости α_0 от координат и времени есть дань нашему незнанию, причем неизбежная, если мы хотим вести расчеты. Утешением здесь может служить только то, что корректив α_0 в условиях плавно изменяющегося движения изменяется слабо и мало отличается от единицы. В плоском равномерном потоке с логарифмическим распределением осредненных скоростей величина α_0 определяется выражением

$$\alpha_0=1+\frac{v_*^2}{\varkappa^2U^2}=1+\frac{1}{\varkappa^2}\frac{g}{C^2}. \qquad (6.15)$$

При значении параметра Кармана $\varkappa=0{,}4$ и значениях коэффициента Шези C, меняющихся от 30 до 70 м$^{1/2}$/с, величина α_0 изменяется, согласно этой формуле, от 1,07 до 1,01. Средней оценкой служит $\alpha_0=1{,}03$. На участках возрастания скоростей по потоку величина α_0 практически равна единице, на участках падения скоростей она может быть заметно больше значений, определяемых формулой (6.15). Ввиду ограниченной точности гидравлических расчетов для потоков, удовлетворяющих условиям плавной изменяемости, чаще всего пользуются простейшим решением: $\alpha_0=1$.

Так как нам скоро потребуется рассмотреть вопрос об учете неравномерности распределения местных скоростей в уравнении

одномерного движения, мы воздержимся пока от такого решения, но тем не менее отбросим в уравнениях (6.13) и (6.14) члены с производной $\frac{\partial h}{\partial t}$, так как множитель $1-\alpha_0$ делает их малыми по сравнению с другими инерционными членами. Заменяя, кроме того, отметки свободной поверхности z' суммами z_0+h, получим систему уравнений планового движения в следующем окончательном виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}+\alpha_0 U\frac{\partial U}{\partial x}+\alpha_0 V\frac{\partial U}{\partial y}=\\
&=gi_0-g\frac{\partial}{\partial x}(z_0+h)-g\frac{U^2}{C^2h}\sqrt{1+\frac{V^2}{U^2}},\\
&\frac{\partial V}{\partial t}+\alpha_0 U\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha_0 V\frac{\partial V}{\partial y}=\\
&=-g\frac{\partial}{\partial y}(z_0+h)-g\frac{V^2}{C^2h}\sqrt{1+\frac{U^2}{V^2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.16)$$

Система, состоящая из уравнения неразрывности (6.4) и уравнений движения (6.16), замыкается с помощью формулы Маннинга или какой-нибудь другой формулы для коэффициента Шези. Поверхность дна $z_0=z_0(x, y)$, средний уклон дна i_0 и коэффициент шероховатости должны быть заданы.

В практических приложениях обычно рассматриваются задачи установившегося планового движения. Уравнения установившегося движения получают при приравнивании в системе (6.4), (6.16) производных по t нулю. Уравнение неразрывности приобретает при этом вид

$$\frac{\partial hU}{\partial x}+\frac{\partial hV}{\partial y}=0. \qquad (6.17)$$

Это уравнение вместе с дифференциальным уравнением плановых линий тока

$$\frac{dx}{U}=\frac{dy}{V} \qquad (6.18)$$

указывает на существование *плановой функции тока* Ψ, удовлетворяющей соотношениям:

$$hU=\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad hV=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \qquad (6.19)$$

Плановая функция тока обладает теми же свойствами, что функция тока в плоском движении жидкости. Чтобы показать это, возьмем на плане течения две точки M_1 и M_2 и, проведя через вертикали, отвечающие этим точкам, цилиндрическую по-

верхность с произвольной образующей L, определим расход жидкости, проходящий сквозь эту поверхность,

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\,dL=\int_{M_1}^{M_2} h\left(-V\frac{dx}{dL}+U\frac{dy}{dL}\right)dL=$$

$$=\int_{M_1}^{M_2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy=\int_{M_1}^{M_2} d\Psi=\Psi(M_2)-\Psi(M_1) \qquad (6.20)$$

— расход жидкости равен разности значений функции тока в точках M_1 и M_2.

6.2. Уравнения плановой модели в натуральных координатах

Сложные, криволинейные очертания естественных русел часто заставляют прибегать к описанию планового движения в натуральных координатах. Эта система координат полезна также при переходе от плановой к одномерной модели потока.

Рассматривая установившееся плановое движение $\left(\frac{\partial h}{\partial t}=0,\ \frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial t}=0\right)$, введем на плоскости (x, y) ортогональную, криволинейную координатную сетку l, b с локальным базисом, единичные векторы которого $\mathbf{e}_l$ и $\mathbf{e}_b$ удовлетворяют в каждой точке условиям:

$$\mathbf{W}\cdot\mathbf{e}_l=W,\quad \mathbf{W}\cdot\mathbf{e}_b=0. \qquad (6.21)$$

Это значит, что координатными линиями будут служить плановые линии тока и ортогональные им криволинейные «поперечники». Нормаль к линии тока мы обозначаем через b вместо обычного n ввиду того, что буквой b принято обозначать поперечные расстояния в открытых потоках. Поскольку движения по бинормали в плановой задаче нет, это не может повести к недоразумениям.

Запишем в натуральных координатах уравнение неразрывности. Рассматривая местные оси l, b в произвольной точке M плоскости (x, y) как оси прямоугольной декартовой системы, имеем, согласно уравнению (6.5), при установившемся движении

$$\frac{\partial q_l}{\partial l}+\frac{\partial q_b}{\partial b}=0, \qquad (6.22)$$

где q_l и q_b — компоненты вектора элементарного расхода. Введя

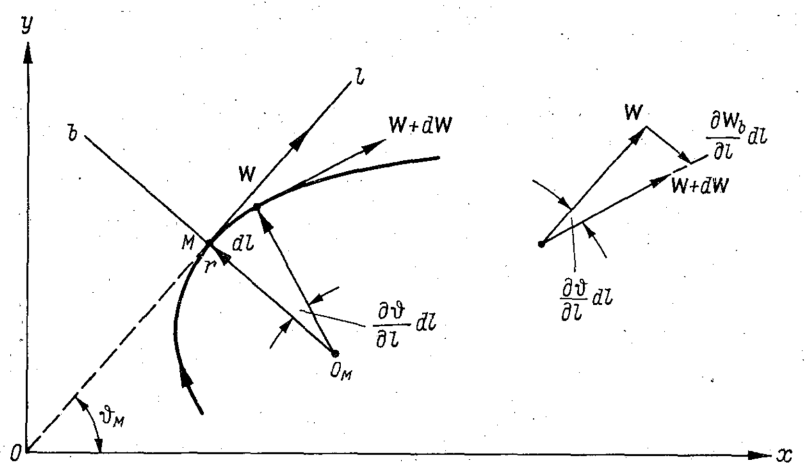


Рис. 29. Локальный базис системы плановых натуральных координат.

угол ϑ между местной осью l и осью x (рис. 29), можем представить производные $\frac{\partial q_l}{\partial l}$ и $\frac{\partial q_b}{\partial b}$ в следующем виде:

$$\frac{\partial q_l}{\partial l}=\lim_{\vartheta\to\vartheta_M}\frac{\partial}{\partial l}[q\cos(\vartheta-\vartheta_M)]=\frac{\partial q}{\partial l},$$

$$\frac{\partial q_b}{\partial b}=\lim_{\vartheta\to\vartheta_M}\frac{\partial}{\partial b}[q\sin(\vartheta-\vartheta_M)]=q\frac{\partial\vartheta}{\partial b},$$

где ϑ_M — значение угла ϑ для точки M. Подставив эти выражения в уравнение (6.22), получаем

$$\frac{\partial q}{\partial l}+q\frac{\partial\vartheta}{\partial b}=0.$$

Производная $\frac{\partial\vartheta}{\partial b}$ равна местной кривизне поперечника. Обозначая радиус этой кривизны r^* и раскрывая обозначение элементарного расхода, имеем окончательно

$$\frac{\partial hW}{\partial l}+\frac{hW}{r^*}=0. \qquad (6.23)$$

Левая часть уравнения (6.23) есть, очевидно, не что иное, как запись в натуральных координатах дивергенции векторного поля $\mathbf{q}(l, b)$. Связь между знаком кривизны поперечника и характером течения ясна из рис. 30.

Составляя в системе натуральных координат выражения для конвективных членов уравнений планового движения, находим

$$\frac{\partial W_l}{\partial l}\frac{dl}{dt}=W\frac{\partial W}{\partial l}, \tag{6.24}$$

$$\frac{\partial W_b}{\partial l}\frac{dl}{dt}=W\frac{\partial W_b}{\partial l}, \tag{6.25}$$

где W_l и W_b — компоненты скорости W по осям l и b. Из подобия треугольников на рис. 29 следует

$$\frac{\partial W_b}{\partial l}dl\frac{1}{W}=\frac{dl}{r},$$

где r — радиус кривизны линии тока в точке M. Отсюда (6.25) переписывается

$$\frac{\partial W_b}{\partial l}\frac{dl}{dt}=\frac{W^2}{r}. \tag{6.26}$$

Переход к натуральным координатам в правых частях уравнений движения прост. Введя уклоны I_l и I_b свободной поверхности к горизонту:

$$I_l=gi_0\cos\vartheta-g\frac{\partial z'}{\partial l}=gi_0\cos\vartheta-g\frac{\partial}{\partial l}(z_0+h),$$

$$I_b=-gi_0\sin\vartheta-g\frac{\partial z'}{\partial b}=-gi_0\sin\vartheta-g\frac{\partial}{\partial b}(z_0+h)$$

и учтя неравномерность распределения скоростей на вертикали, получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 W\frac{\partial W}{\partial l}&=gI_l-g\frac{W^2}{C^2h},\\ \alpha_0\frac{W^2}{r}&=gI_b.\end{aligned}\right\} \tag{6.27}$$

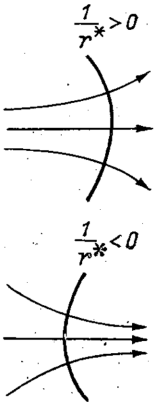


Рис. 30. Спектры течения, отвечающие разным знакам кривизны поперечника.

Заметим, что при принятом расположении осей x, y угол ϑ местной оси l с осью x есть одновременно ее угол с направлением среднего уклона дна.

Система уравнений неразрывности и движения, записанная в натуральных координатах, содержит пять функций: h, W, C, r и r^*, и следовательно, формула Маннинга ее не замыкает. Практически это значит, что применение этой системы в расчетах возможно лишь при известном поле глубин, т. е. при наличии плана русла в изобатах. Появление лишнего неизвестного, несмотря на замену двух компонент скорости результирующей скоростью W, обусловлено природой натуральных координат — ориентировка осей этих координат в каждой точке плана течения заранее неизвестна.

6.3. Осреднение уравнений плановой модели по ширине потока

Сделаем переход от уравнений плановой модели к одномерным уравнениям. Плановое, а с ним и одномерное движение будем считать неустановившимся. Интегрирование по ширине потока уравнений плановой модели удобно произвести, используя натуральные координаты. Изменение сетки натуральных координат во времени затруднений не вызывает, так как при интегрировании поперек русла необходимо учесть лишь изменение граничных линий тока (урезов воды).

Уравнение неразрывности возьмем в форме (6.5). Чтобы проинтегрировать выражение дивергенции, поступим следующим

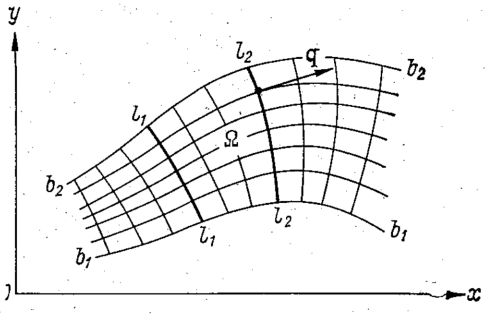


Рис. 31. Область интегрирования при осреднении планового уравнения неразрывности по ширине потока.

образом. Выделим на мгновенном плане течения линиями урезов $b = b_1$ и $b = b_2$ и двумя произвольными поперечниками $l = l_1$ и $l = l_2$ конечную двумерную область площадью Ω (рис. 31). Применяя теорему Гаусса—Остроградского и учитывая, что элемент площади в натуральной системе координат равен произведению дифференциалов координат $d\Omega = dl\,db$, можем написать

$$\int_{l_1}^{l_2}\int_{b_1}^{b_2} \operatorname{div}\mathbf{q}\,db\,dl = \int_{b_1}^{b_2} q(l_2,\ b)\,db - \int_{b_1}^{b_2} q(l_1,\ b)\,db = Q(l_2) - Q(l_1),$$

или

$$\int_{l_1}^{l_2}\int_{b_1}^{b_2} \operatorname{div}\mathbf{q}\,db\,dl = \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial Q}{\partial l}\,dl,$$

откуда ввиду произвольности поперечников

$$\int_{b_1}^{b_2} \operatorname{div}\mathbf{q}\,db = \frac{\partial Q}{\partial l}. \qquad (6.28)$$

Интегрируя второй член уравнения неразрывности, находим

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial h}{\partial t}\, db = \frac{\partial}{\partial t} \int_{b_1}^{b_2} h\, db + h(b_1) \frac{\partial b_1}{\partial t} - h(b_2) \frac{\partial b_2}{\partial t}.$$

Так как при пологих берегах $h(b_1) = h(b_2) = 0$, а при отвесных $\frac{\partial b_1}{\partial t} = \frac{\partial b_2}{\partial t} = 0$, то получаем

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial h}{\partial t}\, db = \frac{\partial}{\partial t} \int_{b_1}^{b_2} h\, db = \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

В результате одномерное уравнение неразрывности записывается

$$\frac{\partial Q}{\partial l} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \tag{6.29}$$

Плановое уравнение неустановившегося движения в проекциях на направление касательной к мгновенной линии тока имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \alpha_0 W \frac{\partial W}{\partial l} = g I_l - g \frac{W^2}{C^2 h}. \tag{6.30}$$

Так как уравнение (6.30) есть уравнение изменения импульса, т. е. содержит (неявно) массу жидкости, то осредняя его члены по ширине потока с неравномерным распределением глубин, необходимо предварительно умножить их на глубину вертикали h. Произведя такое умножение, применив затем правило дифференцирования произведений функций и использовав плановое уравнение неразрывности, получаем

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_0 \frac{\partial qW}{\partial l} + (1 - \alpha_0) W \frac{\partial q}{\partial l} + W \frac{q}{r^*} = ghI_l - g \frac{W^2}{C^2}. \tag{6.31}$$

При плавно изменяющемся движении член с множителем $(1 - \alpha_0)$ можно исключить. В результате интегрирования по поперечной координате b член, содержащий кривизну поперечника $1/r^*$, обращается в нуль, а оставшиеся два члена левой части (6.31) при учете уравнения неразрывности (6.29) получают вид

$$\int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_0 \frac{\partial qW}{\partial l} \right) db = \frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha_0 \alpha' \left(W_{\text{ср}} \frac{\partial Q}{\partial l} + Q \frac{\partial W_{\text{ср}}}{\partial l} \right) =$$

$$= \omega \left(\frac{\partial W_{\text{ср}}}{\partial t} + \alpha_0 \alpha' W_{\text{ср}} \frac{\partial W_{\text{ср}}}{\partial l} \right) + (\alpha_0 \alpha' - 1) W_{\text{ср}} \frac{\partial Q}{\partial l}, \tag{6.32}$$

где $W_{\text{ср}} = \frac{Q}{\omega}$ — средняя скорость в живом сечении; α' — коррективы, учитывающий неравномерность распределения скоростей поперек потока,

$$\alpha' = \frac{1}{Q W_{\text{ср}}} \int_{b_1}^{b_2} q W\, db. \tag{6.33}$$

В треугольном поперечном сечении с распределением скоростей по закону Шези—Маннинга ($W \sim h^{2/3}$) корректив $\alpha' = 1{,}065$. В обычных широких и распластанных сечениях естественных русел $\alpha' = 1{,}02 \div 1{,}04$. Отсюда среднее значение произведения двух коррективов $\alpha_0\alpha' \equiv \alpha$ близко к 1,06. Поскольку при плавно изменяющемся движении инерционные члены играют в уравнении движения второстепенную роль, допустимо полностью пренебрегать разницей между значениями α и единицей. Очевидно, это нельзя делать при неплавно изменяющемся движении, но в этом случае необходимы уже другие уравнения движения.

Что касается членов правой части уравнения (6.31), то в результате интегрирования первого из них продольный уклон $I_l(l, b)$ заменяется его средним, взвешенным по глубине значением $I(l)$, а выражение для сил трения записывается в традиционном виде через среднюю скорость $W_{ср}$ и среднюю глубину $H = \frac{\omega}{B}$. В результате приходим к следующему уравнению одномерного, плавно изменяющегося движения жидкости в открытом русле:

$$\frac{\partial W_{ср}}{\partial t} + W_{ср}\frac{\partial W_{ср}}{\partial l} = gI - g\frac{W_{ср}^2}{C^2H}. \qquad (6.34)$$

В этом виде уравнение было впервые написано Сен-Венаном (1871 г.). Систему уравнений неразрывности (6.29) и движения (6.34) называют уравнениями Сен-Венана.

7. Гидравлическое сопротивление естественных русел

7.1. Виды сопротивлений. Сопротивление зернистой шероховатости

Подвижность дна, колебания уровней воды и неправильные формы естественных русел делают вопрос об их гидравлическом сопротивлении гораздо более трудным, чем вопрос о сопротивлении труб или призматических каналов с жесткими стенками.

Главные затруднения, имеющиеся на всех участках естественных русел, обусловлены сложной и меняющейся во времени геометрией поверхности дна. На участках, где движение не является плавно изменяющимся, положение усугубляется тем, что потери энергии там, как правило, оказываются бо́льшими, чем потери, рассчитанные с помощью формул потерь по длине. Речная гидравлика выходит из этого затруднения, заимствуя у гидравлики трубопроводов понятия местных потерь энергии и местных сопротивлений. Однако как мы увидим в дальнейшем, эффектив-

ность применения этих понятий к естественным потокам мала и в результате задачи неплавно изменяющегося движения воды в реках решаются в настоящее время без достаточной надежности.

Рассмотрим сопротивления по длине, которые имеются повсюду, а на участках с плавно изменяющимся движением практически составляют все сопротивление русла. Изложение будем вести в терминах одномерной модели и для упрощения записей среднюю скорость в живом сечении будем обозначать U. Всюду, где могут потребоваться экспериментальные данные, за характерный поперечный размер потока будем принимать его гидравлический радиус R.

Сопротивления по длине в естественном русле складываются из двух главных частей: 1) *сопротивления зернистой поверхности дна* и 2) *сопротивления донных гряд*. Первое обусловлено отрывным обтеканием лежащих на дне частиц. Соответствующее касательное напряжение получим, суммируя на единице площади дна взятые со знаком минус превышения гидродинамического давления на лобовой стороне частиц над давлением на их тыловой стороне. При этом предполагается, что выбранная единица площади велика по сравнению с площадью миделевого сечения частиц. Сопротивление грядового рельефа дна обусловлено отрывным обтеканием донных форм. Говорить о соответствующем касательном напряжении можно, лишь суммируя разности давления на лобовой и тыловой сторонах форм по площади дна, которая велика по сравнению с квадратом длины форм. Так как длина гряд обычно измеряется сотыми или десятыми долями ширины русла B, то площадь осреднения должна быть порядка B^2.

К двум указанным главным видам сопротивления по длине у малых рек с медленным течением в летнюю межень добавляется сопротивление водной растительности. В зонах, где в зимний период имеются устойчивые отрицательные температуры, сопротивление движению воды в этот период возрастает за счет сил трения на нижней поверхности льда. Сопротивление увеличивается еще больше, когда подледные сечения загромождаются шугой. На реках с облесенными берегами и особенно на тех, где производится молевой сплав, заметный вклад в гидравлическое сопротивление вносит сопротивление упавших в реку деревьев и затонувших бревен. В реках с высокими концентрациями взвешенных наносов сопротивление движению испытывает влияние этой концентрации (см. гл. VI).

В том основном случае, когда полное гидравлическое сопротивление русла складывается из сопротивления зернистой шероховатости и сопротивления гряд, касательное напряжение на дне, осредненное по площади порядка B^2, есть сумма двух частных касательных напряжений

$$\tau_0 = \tau_\Delta + \tau_r. \qquad (7.1)$$

Переписав эту формулу в виде

$$\rho g R I_f = \rho g R I_\Delta + \rho g R I_r, \tag{7.2}$$

имеем далее следующие равенства:

$$I_f = I_\Delta + I_r, \tag{7.3}$$

$$\lambda_R = \lambda_\Delta + \lambda_r, \tag{7.4}$$

$$\frac{1}{C^2} = \frac{1}{C_\Delta^2} + \frac{1}{C_r^2}. \tag{7.5}$$

В написанных равенствах индексом Δ отмечаются величины, относящиеся к сопротивлению зернистой шероховатости, а индексом r — к сопротивлению гряд. Разделение полного уклона трения I_f на два частных уклона I_Δ и I_r было введено Э. Мейер-Петером и Р. Мюллером [208]. Г. Эйнштейн [173] предложил альтернативное решение: от формулы (7.1) он перешел не к формуле (7.2), а к формуле

$$\rho g R I_f = \rho g R_\Delta I_f + \rho g R_r I_f, \tag{7.6}$$

т. е. разделил на части не уклон, а гидравлический радиус (среднюю глубину). Формула (7.6) получила некоторое распространение в США, однако недостатки ее очевидны. Помимо того, что делению глубины трудно придать какой-нибудь физический смысл, формула (7.6) порывает с одним из основных принципов гидравлики — принципом аддитивности потерь энергии. Несложный анализ, с применением формулы сопротивления зернистой шероховатости А. Штриклера (см. ниже), показывает также, что предложение Эйнштейна ведет к систематическому преуменьшению грядовой составляющей полного сопротивления. Недавно это свойство соотношения (7.6) было обнаружено экспериментально [226]. Поэтому в дальнейшем мы будем держаться предложения Мейер-Петера и Мюллера.

Первый вопрос, который возникает при взгляде на равенство (7.3), есть вопрос об относительном весе двух членов его правой части. Физические соображения и опыт показывают, что соотношение между двумя градиентами потерь энергии I_Δ и I_r зависит от крупности донных частиц. На реках с крупнозернистыми донными отложениями (крупным гравием и галькой) грядовый рельеф развит слабо и диаметр частиц сравним с высотой гряд. Поэтому в таких реках потери энергии обусловлены в основном сопротивлением зернистой шероховатости. На реках с дном, сложенным из песка и мелкого гравия, картина обратная — гряды сильно развиты, диаметр частиц мал и по отношению к глубине потока, и по отношению к высоте гряд. Доминирующим здесь становится сопротивление подвижного рельефа дна. На средних и больших реках СССР с песчаным дном потери энергии, обусловленные сопротивлением гряд, составляют от 60 до 90% полных потерь по длине.

В расчетах руслового сопротивления легко и надежно определяются только значения коэффициентов λ_Δ и C_Δ, отражающие сопротивление зернистой шероховатости. Теоретически обоснованный способ их определения состоит в применении формул сопротивления логарифмического типа. В практике расчетов у нас и за рубежом применяется несколько таких формул, незначительно различающихся своими численными коэффициентами. В этой книге мы будем пользоваться формулой А. П. Зегжды (4.14). Вспомнив сказанное в п. 4.1 о связи между входящей в формулу (4.14) высотой выступов Δ и диаметром донных частиц, напишем эту формулу для русел, сложенных из песка и мелкого гравия (медианный диаметр частиц $d_{50} \leqslant 1{,}5$ мм), в виде

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda_\Delta}} = \frac{C_\Delta}{\sqrt{g}} = 5{,}66 \lg \frac{R}{1{,}6 d_{50}} + 6{,}0. \qquad (7.7)$$

Наряду с формулами логарифмического типа в расчетах широко применяется эмпирическая степенная формула Маннинга—Штриклера

$$\frac{C_\Delta}{\sqrt{g}} = 6{,}67 \left(\frac{R}{d_{50}}\right)^{1/6}. \qquad (7.8)$$

Она представляет собой результат подстановки в формулу Маннинга (4.16), полученного А. Штриклером [232] выражения для коэффициента шероховатости зернистого дна

$$n_\Delta = \frac{0{,}15}{\sqrt{g}} d_{50}^{1/6}. \qquad (7.9)$$

Формула Штриклера (7.9), основанная на измерениях в лаборатории и в натуре (на реках Швейцарии) с охватом широкого диапазона крупности донных частиц (от песка до гальки), впоследствии проверялась по данным натурных исследований в США. Рекомендованная американскими специалистами [145] замена диаметра d_{50} диаметром d_{65} с вероятностью 65% по кривой гранулометрического состава имеет значение, по-видимому, лишь в руслах с сильной неоднородностью донных отложений. В обычных песчано-гравелистых руслах вносимое этой заменой уточнение коэффициента Шези лежит за пределами точности гидравлических расчетов.

Формула Маннинга—Штриклера дает более быстрый рост коэффициента Шези с ростом относительной гладкости дна, чем формула Зегжды. Как известно, сблизить степенную функцию с логарифмической можно, лишь введя переменный показатель степени, убывающий с ростом аргумента. Однако такая реконструкция формулы Маннинга—Штриклера уничтожила бы ее основное достоинство — простой аналитический вид.

В диапазоне значений относительной гладкости $500 \leqslant \leqslant \frac{R}{d_{50}} \leqslant 10\,000$ расхождения в значениях коэффициента Шези, получаемых по формулам Зегжды и Маннинга—Штриклера, составляют менее 10%, т. е. остаются в границах точности инженерных расчетов.

7.2. Сопротивление донных форм

Макрошероховатость речного дна создается тремя видами донных образований: рифелями, грядами и антидюнами. Первые два вида встречаются в спокойных потоках, последний — в бурных. Рифели и гряды имеют асимметричный продольный профиль с пологим напорным и крутым тыловым скатом, но напорные скаты рифелей круче, чем у гряд (рис. 32). Длины *рифелей* составляют чаще всего 1—2 глубины потока, их высоты изме-

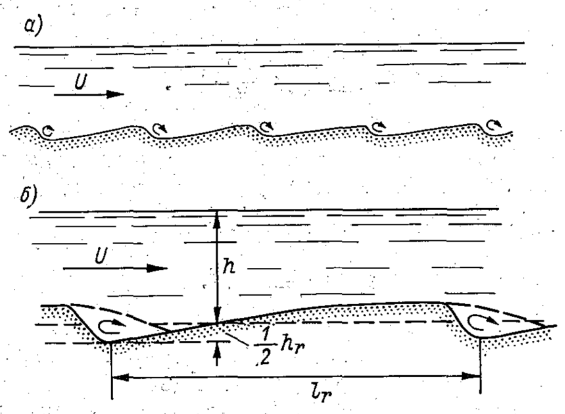


Рис. 32. Виды макрошероховатости подвижного дна.
а — рифели, *б* — гряды.

ряются сотыми долями глубины, редко достигая $0{,}1h$. Гребни рифелей в плане при малых отношениях ширины потока к глубине бывают прямолинейными, в широких потоках — подковообразными. В природе обычно наблюдаются подковообразные рифели. Этот подвид донных образований иногда называют *барханами, или чешуйчатыми рифелями.*

Рифели формируются с началом общего движения донных частиц, т. е. при относительно низкой кинетической энергии потока. При более высокой кинетической энергии они уступают место грядам. Длины *гряд* измеряются десятками глубин, а их высоты составляют $0{,}1h$—$0{,}3h$ (иногда до $0{,}4h$). С повышением

уровней высота гряд до некоторого предела растет. Рифели и гряды медленно перемещаются вниз по течению. Так как скорости их движения на несколько порядков меньше скоростей течения воды, то в расчетах сопротивления это движение не принимается во внимание. Рифели могут сосуществовать с грядами, передвигаясь по поверхности последних.

При больших скоростях течения, наблюдающихся в реках во время высоких паводков, донные наносы могут взвешиваться. Гряды тогда размываются и дно становится относительно ровным. Если при дальнейшем росте скоростей поток переходит в бурное состояние, на его дне появляется новый вид образований — антидюны. *Антидюны* имеют либо симметричный профиль, либо асимметричный с крутым напорным и пологим тыловым скатом. Они могут быть неподвижными или могут перемещаться как вниз, так и вверх по течению. Образование и движение антидюн неоднократно наблюдалось в лабораторных лотках; что касается естественных потоков, то антидюны в них могут встретиться лишь в виде исключения. Необходимые для формирования антидюн условия большого уклона дна и мелких донных частиц в природе не сочетаются. Поэтому в дальнейшем мы не будет уделять антидюнам значительного внимания.

Гидравлическое сопротивление дна, покрытого рифелями или грядами, гораздо сильнее сопротивления ровного дна. В лабораториях при образовании волн на поверхности первоначально ровного песчаного дна обычно регистрируется возрастание сопротивления в 3—5 раз, а иногда и больше. Вследствие того, что густота расположения рифелей на площади дна значительно превосходит густоту расположения гряд, сопротивление дна с рифелями при прочих равных условиях сильнее сопротивления грядового дна.

Как уже указывалось, сопротивление гряды (или рифеля) есть сила, обратная превышению продольной составляющей силы давления воды на напорный скат гряды над продольной составляющей силы давления на тыловой скат. Располагая данными о распределении давления по длине плоской гряды, можно найти величину сопротивления в расчете на единицу ширины потока по формуле

$$P_r = \int_0^{l_r} p(x) \frac{\partial z_0}{\partial x} dx, \qquad (7.10)$$

где l_r — длина гряды.

На рис. 33 показаны распределения давления и касательного напряжения на длине искусственно изготовленной жесткой гряды по опытам А. Дж. Родкиви [219]. На рис. 33 видно, что область низкого давления приходится на гребень гряды и ее тыловой скат, максимум давления располагается в начале напорного ската.

и далее искать вид этой зависимости с помощью экспериментов или натурных наблюдений. Экспериментально эту задачу решил В. С. Кнороз [69], выполнивший обширный цикл опытов в гидравлическом лотке и в аэродинамической трубе с песчаными и жесткими грядами. Градиент потерь I_r определялся Кнорозом как разность между измеренным полным градиентом потерь I_f и градиентом I_Δ, подсчитанным по логарифмической формуле. Таким же образом поступает большинство экспериментаторов, изучающих сопротивление гряд. В результате своих опытов Кнороз получил следующую формулу грядового сопротивления[1]:

$$\frac{C_r}{\sqrt{g}} = 3{,}16\left(\frac{l_r}{h_r}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{h_r}\right)^{1/8}. \qquad (7.14)$$

Для дна, покрытого рифелями, Кнороз нашел возможным принять постоянное значение крутизны $h_r/l_r = 0{,}1$ и полностью пренебречь сопротивлением зернистой шероховатости, т. е. считать $C = C_r$. Формулы для сопротивления рифелей получили по опытам в лотках также Э. Лорсен [199], представивший его в функции логарифма относительной высоты h_r/h, и В. Ванони, Л. Ван [243], определившие его в функции логарифма отношения $l_r h/h_r^2$.

Улучшив наши представления о механизме сопротивления гряд, формулы, основанные на лабораторных экспериментах, при попытках их применения к естественным потокам, оказались не более эффективными, чем формула Борда—Карно. Все они преуменьшают сопротивление. Здесь сказался тот факт, что грядовый рельеф в лабораторных лотках с их малыми отношениями ширины к глубине, и плоскими, вертикальными стенками получается значительно более упорядоченным, чем в естественных руслах. Известную роль играет также различие в значениях относительной зернистой шероховатости — песчинки лабораторного лотка при пересчете на натуру становятся частицами крупного гравия или гальки.

Возможны два выхода из затруднения: 1) попытаться раскрыть функциональную зависимость (7.13) с помощью натурных исследований и 2) найти новые аргументы для формулы грядового сопротивления. Первый путь был испробован Б. Ф. Снищенко [125], который, произведя измерения на нескольких перекатах рек Волги, Оки, Дона и Поломети, получил формулу

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda_r}} \equiv \frac{C_r}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{l_r}{h_r + 0{,}033 l_r}}. \qquad (7.15)$$

[1] Здесь и далее формулы сопротивления приводятся в виде выражений для безразмерного коэффициента Шези $C/\sqrt{g}$ независимо от того, как они записаны их авторами.

Построенный по этой формуле график связи $\lambda_r = \text{fct}\left(\frac{h_r}{l_r}\right)$ вместе с опытными точками показан на рис. 34. Небольшой объем наблюдений не позволяет придать этой формуле расчетное значение, но перспективность обращения к натурным исследованиям она доказывает.

Аргументом формул грядового сопротивления, не связанным явно с размерами гряд, естественно считать степень устойчивости донных частиц. Г. Эйнштейн, предложил взять в качестве такого аргумента величину

$$\psi \equiv \frac{(\rho_s - \rho)\, gd}{\tau_\Delta} = \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)\frac{d}{RI_\Delta}, \quad (7.16)$$

где ρ_s — плотность частиц (в оригинальной работе Эйнштейна и Барбароссы [173] вместо RI_Δ стоит $R_\Delta I$, но как уже указывалось, мы не будем пользоваться этим приемом). Величину ψ называют *коэффициентом устойчивости донных частиц* (см. п. 14.3).

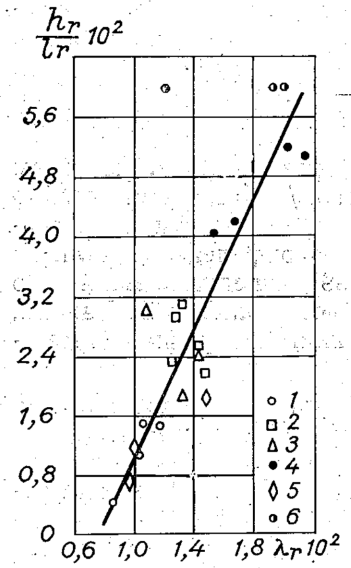


Рис. 34. Сопротивление грядового дна на речных перекатах (по Снищенко).

1 — р. Волга, перекат I, *2* — р. Ока, *3* — р. Пометь, низкий уровень, *4* — р. Пометь, высокий уровень, *5* — р. Волга, перекат II, *6* — р. Дон.

Во Введении мы отмечали, что река обязана расходовать на трение количество энергии, определяемое разностью высот ее истока и устья. У длинных рек эта разность (полное падение реки) мало изменяется при колебаниях уровней. Вследствие этого мало изменяются и средние уклоны свободной поверхности на отдельных, достаточно протяженных участках реки. Меняются, перераспределяясь по длине потока, лишь местные уклоны, испытывающие влияние конвективных ускорений. Но для того, чтобы средние уклоны менялись мало, надо, чтобы сопротивление русла уменьшалось с ростом скорости. Отсюда следует, что связь между сопротивлением донных гряд и коэффициентом устойчивости ψ должна быть прямой, а связь между грядовым коэффициентом Шези C_r и коэффициентом ψ — обратной. Опыты в лабораторных лотках и наблюдения в натуре показывают, что это так и есть.

В качестве репрезентативного диаметра частиц в выражении для ψ Эйнштейн принял диаметр d_{35} (с вероятностью 35%). В песчаных руслах отношение диаметра d_{35} к диаметру d_{65}, который вводится Эйнштейном в формулу сопротивления зернистой шероховатости, составляет в среднем 0,75 и, по-видимому, не бывает меньше 0,5. Связи между безразмерным коэффициентом

Шези грядового дна $\frac{C_r}{\sqrt{g}} = \frac{U}{v_{*r}}$ и коэффициентом ψ были построены по экспериментальным и натурным данным Эйнштейном и Барбароссой [173], Х. Шэном [227], Х. Шармой и Д. Варшни [226]. Шэн в качестве добавочного параметра использовал число Рейнольдса, составленное по диаметру и гид-

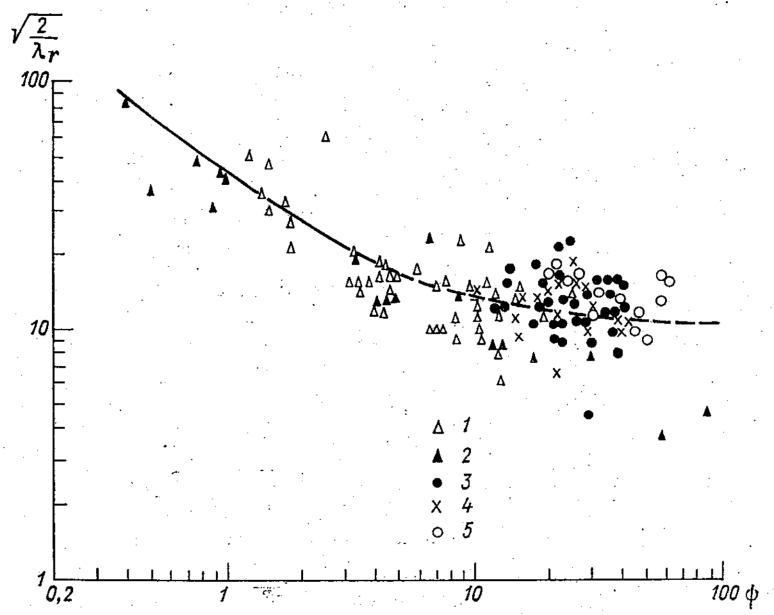


Рис. 35. Связь между сопротивлением гряд и коэффициентом устойчивости донных частиц $\psi \equiv \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)\frac{d_{35}}{RI_\Delta}$ (по Шарма и Варшни).

Натурные данные: *1* — UPIRI, *2* — Эйнштейн; лабораторные данные: *3* — UPIRI, *4* — Бхарат Синг, *5* — Саймонс и Ричардсон.

равлической крупности частиц. Наиболее широкие материалы были привлечены Шармой и Варшни, график которых показан на рис. 35. При обработке материалов эти авторы пользовались равенством (7.3). В области больших значений коэффициента устойчивости $\psi > 10$ точки измерений значительно разбросаны. Авторы попытались упорядочить разброс точек, введя в качестве добавочного параметра число Фруда, составленное по средней скорости течения и диаметру частиц. Поскольку в этой области доминирующим становится сопротивление зернистой шероховатости, неточности в определении C_r не очень сильно сказываются на оценке суммарного сопротивления.

Однако оценка подвижности дна с помощью коэффициента ψ не является единственно возможной. В исследованиях,

проводимых в СССР, уже давно, по предложению М. А. Великанова, используется с этой целью величина $\frac{U^2}{gd}$, т. е. то число Фруда, которое служит вспомогательным параметром в построениях Шармы и Варшни. Приняв за аргументы грядового сопротивления число $\mathrm{Fr}_d \equiv \frac{U^2}{gd}$ и относительную зернистую шерохова-

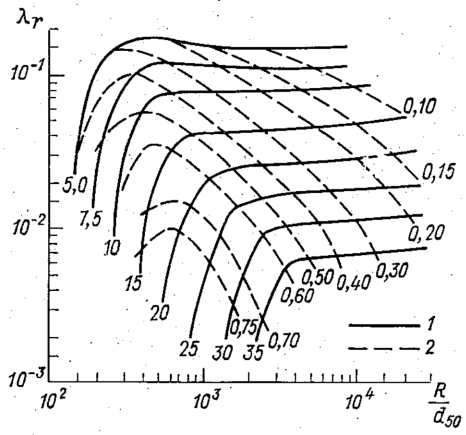


Рис. 36. Функция $\lambda_r = \mathrm{fct}\left(\frac{U}{\sqrt{gd_{50}}}, \frac{R}{d_{50}}\right)$ (по Абу Аламу и Кеннеди).

1 — линии равных значений $U/\sqrt{gd_{50}}$, *2* — линии равных значений $U/\sqrt{gR}$.

тость d/R, М. Абу Алам и Дж. Кеннеди [153] построили по опытным данным график функции

$$\lambda_r = \mathrm{fct}\left(\frac{U}{\sqrt{gd_{50}}}, \frac{R}{d_{50}}\right). \qquad (7.17)$$

В состав исходных данных вошли измерения в лабораторных лотках, реках и каналах. Величина грядового сопротивления выделялась из измеренной величины полного сопротивления с помощью построенного Ф. Ловерой и Дж. Кеннеди [205] графика сопротивления ровного песчаного дна. График функции (7.17) представлен на рис. 36. С семейством кривых, отвечающих постоянным значениям $\frac{U}{\sqrt{gd_{50}}}$, на рис. 36 совмещено семейство кривых с постоянными значениями числа $\frac{U}{\sqrt{gR}}$. На этом рисунке видно, что при $\frac{U}{\sqrt{gR}} \leqslant 0{,}4$ или при $\mathrm{Fr} \leqslant 0{,}16$, т. е. в обла-

сти чисел Фруда, к которой принадлежит большинство рек с песчаным дном, грядовое сопротивление не зависит от относительной зернистой шероховатости, становясь однозначной функцией числа Fr_d. Если снять с кривых $Fr_d = \text{const}$ значения λ_r,

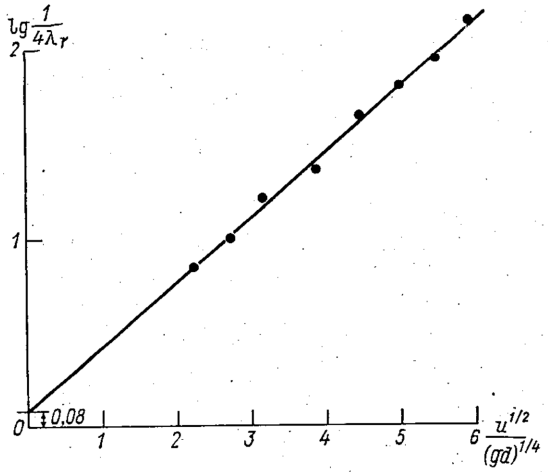


Рис. 37. Связь между сопротивлением гряд и коэффициентом подвижности донных частиц в области малых чисел Фруда.

отвечающие участкам, где кривые параллельны оси $\frac{R}{d_{50}}$, можно найти, что эти значения удовлетворяют уравнению

$$\lg \sqrt{\frac{2}{\lambda_r}} \equiv \lg \frac{C_r}{\sqrt{g}} = 0{,}49 + 0{,}17 \left(\frac{U}{\sqrt{gd_{50}}}\right)^{1/2} \qquad (7.18)$$

(рис. 37). Формулу (7.18) следует считать действительной в области совместного существования неравенств: $\frac{U}{\sqrt{gR}} \leqslant 0{,}4$ и $5 \leqslant \frac{U}{\sqrt{gd_{50}}} \leqslant 35$. Заметим, что в этой области нет точек лабораторных измерений — зависимость (7.18) полностью опирается на измерения в реках и каналах.

Из приведенных в работе [153] сведений видно, что медианная крупность грунта при натурных измерениях составляла 0,08—0,43 мм, т. е. менялась в 5,4 раза, а кинетическая энергия потока $\frac{U^2}{2g}$ составляла 0,0056—0,40 м, т. е. менялась в 70 раз.

Отсюда следует, что вариации грядового сопротивления, выражаемые формулой (7.18), обусловлены в первую очередь вариациями энергии потока и лишь во вторую очередь вариациями крупности грунта.

7.3. Полное сопротивление по длине

Оба вида зависимостей сопротивления донных гряд от степени подвижности дна — функция Эйнштейна $C_r = C_r(\psi)$ и функция Кеннеди $C_r = C_r(\mathrm{Fr}_d)$ — позволяют довести решение вопроса о сопротивлении естественного русла до конца и поэтому, в принципе, пригодны для использования в гидравлических расчетах. Чтобы полностью уяснить сложившееся сейчас (в 1977 г.) положение дел в речной гидравлике, рассмотрим простейшую задачу о равномерном движении воды в широком канале прямоугольного сечения с подвижным дном. В классической гидравлике, отказывающейся от учета подвижности дна в явном виде, задача содержит пять переменных: U, R, n, C и $I_f = i_0$. Для ее решения имеются две зависимости: формула Шези и формула Маннинга. Таким образом, три переменные должны быть заданы; если мы хотим знать C и U, то R, n и i_0 следует считать известными. При разделении полного сопротивления русла на сопротивление зернистой шероховатости и сопротивление гряд и при определении последнего с помощью функции Эйнштейна задача содержит девять переменных: U, R, d, C_Δ, I_Δ, ψ, C_r, C и I_f. Нетрудно убедиться, что число независимых соотношений равно шести, и значит три переменные снова должны быть заданы. При применении функции Кеннеди имеем восемь переменных: U, R, d, C_Δ, Fr_d, C_r, C и I_f при пяти зависимостях, число задаваемых величин — три — сохраняется.

Очевидно, расчеты по новым способам более трудоемки, чем расчеты по способу классической гидравлики. Это особенно заметно в задаче определения пропускной способности канала, решая которую по новым способам приходится вести расчет путем последовательных приближений. Это обстоятельство обусловлено наличием между величинами U и C_r взаимной связи — C_r зависит от U, но U мы не можем определить, не зная C_r. Уклон дна канала при заданной скорости течения определяется по новым способам расчета без подбора.

Стремясь избавиться от многоступенчатости расчетов, Ф. Энгелунд [176] сделал попытку установить прямую связь между полным сопротивлением русла и сопротивлением зернистой шероховатости. Считая, что у подобных потоков отношение касательных напряжений τ_0/τ_Δ должно быть одинаково, он предположил существование универсальной зависимости

$$\frac{RI}{\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)d} = \mathrm{fct}\left[\frac{RI_\Delta}{\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)d}\right]. \qquad (7.19)$$

Собранные Энгелундом опытные данные подтвердили наличие такой связи. Однако анализ вопроса, выполненный позднее японскими исследователями Киши и Куроки (цит. по [236]) с привлечением дополнительных лабораторных и натурных измерений, показал, что в действительности функция (7.19) не универсальна. Имея для разных потоков один и тот же общий вид, она меняется в количественном отношении при изменении относительной зернистой шероховатости d/R, а также при замене течения в лабораторном лотке течением в естественном русле. Таким образом, перейти прямо от I_Δ к I, минуя определение I_r, по-видимому, нельзя.

Разумеется, бóльшая физическая обоснованность новых способов расчета руслового сопротивления искупает их неизбежно бóльшую трудоемкость. Внедрение их в практику расчетов сегодня задерживается тем, что они проверены на ограниченном опытном материале и не могут считаться поэтому достаточно надежными. Беспокойство вызывает особенно тот факт, что размеры, а значит и сопротивление гряд в естественных руслах связаны со скоростью течения неоднозначно. При одной и той же скорости размеры гряд на подъеме и спаде паводка могут быть разными (см. п. 17.4). Этот факт не отражен в функциях Эйнштейна и Кеннеди и, по-видимому, именно к нему должно быть привлечено внимание на следующем этапе исследований.

Итак, пока инженер остается с формулами Маннинга, Павловского и им подобными, т. е. с коэффициентами шероховатости, выражающими в недифференцированном виде всю совокупность русловых сопротивлений. Достигнутое более глубокое понимание сущности русловых сопротивлений позволяет несколько улучшить практику пользования этими коэффициентами. Ниже приводятся некоторые соображения по данному вопросу. В целях конкретности имеется в виду основная задача теории неравномерного движения воды в открытом русле — расчет кривых свободной поверхности.

Прежде всего необходимо различать два случая: 1) расчет кривых свободной поверхности на протяженных участках рек; с ним мы встречаемся, например, при построении кривой подпора в верхнем бьефе плотины; 2) тот же расчет на коротком отрезке русла длиной порядка 10^1B или 10^0B; с ним мы встречаемся, проектируя спрямление пойменной извилины, перекрытие второстепенного рукава запрудой и т. п.

В первом случае элементарные (расчетные) участки, на которые разбивается водоток, имеют значительную длину, позволяющую надеяться на сглаживание местных вариаций сопротивления в пределах участка. Наполнение русла обычно бывает бóльшим. В этих условиях, как показывает опыт расчетов, пользование табличными значениями коэффициентов шероховатости и предположение, что эти значения не меняются при возможных

колебаниях уровня воды, допустимы и обеспечивают достаточную точность результатов [1].

Во втором случае расчетов пользование табличными значениями коэффициента шероховатости недопустимо — оно может вести к грубым ошибкам. Единственный выход из положения состоит в определении коэффициентов шероховатости на основании натурных измерений расхода воды и уклона свободной поверхности. Значение n в формуле Маннинга находится при этом

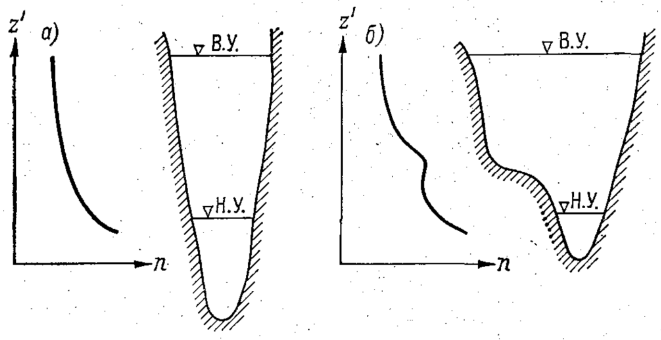


Рис. 38. Изменение коэффициента шероховатости с высотой уровня.

а — в плёсовой лощине, *б* — на перекате.

по записанному в конечных разностях уравнению неравномерного установившегося движения

$$n = \frac{B_{ср} H_{ср}^{5/3}}{Q} \sqrt{\frac{\Delta z' - \Delta \frac{U^2}{2g}}{\Delta l}}, \qquad (7.20)$$

где Δl — длина элементарного участка; $B_{ср}$ и $H_{ср}$ — его средние ширина и глубина; Q — расход воды; $\Delta z'$ — падение свободной поверхности; $\Delta \frac{U^2}{2g}$ — приращение удельной кинетической энергии потока на длине участка.

Измерения расхода и уклона и подсчет значений n должны быть выполнены не менее чем при 3—4 уровнях воды с тем, чтобы в итоге иметь для каждого расчетного участка кривую зависимости $n = n(z')$. Эти кривые имеют довольно разнообразный вид, но основная тенденция состоит в уменьшении значений n с ростом уровней. Наименьшие значения коэффициентов шероховатости обычно наблюдаются при уровнях воды, равных вы-

[1] Шкала коэффициентов шероховатости естественных русел, составленная М. Ф. Срибным, приводится во многих руководствах по гидравлике (И. И. Агроскина с соавторами, Г. К. Михайлова, М. Д. Чертоусова). Такая же шкала, составленная в США и сопровождаемая фотоснимками характерных участков русел, приведена в книге В. Т. Чоу [145].

сте меженных бровок. Влияние формы поперечных сечений на вид кривых $n = n(z')$ иллюстрируется рис. 38. Вследствие трансформации донных гряд в период прохождения паводка связи n и z' должны быть неоднозначны, однако количество измерений на подъеме паводка так мало, что определенных заключений об этом составить пока нельзя. При смыве гряд сопротивление русла резко уменьшается и функции $n = n(z')$ терпят разрыв. Разрыв терпят и кривые расходов. Для оценки русловых сопротивлений важно знать скорости и глубины, при которых происходит смыв гряд. К сожалению, применительно к натурным условиям этот вопрос изучен недостаточно. По отношению к равнинным рекам СССР положение облегчается тем, что вследствие малости их уклонов, а отсюда и скоростей течения, смыв гряд наблюдается в них редко и никогда не охватывает все русло.

Недостаточно исследованным остается сопротивление пойм. Аэрофотометрические наблюдения за движением поплавков, сброшенных с самолетов, показывают, что при небольших наполнениях в широких поймах образуются сосредоточенные потоки, разделенные обширными застойными зонами. С увеличением наполнения неоднородность течения на пойме сглаживается, но коэффициенты шероховатости могут сильно меняться по ширине поймы. Приводимыми в гидравлических справочниках значениями коэффициентов шероховатости пойм можно пользоваться лишь при осреднении сопротивлений по площади поймы на участках с длинами на 1—2 порядка, бóльшими ее ширины.

Источником добавочных потерь энергии является взаимодействие между русловым и пойменным потоками. Это взаимодействие изучал ряд исследователей (Г. В. Железняков, И. П. Спицын, Р. Селлин и др.). Сводные данные приводятся И. Ф. Карасевым [61]. Взаимодействие состоит в турбулентном трении на жидкой границе между двумя потоками и, что более важно, в результирующем перемещении водных масс из русла на пойму и обратно. Такое перемещение имеется при наполнении и опорожнении поймы, а также бывает вызвано изменениями ширины поймы по длине реки.

7.4. Гидравлические сопротивления при неплавно изменяющемся движении

К участкам с неплавно изменяющимся движением в реках относятся пороги и многие перекаты, крутые изгибы русла, места его деления на рукава и т. д. Анализ условий движения на таких участках показывает, что наблюдаемые на них большие потери энергии всегда связаны с местным расширением потока. Потери особенно велики тогда, когда расширение имеет

отрывной характер, т. е. сопровождается образованием водоворотных зон. Объяснение большим потерям энергии дает резко неравномерное распределение осредненных скоростей и соответственно сильная интенсивность турбулентности в расширяющемся потоке.

Повышенные градиенты скоростей на вертикалях обязывают к пересмотру формул сопротивления по длине. Повышенные градиенты скоростей по ширине потока требуют принять во внимание члены уравнений Рейнольдса (3.10), не содержащиеся в упрощенном варианте этих уравнений (3.18).

Вследствие недостаточной разработанности теории неплавно изменяющегося движения пока при решении одномерных задач применяется менее корректная процедура, основанная на следующих положениях.

1. Потери энергии по длине рассчитываются всюду по формулам для равномерного движения.

2. На участках сжатия потока $\left(\frac{dU}{dl}>0\right)$ эти потери приравниваются полным потерям энергии.

3. На участках расширения $\left(\frac{dU}{dl}<0\right)$ полные потери определяются как сумма потерь по длине и местных потерь, обусловленных расширением.

4. Потери, обусловленные расширением, выражаются в виде доли освобождающейся кинетической энергии по формуле

$$dh_e=\frac{\zeta_e}{2g}d(\alpha U^2), \tag{7.21}$$

где ζ_e — коэффициент местного сопротивления при расширении открытого потока; α — корректив скорости.

Фактически, как отметил Р. Р. Чугаев [146, с. 271], коэффициент ζ_e учитывает не только величину местных потерь, но и ошибку в оценке потерь по длине.

В результате уравнение установившегося неплавно изменяющегося движения записывается в виде

$$I=\frac{U^2}{C^2H}+\frac{(1-\zeta_e)}{2g}\frac{d(\alpha U^2)}{dl}. \tag{7.22}$$

На участках сжатия $\zeta_e=0$, $\alpha=1$, на участках расширения $-1\leqslant\zeta_e<0$, $\alpha=\alpha(l)>1$.

Неправильные формы естественных русел делают невозможным создание шкалы значений коэффициента ζ_e, подобной шкалам коэффициентов местных сопротивлений в трубах. В расчетах для случаев одностороннего отрывного расширения обычно принимают значение $\zeta_e=-0{,}5$. При безотрывных расширениях берут значения ζ_e от $-0{,}1$ до $-0{,}3$. Надежное построение функции $\alpha(l)$ может быть выполнено только на основе натурных или лабораторных измерений.

В плановой модели открытого неплавно изменяющегося потока потери энергии по длине определяются так же, как в одномерной модели, т. е. по формулам потерь в равномерном движении. Вопрос о местных потерях на участках расширения решается с большей строгостью. Эти потери не выделяются в явном виде, а учитываются посредством введения в дифференциальные уравнения движения членов, содержащих касательные напряжения в плоскостях, нормальных к плоскости сглаженного дна. Это значит, что уравнения планового движения, применяемые при отрывном расширении, опираются уже не на систему уравнений (3.18), а на более общий вид уравнений турбулентного движения (см. п. 11).

8. Речной паводок

8.1. Общие сведения о неустановившемся движении воды в открытом русле

Система уравнений Сен-Венана (6.29), (6.34) принадлежит к гиперболическим системам уравнений в частных производных, т. е. к системам, которыми описываются волновые процессы. Может быть показано, что при упрощающих предположениях отсутствия трения, постоянных поперечных размеров русла и малой амплитуды колебаний система (6.29), (6.34) заменяется уравнениями для функций $z'(l, t)$ и $Q(l, t)$, имеющими вид классического волнового уравнения,

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z'}{\partial l^2}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial l^2},$$

где c — скорость распространения волн.

Волны, распространяющиеся в реке, возникают вследствие изменений расхода воды в определенных сечениях русла — в устьях притоков, в створах подпорных гидроузлов. При решении уравнений Сен-Венана такие сечения выбираются в качестве граничных. Обычно изменение расхода задается в верхнем граничном сечении рассматриваемого участка реки. Так как длина волн, вызванных изменением расхода, всегда велика по сравнению с глубиной потока, эти волны называются *длинными*. Распространяясь в русле, волны изменяют свою высоту при изменении размеров поперечных сечений и таким образом аккумулируют множество малых возмущений. Состояние длинной волны в данный момент времени есть результат наложения не только тех возмущений, которые возникли с момента нарушения установившегося движения в граничном сечении, но также всех тех, которые волна испытала по пути.

Скорость распространения малых возмущений относительно движущейся жидкости определяется формулой Лагранжа

$$c=\sqrt{gH}. \tag{8.1}$$

Скорость распространения возмущений относительно берега будет

$$c'=U\pm\sqrt{gH}, \tag{8.2}$$

где знак плюс отвечает волне, движущейся по течению,— прямой, а знак минус — обратной. Со скоростью c' в реке перемещается *фронт* длинной волны — граница между возмущенной и невозмущенной жидкостью.

На фазовой, или волновой плоскости независимых переменных l, t распространение возмущений изображается *линиями характеристик*, имеющими уравнения:

$$dl=(U+c)\,dt, \tag{8.3}$$

$$dl=(U-c)\,dt. \tag{8.4}$$

С помощью уравнений Сен-Венана можно найти, что на каждой из характеристик семейства (8.3) — прямых — удовлетворяется соотношение

$$dz'-\frac{dQ}{B(U-c)}+\frac{Q^2}{K^2}dl=0 \tag{8.5}$$

и на каждой из характеристик семейства (8.4) — обратных — соотношение

$$dz'-\frac{dQ}{B(U+c)}+\frac{Q^2}{K^2}dl=0, \tag{8.6}$$

где $K\equiv\omega C\sqrt{H}$ — модуль расхода.

Система четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (8.3)—(8.6) полностью эквивалентна системе уравнений Сен-Венана и наравне с последней может быть использована для решения задач неустановившегося движения (С. А. Христианович, 1937 г.).

Примерный вид характеристик системы уравнений Сен-Венана представлен на рис. 39. Жирной линией показана характеристика установившегося движения, предшествовавшего изменениям расхода в верхнем граничном сечении $l=0$. Значения высот свободной поверхности и расхода воды, установленные в точках этой характеристики,

$$z'=z'(l)\quad Q=Q(l) \tag{8.7}$$

служат начальными условиями для решения уравнений (8.3)—(8.6).

Если изменение расхода реки обусловлено паводком на притоке, то обе волны (прямая и обратная), распространяющиеся вниз и вверх от устья притока, переносят изменения уровня од-

ного и того же знака — при увеличении расхода обе они являются волнами наполнения, при уменьшении расхода — волнами опорожнения русла. Изменение расхода в створе регулирующего гидроузла создает волны, имеющие в верхнем и нижнем бьефах разные знаки. Если волна наполнения последовательно сменяется во времени волной опорожнения, их совокупность называют *сложной волной.* Речной паводок или попуск воды из водохранилища служат примерами сложных волн.

При очень быстрых изменениях расхода, таких, какие происходят в нижних бьефах гидростанций, ведущих суточное регули-

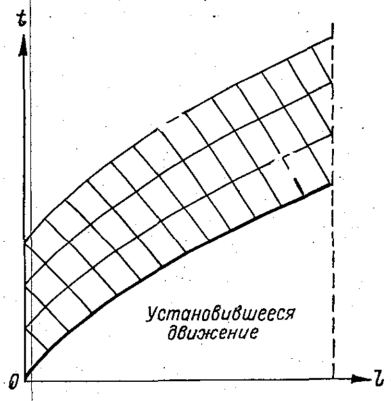


Рис. 39. Сетка характеристик.

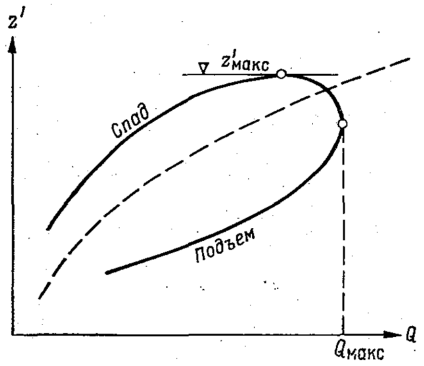


Рис. 40. Неоднозначная связь между расходом и уровнем при резком колебании расхода.

Пунктир — кривая расходов для установившегося движения.

рование стока, локальное ускорение $\frac{\partial U}{\partial t}$ становится сравнимым с продольной составляющей gi_0 гравитационного ускорения и, следовательно, может существенно влиять на величину уклона свободной поверхности. В соответствии со знаками производной $\frac{\partial U}{\partial t}$ уклон свободной поверхности на подъеме уровней оказывается значительно большим, чем на спаде. Очевидно, что при определенной интенсивности изменения расхода, интенсивность изменения глубины, а значит и уровня будет тем меньше, чем больше интенсивность изменения скорости. Это значит, что при больших абсолютных значениях производной $\frac{\partial U}{\partial t}$ и подъем и спад уровня будут отставать от соответственных изменений расхода. В результате такого отставания кривая связи между расходом и уровнем получает вид петли с далеко отстоящими друг от друга ветвями подъема и спада (рис. 40). Неоднозначность связи между Q и z' в условиях быстрых колебаний

расхода приводит к тому, что максимумы уровня, расхода и скорости наступают в одном и том же сечении разновременно. Сначала отмечается максимум скорости, затем максимум расхода и наконец максимум уровня. В сечениях, близких к створу гидростанции, при одном и том же уровне воды расход в фазе подъема может превосходить расход в фазе спада в несколько раз. Вследствие больших скоростей в лобовой части сложной волны и малых скоростей в ее тыловой части волна, двигаясь вниз, распластывается. Если в створе гидростанции размах суточных колебаний уровня нередко составляет 1,5—2,0 м, то на расстоянии 50—70 км он снижается до двух-трех десятков сантиметров.

8.2. Неустановившееся движение при малых силах инерции

Естественные колебания расходов воды в реках происходят медленно. Для большей части речных паводков характерны значения локального ускорения $\partial U/dt$, не превосходящие 1/100—1/10 продольной составляющей ускорения свободного падения. Наглядным свидетельством малости локальных ускорений служат *однозначные кривые расходов*, получаемые в результате гидрометрических работ. Неоднозначность (петли в верхних частях кривых) наблюдается лишь на участках рек с широкой поймой, причем она объясняется не влиянием локального ускорения, а явлениями поперечного оттока воды из основного русла в период наполнения поймы и притока воды в русло во время ее опорожнения. Если вода движется по основному руслу и дно устойчиво, связь между расходом и уровнем всегда однозначна.

На участках с плавно изменяющимся движением малы не только локальные, но и конвективные ускорения и, следовательно, сила тяжести практически уравновешена трением. Основываясь на этом, в расчетах неустановившегося движения, вызываемого естественными колебаниями стока, в качестве динамической зависимости обычно применяют уравнение равномерного движения

$$I = I_f = \frac{U^2}{C^2 H}. \tag{8.8}$$

Решать его надо совместно с уравнением неразрывности (6.29), которое мы перепишем здесь, представив площадь живого сечения по формуле $\omega = Q/U$,

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = \frac{1}{U}\left(\frac{Q}{U}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right). \tag{8.9}$$

Таким образом, естественные колебания расходов и уровней в реках образуют особый вид неустановившегося движения, в котором допустимо учитывать лишь кинематические эффекты

нестационарности, пренебрегая ее динамическими эффектами.

Специфика неустановившегося движения с малыми силами инерции была установлена еще в середине прошлого столетия, когда Клейц и Бретон исследовали этот вид движения (см. [141, с. 310—311]). Одним из основных полученных результатов была формула скорости распространения расхода. Мы приведем вывод этой формулы, следуя в основном изложению М. Ляйтхилла и Дж. Уизема [202].

Будучи однозначной в данном сечении связь между расходом и уровнем может иметь различный вид на разных участках русла. Поэтому следует писать

$$Q = Q_1(z', l). \tag{8.10}$$

При этом мы предполагаем, что русло не деформируется, как это фактически и бывает на хороших гидрометрических участках. Но при недеформируемом русле площадь живого сечения связана с уровнем также однозначно и, следовательно, в уравнении (8.10) независимую переменную z' можно заменить на ω

$$Q = Q_2(\omega, l). \tag{8.11}$$

При такой функциональной зависимости производная от расхода воды по времени в фиксированном сечении $l = \text{const}$ записывается в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t}\left(\frac{\partial Q}{\partial \omega}\right)_{l=\text{const}}.$$

Отсюда, умножая уравнение неразрывности на производную $\frac{\partial Q}{\partial \omega}$, будем иметь

$$\frac{\partial Q}{\partial l}\frac{\partial Q}{\partial \omega} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0. \tag{8.12}$$

Поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} = \text{fct}_1(\omega, l) = \text{fct}_2(Q, l),$$

то уравнение (8.12) есть однородное, квазилинейное уравнение для функции Q двух независимых переменных l и t. Так же как уравнение Сен-Венана, оно гиперболического типа, но будучи уравнением первого порядка имеет одно семейство характеристик. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентная уравнению (8.12), записывается в виде

$$\frac{dl}{\frac{\partial Q}{\partial \omega}} = \frac{dt}{1} = \frac{dQ}{0}. \tag{8.13}$$

Из нее следует, что на каждой из характеристик сохраняется некоторое постоянное значение расхода Q и что тангенс угла наклона характеристик к оси t

$$c_Q \equiv \frac{dl}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial \omega} \tag{8.14}$$

дает скорость распространения этого расхода вдоль реки. Написав далее

$$c_Q = \frac{\partial (U\omega)}{\partial \omega} = U + \omega \frac{\partial U}{\partial \omega} \tag{8.15}$$

и учтя, что $\frac{\partial U}{\partial \omega} > 0$, находим, что скорость распространения расхода больше скорости течения. В гидрологии скорость c_Q называют *скоростью добегания.*

Так как уравнение неразрывности, с помощью которого выводится формула (8.14), есть чисто кинематическая зависимость, длинные волны, ненарушающие однозначной связи между расходом и уровнем, называют, по предложению Ляйтхилла и Уизема, *кинематическими волнами.*

Из формулы (8.14) можно заключить, что скорость c_Q растет с увеличением расхода воды, а в фазах подъема и спада уровней при данном расходе она одна и та же. Поэтому паводочная волна, продвигаясь на бесприточном участке равнинной реки, не распластывается, а перекашивается, становясь круче в своей лобовой части и положе в тыловой.

Дж. Седдон, Ф. Форхгеймер, Г. В. Железняков, принимая различные предположения о форме поперечных сечений (прямоугольник, сегмент параболы и т. д.) и используя различные законы сопротивления, получили из формулы (8.14) выражения для c_Q, в которых единственным или главным аргументом служит средняя скорость течения. Исторически первая формула Седдона имеет вид

$$c_Q = \frac{3}{2} U. \tag{8.16}$$

Она получена в предположениях, что форма сечений прямоугольная, уклон и коэффициент Шези постоянны. Если определить коэффициент Шези по формуле Маннинга, оставив остальные условия прежними, отношение c_Q/U возрастает до 5/3. Наблюденные на реках значения этого отношения лежат примерно в пределах 1,5—2,0 [51].

8.3. Квазиравномерное движение открытого потока. Постоянная M

Уравнение движения (8.8), примененное к произвольному отрезку плавно изменяющегося неустановившегося потока, не приводя к существенным ошибкам в расчетах, является однако за-

ведомо неточным. Менее ясен случай, когда это уравнение применяется на цилиндрических участках русла. Действительно, ничто не мешает нам предположить, что при медленных колебаниях уровней вода движется на таких участках *с нулевым субстанциональным ускорением*, т. е. имея малое конвективное ускорение, равное локальному ускорению, взятому с обратным знаком,

$$U\frac{\partial U}{\partial l}+\frac{\partial U}{\partial t}=0. \tag{8.17}$$

Уравнение (8.8) будет выполняться при этом точно.

Возможность реализации (хотя бы приближенной) такого специального вида неустановившегося движения в речных потоках вытекает из отмечавшейся во Введении малой изменяемости уклонов их свободной поверхности. Как мы увидим, при строгом соблюдении условия (8.17) уклон свободной поверхности на данном цилиндрическом участке русла является постоянным.

Уравнение (8.17) представляет добавочную к уравнениям (8.8) и (8.9) зависимость неустановившегося движения. Если оно справедливо, мы имеем тот единственный случай, когда эти уравнения согласованы.

Рассмотрим следствия из уравнения (8.17). Выразив в нем скорость по формуле $U=Q/\omega$, умножив все члены на ω и исключив производную $\partial\omega/\partial t$ с помощью уравнения неразрывности (6.29), получим

$$\frac{2Q}{\omega}\frac{\partial Q}{\partial l}-\frac{Q^2}{\omega^2}\frac{\partial \omega}{\partial l}+\frac{\partial Q}{\partial t}=0. \tag{8.18}$$

Вычитая из уравнения (8.18) уравнение Бретона (8.12), будем иметь

$$\left(\frac{2Q}{\omega}-\frac{\partial Q}{\partial \omega}\right)\frac{\partial Q}{\partial l}-\frac{Q^2}{\omega^2}\frac{\partial \omega}{\partial l}=0. \tag{8.19}$$

Так как при неустановившемся движении в форме кинематических волн $Q=Q_2(\omega, l)$, то в уравнении (8.19) ω и l есть независимые переменные, отсюда

$$\frac{\partial \omega}{\partial l}=0. \tag{8.20}$$

Это равенство на цилиндрическом участке русла означает, что уклон свободной поверхности равен уклону дна и, следовательно, не изменяется с высотой уровня. Скорость течения изменяется по длине участка только и точно в той мере, в какой изменяется расход воды. Потоки с этими свойствами будем называть *квазиравномерными*. Равномерный поток есть частный случай квазиравномерного.

Равенство (8.20) превращает уравнение (8.19) в простое дифференциальное соотношение

$$\frac{2Q}{\omega}-\frac{\partial Q}{\partial \omega}=0. \tag{8.21}$$

Имея в виду корытообразные плёсовые лощины рек и широкие призматические каналы, ограничим решение уравнения (8.21) двумя условиями: 1) ширина потока по зеркалу воды велика по сравнению с его средней глубиной: $B \gg H$; 2) коэффициент береговых откосов имеет порядок единицы:

$$m=\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right)^{-1}=0\,(1).$$

Написав производную $\partial Q/\partial \omega$ в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega}=\frac{\partial Q}{\partial t}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^{-1}=\frac{\partial Q}{\partial t}\left[BH\left(\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial t}\right)\right]^{-1}, \tag{8.22}$$

легко убедиться, что при соблюдении указанных условий влияние на величину $\partial Q/\partial \omega$ изменений ширины русла пренебрежимо мало. Отсюда мы получаем возможность провести решение уравнения (8.21), считая B постоянным параметром. Введя в (8.21) безразмерные переменные

$$\widetilde{\omega}\equiv\frac{\omega}{B^2}, \qquad \widetilde{Q}\equiv\frac{Q}{B^2\sqrt{gB}}, \tag{8.23}$$

после интегрирования получаем

$$\widetilde{\omega}=M\left(\widetilde{l}\right)\widetilde{Q}^{1/2}, \tag{8.24}$$

где $\widetilde{l}\equiv l/B$ и $M\left(\widetilde{l}\right)$ — произвольная функция. Решив соотношение (8.24) относительно M и вернувшись к размерным переменным, имеем при каждом $l=\text{const}$ приближенное равенство

$$M=\frac{H\,(gB)^{1/4}}{Q^{1/2}}=\text{const}. \tag{8.25}$$

В руслах с отвесными берегами условие (8.25) должно соблюдаться точно.

Полученное решение показывает, что квазиравномерному движению отвечает особый вид связи между поперечными размерами русла и расходом воды. Практическое значение этой связи определяется тем, что в поперечных сечениях корытообразных плёсовых лощин и широких каналов ее параметр M, в отличие от коэффициента Шези C и коэффициента шероховатости n, не изменяется при колебаниях уровней. Величину M будем называть *постоянной квазиравномерного движения*. Очевидно, постоянная M может принимать разные значения в разных квазиравномерных потоках.

В геометрии открытых потоков естественной единицей длины служит средняя глубина (гидравлический радиус) сечения. Уравнение (8.25) содержит новую кинематическую единицу длины $l_Q \equiv Q^{1/2}/(gB)^{1/4}$. Постоянная M выражает отношение этих единиц в данном квазиравномерном потоке.

Другую важную интерпретацию постоянной M получим, представив ее через критерии геометрического и динамического подобия открытых потоков — отношение ширины к глубине B/H и число Фруда $\mathrm{Fr} \equiv U^2/gH$:

$$M = \left(\frac{H}{B}\frac{1}{\mathrm{Fr}}\right)^{1/4}. \qquad (8.26)$$

Так как изменения критериев B/H и Fr при колебаниях уровней оставляют величину M неизменной, то она представляет собой локальный инвариант группы преобразований подобия квазиравномерных потоков, или кратко, *локальный инвариант подобия* [1].

Из результатов цитированной во Введении работы Л. Леопольда и В. Лангбейна [201] выявляется связь закона (8.25) с очень общими свойствами системы поток—русло, теми, которые определяют ее принадлежность к классу открытых статистически стабильных физических систем. Поставив своей целью найти, как изменяются гидравлические элементы потока вдоль реки по мере нарастания ее расхода, Леопольд и Лангбейн использовали уравнение неразрывности, формулу Шези—Маннинга, полуэмпирическую формулу концентрации наносов и два постулата, связанных с концепцией энтропии. Первый из них указывает на стремление всех физических систем к равномерному распределению энергии, второй есть постулат о минимальной скорости порождения энтропии. В итоге расчетов Леопольд и Лангбейн пришли к соотношениям: $H \sim Q^{0{,}36}$, $B \sim Q^{0{,}55}$, отсюда получаем $HB^{1/4} \sim Q^{0{,}50}$, т. е. закон (8.25).

Для удобства расчетов приведем вытекающие из формулы (8.25) выражения для средней глубины, расхода воды и средней скорости:

$$H = M\frac{Q^{1/2}}{(gB)^{1/4}}, \qquad (8.27)$$

$$Q = \frac{1}{M^2}(gB)^{1/2}H^2, \qquad (8.28)$$

$$U = \frac{1}{M^2}\left(\frac{g}{B}\right)^{1/2}H. \qquad (8.29)$$

---

[1] Еще в 1950 г. Г. В. Железняков [50, с. 49] высказал предположение о возможности рассматривать произведению $\frac{B}{H}\mathrm{Fr}$ как одну из безразмерных характеристик руслового потока. К сожалению, последующая неправильная трактовка этой величины как критерия подобия [52] помешала Железнякову использовать ее должным образом.

Формула (8.28) играет роль *общей основы всех однозначных кривых расхода.*

Установив возможность квазиравномерного движения и определив его свойства, остается убедиться в том, что оно действительно реализуется Природой. Наиболее удобный опытный материал для этого дают измерения расходов воды на постоянных гидрометрических створах, которые принято устраивать, по возможности, в прямолинейных, устойчивых плёсовых лощинах с незатопляемыми берегами. Выполненный анализ таких измерений (в частности, собранных в Гидрологических ежегодниках) показал, что всюду, где исходные условия недеформируемого, цилиндрического русла с крутыми берегами соблюдены, закон

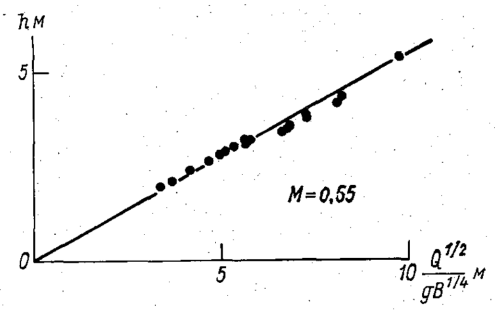


Рис. 41. р. Енисей — г. Кызыл. Площадь водосбора 112 000 км². Измерения 1962 г.

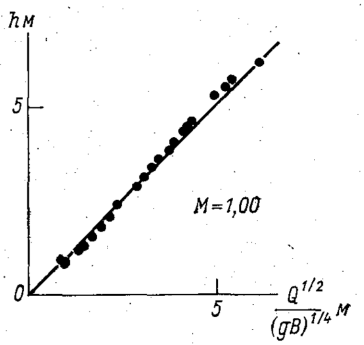


Рис. 42. р. Молога — г. Устюжна. Площадь водосбора 19 400 км². Измерения 1955 г.

(8.25) выполняется с высокой для натурных наблюдений точностью. Существование квазиравномерного движения и его значительная распространенность в естественных потоках стали, таким образом, фактами.

Обычная обработка измерений состоит в вычислении значений длины $l_Q \equiv Q^{1/2}/(gB)^{1/4}$ и в построении графиков функции $H = H(l_Q)$. Свидетельством локальной инвариантности величины M служит расположение точек измерений вдоль прямой, выходящей из начала координат. Примеры такого рода графиков даны на рис. 41—44.

Общее свидетельство верности закона (8.25) можно видеть в том, что значения постоянной M по гидрометрическим створам на реках разных масштабов и с разными типами водного и руслового режима изменяются в нешироких границах вокруг единицы. Внутри области рассеяния выявляется ясно выраженная закономерность: значения M на устойчивых плёсовых участках рек с песчаным дном группируются около среднего значения 0,9, с увеличением крупности донных отложений значения M понижаются и в реках с галечно-валунными отложениями падают

до 0,6—0,5. Как будет показано в главе VII, эта закономерность имеет ясное физическое объяснение. В руслах со связными грун-

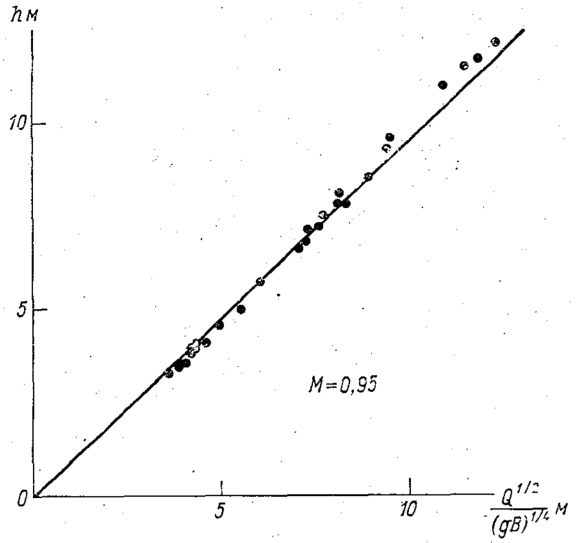


Рис. 43. р. Кама, с. Сокольи Горы. Площадь водосбора 504 000 км². Измерения 1951 г.

тами значения M обычно превышают 1,0. Согласно исследованиям, выполненным в Люблинском Водномелиорационном институте ПНР, в торфяных руслах они достигают 2,0.

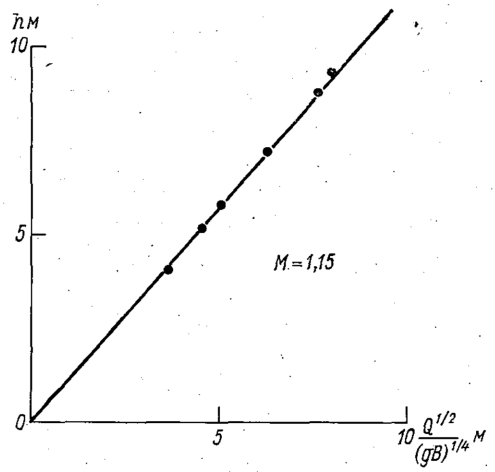


Рис. 44. р. Сенегал, гидроствор Бакель. 795 км от устья. Измерения 1954 г.

Одно из приложений закона (8.25), точнее формулы расхода (8.28), состоит в том, что эта формула дает простое и надежное средство экстраполяции и интерполяции кривых расходов (в пределах основного русла). Если измерения расходов освещают лишь часть или отдельные интервалы амплитуды колебания уровней, то найдя по этим измерениям значение постоянной M в данном створе и располагая зависимостями средней глубины и ширины живого сечения от уровня: $H = H(z')$ и $B = B(z')$, можем вычислить по формуле (8.28),

значение расхода воды для любого уровня, при котором не было измерений. По сравнению с расчетом по формуле Шези этот способ имеет преимущество: он не требует знания уклона свободной поверхности и коэффициента шероховатости — величин, которые при отсутствии измерений приходится назначать ориентировочно.

Формулы расхода (8.28) и средней скорости (8.29) поволяют довести до конца решение задачи о скорости c_Q распространения расхода, не прибегая при этом к гипотезам о связи c_Q с сопротивлением русла. Подставив в формулу Клейца—Бретона (8.14) величину расхода по (8.28) и учтя далее формулу (8.29), будем иметь

$$c_Q=\frac{\partial Q}{\partial \omega}=\frac{g^{1/2}}{M^2}\frac{\partial}{\partial \omega}\left(B^{1/2}H^2\right)=2U\left(1-\frac{3}{4}H\frac{\partial B}{\partial \omega}\right). \quad (8.30)$$

Производную $\frac{\partial B}{\partial \omega}$ представим в виде

$$\frac{\partial B}{\partial \omega}=\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\omega}{H}\right)=\frac{1}{H}\left(1-B\frac{\partial H}{\partial \omega}\right). \quad (8.31)$$

При поперечных сечениях правильной формы отношение β средней глубины к максимальной не изменяется с наполнением русла

$$\frac{\partial \beta}{\partial \omega}=0, \quad \beta\equiv\frac{H}{h_{\text{макс}}}\leqslant 1. \quad (8.32)$$

Так как, кроме того, $\frac{\partial \omega}{\partial h_{\text{макс}}}=B$, то вместо (8.31) получаем

$$\frac{\partial B}{\partial \omega}=\frac{1}{H}(1-\beta). \quad (8.33)$$

Подставляя это выражение в (8.30), находим окончательно

$$c_Q=(1+3\beta)\frac{U}{2}. \quad (8.34)$$

Отношение c_Q к U меняется, таким образом, в зависимости только от формы поперечного сечения. При прямоугольном поперечном сечении ($\beta=1$) имеем $c_Q=2U$. Если, пренебрегая ошибкой от несоблюдения условия $B\approx\text{const}$, применить формулу (8.34) к руслу параболического сечения $\left(\beta=\frac{2}{3}\right)$, получим $c_Q=\frac{3}{2}U$, т. е. формулу Седдона.

9. Методы интегрирования уравнений неустановившегося движения

Уравнения Сен-Венана допускают лишь численное интегрирование. До появления быстродействующих вычислительных машин наиболее эффективным методом интегрирования был метод характеристик, т. е. решение в конечных разностях системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8.3)—(8.6). Решение ищется путем итераций и требует очень трудоемких вычислений. В связи с этим для нужд инженерного проектирования и гидрологических прогнозов был создан ряд облегченных методов расчета. Их общую черту составляет пренебрежение силами инерции, т. е. использование уравнения движения в форме (8.8). В наиболее простых методах уравнение движения не используется совсем — его заменяет эмпирическая связь между элементами движения на расчетном участке, например, между расходом воды на нижнем конце участка и уровнем в его середине или между средним на участке расходом и объемом воды на нем. Упрощение расчетов имеет неизбежной ценой уменьшение полноты и точности результатов. Если в расчетах неустановившегося движения, вызванного естественными колебаниями стока, точность облегченных методов обычно достаточна, то в расчетах, касающихся работы водозаборных сооружений и гидростанций, где приходится иметь дело с быстрыми изменениями расхода, дело обстоит не так. Поэтому до начала 1960-х годов положение с расчетами неустановившегося движения в практике проектирования оставалось тяжелым.

Быстродействующие вычислительные машины произвели в методах расчета неустановившегося движения подлинную революцию. Был переведен на машинный счет метод характеристик и некоторые из облегченных методов, однако, как показал О. Ф. Васильев, алгоритм машинного счета при решении непосредственно самих уравнений Сен-Венана оказывается более простым и удобным, чем алгоритм машинного счета по методу характеристик. В основном это объясняется тем, что, решая в конечных разностях уравнения Сен-Венана, мы задаем фиксированную сетку координат l, t, а пользуясь методом характеристик, мы должны находить координаты l, t узлов сетки характеристик в процессе решения.

Обстоятельный обзор методов расчета неустановившегося движения (ручных и машинных) содержится в монографии М. С. Грушевского [38]. Мы ограничимся здесь тем, что приведем краткие сведения о методе численного интегрирования уравнений Сен-Венана, разработанном для машинного счета под руководством О. Ф. Васильева в Институте гидродинамики СО АН СССР [14, 16]. Применяя уравнения Сен-Венана в их полном виде и имея удобный алгоритм, этот метод дает основание

считать его основным современным методом расчета неустановившегося движения воды в открытых руслах.

Для удобства вычислений уравнение движения (6.34) в методе ИГ приводится с помощью уравнения неразрывности (6.29) к следующему виду:

$$\frac{1}{g\omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}+2U\frac{\partial Q}{\partial l}\right)+\left(1-\frac{U^2}{gH}\right)\frac{\partial z'}{\partial l}=$$

$$=\left[i_0+\frac{1}{B}\left(\frac{\partial \omega}{\partial l}\right)_{H=\text{const}}\right]\frac{U^2}{gH}-\frac{Q^2}{K^2}. \qquad (9.1)$$

Уравнение неразрывности с учетом бокового притока, интенсивность которого обозначается q, записывается в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial l}+B\frac{\partial z'}{\partial t}=q. \qquad (9.2)$$

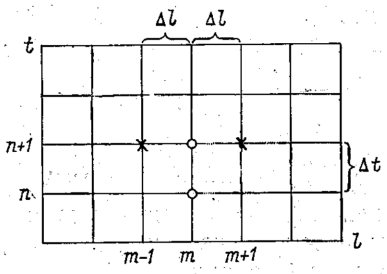


Рис. 45. Неявная разностная схема.

Для численного решения системы (9.1), (9.2) используется неявная разностная схема, сущность которой можно понять с помощью рис. 45 и приводимых ниже разностных выражений для производных. На рис. 45 точки, используемые при вычислении производных по t, обозначены кружками, а производных по l — крестиками. Производные от Q и z' по t записываются в следующем общем виде (y — зависимая переменная, m и n — номера шагов соответственно по l и t):

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{y(l_m, t_{n+1})-y(l_m, t_n)}{\Delta t}.$$

Производные от Q и z' по l пишутся в виде

$$\frac{\partial y}{\partial l}=\frac{y(l_{m+1}, t_{n+1})-y(l_{m-1}, t_{n+1})}{2\Delta l}.$$

Уклон трения $\frac{Q^2}{K^2}$ находится путем его разложения в ряд Тэйлора в точке (l_m, t_{n+1}), коэффициенты при производных берутся в точке (l_m, t_n). Шаг Δt на оси t может изменяться, так же как шаг Δl на оси l. На каждом шаге по времени элементы движения рассчитываются по всему протяжению рассматриваемого участка реки, после чего совершается переход к следующему шагу. Использование неявной схемы дает возможность применять относительно большие шаги по времени (практически это значит, что при расчетах суточных колебаний в нижнем бьефе ГЭС шаг Δt в зависимости от интенсивности изменения расхода берется примерно в пределах 10 с—10 мин). Система

разностных уравнений, аппроксимирующая систему дифференциальных уравнений (9.1), (9.2), решается известным в теории разностных схем методом прогонки [22].

Начальными условиями, как во всех задачах одномерного неустановившегося движения, служат функции $Q = Q(l, 0)$ и $z' = z'(l, 0)$. Если рассматриваются колебания расходов и уровней в нижнем бьефе ГЭС, граничным условием в створе ГЭС служит «входной гидрограф» $Q = Q(0, t)$. Нижняя граница назначается в зоне затухания колебаний и там задается однозначная кривая расходов $Q = Q(z')$. В общем случае как в верхнем, так и в нижнем граничных сечениях, могут быть заданы законы изменения во времени Q или z'.

Результаты расчетов представляют в виде графиков колебания расходов и уровней в ряде избранных сечений и в виде мгновенных продольных профилей свободной поверхности.

10. Плановые задачи при безотрывном движении

10.1. Метод Бернадского. Метод плоских сечений

Излагая методы интегрирования уравнений планового движения мы ограничимся установившимися, спокойными течениями ($Fr<1$). Читатель, желающий познакомиться с методами решения плановых задач бурных потоков, может обратиться к монографии Б. Т. Емцева [47][1].

Напомним, что уравнения планового движения были выведены в п. 6 при предположениях малости среднего уклона дна и плавности донного рельефа. Последнее условие записывают в виде усиленных неравенств

$$\frac{\partial z_0}{\partial x} \ll 1, \quad \frac{\partial z_0}{\partial y} \ll 1. \tag{10.1}$$

Уравнения планового движения были впервые составлены Н. М. Бернадским в 1931 г. [11]. Они были даны в натуральных координатах, т. е. в виде уравнений (6.23) и (6.27). Корректив скорости α_0 был принят Бернадским (так же как во всех других методах решения плановых уравнений) равным единице.

[1] При $Fr > 1$ уравнения планового движения относятся к гиперболическому типу. Их характеристиками служат линии возмущений в координатной плоскости (x, y). Участки с бурным течением обычно имеют малую длину и на них можно пренебрегать силами трения. При $Fr<1$ уравнения планового движения принадлежат к эллиптическому типу. Пренебрегать трением в спокойных потоках можно лишь в редких случаях. Этим объясняется, почему задачи планового движения бурных и спокойных потоков решаются разными методами.

Подставляя в первое из уравнений движения (6.27) выражение коэффициента Шези по Маннингу, после перегруппировки членов и деления на g получаем уравнение вида

$$I_1 = \frac{n^2 W^2}{h^{4/3}} + \frac{W}{g}\frac{\partial W}{\partial l}. \qquad (10.2)$$

Согласно уравнению неразрывности (6.23), имеем

$$\frac{\partial W}{\partial l} = -W\left(\frac{1}{r^*} + \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial l}\right). \qquad (10.3)$$

Исключая с помощью этого равенства производную $\frac{\partial W}{\partial l}$ из уравнения (10.2) и обозначая $\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial l} \equiv \frac{1}{r^{**}}$, получаем следующую систему уравнений движения:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{n^2 W^2}{h^{4/3}} - \frac{W^2}{g}\left(\frac{1}{r^*} + \frac{1}{r^{**}}\right), \\ I_2 &= \frac{W^2}{gr}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.4)$$

Величину $\frac{1}{r^{**}}$ Бернадский назвал кривизной вертикали. Одно из крайних сечений рассматриваемого участка реки должно быть выбрано там, где линии тока можно считать параллельными прямыми $\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{r^*} = 0\right)$. Тогда граничные условия для системы дифференциальных уравнений (10.4) будут состоять из распределения скоростей W по ширине этого сечения и из равенства скоростей нулю на линиях урезов воды. Напоминаем, что поле глубин должно быть известно.

Для численного интегрирования системы (10.4) Бернадский записал ее в конечных разностях и разработал итерационную графоаналитическую процедуру вычислений. Две смежные линии тока и два смежных поперечника выделяют криволинейный прямоугольник, называемый клеткой плана течения. Размеры Δl и Δb клетки, примыкающей к крайнему сечению участка и к одному из берегов, назначаются произвольно. Размеры остальных клеток находятся путем последовательных приближений с учетом условий динамического равновесия, выражаемых уравнениями движения. Для обеспечения сходимости решения разностных уравнений к решению исходной системы (10.4) необходимо пользоваться добавочным граничным условием — распределением скоростей во втором крайнем сечении, что Бернадским не было предусмотрено. Это обстоятельство, а также большая трудоемкость вычислений ограничили применение метода Бернадского в расчетах.

При ручном счете в настоящее время применяются модификации метода Бернадского, основанные на пренебрежении силами инерции. Если отбросить в системе уравнений (10.4) силы инерции, останется только уравнение движения для продольной координаты. Его удобно написать в следующем виде (индекс у обозначения уклона опускаем):

$$q=\frac{\sqrt{I}}{n}h^{5/3}. \tag{10.5}$$

Считая кривизну плановых линий тока и углы между ними малыми, можем использовать «гипотезу плоских сечений», т. е. изобразить поперечные сечения на плане участка отрезками прямых. Прямолинейные поперечники не требуют расчета, их можно назначать. Если план течений строится при большом наполнении русла, когда направление линий тока мало отличается от направления берегов, поперечники проводят нормально к геометрической оси русла. Если план течений строится при малом наполнении, когда на направление линий тока влияет рельеф дна, ориентировку поперечников сообразуют с этим рельефом.

Линии тока принято проводить так, чтобы при переходе от одной линии к другой функция тока получала одно и то же приращение

$$\Delta\Psi=\frac{Q}{m}, \tag{10.6}$$

где m — целое число. В результате поток разбивается в плане на m струй с одинаковыми расходами воды. Процесс построения линий тока получается простым: назначив поперечники надо разбить каждый из них по ширине на части, пропускающие одну и ту же выбранную долю полного расхода и затем соединить точки деления на плане участка плавными линиями.

Деление поперечников на части с равными расходами воды производится следующим образом. В соответствии с уравнением (10.5) расход первых i струй (считая от уреза, принятого за начало поперечной оси b) выражается в фиксированном поперечном сечении интегралом

$$Q(b_i)=\frac{\sqrt{I}}{n}\int_0^{b_i}h^{5/3}db, \tag{10.7}$$

где b_i — поперечная координата линии тока, отделяющей эти i струй от остального потока. Уклон I и коэффициент шероховатости n предполагаются в данном сечении постоянными.

Неизвестной в уравнении (10.7) является координата b_i. Для ее отыскания служит равенство

$$\int_0^{b_i}h^{5/3}db=\frac{i}{m}\int_0^{B}h^{5/3}db, \tag{10.8}$$

которое легко решается графически. Построив интегральную кривую, делят ее конечную ординату на m равных частей, и точки деления сносят сначала на интегральную кривую, а затем на ось b, как показано на рис. 46. Описанный простой способ был введен в практику расчетов М. А. Великановым. На прямолинейных и слабоизогнутых участках рек с плавным рельефом дна он дает вполне удовлетворительные результаты.

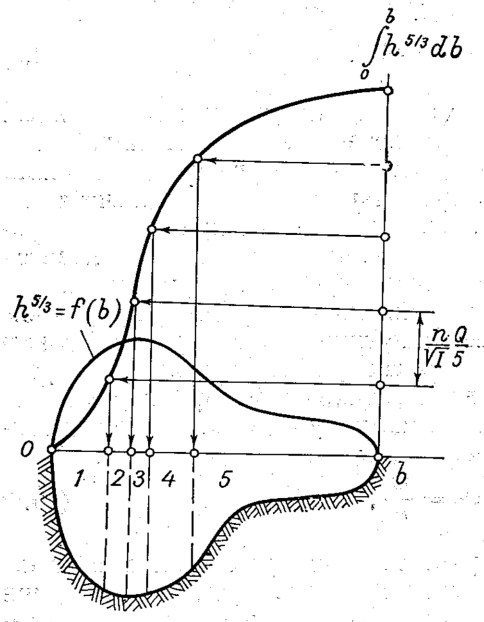


Рис. 46.

10.2. Метод фрагментов

Запросы практики нередко ставят задачу построения планов течений на участках, где условия плановой изменяемости движения не соблюдены. В некоторых случаях можно выйти из затруднения, применив метод фрагментов. Общая идея метода состоит в том, что поток разбивается в плане на несколько фрагментов, в пределах каждого из которых допустимо считать движение плавно изменяющимся и пользоваться гипотезой плоских сечений. Склейка решений на границах фрагментов выполняется автоматически, если расход воды заранее распределен между фрагментами. Так, если фрагментами служат рукава разветвленного участка реки, то сначала надо распределить расход между рукавами. Задача становится более сложной, когда фрагменты отделены друг от друга затопленными формами руслового рельефа (косами или осередками) и вода может перетекать из одного фрагмента в другой. Мы рассмотрим этот случай на примере переката с заходящими плёсовыми лощинами.

Перекаты с заходящими плёсовыми лощинами, называемые также *перекатами с затонской частью*, отличаются тем, что их вал пересекает русло по очень пологому направлению (рис. 47). При низких уровнях вал переката работает как косой затопленный водослив, бьефами которого являются верхняя и нижняя плёсовые лощины. Свободная поверхность имеет наиболее крутое падение над гребнем переката, причем там, где плёсовые лощины заходят друг за друга, уклон направлен поперек русла.

Деление на фрагменты вытекает из картины движения потока — к одному фрагменту принадлежит «верхний бьеф», т. е. оконечность верхней плёсовой лощины и напорный скат перекатного вала, к другому — «нижний бьеф», т. е. затонская (тупиковая) часть нижней плёсовой лощины вместе с тыловым скатом перекатного вала. Элементы движения, относящиеся к первому фрагменту, отмечаются ниже индексом I, ко второму — индексом II. При распределении расхода воды между фрагментами удобно пользоваться общей осью отсчета продольных расстояний, приняв за нее линию гребня переката L.

Вследствие бокового перелива воды в затонскую часть расход воды в верхней плёсовой лощине падает вдоль L, а расход воды в затонской части нарастает.

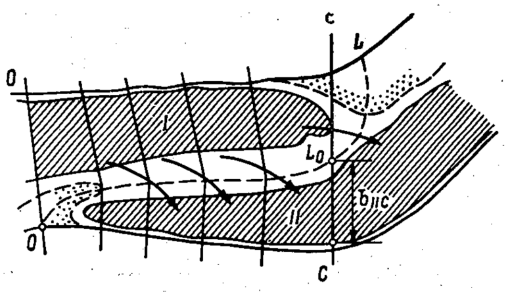


Рис. 47. Фрагменты плана течения на перекате с затонской частью.

Таким образом, в каждом поперечном сечении соблюдены три условия неразрывности:

$$Q_{\text{I}}+Q_{\text{II}}=Q, \tag{10.9}$$

$$-\frac{dQ_{\text{I}}}{dL}=\frac{dQ_{\text{II}}}{dL}=q_w, \tag{10.10}$$

где Q — полный расход реки и $q_w=q_w(L)$ — удельный расход на гребне перекатного вала.

Чтобы воспользоваться формулой (10.8) для распределения расхода воды по ширине каждого из фрагментов, надо знать значения расходов Q_{I} и Q_{II} в каждом из расчетных сечений, т. е. надо располагать функциями $Q_{\text{I}}(L)$ и $Q_{\text{II}}(L)$. Если полный расход воды в реке известен, то достаточно располагать лишь одной из этих функций, например $Q_{\text{II}}(L)$, так как значения другой найдутся из формулы (10.9). Интегрируя второе из уравнений (10.10), получаем

$$Q_{\text{II}}(L)=\int_0^L q_w\,dL. \tag{10.11}$$

Таким образом, задача о распределении расхода воды между верхней и нижней плёсовыми лощинами будет решена, если будет известна функция $q_w(L)$, т. е. распределение удельного расхода воды по гребню переката. Рассматривая вал переката как затопленный водослив с широким порогом и считая, что вся разность отметок свободной поверхности в верхней и нижней плёсовых лощинах сосредоточена над гребнем этого водослива, можем написать

$$q_w \sim h\sqrt{2g(z'_{\text{I}} - z'_{\text{II}})}, \tag{10.12}$$

где $h = h(L)$ — глубина на гребне. Наблюдения показывают, что разность $z'_{\text{I}} - z'_{\text{II}}$ меняется наиболее резко в вершине затон-

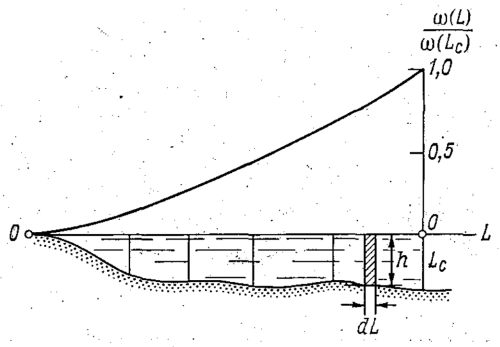


Рис. 48.

ской части, где она возрастает от нуля, и на нижнем побочне, где она падает до нуля. На основном же протяжении затонской части, где происходит перетекание воды из фрагмента I в фрагмент II, эта разность меняется очень мало. Таким образом, приближенно можно считать

$$\frac{d}{dL}(z'_{\text{I}} - z'_{\text{II}}) \approx 0. \tag{10.13}$$

Учтя это в (10.12) и перенеся результат в (10.11), будем иметь

$$Q_{\text{II}}(L) \sim \int_0^L h\,dL = \omega(L), \tag{10.14}$$

где функция $\omega(L)$ выражает нарастание площади живого сечения на гребне переката при движении вдоль линии гребня.

Там, где верхняя плёсовая лощина заканчивается и поперечный перелив прекращается (сечение C—C на рис. 47), формула (10.8) может быть применена к полному живому сечению реки и, следовательно, величина расхода воды в затонской части

$Q_{\text{п}}(L_C) \equiv Q_{\text{пс}}$ легко устанавливается. Приняв во внимание выражение (10.14), получаем следующую расчетную формулу изменения расхода воды вдоль затонской части переката:

$$Q_{\text{п}}(L) = \frac{\omega(L)}{\omega(L_C)} Q_{\text{пс}}, \qquad (10.15)$$

где $\omega(L_C)$ — часть живого сечения на гребне переката, ограниченная координатами $L = 0$ и $L = L_C$ (рис. 48).

Функция (10.15) вместе с условием (10.9) позволяет определить расходы воды во всех сечениях затонской части и верхней плёсовой лощины, после чего, используя в каждом из этих фрагментов графический прием Великанова, уже нетрудно найти границы струй. Очевидно, число струй в верхней плёсовой лощине будет уменьшаться вниз по течению, а в затонской части возрастать.

10.3. Применение машинного счета

Необходимость строить координатную сетку в ходе решения задачи препятствует использованию натуральных координат в расчетах на ЭВМ. Применение же прямолинейной сетки осложняет запись граничных условий на берегах, обычно имеющих криволинейные очертания. Среди нескольких попыток преодолеть это затруднение наибольшего внимания заслуживает метод, предложенный недавно В. М. Селезневым и В. В. Фильчаковым. По этому методу в области решения (на плане участка реки) разбивается сетка, которая состоит из $m+1$ прямолинейных поперечников, параллельных оси y, и кусочно гладких кривых, получаемых соединением точек деления каждого из поперечников на n равных интервалов.

Таким образом, шаг по оси y получается одинаковым на каждом поперечнике, но переменным вдоль оси x.

Система уравнений планового движения (6.16) после подстановки в нее выражения коэффициента Шези по Маннингу заменяется системой разностных уравнений, которая решается при граничных условиях, содержащих распределения скоростей U и V в крайних сечениях участка и равенства скоростей нулю на линиях урезов воды. Решение ведется итерационным способом по всей области: поле скоростей, построенное с учетом граничных условий на верхнем конце участка, должно удовлетворять граничным условиям на нижнем. Число решаемых алгебраических уравнений равно при этом $3(n-1)(m-1)$, т. е. весьма велико и решение требует поэтому большого машинного времени. Уменьшить это время можно, использовав как начальное приближение план течений, достаточно близкий к окончательному, но получаемый более простым способом. В качестве такого вспомогательного способа Селезнев и Фильчаков использовали

регуляризацию решения с помощью условия минимальной скорости диссипации энергии в объеме воды, содержащемся на участке. Учет граничных условий на нижнем конце участка при этом не нужен. Число алгебраических уравнений получается $3(n-1)$. Решение ведется методом случайного поиска и занимает на машине время, которое на порядок меньше времени, требуемого для решения по основному методу.

Из новых предложений по численному решению уравнений планового движения заслуживает внимания также *метод конечных элементов*, позволяющий математически моделировать граничные контуры области решения любой сложности [10].

11. Плановые задачи при отрыве потока от берегов

11.1. Общая картина движения на участках отрыва. Уравнения движения

Резкое плановое расширение потока с образованием водоворотных зон наблюдается обычно вслед за его местным стеснением. Такое стеснение может быть вызвано выходом в берегах трудно размываемых пород или искусственными сооружениями: полузапрудами, перемычками строящихся гидроузлов и т. д. Водоворотные зоны образуются также на крутых изгибах русла как у выпуклого, так и у вогнутого берега (при больших расходах воды). Обширные водоворотные зоны возникают в нижних бьефах подпорных сооружений при работе части пролетов водосливной плотины или части турбин ГЭС.

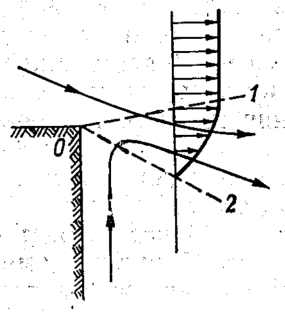


Рис. 49.

Начальный участок отрыва открытого потока от берега по своей кинематической структуре сходен с начальным участком пограничного слоя, образующегося при втекании плоской турбулентной струи в область, занятую покоящейся жидкостью. Этот начальный участок показан на рис. 49. Прямые линии *01* и *02* представляют границы слоя (границы области смешения). Между этими линиями продольная скорость течения убывает от значения, равного скорости транзитного потока, до нуля. Жидкость, подсасываемая струей из внешнего пространства, течет вдоль ограничивающей это пространство стенки, на рис. 49 по нормали к направлению основного движения. Отклонены в сторону нарастающего пограничного слоя и ближайшие к нему линии тока в струе.

Картина движения, охватывающая весь участок расширения, осложняется конечностью поперечных размеров руслового потока. Основные черты этой картины можно уяснить с помощью рис. 50, на котором схематически представлено одностороннее, внезапное, плановое расширение потока в русле прямоугольного сечения. Начальный участок расширения заканчивается в сечении *I*, где внутренняя граница области смешения *0′1* достигает боковой стенки. Водоворотная зона заканчивается в сечении *II*. Здесь в одной точке сходятся: линия *0′2*, представляющая внешнюю границу области смешения, линия нулевых скоростей *0′3*, отделяющая область прямого течения от области обратного,

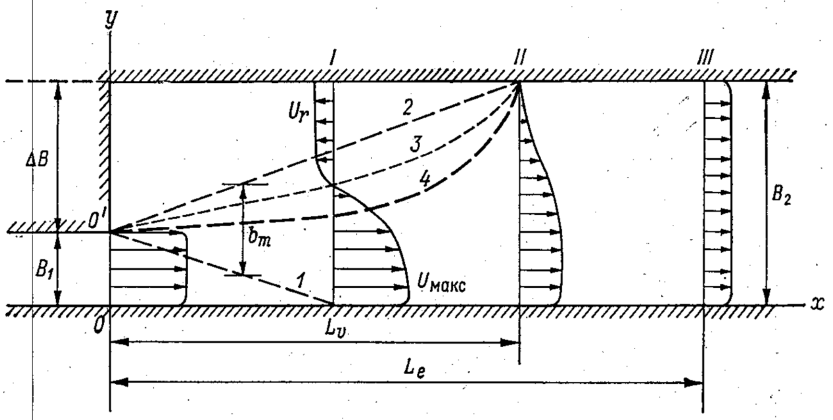


Рис. 50. Схема внезапного одностороннего расширения потока в открытом русле.

и линия *0′4*, которая служит границей между транзитным потоком с постоянным расходом воды и водоворотной зоной. Сечение *III* есть сечение полного выравнивания скоростей.

Вследствие перехода части кинетической энергии потока в потенциальную уклон свободной поверхности на участке расширения мал, а при значительной степени расширения становится обратным. В водовороте вдоль берега, к которому он примыкает, обратный уклон наблюдается всегда и его действием объясняется обратное движение воды у этого берега. На рис. 51 показан рельеф свободной поверхности р. Невы на участке Ивановских порогов, по измерениям Н. П. Гилярова на аэродинамической модели участка. В начале участка поток сжат выступающими в берегах скальными породами и затем испытывает резкое расширение в левую сторону. Обширная водоворотная зона у левого берега используется судами с маломощными двигателями для хода вверх по реке.

Малость вертикальных размеров руслового потока и связанное с ней торможение потока дном делают основные параметры

отрывного расширения зависящими от наполнения русла и шероховатости дна. Опыт показывает, что при увеличении шероховатости дна увеличивается угол расширения и сокращается длина водоворота. Связь длины водоворота с наполнением русла более сложна. Увеличение наполнения ведет, вообще говоря, к росту длины водоворота, однако в русле прямоугольного сечения этот рост происходит лишь до известного предела, после достижения которого длина водоворота начинает сокращаться

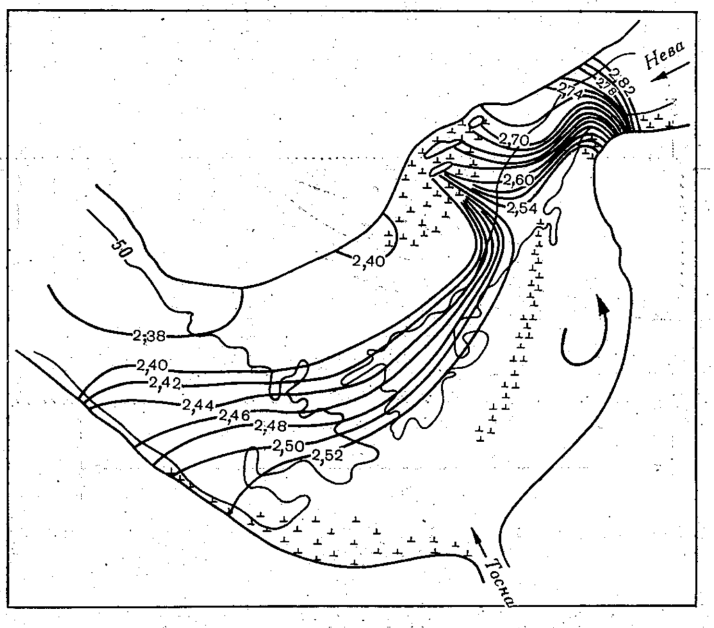


Рис. 51. Рельеф свободной поверхности на участке Ивановских порогов р. Невы.

под влиянием дающего о себе знать сопротивления боковых стенок. В естественных руслах с большими отношениями ширины к глубине практически действует лишь закономерность роста длины водоворотных зон с ростом наполнения.

Обширные экспериментальные исследования отрывного расширения открытых потоков были выполнены во ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева под руководством А. Н. Рахманова [108, 109]. В лотке прямоугольного сечения было исследовано 14 схем расширения, включавших одностороннее и двустороннее симметричное и несимметричное расширения с различными отношениями ширин узкого и широкого сечений, а также при различной шероховатости дна. На рис. 52 показаны полученные в этих опытах зависимости относительной длины водоворота от степени расширения, коэффициента Шези C и относительной ширины

потока для практически наиболее важного случая одностороннего расширения

$$\frac{L_v}{\Delta B} = \text{fct}\left(\frac{B_1}{B_2},\ C,\ \frac{B_2}{h_2}\right) \qquad (11.1)$$

(обозначения см. на рис. 50). На графиках видно, что рост длины водоворота в зависимости от коэффициента Шези C монотонный. При $B_2/h_2 \geqslant 30$ длина водоворота монотонно возрастает и с наполнением русла. При больших отношениях B_2/h_2 увеличение степени расширения (уменьшение отношения B_1/B_2) сокращает относительную (но не абсолютную) длину водоворота. При малых B_2/h_2 увеличение степени расширения ведет к росту абсолютной и относительной длин водоворота.

Теоретический анализ связей длины водоворота L_v и длины участка выравнивания скоростей L_e с глубиной потока и коэффициентом гидравлического трения содержится в монографии М. А. Михалева [96]. Для русел прямоугольного поперечного сечения в ней даны расчетные соотношения.

В областях смешения отрывных течений поперечные градиенты осредненных скоростей оказываются сравнимыми с градиентами скоростей по вертикали и одно из допущений, принимаемых обычно для потоков мелкой воды — о возможности пренебрегать производными от касательных напряжений по осям, параллельным дну — делается неприемлемым. Отказ от этого допущения обязывает дополнить уравнения турбулентного движения

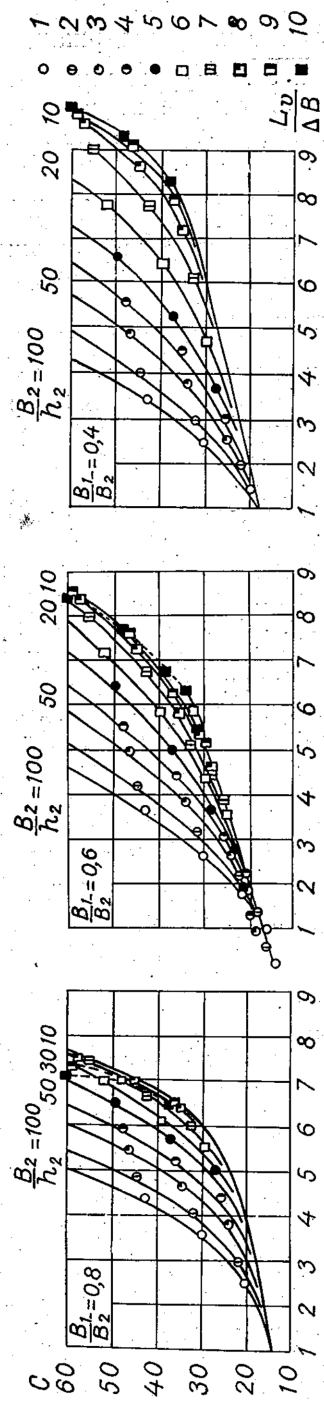


Рис. 52. Зависимость длины водоворота от коэффициента Шези и относительной ширины русла при разных степенях расширения (по Рахманову).

(3.18) членами, содержащими касательное напряжение $\tau_{xy} = -\rho\overline{u'v'}$. В уравнение для координаты x оно войдет под знаком производной по y, а в уравнение для координаты y — под знаком производной по x (см. систему (3.10) полных уравнений Рейнольдса).

При осреднении этих производных считают, что распределения напряжений τ_{xy} на вертикалях близки к равномерному. Так как по ширине потока напряжения меняются сильно (гораздо сильнее глубин), то добавочные члены в уравнениях планового движения получают простой вид: $\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy})_{ср}$, $\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy})_{ср}$.

При пользовании в задачах отрывного движения натуральными координатами принято пренебрегать кривизной струй. Таким образом, остается лишь уравнение для продольной координаты, которое записывается

$$W\frac{\partial W}{\partial l} = -g\frac{\partial}{\partial l}(z_0+h) - g\frac{W^2}{C^2H} + \frac{\partial}{\partial b}(\tau_{lb})_{ср}, \qquad (11.2)$$

где τ_{lb} — касательное напряжение на боковых поверхностях плановых струй. Средний уклон дна i_0 принят в уравнении (11.2) равным нулю. Такое условие принимается во всех задачах отрывного движения, поскольку участки расширения имеют небольшую длину. Уравнение (11.2) должно решаться совместно с уравнением неразрывности (6.23).

На прямых участках русел, в частности в нижних бьефах гидротехнических сооружений, обычно применяются прямолинейные декартовы координаты, причем считается, что можно пренебрегать поперечной компонентой скорости V как малой по сравнению с продольной компонентой U. Таким образом, используется лишь уравнение движения в проекциях на ось x, конвективный член $V\frac{\partial U}{\partial y}$ в нем опускается. Это делает уравнение движения не согласованным с уравнением неразрывности и придает решениям нестрогий характер.

Различия в методах интегрирования уравнений отрывного движения обусловлены главным образом различиями в приемах определения касательных напряжений τ_{xy}. Чаще всего эти приемы заимствуются из теории турбулентных струй.

11.2. Методы интегрирования уравнений отрывного движения

Решением плановой задачи отрывного движения открытого потока занимался ряд исследователей: Н. М. Бернадский, И. И. Леви, В. В. Баланин и В. М. Селезнев, В. М. Быков, И. В. Лебедев, Г. В. Востржел, М. А. Михалев, А. Н. Бутаков и др. Некоторые из них выполнили также ценные эксперимен-

тальные исследования. В частности, следует отметить цикл опытов И. В. Лебедева, уступающий по своему объему только опытам А. Н. Рахманова.

В настоящее время в расчетах чаще всего применяются два метода решения задач отрывного движения: метод Баланина—Селезнева и метод Михалева. На них мы кратко и остановимся.

Основу метода Баланина—Селезнева составляет теория свободной турбулентности, разработанная в 1941 г. Г. Рейхардтом и модифицированная потом И. М. Коноваловым (1947 г.). Исходя из экспериментальных данных, Рейхардт предположил, что поперечный перенос импульса в турбулентных струях пропорционален градиенту импульса

$$-\overline{u'v'} = \frac{1}{\rho}\tau_{xy} = \Lambda \frac{\partial \overline{u}^2}{\partial y}, \tag{11.3}$$

где $\Lambda = \Lambda(x)$ — величина с размерностью длины, играющая роль масштаба турбулентности, и

$$\overline{u^2} = \overline{u}^2 + \overline{u'^2}. \tag{11.4}$$

При отсутствии градиента давления гипотеза Рейхардта приводит к уравнению движения типа уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \overline{u}^2}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial^2 \overline{u}^2}{\partial y^2}. \tag{11.5}$$

Его интегрирование дает распределение $\overline{u}^2$ по закону интеграла вероятностей Гаусса.

Трудность перехода от осредненных квадратов актуальных скоростей к осредненным скоростям вызвала упрощающее допущение Коновалова

$$\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial y} \approx 0, \quad \frac{\partial \overline{u}^2}{\partial y} = \frac{\partial \overline{u}^2}{\partial y}. \tag{11.6}$$

Возможность этого упрощения обусловлена тем, что по направлению от оси турбулентной струи к ее периферии пульсационные скорости убывают значительно медленнее осредненных скоростей. Учтя равенства (11.6) в формуле Рейхардта (11.3), положив длину Λ пропорциональной расстоянию x от начала расширения и применив результат к турбулентному открытому потоку, получаем следующее выражение для среднего касательного напряжения в плоскости (x, z):

$$(\tau_{xy})_{\text{ср}} = \rho a_k^2 x \frac{\partial U^2}{\partial y}, \tag{11.7}$$

где a_k — эмпирический коэффициент.

Формулы (11.3) и (11.7) имеют тот принципиальный недостаток, что они не инвариантны относительно преобразований Галилея — ими можно пользоваться только в системе отсчета,

связанной с берегом. Уравнение движения в проекциях на ось x с учетом формулы (11.7) и условия $V \ll U$ записывается

$$U\frac{\partial U}{\partial x} = gI_x - g\frac{U^2}{C^2h} + a_k^2 x\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \qquad (11.8)$$

Считая, что дно горизонтальное и поперечный уклон отсутствует, имеем

$$I_x = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad h = h(x). \qquad (11.9)$$

Отсюда уравнение движения (11.8) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(U^2 + 2gh) = -2g\frac{U^2}{C^2h} + 2a_k^2 x\frac{\partial^2}{\partial y^2}(U^2 + 2gh). \qquad (11.10)$$

Введя замену независимой переменной $x = \sqrt{t}$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(U^2 + 2gh) = -\frac{g}{\sqrt{t}}\frac{U^2}{C^2h} + a_k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(U^2 + 2gh). \qquad (11.11)$$

Уравнение (11.11) легко интегрируется. Его общий интеграл после возвращения к старым независимым переменным x, y выражается следующим образом:

$$U^2 = \frac{\exp\left(-\frac{2gx}{C^2h}\right)}{2\sqrt{\pi a_k x}}\int_{-\infty}^{+\infty} F_0(\alpha)\exp\left[-\frac{(\alpha - y)^2}{4a_k^2 x^2}\right]d\alpha - 2g(h - h_0). \qquad (11.12)$$

Здесь $F_0(\alpha)$ — распределение U^2 во входном сечении, h_0 — глубина воды в нем, α — переменная интегрирования. Определенное по опытным данным значение коэффициента a_k составляет около 0,05.

Для построения плана течений уравнение (11.12) решается совместно с интегральным уравнением неразрывности. Так как изменение высот свободной поверхности на участке расширения спокойного потока всегда мало по сравнению с глубинами, то величину C^2h принимают постоянной по длине участка: $C^2h \approx \approx C^2h_0 = \text{const}$. Расчеты ведут путем последовательных приближений. В первом приближении распределение расхода воды по ширине участка находят, считая свободную поверхность горизонтальной, т. е. положив $h(x) = h_0$. Далее в каждом сечении задаются некоторым значением $h > h_0$, добиваясь того, чтобы рассчитанные расходы во всех сечениях получались равными заданному расходу в верхнем граничном сечении.

Приближенный способ построения плана отрывного течения в русле с произвольной формой дна изложен в статье Балашина и Селезнева [6]. Выполнение расчетов с помощью ЭВМ освещено в статье Селезнева и Фильчакова [121].

В методе Михалева используется решение, полученное Г. Шлихтингом (1930 г.) для плоского турбулентного следа за

движущимся в жидкости телом. Касательное напряжение Шлихтинг определяет по известной формуле Л. Прандтля

$$\tau_{xy}=\rho l^2\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right|\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}, \qquad (11.13)$$

где l — «путь перемешивания». В задачах свободной турбулентности величина l принимается поперек потока постоянной. Пренебрегая компонентой скорости $\overline{v}$ и считая, что на достаточном удалении от тела скорость течения в следе $\overline{u}_1$ мала по сравнению со скоростью тела $\overline{u}_0$, Шлихтинг записывает уравнение движения в виде

$$-u_0\frac{\partial\overline{u}_1}{\partial x}=2l^2\frac{\partial\overline{u}_1}{\partial y}\frac{\partial^2\overline{u}_1}{\partial y^2}. \qquad (11.14)$$

Если воспользоваться условием неизменяемости потока импульса по длине следа и предположить, что интенсивность перемешивания в сечении следа пропорциональна скорости $\overline{u}_{1\,\text{макс}}$ на его оси, можно прийти к следующим соотношениям для ширины следа и скорости $\overline{u}_{1\,\text{макс}}$:

$$b\sim\sqrt{x}, \qquad (11.15)$$

$$\overline{u}_{1\text{макс}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad (11.16)$$

где x — расстояние от тела. Интегрируя уравнение (11.14) с учетом соотношений (11.15) и (11.16), получаем следующее распределение осредненных скоростей по сечению следа:

$$\frac{\overline{u}_1}{\overline{u}_{1\text{макс}}}=\left(1-\eta^{3/2}\right)^2,\quad \eta\equiv\frac{y}{b}, \qquad (11.17)$$

где b — полуширина следа. Приравняв поток импульса в следе силе сопротивления, испытываемого телом, нетрудно определить коэффициент пропорциональности в соотношении для скорости $\overline{u}_{1\,\text{макс}}$. В результате получаем формулу

$$\overline{u}_{1\text{макс}}=1{,}4\sqrt{\frac{c_x b_0}{x}}\,u_0, \qquad (11.18)$$

в которой b_0 — полуширина тела и c_x — коэффициент сопротивления. Формулы (11.17) и (11.18) полностью определяют поле скоростей в следе (при $x\gg b_0$).

М. А. Михалев [95, 96] применяет закон распределения скоростей (11.17) к средним по вертикали скоростям в области смешения расширяющегося открытого потока. В общем случае, когда скорости U_r обратного течения в водовороте сравнимы со

скоростями транзитного течения, распределение плановых скоростей описывается уравнением

$$\frac{U-U_r}{U_{\text{макс}}-U_r}=(1-\eta^{3/2})^2, \tag{11.19}$$

причем относительная поперечная координата η определяется выражением

$$\eta=\frac{y-y_1}{b_m}, \tag{11.20}$$

где b_m — ширина области смешения; y_1 — ордината внутренней границы этой области. На начальном участке одностороннего планового расширения открытого потока можно пользоваться эмпирическим соотношением

$$y_1=B_1-0{,}1x. \tag{11.21}$$

При $x>10B_1$, пренебрегая толщиной пограничного слоя на боковой стенке, допустимо считать $y_1=0$.

Торможение потока дном заставляет скорости открытого потока убывать по длине участка расширения значительно быстрее, чем убывают скорости по длине следа. Решив уравнение изменения импульса с учетом сопротивления дна и боковых стенок, Михалев получил для одностороннего расширения при $B_2/B_1>4$ следующий закон падения максимальной скорости:

$$\frac{U_{\text{макс}}}{U_0}=1{,}37\exp\left(-\lambda\frac{x}{4h}\right), \tag{11.22}$$

где λ — суммарный коэффициент гидравлического трения. При больших степенях расширения скоростями обратного течения можно пренебрегать и тогда уравнения (11.19) и (11.22) полностью решают задачу о распределении плановых скоростей.

В случае небольших значений относительно расширения $B_2/B_1<3\div4$, когда длина водоворота сближается с длиной начального участка, расчетные выражения становятся более сложными и мы не будем их здесь приводить, отослав читателя к книге Михалева [96].

11.3. Построение свободных линий тока

Если плоский поток идеальной, невесомой, несжимаемой жидкости обтекает препятствие с острыми кромками, он отрывается от него, а жидкость за препятствием остается неподвижной при постоянном давлении. Давление, очевидно, сохраняется постоянным и на линиях тока, отделяющих движущуюся жидкость от неподвижной. Эти линии тока называются *свободными*. Так как линии тока идеальной жидкости всегда можно заменить твердыми границами, то построение свободных линий тока дает воз-

можность создавать безотрывно обтекаемые твердые поверхности.

Инициатива рассмотрения подобных задач в динамике русловых потоков принадлежит В. М. Маккавееву, решившему в 1934 г. таким способом задачу об очертании струенаправляющих дамб мостовых переходов [85]. Считать плановый русловой поток плоским и пренебрегать в нем силами трения можно тогда, когда соблюдены два условия: малая изменяемость глубин и сильное стеснение потока по ширине, приводящее к большим положительным ускорениям. Такие ситуации в русловых потоках нельзя считать исключенными. При больших наполнениях русла на участках ограниченной длины вариации глубин могут быть несущественными даже в случае относительно сложного рельефа дна.

Отбрасывание сил трения позволяет считать движение несжимаемой жидкости безвихревым. Плоское безвихревое течение жидкости определяется его комплексным потенциалом

$$F(z)=\varphi(x,\ y)+i\psi(x,\ y). \tag{11.23}$$

где $z=x+iy$ — комплексный аргумент; φ — потенциал векторного поля скоростей и ψ — функция тока.

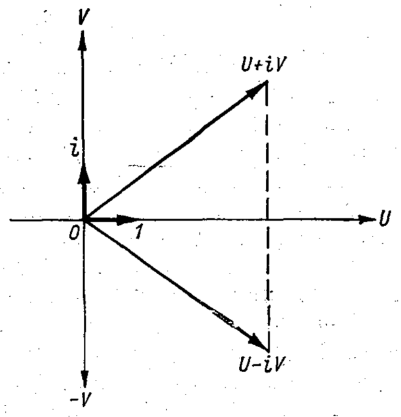


Рис. 53.

Таким образом, задача построения поля скоростей сводится к отысканию комплексного потенциала $F(z)$. Наиболее удобные средства для этого дает *метод конформных преобразований*, основы которого кратко излагаются ниже. Более подробные сведения читатель может получить из книги М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [81][1].

Дифференцируя функцию $F(z)$ по z, имеем

$$\frac{dF}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial y}=U-iV, \tag{11.24}$$

т. е. производная от комплексного потенциала по комплексному аргументу есть *сопряженная (комплексно сопряженная) скорость* (рис. 53). Модуль производной dF/dz дает абсолютное значение скорости течения

$$\left|\frac{dF}{dz}\right|=\sqrt{U^2+V^2}=|\mathbf{W}|. \tag{11.25}$$

[1] При дальнейшем изложении предполагается, что читатель знаком с элементами теории функций комплексной переменной.

Пусть теперь имеем две комплексные переменные: $z = x+iy$ и $\zeta = \xi+i\eta$, функционально связанные между собой зависимостью $z = f(\zeta)$.

Если нам дан комплексный потенциал некоторого течения $F(z)$, то функция $f(\zeta)$ позволяет преобразовать этот комплексный потенциал в другой, определяющий собой новое течение

$$F(z)=F[f(\zeta)]=G(\zeta)=\varphi'(\xi, \eta)+i\psi'(\xi, \eta). \quad (11.26)$$

Равенство функций $F(z) = G(\zeta)$ делает необходимыми равенства

$$\varphi(x, y)=\varphi'(\xi, \eta), \quad (11.27)$$

$$\psi(x, y)=\psi'(\xi, \eta). \quad (11.28)$$

Отсюда следует, что линии тока $\psi = \text{const}$ и линии равного потенциала $\varphi = \text{const}$ плоскости (x, y) будут иметь своими изображениями линии тока $\psi' = \text{const}$ и линии равного потенциала $\varphi' = \text{const}$ плоскости (ξ, η). Говорят, что плоскость (x, y) при помощи преобразующей функции $f(\zeta)$ отображается на плоскость (ξ, η). Это отображение называется *конформным* в силу его основного свойства подобия в бесконечно малых элементах, т. е. сохранения углов и направлений их отсчета в любых соответствующих точках двух плоскостей.

Очевидны два свойства конформного преобразования течения: 1) расход жидкости между двумя соответственными линиями тока на обоих плоскостях один и тот же; 2) циркуляция по любому контуру равна циркуляции по изображению этого контура на другой плоскости.

Общая схема применения метода конформных преобразований в задачах гидродинамики следующая.

1. В физической плоскости течения, т. е. в плоскости комплексного переменного $z = x+iy$, заданы контуры ограничивающих поток твердых поверхностей.

2. Располагаем картиной некоторого простейшего течения во вспомогательной плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi+i\eta$.

3. Путем подбора отыскиваем преобразующую функцию $z = f(\zeta)$, которая позволяет отобразить течение плоскости ζ на плоскость z с соблюдением имеющихся на последней граничных условий, т. е. тем самым получить интересующую нас картину течения в этой плоскости.

Важную разновидность метода конформных преобразований составляет *метод годографа*. Сущность этого метода состоит в том, что в качестве вспомогательной плоскости используется плоскость сопряженной скорости, т. е. такая плоскость комплексной переменной $\zeta = \xi+i\eta$, для которой $\xi = U$ и $\eta = -V$.

Последовательность действий при применении метода годографа следующая.

1. Располагая некоторыми данными относительно либо величин, либо направлений скоростей интересующего нас течения, строим план скоростей (годограф) в координатах U, V (данные о скоростях могут быть неполными, очертания свободных линий тока нам не известны).

2. Путем зеркального отражения относительно вещественной оси получаем годограф сопряженной скорости $U - iV$.

3. Приравнивая $U = \xi$ и $-V = \eta$ и принимая, таким образом, годограф сопряженной скорости за семейство линий тока некоторого течения на плоскости переменной ζ, ищем комплексный потенциал этого течения $G(\zeta)$.

4. Поскольку, с одной стороны, сопряженная скорость равна комплексной производной от комплексного потенциала интересующего нас течения в плоскости z

$$U - iV = \zeta = \frac{dF(z)}{dz}, \tag{11.29}$$

а с другой стороны, можно постулировать равенство характеристических функций

$$F(z) = G(\zeta), \tag{11.30}$$

мы приходим к дифференциальному уравнению

$$dG(\zeta) = \zeta\, dz, \tag{11.31}$$

решая которое, определяем преобразующую функцию

$$z = \int \frac{dG(\zeta)}{\zeta} = f(\zeta) + C. \tag{11.32}$$

5. Разложение преобразующей функции на вещественную и мнимую части

$$z = x + iy = f_1(\xi, \eta) + if_2(\xi, \eta) \tag{11.33}$$

позволяет получать по точкам ξ, η соответственные точки x, y, т. е. построить искомое течение в плоскости z.

Таким образом, в методе годографа преобразующая функция находится единственным путем, и затруднения возникают лишь в связи с определением комплексного потенциала $G(\zeta)$ вспомогательного течения. Часто необходимо выполнить ряд последовательных преобразований плоскости переменной $\zeta = U - iV$ во все новые и новые плоскости комплексных переменных, пока не получится такая картина линий тока, комплексный потенциал для которой известен.

Покажем, как применяется метод годографа для построения свободной линии тока с помощью интересной задачи, рассмотренной Н. С. Зубковым [58]. На крутом повороте русла поток под действием центробежных сил прижимается к вогнутому берегу. Сжатие потока тем сильнее, чем больше скорость течения, и при высоких уровнях поток нередко отрывается от выпуклого

берега. Образующаяся застойная зона служит местом отложения наносов — в эту сторону идет нарастание примыкающего к выпуклому берегу побочня. Зная очертания вогнутого берега и линию выпуклого берега до точки отрыва («плеча яра», которое всегда ясно видно на плане участка), можно построить свободную линию тока и тем самым определить границу области намыва.

В верхней части рис. 54 описанная картина представлена в схематизированном виде на плоскости комплексной переменной $z = x + iy$. Ломаная ABC изображает вогнутый берег, прямая AD — выпуклый берег до точки отрыва. Начало координат помещено в этой точке. В сечении AA поток невозмущенный. Это сечение, так же как и сжатое сечение $C—C$, надо представлять расположенным в бесконечности. Если сделать твердую стенку BC конечной, т. е. оборвать ее на конечном расстоянии от точки B, то получим схему плоского истечения жидкости из сосуда с косыми стенками. Различные частные случаи такой схемы были рассмотрены и систематизированы Р. Мизесом и саму эту задачу часто называют «задачей Мизеса». Рассматриваемая нами схема несколько проще задачи Мизеса, поскольку, в отличие от последней, в ней известно направление скорости в сжатом сечении.

Решение нашей задачи начинаем с построения годографа скоростей физического течения. Вдоль участка твердой стенки AB скорость течения убывает от значения W_A до нуля, а на участке BC возрастает от нуля до значения W_C. Вдоль линии тока DC, изображающей свободную поверхность струи, давление (пьезометрический напор) должно оставаться постоянным. В соответствии с уравнением Бернулли это означает, что модуль скорости на линии DC также остается постоянным и, следовательно, скорость в точке D отличается от скорости в сечении $C—C$ только направлением. На участке твердой стенки AD скорость возрастает по модулю от значения W_A до значения W_C.

Построив отвечающий описанным условиям годограф скоростей, отражаем его относительно вещественной оси, одновременно деля все значения скоростей на модуль скорости в сечении $C—C$, т. е. получаем безразмерный годограф сопряженной скорости (рис. 54). Плоскость комплексной переменной, в которой располагается безразмерный годограф сопряженной скорости, обозначим

$$\zeta_1 = \frac{1}{W_C}(U - iV). \tag{11.34}$$

Применим теперь преобразование $\zeta_2 = \zeta_1^{\pi/\beta}$. Представив комплексную переменную ζ_1 в полярных координатах r_1, θ_1, можем написать

$$\zeta_2 = (r_1 e^{i\theta_1})^{\pi/\beta} = r_1^{\pi/\beta} e^{i\theta_1 \pi/\beta}. \tag{11.35}$$

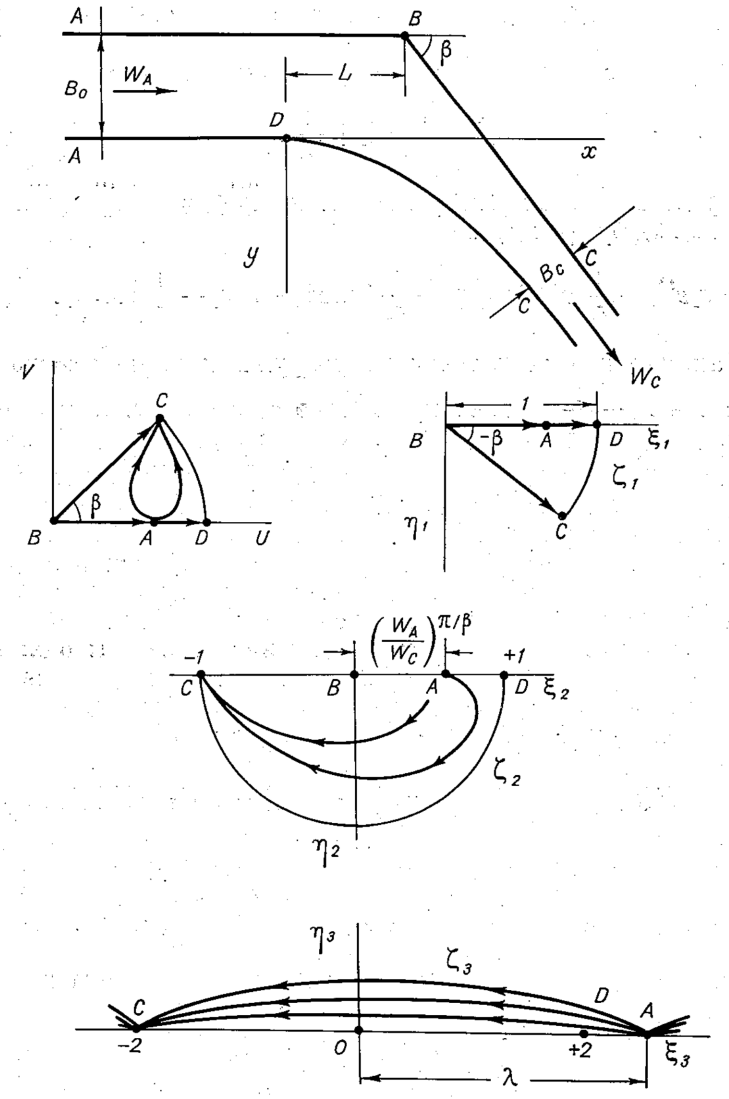

A
B
β
B_0
W_A
L
D
A
x
y
B^C
C
C
W_C
V
C
β
B
A
D
U
1
B
-β
A
D
ξ₁
ζ₁
η₁
C
$\left(\frac{W_A}{W_C}\right)^{\pi/\beta}$
-1
+1
C
B
A
D
ξ₂
ζ₂
η₂
η₃
ζ₃
C
D
A
-2
0
+2
ξ₃
λ

Рис. 54.

Это преобразование переводит сектор BCD в полукруг. Радиус окружности остается равным единице. Угол $-\beta$ преобразуется в угол $-\pi$ и точка C оказывается на отрицательной части вещественной оси. Точки A, B и D сохраняют свое взаимное расположение.

Последнее, нужное нам преобразование имеет вид

$$\zeta_3=\zeta_2+\frac{1}{\zeta_2}. \tag{11.36}$$

Представив комплексную переменную ζ_2 в полярных координатах r_2, θ_2, будем иметь

$$\zeta_3=r_2e^{i\theta_2}+\frac{1}{r_2}e^{-i\theta_2}=\left(r_2+\frac{1}{r_2}\right)\cos\theta_2+i\left(r_2-\frac{1}{r_2}\right)\sin\theta_2. \tag{11.37}$$

Так как для всех точек полуокружности на плоскости ζ_2 разность $r_2-\frac{1}{r_2}$ равна нулю, то эта полуокружность переходит на плоскости ζ_3 в отрезок вещественной оси с конечными точками C и D, расположенными симметрично относительно начала координат. Точки A и B диаметра полуокружности оказываются лежащими на вещественной оси плоскости ζ_3 вне этого отрезка, причем точка B получает абсциссу $\pm\infty$.

В результате течение, которое занимало на плоскости ζ_2 внутренность полукруга в нижней полуплоскости, занимает теперь всю верхнюю полуплоскость ζ_3. Линии тока, выходящие из точки A и собирающиеся в точке C, дают хорошо известную картину течения, создаваемого источником и стоком. Комплексный потенциал течения имеет вид [80, с. 62—64]

$$F(z)=G(\zeta_3)=\frac{Q}{\pi}\{\ln[\zeta_3-(\zeta_3)_A]-\ln[\zeta_3-(\zeta_3)_C]\}. \tag{11.38}$$

Здесь Q — расход жидкости через полуокружность, имеющую своим центром источник или сток; $(\zeta_3)_A$ — комплексная координата источника (точки A); $(\zeta_3)_C$ — комплексная координата стока (точки C).

Выразив расход через ширину и скорость потока в сжатом сечении $Q=W_CB_C$, введя обозначение

$$(\zeta_3)_A=\left(\frac{W_A}{W_C}\right)^{\pi/\beta}+\left(\frac{W_A}{W_C}\right)^{-\pi/\beta}\equiv\lambda$$

и приняв во внимание, что $(\zeta_3)_C=-2$, можем представить дифференциал функции $F(z)$ в следующем виде:

$$dF(z)=dG(\zeta_3)=\frac{W_CB_C}{\pi}\left(\frac{1}{\zeta_3-\lambda}-\frac{1}{\zeta_3+2}\right)d\zeta_3. \tag{11.39}$$

Величина сопряженной скорости в цепочке выполненных преобразований выглядит так:

$$\frac{dF(z)}{dz}=U-iV=W_C\,\zeta_1=W_C\,\zeta_2^{\beta/\pi}=$$

$$=W_C\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta/\pi}\left(\zeta_3-\sqrt{\zeta_3^2-4}\right)^{\beta/\pi}. \qquad (11.40)$$

Сравнение (11.39) и (11.40) дает

$$dz=\frac{2^{\beta/\pi}B_C}{\pi}\frac{(\lambda+2)\,d\zeta_3}{(\zeta_3-\lambda)(\zeta_3+2)\left(\zeta_3-\sqrt{\zeta_3^2-4}\right)^{\beta/\pi}}. \qquad (11.41)$$

Умножив числитель и знаменатель правой части (11.41) на $(\zeta_3+i\sqrt{4-\zeta_3^2})^{\beta/\pi}$ и интегрируя, получаем

$$z=\frac{(\lambda+2)\,B_C}{2^{\beta/\pi}\pi}\int\frac{\left(\zeta_3+i\sqrt{4-\zeta_3^2}\right)^{\beta/\pi}}{(\zeta_3-\lambda)(\zeta_3+2)}\,d\zeta_3+C. \qquad (11.42)$$

Это выражение и решает поставленную задачу определения течения в физической плоскости комплексной переменной z по известной картине течения во вспомогательной плоскости комплексной переменной ζ_3. Комплексная постоянная C может быть определена по условиям в точке отрыва.

Покажем, к каким результатам приводит уравнение (11.42) в случае поворота потока на прямой угол ($\beta=\pi/2$). Миновав промежуточные выкладки, напишем выражения для координат свободной линии тока (кривой сжатия) (индекс при ζ опускаем):

$$x=\frac{\sqrt{\lambda+2}B_C}{2\pi}\left(\ln\frac{\sqrt{\lambda+2}-\sqrt{\zeta+2}}{\sqrt{\lambda+2}+\sqrt{\zeta+2}}-\ln\frac{\sqrt{\lambda+2}-2}{\sqrt{\lambda+2}+2}\right), \qquad (11.43)$$

$$y=\frac{B_C}{\pi}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2-\zeta}}{2-\sqrt{2-\zeta}}-\sqrt{\lambda-2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2-\zeta}}{\sqrt{\lambda-2}}\right). \qquad (11.44)$$

Пусть B_0 и L обозначают соответственно ширину потока в сечении $A-A$ и расстояние точки D («плеча яра») от стенки BC. Тогда величина λ может быть представлена в следующем виде:

$$\lambda=\left(\frac{B_C}{B_0}\right)^2+\left(\frac{B_C}{B_0}\right)^{-2}=\left(\frac{B_C}{L}\,\frac{L}{B_0}\right)^2+\left(\frac{B_C}{L}\,\frac{L}{B_0}\right)^{-2}.$$

Введя коэффициент сжатия $\varepsilon=\dfrac{B_C}{L}$ и относительное отверстие $\chi=\dfrac{L}{B_0}$, имеем

$$\lambda=(\varepsilon\chi)^2+(\varepsilon\chi)^{-2}. \qquad (11.45)$$

Абсцисса свободной линии тока в сжатом сечении связана с коэффициентом сжатия соотношением

$$\frac{x_C}{L} = 1 - \varepsilon. \tag{11.46}$$

Значение x_C определяется в результате подстановки в (11.43) значения $\zeta_C = -2$.

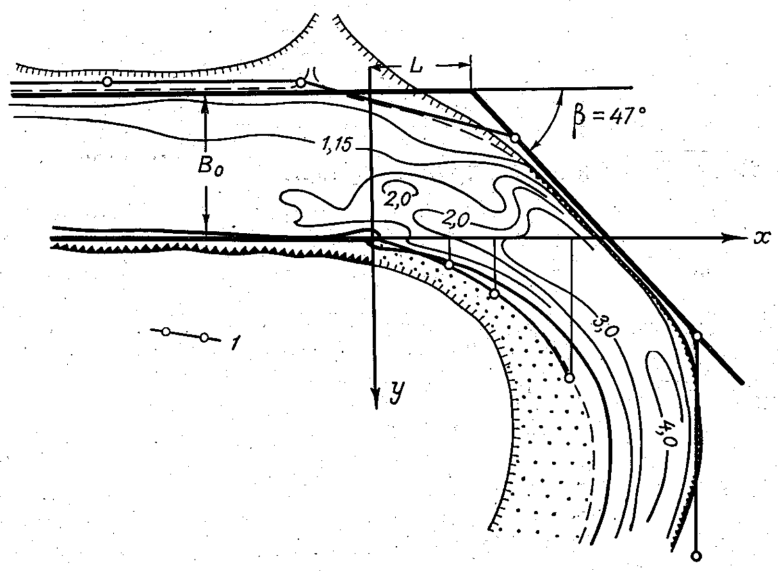


Рис. 55. План поворота р. Дона.
1 — свободная линия тока.

Перенеся результат в (11.46), получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\lambda+2}}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\lambda+2}+2}{\sqrt{\lambda+2}-2} + 1. \tag{11.47}$$

Исключив отсюда λ с помощью уравнения (11.45), можем установить зависимость коэффициента сжатия ε от относительной ширины отверстия χ.

Рассмотренная схема поворота потока на угол $\beta = \frac{\pi}{2}$ эквивалентна схеме истечения жидкости через щель шириной $2L$ в дне бесконечно широкого закрытого сосуда высотой B_0. Линия BC в такой схеме представляет линию симметрии, делящую струю пополам. Эта задача была решена Н. Е. Жуковским [53]. Указанная им формула связи между величинами ε и χ равносильна системе (11.45), (11.47).

Более общий случай поворота потока на угол $\beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ можно трактовать как фрагмент картины симметричного слияния двух струй под углом 2β. Такая задача рассматривалась Г. И. Трофимовым, получившим, в частности, для угла $\beta = \frac{\pi}{2}$ выражение коэффициента сжатия в виде (11.47). В статье Трофимова [134] приводится график $\varepsilon = \varepsilon(\chi)$, построенный путем решения системы (11.45), (11.47). Общее решение задачи, полученное Трофимовым при углах β, меньших прямого, с вычислительной точки зрения несколько удобнее формулы (11.42).

Использовав результаты Трофимова, Зубков построил номограмму, позволяющую находить координаты свободной линии тока для широкого диапазона значений относительной ширины отверстия χ и угла β. На рис. 55 показана построенная с помощью этой номограммы свободная линия тока на одном из поворотов русла р. Верхнего Дона. Она с большой точностью совпадает с границей побочня, подтверждая тем самым верность исходной расчетной схемы. В статье Зубкова [58] содержится еще несколько примеров кривых сжатия на изогнутых участках речных русел.

Глава IV

Некоторые пространственные задачи движения воды в естественных руслах

12. Движение воды на изгибе русла

12.1. Поперечные течения в реках. Процесс меандрирования

Пространственный характер движения воды в реках проявляется наиболее ярко там, где линии тока отклоняются от направления геометрической оси русла. В таких случаях удобно представлять течение воды как результат наложения на основное продольное движение поперечных или циркуляционных течений. Образование этих течений объясняется либо влиянием подводного рельефа, либо действием поперечных ускорений — кориолисова и центростремительного.

В отличие от картины, наблюдаемой в воздушных и океанических течениях, роль кориолисова ускорения в речных потоках незначительна. Это обусловлено его малостью по сравнению с обычными значениями продольной составляющей ускорения свободного падения gi_0. Общеизвестный эффект кориолисова ускорения — подмыв правых берегов рек северного полушария — меняет состояние рек так медленно, что в рамках нескольких десятилетий им можно полностью пренебрегать. Есть некоторые вторичные явления в речных руслах, носящие след кориолисова ускорения. Так, замечено, что на прямолинейных участках русел крупность донных отложений под правым берегом в среднем немного больше, чем под левым. На таких же участках перевалы линии наибольших глубин от левого берега к правому в среднем несколько круче, чем от правого к левому. Но все это — детали жизни рек, не привлекающие пока внимания динамики русловых потоков.

Совсем по-иному обстоит дело с центростремительным ускорением. Вследствие размываемости берегов речные русла легко искривляются. Возникшее, даже малое искривление усиливается под действием механизма обратной связи между кривизной русла и интенсивностью поперечного движения воды. Поперечное течение смещает максимум скоростей к вогнутому

берегу, вызывая его размыв. Возрастающая кривизна берега увеличивает центростремительное ускорение, а с ним и интенсивность поперечного течения. В развитых речных извилинах величина центростремительного ускорения сравнима с величиной gi_0, а иногда и превосходит ее. Бо́льшая или меньшая податливость берегов размыву влияет лишь на темпы процесса, не меняя его сущности. Если полный цикл развития извилины на большой реке с илистыми и глинистыми грунтами в берегах занимает несколько сотен лет, то извилины в скальном грунте вырабатываются рекой за тысячелетия. Гольфстрим, «берега» которого состоят из воды, образует меандры, очень похожие на речные, но крупные трансформации этих меандр происходят за несколько суток.

Как и в других случаях русловых деформаций, размыв вогнутого берега с некоторого момента времени перестает ускоряться, а затем он ослабевает или прекращается. У рек с высокими поймами, сложенными связными или полусвязными грунтами, затухание процесса обусловлено увеличением длины русла. В гипертрофированно длинных извилинах уклон свободной поверхности становится малым и медленно текущая вода уже не может размывать дно и берега. Если пойма невысокая и сложена несвязными грунтами, на более ранней стадии происходит прорыв перешейка между сблизившимися концами извилины и она отмирает.

Взаимосвязь между формой размываемого русла и кинематикой потока, вероятно, нигде не проявляется так явно, как на изгибе русла. В связи с этим движению воды в изогнутом русле посвящено большое число теоретических и экспериментальных исследований, но, как будет видно дальше, аналитически описать пока что удается лишь отдельные фрагменты движения.

Первая работа, в которой явление меандрирования было объяснено деятельностью поперечных течений, принадлежит Дж. Томсону (1876 г.) — старшему брату выдающегося физика XIX в. У. Томсона (лорда Кельвина). В 1926 г. А. Эйнштейн, не зная, по-видимому, этой работы, повторил объяснение Томсона в небольшой статье [151], написанной со свойственной Эйнштейну ясностью и лаконизмом. С тех пор это объяснение стало общепринятым.

12.2. Вращение жидкости

Движение воды в изогнутом русле имеет некоторые общие черты с плоским вращением жидкости, а также с движением жидкости в дискретных вихрях, образующихся на поверхностях раздела. В настоящем пункте мы кратко рассмотрим эту группу явлений.

Чтобы уяснить, как происходит вращение жидкости, рассмотрим следующую схему. Пусть в неограниченном пространстве, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью, вращается с постоянной угловой скоростью ω прямая круглая труба бесконечной длины, заполненная той же жидкостью. Движение жидкости внутри и вне трубы будет плоским, осесимметричным и установившимся. Для описания движения удобно воспользоваться цилиндрическими координатами r, φ, z (рис. 3). Соответствующие компоненты скорости будем обозначать v, u, w. Ось z совместим с осью трубы. В целях экономии места не будем выписывать здесь полные уравнения Навье—Стокса в цилиндрических координатах, а, отослав читателя к курсам гидромеханики, приведем простую систему, которая получается, если в соответствии с условиями задачи положить в этих уравнениях компоненты скорости v, w, объемные силы и все производные по φ, z и t равными нулю:

$$\frac{u^2}{r}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{12.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}=0. \tag{12.2}$$

Вследствие условий плоского, кругового, стационарного движения коэффициент вязкости сокращается. Вязкость жидкости при таком движении проявляется только в условии прилипания.

Интегрируя уравнение (12.2), получаем

$$u=\frac{C_1}{2}r+\frac{C_2}{r}, \tag{12.3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Определим движение внутри трубы. Граничные условия на оси трубы и на внутренней поверхности стенки имеют вид

$$u(0)=0, \quad u(r_0)=\omega r_0. \tag{12.4}$$

Отсюда $C_1=2$ и $C_2=0$. Жидкость внутри трубы вращается вместе с трубой как твердое тело

$$u=\omega r, \quad 0\leqslant r\leqslant r_0. \tag{12.5}$$

Вне трубы граничные условия записываются (толщиной стенок трубы пренебрегаем)

$$u(r_0)=\omega r_0, \quad u(\infty)=0. \tag{12.6}$$

Таким образом, во внешней области $C_1=0$, $C_2=\omega r_0^2=\frac{1}{2\pi}\Gamma$, где $\Gamma=2\pi r u$ — циркуляция скорости. Закон движения имеет вид

$$u=\frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad r_0\leqslant r\leqslant\infty. \tag{12.7}$$

Легко убедиться, что движение по закону (12.7) — безвихревое. Закон (12.7) называют *законом площадей* в силу того известного его свойства, что радиус-векторы всех движущихся жидких частиц ометают в единицу времени равные площади. Подставив выражение скорости (12.7) в уравнение движения (12.1) и выполнив интегрирование, найдем распределение давления

$$p = p(\infty) - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2}\frac{1}{r^2}. \qquad (12.8)$$

Распределение окружных скоростей внутри и вне трубы представлено на рис. 56. На стенке трубы производная $\frac{\partial u}{\partial r}$ терпит

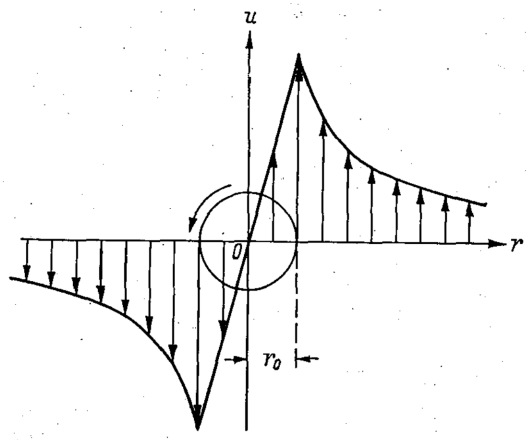


Рис. 56.

разрыв. Если теперь удалить трубу, силы вязкости сгладят разрыв и мы получим ламинарный вихрь, распределение скоростей в котором асимптотически приближается вблизи оси к закону (12.5), а на большом удалении от оси к закону (12.7). Вследствие потерь энергии на трение такой вихрь не может быть стационарным — его ядро будет постепенно расплываться, вращательное движение жидкости будет затухать. Если отнести, однако, все окружные скорости к скорости на границе ядра $u(r_k) = u_{\text{макс}}$, это безразмерное распределение скоростей не будет зависеть ни от вязкости, ни от времени. Согласно точному решению уравнений Навье—Стокса, безразмерное распределение окружных скоростей в плоском вихре вязкой жидкости имеет вид

$$\frac{u}{u(r_k)} = 1{,}4\,\frac{r_k}{r}\left[1 - \exp\left(-1{,}26\,\frac{r^2}{r_k^2}\right)\right]. \qquad (12.9)$$

В турбулентных вихрях осредненные окружные скорости распределены несколько более равномерно. Это распределение описывается приближенной формулой автора [29]

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}(r_k)} = \frac{2r_k r}{r_k^2 + r^2}. \qquad (12.10)$$

Законы распределения (12.9) и (12.10) показаны на рис. 57. Там же нанесены точки измерений Е. Гофмана и П. Джоберта [188] в турбулентном вихре, сходящем с конца крыла.

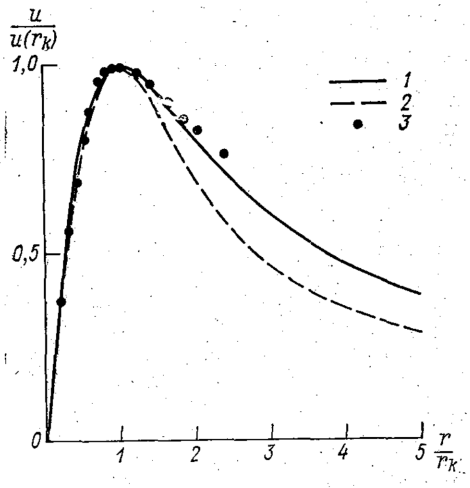


Рис. 57. Распределение окружных скоростей.

1 — в турбулентном вихре по формуле (12.10),
2 — в ламинарном вихре по формуле (12.9),
3 — опытные точки Гофмана и Джоберта.

Вихри конечной длины в вязкой жидкости не могут быть плоскими. Хорошим примером в этом отношении служат вихри с вертикальными осями вращения, образующиеся в открытых потоках на границах водоворотных зон. Их ядра формируются из вихревых шнуров, движущихся по поверхности дна. Верхними концами они упираются в свободную поверхность. Так как под влиянием трения окружные скорости в таком вихре по направлению к дну убывают, то центробежные силы уравновешивают радиальный градиент давления лишь в некоторой одной плоскости. Ниже этой плоскости на вращательное движение налагается конвергентное, выше — дивергентное. Они сопрягаются посредством восходящего движения в ядре вихря. В системе координат, движущейся вместе с вихрем, придонные линии тока имеют вид логарифмических спиралей. Интенсивные вихри с такой структурой могут производить сильный местный размыв дна. Очень близко к описанному движение воздуха в торнадо и тропических циклонах. Наряду с огромными окружными скоростями (до 100—150 м/с) причиной разрушительных действий торнадо является резкое понижение давления вблизи оси вихря. У водяных вихрей понижение давления проявляется в воронкообразном углублении свободной поверхности. Нередко в приосевую область проникают пузырьки воздуха, а при очень быстром вращении ядро вихря может стать полым. Важно, что несмотря на сложный пространственный характер движения, распределе-

ние окружных скоростей в водяных и атмосферных вихрях сохраняет главные черты плоского вращения жидкости: линейный рост скоростей у оси и их падение по закону площадей на периферии.

12.3. Осесимметричное движение воды в круговом канале

Наиболее простой случай криволинейного движения жидкости со свободной поверхностью можно наблюдать в канале, стенки которого очерчены в плане по дугам концентрических окружностей. Этот случай, естественно, является и наиболее изученным. Если глубина воды в канале мала по сравнению с его шириной, а радиусы стенок достаточно велики, течение будет удовлетворять условиям, сформулированным в п. 3.3. Для его описания может служить система феноменологических уравнений (3.25). Считая движение установившимся, а дно канала плоским и горизонтальным, разделив члены уравнений (3.25) на плотность жидкости ρ и перейдя к цилиндрическим координатам, будем иметь следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial r}+\frac{\bar{u}}{r}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\varphi}+\bar{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}-\frac{\bar{u}^2}{r}&=gI_r+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_т\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right),\\ \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}+\frac{\bar{u}}{r}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\varphi}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\frac{\bar{v}\bar{u}}{r}&=gI_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_т\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right),\end{aligned}\right\} \quad (12.11)$$

где $I_r=-\dfrac{\partial z'}{\partial r}$ и $I_\varphi=-\dfrac{\partial z'}{r\partial\varphi}$ — радиальный и тангенциальный уклоны свободной поверхности. Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах записывается

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}+\frac{\bar{v}}{r}=0. \quad (12.12)$$

По длине каждого изогнутого участка русла происходит сложная перестройка поля скоростей. Если, однако, руслом служит круговой канал с плоским дном и этот канал не очень короткий, в нем всегда можно обнаружить одно или два сечения, в конечной окрестности которых элементы движения практически не изменяются по угловой координате и результирующий радиальный перенос жидкости отсутствует. Течение в таких частях канала является осесимметричным. Систему уравнений осесимметричного движения легко получить из уравнений (12.11)—(12.12), приравняв в них нулю все производные по φ. В сечениях с осесимметричным движением простой характер приобретает структура потока в средней части русла, где можно считать равной нулю вертикальную компоненту скорости и можно пренебрегать изменением радиальной компоненты по ширине

потока. Положив в первом из уравнений (12.11) $\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} = 0$ и $\bar{w} = 0$, будем иметь

$$-\frac{\bar{u}^2}{r} = gI_r + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_т \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right). \qquad (12.13)$$

Уравнение (12.13) позволяет найти распределение радиальных скоростей по вертикали. Впервые эта задача была решена В. М. Маккавеевым [86], использовавшим простейшее предположение о постоянном коэффициенте турбулентной вязкости: $\nu_т = \text{const}$. Более точное решение получил И. Л. Розовский [111], приняв, что окружные скорости распределены на вертикали по логарифмическому закону и что, следовательно, скалярный коэффициент турбулентной вязкости определяется формулой (4.10). Приводимое ниже решение задачи о распределении радиальных скоростей отличается от решения Розовского только способом вычислений.

Решать задачу будем путем последовательных приближений. В первом приближении откинем радиальную компоненту сил трения. Использовав для корректива средней скорости α_0 формулу (6.15), получим следующее выражение радиального уклона:

$$I_r = -\alpha_0 \frac{U^2}{gr} = -\frac{1}{gr}\left(U^2 + \frac{v_*^2}{\varkappa^2}\right). \qquad (12.14)$$

Подставим величину уклона по первому приближению в уравнение (12.13) и выразим скорости $\bar{u}$ по формуле (4.4). После простых преобразований получаем уравнение движения во втором приближении следующего вида:

$$\frac{v_*}{\varkappa r}\left[2U\left(1+\ln\frac{z}{h}\right)+\frac{v_*}{\varkappa}\ln\frac{z}{h}\left(2+\ln\frac{z}{h}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_т \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right). \qquad (12.15)$$

Интегрируя уравнение (12.15) по z и определяя произвольную постоянную из условия на свободной поверхности: $\tau_{zr}(h) = 0$, найдем распределение касательных напряжений

$$\frac{1}{\rho}\tau_{zr} = \nu_т \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{v_* h}{\varkappa r}\frac{z}{h}\ln\frac{z}{h}\left(2U + \frac{v_*}{\varkappa}\ln\frac{z}{h}\right). \qquad (12.16)$$

Используя формулу коэффициента турбулентной вязкости (4.10), можем получить распределение градиента радиальной скорости

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\varkappa^2 r}\frac{\ln\frac{z}{h}}{1-\frac{z}{h}}\left(2U + \frac{v_*}{\varkappa}\ln\frac{z}{h}\right). \qquad (12.17)$$

Чтобы выполнить интегрирование по z еще раз, разложим $\ln\frac{z}{h}$ в ряд по степеням $\left(\frac{z}{h}-1\right)$. Ограничиваясь тремя первыми членами разложения, интегрируя и находя произвольную постоянную из условия отсутствия радиального расхода, получаем:

$$\bar{v}=\frac{hU}{\varkappa^2 r}\left[\frac{11}{9}-2\eta\left(1+\frac{1}{4}\eta+\frac{1}{9}\eta^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{v_*}{\varkappa U}\left(-\frac{4681}{15\,120}+\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{3}\eta^3+\frac{11}{48}\eta^4+\frac{1}{15}\eta^5+\frac{1}{54}\eta^6\right)\right], \tag{12.18}$$

где для краткости обозначено $1-\frac{z}{h}\equiv\eta$.

И. Л. Розовский, применив графическое интегрирование, представил величину радиальной скорости в виде

$$\bar{v}=\frac{hU}{\varkappa^2 r}\left[F_1\left(\frac{z}{h}\right)-\frac{v_*}{\varkappa U}F_2\left(\frac{z}{h}\right)\right], \tag{12.19}$$

где F_1 и F_2 — функции, графики которых даны в работе [111]. Анализ, выполненный Розовским, показал, в этом легко убедиться и с помощью формулы (12.18), что член с трением оказывает лишь малое влияние на величину радиальной скорости. Отбросив в формуле (12.18) член с трением, получим простую зависимость

$$\bar{v}=\frac{hU}{\varkappa^2 r}\left\{-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\left[11\frac{z}{h}-\frac{7}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^3\right]\right\}. \tag{12.20}$$

На рис. 58 формулы (12.19) и (12.20) сопоставлены с измерениями Розовского. Кривая по уравнению (12.19) была построена Розовским при значении параметра Кармана $\varkappa=0{,}5$. При этом же значении $\varkappa$ построена и кривая по уравнению (12.20). Опыты велись в лотках прямоугольного и трапецеидального сечения при числах Рейнольдса $\frac{Uh}{\nu}=6300\div37\,500$ и числах Фруда $\frac{U^2}{gh}=0{,}04\div0{,}15$. Для сравнения с теорией использованы измерения, сделанные на осевых вертикалях при значениях $h/r=0{,}02\div0{,}08$ и $r/B=2{,}5\div1{,}0$. На рис. 58 видно, что согласие между опытом и теорией хорошее вдоль всей вертикали. Упрощенная формула (12.20) отличается от формулы Розовского лишь вблизи дна, где она несколько преуменьшает значения радиальных скоростей. Для получения более точных результатов необходимо взять большее число членов в разложении $\ln\frac{z}{h}$. В соответствии с исходной формулой (4.10) теоретические зависимости (12.19) и (12.20) действительны в турбулентном

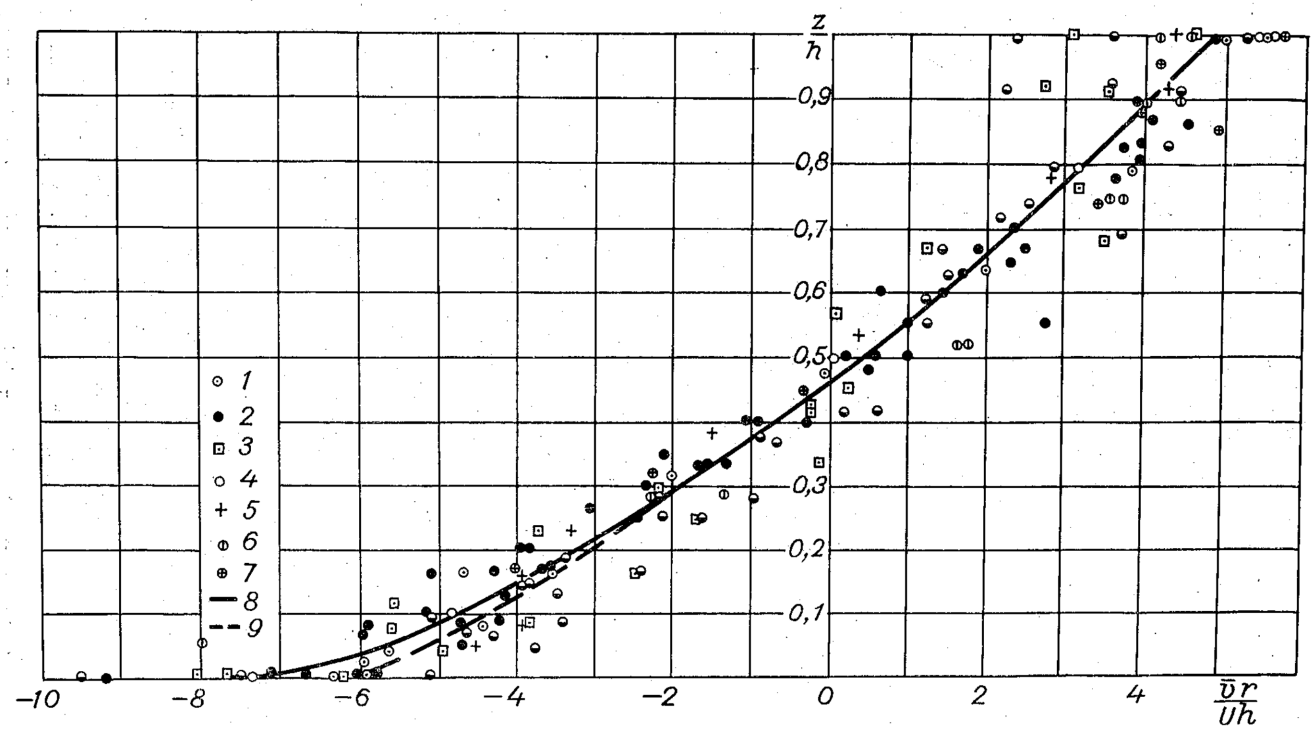


Рис. 58. Распределение радиальных скоростей по вертикали на изгибе открытого русла.

1—4 — опыты в лотке прямоугольного сечения, *5* — то же, с дном повышенной шероховатости, *6*, *7* — в лотках трапецеидального сечения (по Розовскому), *8* — кривая по формуле (12.19), *9* — кривая по формуле (12.20).

ядре течения как гидравлически гладких, так и гидравлически шероховатых русел, если соблюдено условие $\Delta \ll h$. Используя уравнение движения во втором приближении (12.15), можно с помощью исходного уравнения (12.13) уточнить выражение радиального уклона и перейти к уравнениям третьего приближения. Однако из сопоставления результатов второго приближения с опытными данными видно, что в этом нет надобности.

Решение задачи о распределении радиальных скоростей помогает понять роль радиального течения в динамике изогнутого потока. Радиальное течение развивается вследствие неравномерности распределения окружных скоростей по вертикали точно так же, как сходящееся и расходящееся движения в вихрях с вертикальной осью вращения. Наблюдатель, который движется по изогнутому участку реки на плоту, скажет так: «Вблизи свободной поверхности, где скорости велики, центробежные силы сильнее поперечного уклона. Преодолевая его, они увлекают воду, а с ней и плот к вогнутому берегу. У дна, где скорости и центробежные силы малы, доминирует поперечный уклон (градиент давления) и под его действием вода движется к выпуклому берегу, захватывая с собой песчинки дна».

Наблюдатель, стоящий на берегу, сможет высказать более глубокие соображения. Он скажет: «Когда твердое тело или жесткая система твердых тел (например, вагон) движется по криволинейному пути, внешняя сила (давление рельса) сообщает центростремительное ускорение лишь некоторой части тела или системы тел (ребордам колес). Другим частям центростремительное ускорение сообщается посредством упругих сил. Никакого движения одних частей относительно других не требуется. Иначе обстоит дело с жидкостями. Давление вогнутого берега сообщает центростремительное ускорение ближайшему слою воды. Так же как в твердом теле, для передачи ускорения всей толще потока нужны внутренние силы — нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения создаются радиальным уклоном, касательные — радиальным движением жидкости. Без движения в жидкостях нет трения. В точке вертикали, где $\frac{\overline{u^2}}{r} = g\frac{\partial z'}{\partial r}$, касательное напряжение должно проходить через максимум, а радиальная скорость должна менять направление. Таким образом, взятые вместе радиальное течение и радиальный уклон есть ни что иное, как *механизм передачи центростремительного ускорения от одних частиц жидкости к другим*».

Существование радиальных компонент скорости, направленных у свободной поверхности к вогнутому, а у дна к выпуклому берегу придает течению в изогнутом русле винтовой характер. С точки зрения транспорта наносов интерес представляют

придонные линии тока осредненного движения. Путем размыва кусочков темной краски, положенных на светлое дно лотка (или выпуска краски из отверстий в дне), можно получать красивые спектры придонных линий тока, которые при малых радиусах поворота круто пересекают лоток. Такие наблюдения производили А. Я. Милович [88], Н. Ф. Данелия [39] и Т. М. Прус-Часинский [215]. На рис. 59 показан спектр, полученный Прус-

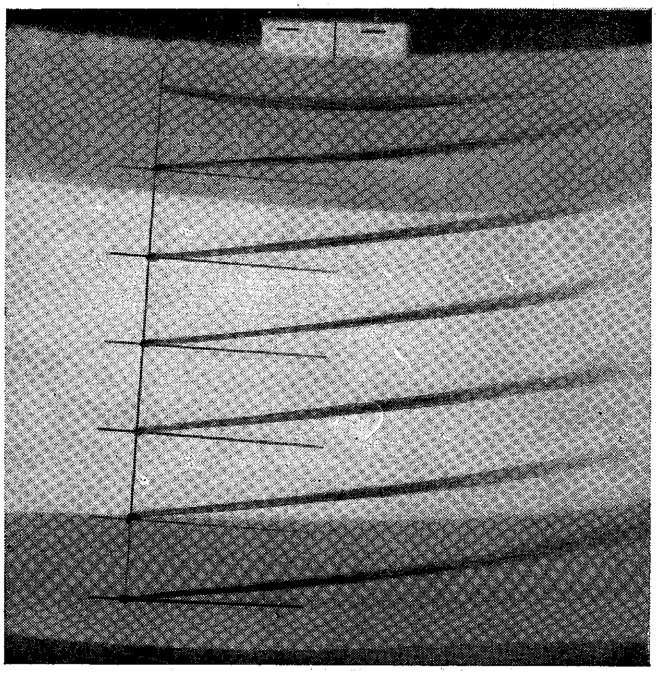


Рис. 59. Придонные линии тока на изгибе русла прямоугольного сечения (по опытам Прус-Часинского).

Часинским в лотке прямоугольного сечения. На основании своих экспериментов Прус-Часинский предложил несколько формул угла $\beta(\Delta)$, который составляют придонные линии тока с тангенциальным направлением. Однако в более поздней заметке [216] он признал, что в естественных руслах наилучшие результаты дает простая формула Розовского

$$\operatorname{tg}\beta(\Delta)=\frac{\overline{v}(\Delta)}{\overline{u}(\Delta)}=11\frac{h}{r}. \qquad (12.21)$$

Независимость угла $\beta(\Delta)$ от тангенциальной скорости и сильное влияние, оказываемое на этот угол глубиной потока,

были установлены также в экспериментах М. П. Кожевникова [72] и Н. Ф. Данелия [40].

Таким образом, отклонение придонных струй в сторону выпуклого берега при больших наполнениях речного русла (в паводок) может в несколько раз превосходить их отклонения при малых наполнениях (в межень). Из формулы (12.21) следует также, что на русловых моделях, выполненных с искажением масштабов, углы отклонения донных струй могут сильно преувеличиваться. Так как тангенциальная скорость у поверхности больше, чем у дна, а между абсолютными значениями поверхностной и придонной радиальной скоростей соотношение обратное, то угол $\beta(h)$ отклонения поверхностных линий тока существенно меньше угла $\beta(\Delta)$.

12.4. Общая картина течения на изгибе русла. Данные лабораторных и натурных наблюдений

Даже при простейшем плановом очертании изогнутых берегов (по концентрическим окружностям) полная картина движения потока на участке изгиба очень сложна. Большое разнообразие вносится в эту картину различными формами радиальных сечений русла и различными соотношениями между его глубиной, шириной, радиусом кривизны, а также углом поворота. Роль формы радиальных сечений изучалась Кожевниковым, Розовским и Прус-Часинским.

Течение в русле с прямоугольным сечением наиболее близко к плоскому (в плоскости φ, r) и поэтому эффекты, связанные с законом площадей, проявляются в этом случае с наибольшей яркостью. На рис. 60 показан рельеф свободной поверхности и эпюры средних на вертикалях скоростей в лотке прямоугольного сечения, по опытам Розовского [111]. Поворот русла на 180° был осуществлен с малым внутренним радиусом $R_1 = 0{,}5B$. Глубина воды в лотке составляла около $0{,}08B$. Как видно на рис. 60, уже на подходе к повороту свободная поверхность потока приобретает поперечный уклон в сторону внутреннего берега, который сохраняется и на некотором расстоянии за поворотом. Наибольшие поперечные перепады уровня наблюдаются во второй четверти поворота. Образованию поперечного уклона при начале поворота сопутствует перераспределение скоростей течения с перемещением максимума к внутреннему (выпуклому) берегу. Устанавливающееся после этого распределение средних скоростей по ширине русла очень близко к распределению по закону площадей. Во второй половине поворота под действием развившейся поперечной циркуляции максимум скоростей смещается в сторону внешнего (вогнутого) берега. Это асимметричное распределение скоростей сохраняется на

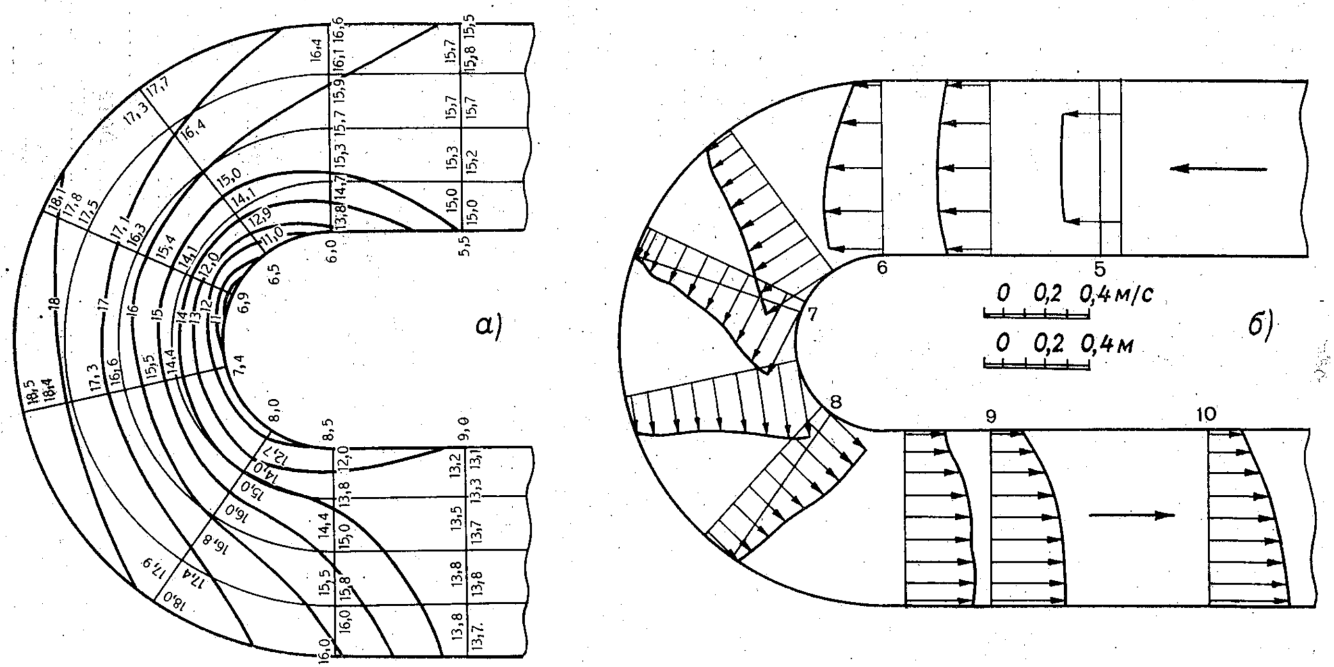


Рис. 60.

а — рельеф свободной поверхности, *б* — эпюры средних на вертикалях тангенциальных скоростей на изгибе русла прямоугольного сечения (по Розовскому).

значительном расстоянии вниз по потоку, но уже на прямолинейном участке русла.

Картина движения, совпадающая в главном с результатами Розовского, наблюдалась в лотках прямоугольного сечения

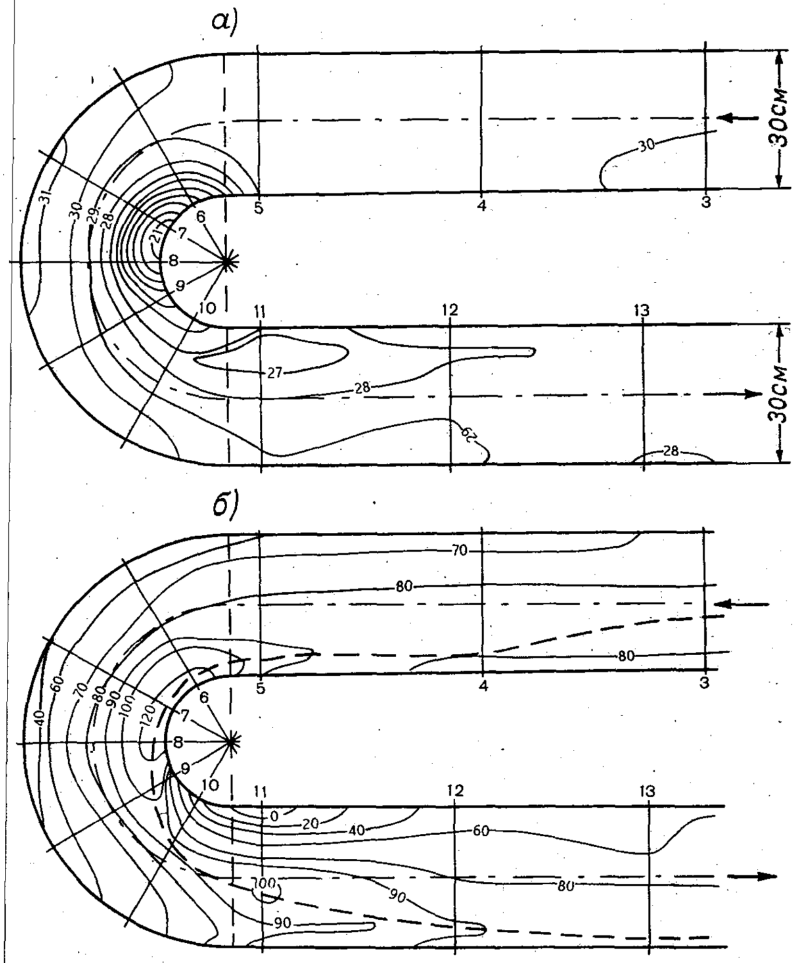


Рис. 61.

а — рельеф свободной поверхности, *б* — изолинии тангенциальных скоростей на изгибе русла прямоугольного сечения (по Шукри).

также К. А. Мокмором [209], А. Шукри [229], М. И. Тер-Аствацатряном [133], А. К. Ананяном [4] и Н. Ф. Данелия [40].

На рис. 61 представлены изогипсы свободной поверхности и изолинии равных тангенциальных скоростей в экспериментальном лотке Шукри. Значения тангенциальных скоростей относятся

к плоскости, отстоящей от горизонтального дна лотка на 0,4 средней глубины (в прямолинейном равномерном потоке скорости в этой плоскости близки к средним на вертикалях). Отношение радиуса внутреннего берега к ширине лотка Шукри было таким же, как у лотка Розовского ($R_1/B = 1/2$), но относительное наполнение лотка было гораздо больше ($h/B \approx 1{,}0$). Скорость течения в лотке Шукри была в три раза больше, чем у Розовского (0,78 м/с). Вследствие этого явления поперечного перекоса свободной поверхности были выражены гораздо более резко.

В опытах Мокмора и Шукри непосредственно за поворотом лотка вблизи внутреннего берега устанавливалась зона отрыва. В опытах Розовского это явление не наблюдалось. И. Л. Розовский справедливо объясняет различие в результатах опытов тем, что его опыты производились при существенно меньших значениях отношения h/B, чем опыты Мокмора и Шукри.

Г. А. Эйнштейн и Дж. Хардер [174] исследовали течение во второй половине поворота лотка прямоугольного сечения при значениях угловой координаты $\varphi > 120°$ (полный угол поворота был равен 180°). Они нашли, что распределение средних по вертикали тангенциальных скоростей удовлетворяет соотношению

$$U \sim r^n, \quad n > 1. \tag{12.22}$$

В опытах значения $n = 3 \div 4$. Поток, таким образом, сильно прижат к вогнутому берегу. Следствием бокового сжатия является выравнивание скоростей на вертикалях настолько значительное, что Эйнштейн и Хардер смогли разделить поток на ядро, движущееся практически без трения, и придонный пограничный слой, нарастающий от вогнутого к выпуклому берегу.

А. Т. Иппен и Ф. А. Дринкер [192] произвели с помощью поверхностной трубки Пито измерения касательного напряжения на дне и откосах двух изогнутых по дуге круга гидравлически гладких каналов с трапецеидальным сечением. Угол поворота составлял 60°. На рис. 62 показаны изолинии равных касательных напряжений, построенные по данным одного из опытов, в котором геометрические соотношения для опытного лотка составляли: $R_1/B = 3$, $h/B = 0{,}14$. Значения касательного напряжения даны на рис. 62 в долях среднего по всему участку напряжения. На этом рисунке видны два максимума «влекущей силы»: 1) в начале поворота у выпуклого берега и 2) более глубокий в нижней части поворота у вогнутого берега. В опытах, где отношение $R_1/B < 2$, более глубоким оказывался максимум у выпуклого берега, и, обратно, в опытах, где $R_1/B > 3$, максимум у выпуклого берега отсутствовал.

Интересно сравнить с этими результатами данные опытов Р. Л. Хука [189], выполненных в синусоидально изогнутом канале прямоугольного сечения с подвижным дном. Рельеф дна в опытах Хука формировался самим потоком. Когда рельеф ста-

новился стабильным, в ряде точек дна измерялось касательное напряжение и расход влекомых наносов. Такие опыты были проведены при четырех расходах воды. На рис. 63 показаны результаты опытов при расходе воды 20 л/с. Средняя глубина воды составляла около 7 см, ширина лотка 1 м. Крупность донных частиц $d_{50} = 0{,}8$ мм. Несмотря на совсем другую форму

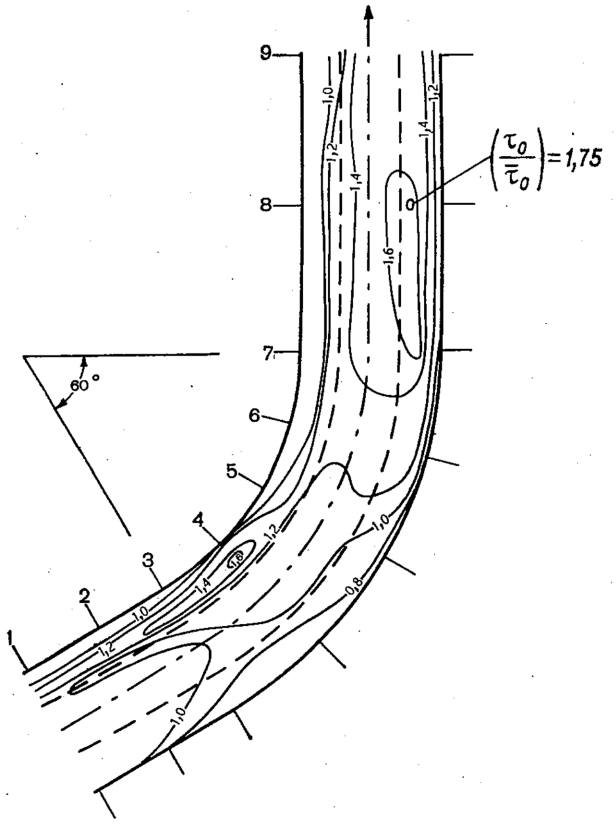


Рис. 62. Изолинии безразмерных касательных напряжений на дне и откосах изогнутого лотка трапецеидального сечения (по Иппену и Дринкеру).

дна, касательное напряжение в лотке Хука распределено примерно так же, как в лотке Иппена и Дринкера. Как и там мы видим два максимума касательного напряжения — один под выпуклым берегом в начале поворота, другой ниже по течению, под вогнутым берегом. Сохранение второго максимума, на первый взгляд, неожиданно, так как дно под вогнутым берегом у Хука сильно размыто. Однако нетрудно понять, в чем тут дело. Углубление русла способствует привлечению к вогнутому

берегу дополнительного расхода воды и, несмотря на увеличение глубин, скорости здесь остаются большими. Такая же картина наблюдается в естественных руслах. Перераспределение удельных расходов, производимое поперечным течением, в размываемом русле усиливается за счет углубления дна у вогнутого берега. В опытах Хука обращает на себя внимание также

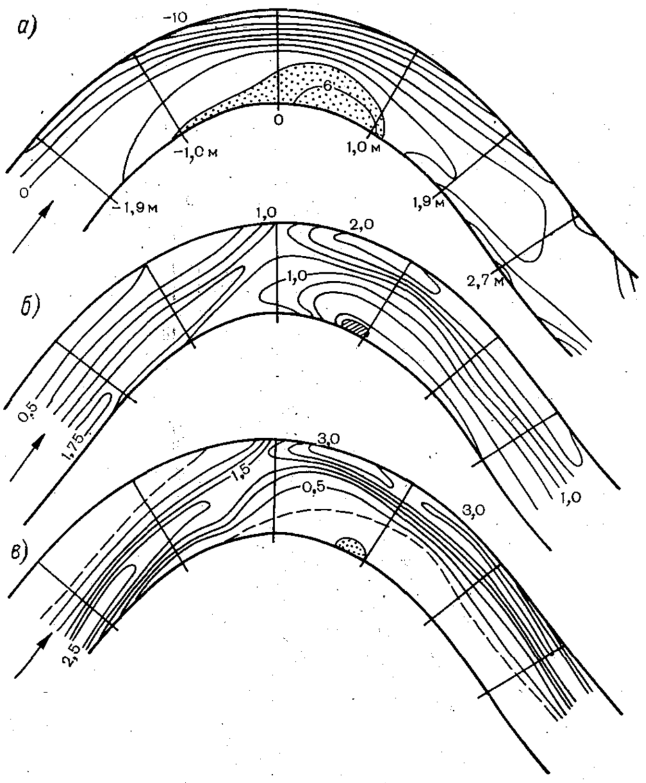


Рис. 63.

а — рельеф дна, *б* — изолинии безразмерных касательных напряжений, *в* — изолинии безразмерных элементарных расходов наносов в изогнутом лотке с подвижным дном (по Хуку).

согласованность распределений касательного напряжения и интенсивности транспорта наносов (рис. 63 *б*, *в*).

Ю. Д. Власенко [19] исследовал деформации дна в лотке шириной 0,5 м с поворотом по окружности на 180°. Первоначально плоское дно, сложенное песком диаметром $d_{50} \approx 1$ мм, подвергалось воздействию стационарного и нестационарного потоков. Было установлено, что интенсивность деформаций и конечная глубина размыва определяются значениями расходов воды и мало чувствительны к характеру изменения расходов.

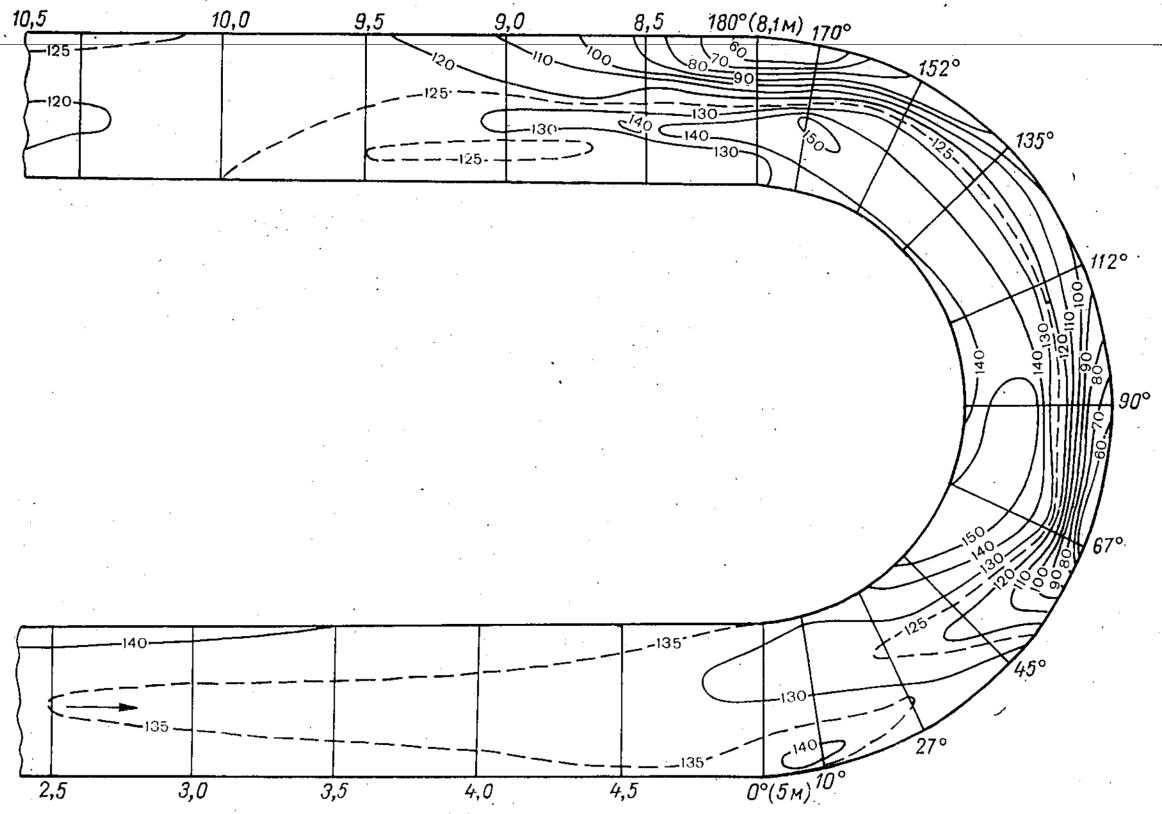


Рис. 64. Рельеф дна, сформированного стационарным потоком ($Q=4$ л/с) в лотке с поворотом на 180° (по Власенко).

Под вогнутым берегом лотка формировались две ложбины — одна в верхней половине поворота, вторая на выходе потока из криволинейного участка (рис. 64). Аналогичная картина нередко наблюдается и в натуре. Так как по времени нижняя

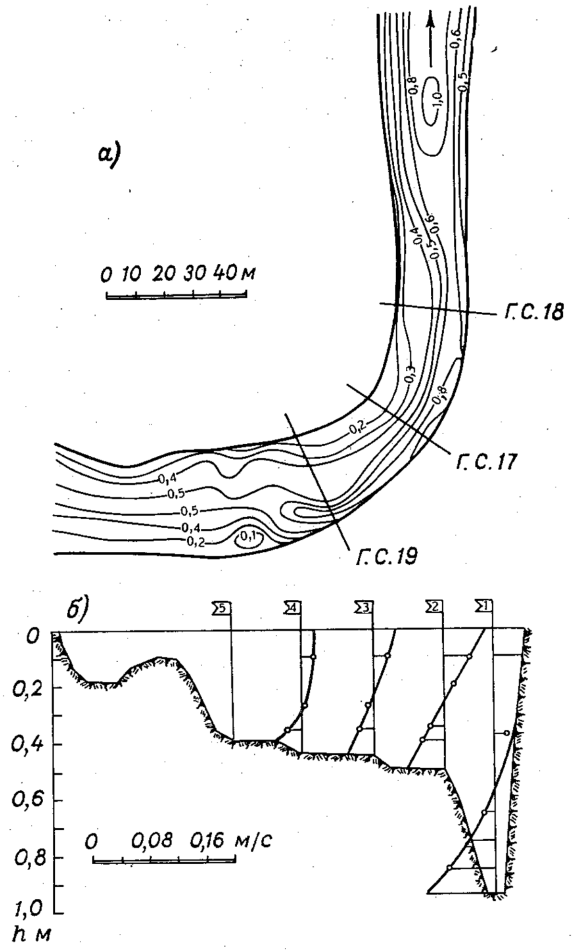


Рис. 65. План изгиба р. Снов (*а*) и эпюры поперечных скоростей (*б*) на гидростворе № 19 (по Розовскому).

ложбина образуется раньше, то можно предполагать, что своим происхождением она прямо обязана кинематике изогнутого потока, а развитие верхней ложбины есть вторичный эффект, оно объясняется стеснением потока нарастающим у выпуклого берега побочнем.

Натурные исследования изогнутых потоков имеют малый объем. Техника определения поперечных скоростей состоит в следующем. В точках вертикали вертушкой измеряется модуль вектора местной осредненной скорости и одновременно фиксируется угол, составляемый в горизонтальной плоскости этим вектором с направлением гидрометрического створа. При обработке полученные векторы местной осредненной скорости могут проектироваться на направление гидрометрического створа и на нормаль к нему, однако на участках, где сохраняется стабильное распределение поступательных скоростей, лучше пользоваться другим способом обработки, при котором за продольное направление принимается направление, отвечающее среднему на вертикали азимуту вектора осредненной скорости [1].

Последний способ был применен Розовским при обработке выполненных им измерений в естественных потоках. На рис. 65 показаны полученные им профили поперечной скорости в одном из сечений на повороте небольшой р. Снов. Форма профилей хорошо согласуется с формой теоретического профиля, приведенного на рис. 58. Однако, как отмечает Розовский, чтобы получить хорошее количественное согласие, необходимо довольно широко варьировать значениями параметра Кармана.

Движение по закону площадей дает о себе знать только на очень крутых поворотах естественных русел и то при высоких уровнях воды. След этого движения (промоина через корневую часть побочня у выпуклого берега) представляет характерную черту морфологии крутых поворотов.

13. Деление потоков

13.1. Существо задачи. Лабораторные исследования

По степени распространения деление на рукава является второй после меандрирования особенностью естественных русел. Распределение расхода воды по рукавам определяется соотношением между сопротивлениями отдельных рукавов. Если имеется план разветвления, известны значения коэффициента шероховатости и полный расход реки, то, пользуясь средствами гидравлики, нетрудно найти, как этот расход делится между рукавами. Если количество рукавов очень велико, что может встретиться в дельтах, то затруднения, вытекающие из

[1] При обработке измерений, сделанных в лотке кругового очертания в плане, где удобна цилиндрическая система координат, векторы скоростей должны, конечно, проектироваться на координатные направления r и φ.

необходимости решать большое число уравнений, можно преодолеть с помощью вычислительной машины. Метод машинного счета, охватывающий почти все встречающиеся случаи разветвлений, в том числе с рукавами, где имеются подпорные сооружения, разработан В. В. Ивановым [60].

Сложнее обстоит дело с распределением твердого расхода. Как показывает опыт, оно коренным образом может отличаться от распределения расхода воды, причем различие между двумя распределениями тесно связано с условиями движения потока в месте ответвления рукавов. Такой фактор, как соотношение между скоростями разделяющихся потоков в месте деления, может не иметь прямой связи с распределением расхода воды, но будет решающим для распределения расхода наносов. С этой проблемой люди столкнулись очень давно. Еще в древности строители оросительных систем должны были бороться, но большей частью безуспешно, с поступлением наносов в головные участки распределительных каналов. Не раз случалось, что боковой отвод перехватывал весь твердый расход магистрального канала. Проблема эта сохранилась и сейчас, и вопросы рационального устройства вододелительных сооружений занимают одно из важных мест в теории и практике орошения. Трудность положения можно проиллюстрировать данными опытов Г. Булле [160], в которых при делении расхода воды пополам боковой отвод перехватывал 87—97% расхода наносов.

Причина явления заключена в изгибе и боковом сжатии отделяющегося потока. Верхняя ветвь развивающегося на изгибе вторичного течения отклоняет поверхностные струи от входа в боковой отвод. Нижняя ветвь направляет донные струи к отводу. Этому эффекту содействует и перераспределение скоростей на вертикалях: при сжатии потока донные скорости возрастают сильнее поверхностных. В результате совместного действия изгиба и сжатия ширина $Y(\Delta)$ захвата донных струй основного потока оказывается значительно большей, чем ширина $Y(h)$ захвата поверхностных струй:

$$Y(\Delta) > Y(h). \qquad (13.1)$$

Так как главная часть твердого расхода проходит вблизи дна, то соотношение (13.1) помогает понять явление «засасывания» наносов в боковые отводы.

Изгиб отделяющегося потока может быть не связанным с геометрией берегов. Пусть, как показано на рис. 66, поток, движущийся в прямолинейном канале, в сечении $x = 0$ делится на две части тонкой продольной перегородкой. Если скорости течения в двух разделенных частях потока одинаковы и если вследствие большой ширины канала можно не обращать внимания на пограничные слои у перегородки, то структура разделенного потока будет такой же, как и до разделения (рис. 66 *а*). Если, однако, скорости течения в двух частях потока будут раз-

личны (это может быть следствием различия в сопротивлениях или в уклонах дна), то в месте деления будет наблюдаться изгиб линий тока и, как результат этого изгиба,— расслоение течения: донные линии тока повернут в сторону ответвления, имеющего большие скорости, более круто и на большей ширине, чем поверхностные (рис. 66 *б*). Описанная схема была экспериментально исследована А. И. Лосиевским [44]. Различие в скоростях двух частей потока достигалось преграждением одного из ответвлений проволочными сетками. На рис. 67 показаны полученный в опыте рельеф свободной поверхности и спектр донных линий тока.

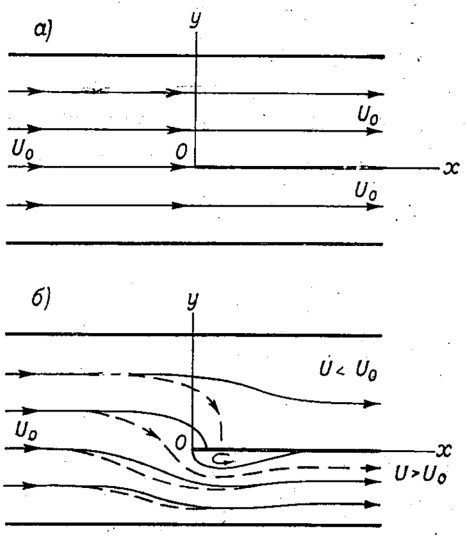


Рис. 66.

Наибольшее число экспериментов по делению потока было выполнено в связи с задачами водозабора. Схема деления при этом следующая: имеется прямолинейный (реже изогнутый) канал постоянной ширины, к отверстию в боковой стенке которого присоединен под некоторым углом θ прямолинейный отводящий канал (рис. 68). Сечения основного русла и отвода в опытах делались прямоугольными. Угол θ изменялся в широких пределах (30—150°). Экспериментальными исследованиями такой схемы деления занимались Г. Булле, Д. Я. Соколов, А. Я. Милович, В. А. Шаумян, А. С. Офицеров, А. С. Образовский, Н. Ф. Данелия, Ши Вей Ло и А. Дж. Рейнольдс. Основные результаты наблюдений излагаются ниже.

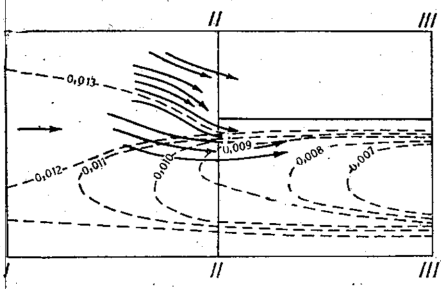


Рис. 67. Экспериментальная картина несимметричного деления потока в прямолинейном русле (по Лосиевскому).

Отвод части потока создает в месте деления сложную деформацию свободной поверхности. Для продольного профиля свободной поверхности в основном русле характерно существование минимума несколько выше верхового ребра отвода. После этого минимума идет подъем уровня, обусловленный

расширением потока и частичным переходом его кинетической энергии в потенциальную. Подъем уровня заканчивается несколько ниже низового ребра отвода. В начале бокового рукава (у его верховой стенки) наблюдается глубокая впадина свободной поверхности, подобная той депрессии, которая образуется в начале поворота русла у выпуклого берега. По данным Офицерова [105], перекос свободной поверхности между низовой и верховой стенками отвода в его начале может достигать $4U^2/2g$. Наибольший поперечный уклон в основном русле в сторону отвода наблюдается вблизи створа верхового ребра. Если поток до разделения характеризуется относительно высокими числами Фруда (по Ло и Рейнольдсу [200], при $\mathrm{Fr} \equiv U^2/gh = 0{,}50 \div 0{,}65$), в главном русле перед разделением может устанавливаться критическая глубина. Расширение потока ниже отвода сопровождается при этом появлением стоячих волн.

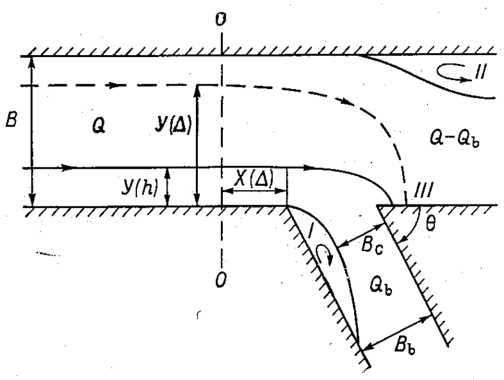


Рис. 68.

Отклонение струй основного потока в сторону отвода начинается выше верхового ребра отвода, причем первыми начинают отклоняться донные струи (рис. 68). По данным Шаумяна [148], створ 0—0, где становится заметным отклонение донных струй, расположен от верхового ребра на расстоянии

$$X(\Delta) = 0{,}55Y(\Delta), \qquad (13.2)$$

причем это соотношение не зависит от угла отвода. Как отмечалось выше, ширина захвата струй основного течения убывает от дна к свободной поверхности. Убывание идет вначале быстро, затем медленно. Таким образом, поверхность раздела между отделяющимися потоками криволинейная. На рис. 69 показано сечение этой поверхности, полученное в одном из опытов Шаумяна.

На входе в отвод наблюдается интенсивная поперечная циркуляция — поверхностные струи идут к низовой стенке отвода и опускаются вдоль нее вниз. Донные струи движутся в сторону верхового ребра. Опыты Шаумяна, выполненные при углах отвода 30, 60, 90 и 120°, показали, что пока угол отвода $\theta \leqslant \leqslant 90°$, ширины захвата донных и поверхностных струй практически не зависят от угла отвода. При угле $\theta = 120°$ и не очень больших водоотборах (расход в отводе равен или меньше по-

ловины общего расхода) значения ширин $Y(\Delta)$ и $Y(h)$ несколько больше их значений при $\theta \leqslant 90°$. Практическая независимость картины течения в основном русле от угла отвода была установлена и в опытах Офицерова. Что касается картины движения на входе в канал, то она меняется с изменением угла входа существенно. Чем больше угол отвода, тем интенсивнее поперечные течения. На рис. 70 показаны спектры донных токов, полученные Миловичем [89], при углах отвода 30 и 123°. В первом случае (рис. 70 *а*) донные струи довольно равномерно распределены в пределах верхних $^2/_3$ щели отвода, во втором (рис. 70 *б*) они сходятся почти в одну точку вблизи верхового ребра. В этих опытах скорость течения в боковом отводе в 3—4 раза превосходила скорость основного течения и поэтому картина расслоения потока была очень резкой.

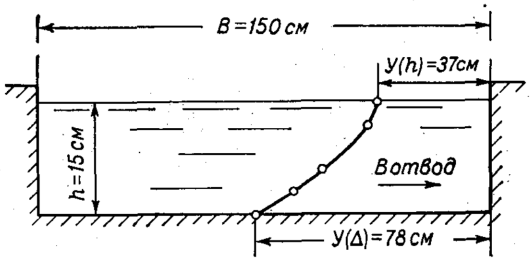


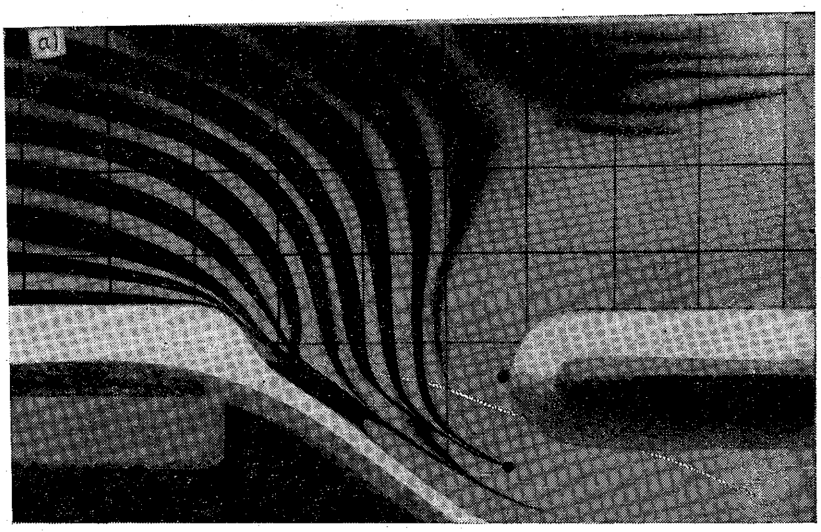
Рис. 69. Линия раздела в плоскости поперечного сечения главного русла (по Шаумяну).

Деление потоков сопровождается явлениями отжима струй и образованием водоворотных зон. Первая из этих зон образуется в отводе непосредственно ниже верхового ребра, где вошедший в отвод поток испытывает сильное боковое сжатие (рис. 68). Так как в основном русле ниже отвода происходит расширение потока в сторону того берега, где расположен отвод, то у противоположного берега часто формируется вторая зона отрыва.

Размеры водоворотных областей в плане определяются соотношением между расходами воды основного потока и отвода. При малых водоотборах поток в отводе сосредоточивается в узкой полосе вдоль низового берега отвода и бóльшая часть площади зеркала отвода оказывается занятой водоворотом.

Увеличение водоотбора сокращает размеры водоворотной зоны в боковом отводе, но ведет к разрастанию водоворота в основном русле. На рис. 71 показаны водоворотные зоны в отводе, по зарисовкам Ло и Рейнольдса, при отношениях расхода воды в отводе к расходу до разделения от 1,9 до 20,9%. Отвечающие потокам в главном русле и в отводе числа Фруда выписаны на схемах.

К описанной картине близок случай взаимодействия открытого потока с жидкостью в непроточном береговом ковше (затоне). На судоходных реках такие ковши используются как



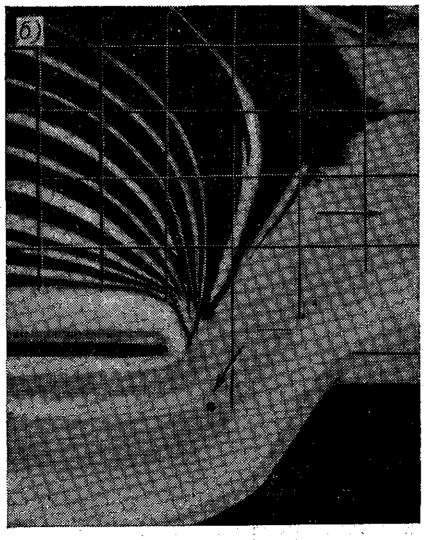


Рис. 70. Спектры донных течений в опытах Миловича.

акватории портов или судоремонтных предприятий. Водообмен между транзитным потоком и береговым ковшом изучали А. С. Образовский, М. А. Михалев и Е. Н. Грачев. Выполненное последним большое экспериментальное исследование [25] пока-

зало, что в зависимости от ширины входа в ковш возможны два предельных режима водообмена. Если ширина велика, на входе в ковш образуется зона смешения, сходная с той, которая наблюдается при внезапном одностороннем расширении потока (рис. 49). Жидкость, набегающая на низовой борт ковша, отклоняется внутрь и вытесняет жидкость из ковша через верхнюю по течению часть входного сечения. Входящий и выходящий потоки разделены водоворотом со слабым движением жидкости.

Если ширина входа мала, затекания струй транзитного потока в ковш практически нет. Водоворот отжимает транзитное течение от входа в ковш и единственным механизмом водообмена становится турбулентное перемешивание в зоне раздела. Описать этот режим средствами теории турбулентных струй нельзя. Кинематически он очень напоминает рассмотренную М. А. Лаврентьевым и В. Б. Шабатом схему обтекания донной траншеи неограниченным сверху потоком идеальной жидкости. Движение во внешнем потоке в этой схеме потенциальное, а траншея заполнена жидкостью с постоянной завихренностью [81, с. 193—198].

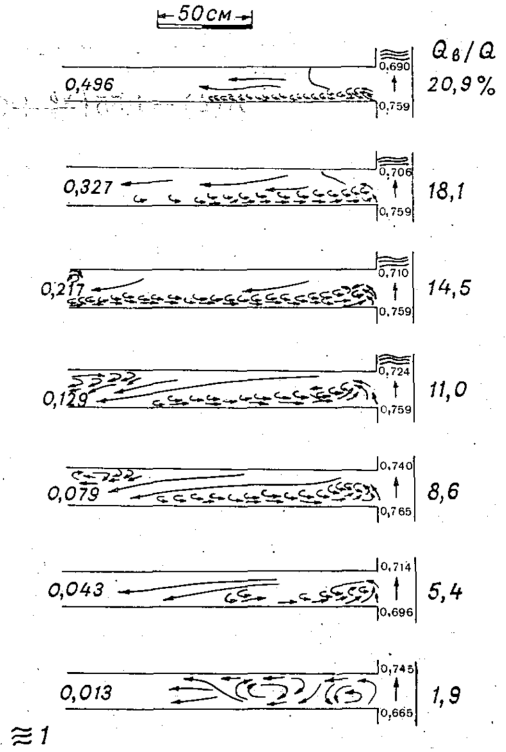


Рис. 71. Водоворотные зоны в боковом отводе (по Ло и Рейнольдсу).
1 — стоячие волны.

13.2. Захват донных и поверхностных струй боковым отводом

Возможность построить расчетным путем поверхность раздела или хотя бы найти ширину $Y(\Delta)$ захвата донных струй имеет важное значение для проектирования различных вододелительных и водозаборных сооружений. К сожалению, картина движения на участках деления настолько сложна, что до настоящего времени не предложено ни одного теоретического

решения этой задачи. Имеющиеся способы расчета или основаны на грубой схематизации явления, или носят чисто эмпирический характер.

Остановимся на эмпирических зависимостях. На основании своих опытов Шаумян предложил следующую формулу для ширины захвата донных струй в прямолинейном канале прямоугольного сечения:

$$Y(\Delta)=1{,}55\left(\frac{q_b}{q}+0{,}2\right)B_b, \tag{13.3}$$

где B_b — ширина отвода; q_b и q — удельные расходы воды соответственно в отводе и в основном русле до разделения.

А. С. Офицеров обработал результаты своих опытов в форме графиков связи между отношением $Y(\Delta)/B$ и отношением расходов Q_b/Q. График, построенный для подвижного русла, дает несколько бо́льшие значения ширины $Y(\Delta)$, чем график для жесткого русла. Такой же результат получил А. С. Образовский [101], предложивший на основании опытов Офицерова и своих формулы:

для потока в жестком русле

$$Y(\Delta)=\left(1{,}65\frac{Q_b}{Q}+0{,}04\right)B, \tag{13.4}$$

для потока с подвижным дном

$$Y(\Delta)=\left(2{,}14\frac{Q_b}{Q}+0{,}07\right)B. \tag{13.5}$$

Разделив обе части каждого из этих соотношений на ширину отвода B_b, можно сблизить их с формулой Шаумяна (13.3), а поскольку между глубинами в основном русле и в отводе разница во всех опытах была малой, то, согласно всем трем зависимостям, получится, что основным фактором, определяющим безразмерную ширину захвата $Y(\Delta)/B$, служит отношение скоростей U_b/U. При малых водоотборах все три зависимости делаются ненадежными.

В. А. Шаумян, А. С. Офицеров и А. С. Образовский занимались также составлением формул для ширины захвата поверхностных струй — вопросом, практическое значение которого определяется борьбой с попаданием в боковые отводы льда и шуги. По своей структуре эмпирические формулы для ширин захвата донных и поверхностных струй идентичны.

Как показывают опыты, отношение $Y(\Delta)/Y(h)$ может меняться в довольно широких пределах (от 2,0 до 5,0 и более).

13.3. Разветвления естественных русел

Если разветвление русла, выполненное по схеме рис. 68, имеет дно и берега из размываемого грунта, то под воздействием текущей воды оно быстро изменит свои формы. Область

отрыва у верхового берега отвода станет местом аккумуляции наносов. Низовой берег и дно под ним подвергнутся размыву, в результате начальный участок отвода станет изогнутым с кривизной того же знака, что у вступающего в отвод потока. Этот процесс неоднократно наблюдался в натуре. На рис. 72 показаны деформация головного участка одного из оросительных каналов Средней Азии, по данным В. А. Шаумяна [148], и деформация одного из второстепенных рукавов р. Вычегды, по данным Б. Ф. Снищенко [126]. Характер изменения русла в обоих случаях один и тот же. Застойная зона в основном

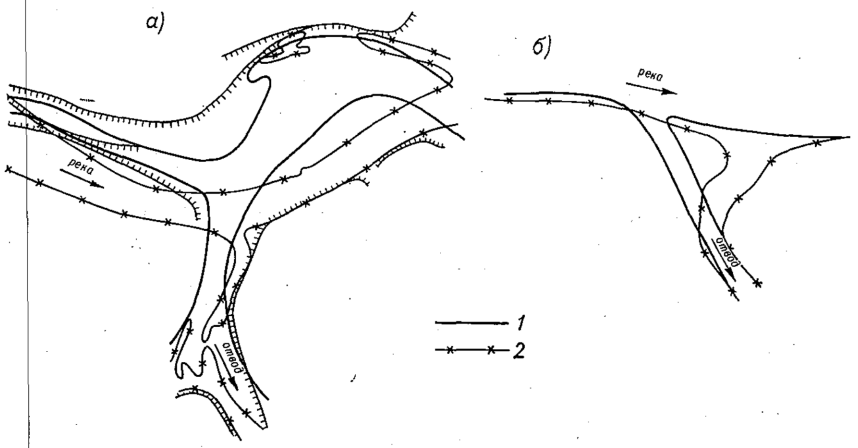


Рис. 72. Деформации входного участка бокового рукава.

а — рукав Шарды-полой р. Вычегды, *1* — 1946 г., *2* — 1966 г.; *б* — головной участок канала Пахта—Арна, *1* — 1/IV 1937 г., *2* — 27/V 1937 г.

русле также заполняется наносами. Поэтому, если только расход в боковом рукаве не мал, ширина основного русла вслед за отделением рукава сокращается.

При всем разнообразии форм разветвлений естественных русел движение воды в местах деления подчиняется одним и тем же общим законам, описанным выше. Главная трудность в изучении русловых разветвлений состоит в том, что плановые очертания русел далеко не всегда могут свидетельствовать о структуре течения. Часто бывает даже неясно, какой из двух рукавов считать «основным», а какой «побочным». В этом случае необходимо выяснить, происходит ли на участке реки непосредственно выше деления перераспределение расхода по ширине русла и если оно происходит, то в пользу какого из двух рукавов. Как было установлено выше, перераспределение расхода и связанный с ним изгиб струй могут быть следствием поворота берегов, а также и разности в скоростях разветвляющихся потоков. Однако, чем бы ни был вызван изгиб, он всегда

сопровождается *поперечным уклоном свободной поверхности* и направление этого уклона служит верным указателем того рукава, куда отклоняются донные струи. Часто встречающийся пример того, что одни плановые очертания русел могут вести к неправильным заключениям, дают разветвления, где один рукав прямой (т. е. представляет продолжение вышележащего участка реки), но короткий, а второй отворачивает в сторону (т. е. имеет вид бокового отвода), но велик по своей длине.

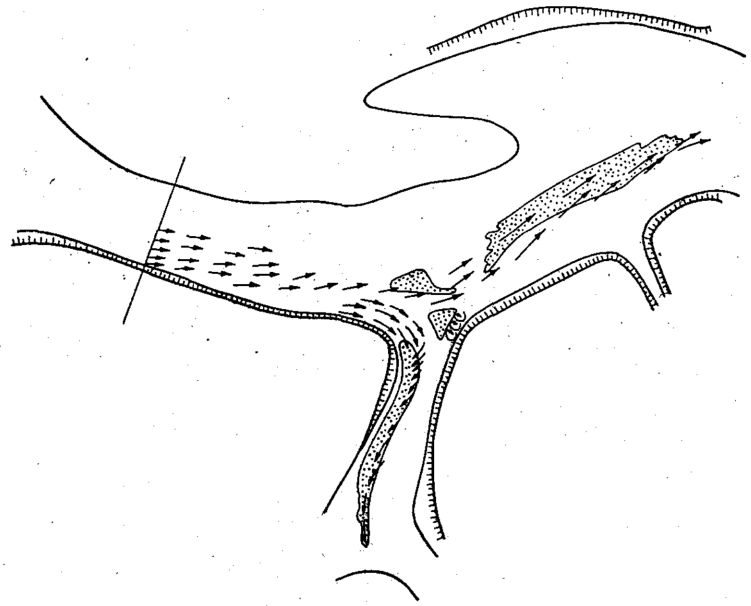


Рис. 73. Спектры донных течений на разветвлении р. Вычегды (по Снищенко).

Большой продольный уклон в прямом рукаве создает там большие скорости течения, и донные струи со всей ширины основного русла собираются в этом прямом рукаве. Н. И. Маккавеев [87] сообщает о наблюдениях на одном из разветвлений р. Б. Северной Двины, где при равенстве расходов воды расход наносов в коротком прямом рукаве превосходил расход наносов в длинном обходном рукаве более чем в 30 раз.

Из сказанного ясно, что одним из важнейших элементов исследований разветвленных участков рек должно быть изучение рельефа свободной поверхности в местах деления потоков.

На рис. 73 представлена наблюденная в лаборатории картина донных течений в истоке бокового рукава р. Вычегды, того же, что показан на рис. 72. Две детали этой картины представляют наибольший интерес.

Первая деталь — резкий поворот донных токов после входа в рукав в сторону верхового берега. Это направленное к берегу, насыщенное наносами донное течение и формирует показанную на рис. 73 отмель. Не доходя до берега и уже освободившись от наносов, донное течение переходит в восходящее, а между отмелью и берегом остается узкая, относительно глубокая протока.

Вторая деталь — движение донных струй вблизи низового ребра отвода. В этом месте имеется вызванный набеганием потока бугор свободной поверхности. Вследствие торможения потока здесь тоже откладываются наносы в виде выдвинутой навстречу потоку небольшой мели, имеющей в плане форму треугольника. Набегающее на низовой берег поверхностное течение частично опускается вниз, частично расходится по сторонам от точки деления. Под действием градиента давления расходятся в стороны и донные струи. Лабораторные и натурные наблюдения показали, что движение воды здесь неустойчиво — время от времени происходит смещение точки деления то в сторону рукава, то в сторону главного русла.

Глава V

Движение влекомых наносов

14. Общие сведения о движении наносов

Транспорту наносов посвящены многочисленные исследования. В главах V и VI рассматриваются главные из полученных результатов. Более подробные сведения можно найти в монографиях Дж. Богарди [158], В. Графа [184], Ю. А. Ибад-Заде [59], А. В. Караушева [62], А. Родкиви [220], Ф. Энгелунда и Е. Хансена [178], М. Ялина [250] и в коллективном труде под редакцией Х. Шена [228]. Наиболее полное изложение предмета дано Графом.

14.1. Физико-механические свойства наносов

Плотность твердых частиц, перемещаемых речными потоками, колеблется в узких пределах 2600—2700 кг/м³. В расчетах пользуются средним значением плотности $\rho_s = 2650$ кг/м³. Ему отвечает объемный вес $26 \cdot 10^3$ Н/м³.

Удобно следующее деление частиц по их поперечному размеру (диаметру d равновеликого шара) (табл. 1).

Таблица 1

Вид частиц	d мм	Вид частиц	d мм
Валуны	>100	Песок крупный	1,0—0,5
Галька	100—10	„ средний	0,5—0,2
		„ мелкий	0,2—0,1
Гравий крупный	10—5	Пыль	0,1—0,01
„ средний	5—2	Ил	0,01—0,001
„ мелкий	2—1	Глина	<0,001

Наносы, так же как донные отложения, представляют собой смеси частиц различной крупности. Неоднородность смеси характеризуется кривой ее гранулометрического состава, т. е. полученной при весовом анализе пробы грунта или наносов ин-

тегральной функцией распределения вероятностей диаметров частиц. В большинстве случаев распределение вероятностей диаметров логарифмически нормальное. Его параметрами служат математическое ожидание величины $\lg d$ и коэффициент вариации этой величины. В практике расчетов пользуются, однако, более простыми характеристиками распределения — диаметрами с определенной вероятностью непревышения (d_{10}, d_{35}, d_{50}, d_{65}, d_{90}) и отношениями этих диаметров.

В задачах о перемещении твердых частиц жидкой средой главную роль играет *гидравлическая крупность* частиц, т. е. скорость их равномерного падения в покоящейся жидкости.

Уравнение равномерного падения записывается в виде

$$C_d \frac{\rho w_0^2}{2} k_1 d^2 = g(\rho_s - \rho) k_2 d^3. \qquad (14.1)$$

Здесь w_0 — скорость падения; ρ и ρ_s — плотности воды и частиц; C_d — коэффициент гидродинамического сопротивления; k_1 и k_2 — коэффициенты формы частиц (для шара $k_1 = \pi/4$, $k_2 = \pi/6$). Разрешая уравнение (14.1) относительно w_0, получаем формулу гидравлической крупности в общем виде

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{C_d}} \sqrt{2 \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d}. \qquad (14.2)$$

Коэффициент сопротивления C_d есть функция числа Рейнольдса для частиц $\mathrm{Re}_d \equiv w_0 d/\nu$ и коэффициентов формы k_1 и k_2.

Наблюдаются четыре режима обтекания жидкостью падающей частицы: 1) режим «ползущего движения» (обтекания без отрыва); 2) режим отрывного обтекания с ламинарным пограничным слоем на передней части частицы; 3) режим турбулентного пограничного слоя с вязким подслоем; 4) режим полностью развитого турбулентного слоя. Границы между режимами определяются значениями числа Re_d. Первый режим относится к области значений $\mathrm{Re}_d \leqslant 1$, т. е. встречается при падении частиц или очень мелких, или в очень вязкой жидкости. Решив уравнения движения вязкой жидкости с отброшенными инерционными членами, Стокс для этого режима обтекания получил формулу скорости равномерного падения шара

$$w_0 = \frac{g}{18\nu} \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) d^2. \qquad (14.3)$$

Ей соответствует выражение коэффициента сопротивления $C_d = 24/\mathrm{Re}_d$. Второй режим наблюдается в области $1 < \mathrm{Re}_d \leqslant 40$, что ориентировочно соответствует диапазону диаметров частиц наносов $0{,}1 < d < 0{,}7$ мм. Согласно полуэмпирической формуле А. П. Зегжды в этой области

$$w_0 = 0{,}93 \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)^{2/3} \left(\frac{g^2}{\nu}\right)^{1/3} d. \qquad (14.4)$$

При третьем режиме, существующем в области $40 < \mathrm{Re}_d \leqslant 300$, гидравлическая крупность пропорциональна кинематической вязкости в степени около —0,1, и значит влияние вязкости мало заметно. При четвертом режиме, т. е. при $\mathrm{Re}_d > 300$, или ориентировочно при диаметрах частиц наносов $d > 1{,}5$ мм, влияние вязкости исчезает совсем. В соответствии с общей формулой (14.2), получаем для этого режима

$$w_0 = \text{const} \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d}. \qquad (14.5)$$

По геометрическим признакам частицы наносов делятся на три класса: *шарообразные, эллипсоидальные* и *уплощенные* (пластинчатые). Для шарообразных частиц постоянная в формуле (14.5) равна 1,2. По данным В. В. Романовского [113], гидравлическая крупность эллипсоидальных частиц составляет в среднем $^3/_4$, а уплощенных $^1/_2$ гидравлической крупности шарообразных частиц той же массы. Цифры эти относятся к автомодельной области $\mathrm{Re}_d > 300$. При первом и втором режимах обтекания ($\mathrm{Re}_d \leqslant 40$) форма частиц не влияет на их гидравлическую крупность. Таблицы гидравлической крупности, помещаемые в справочниках, составлены для шарообразных частиц.

14.2. Деление наносов на взвешенные и влекомые, русловые и внерусловые. Стадии движения русловых наносов

По способу перемещения наносы принято делить на взвешенные и влекомые. *Взвешенные наносы* перемещаются в толще потока, могут находиться на любой высоте между дном и свободной поверхностью. Их движение поддерживается турбулентным перемешиванием жидкости. Так как пульсационные скорости имеют порядок динамической скорости v_*, то для взвешенных частиц характерно неравенство $w_0 < v_*$.

Влекомые наносы перемещаются в придонном слое потока. Их движение прерывно — качение или скачки чередуются у каждой частицы с периодами покоя. Гидродинамические силы, вызывающие движение влекомых наносов, обусловлены несимметричным обтеканием частиц в положении на дне и имеют лишь побочную связь с турбулентностью. Действие этих сил длится короткое время разгона частицы и дальше она движется за счет приобретенного импульса. Прекращение движения — остановка частицы — воссоздает условия несимметричного обтекания, необходимые для ее следующей подвижки.

Существует также промежуточный режим движения наносов — *в полувзвешенном состоянии.* Частицы, перемещающиеся в этом режиме, срываются со дна таким же образом, как влекомые, но затем подхватываются турбулентными вихрями и, пре-

жде чем снова упасть на дно, проходят в придонном слое потока длинный путь, на 3—4 порядка превышающий их диаметр. Движение полувзвешенных наносов наименее изучено и до настоящего времени его роль недооценивалась. Между тем в реках с песчаным руслом значительная часть донных частиц движется именно в полувзвешенном состоянии.

По своему происхождению наносы делятся на русловые и внерусловые. *Внерусловые наносы* образуются в результате эрозии поверхности бассейна. Они обычно представлены глинистыми и илистыми частицами и свой путь в реке проходят взвешенными. Откладываясь на пойме, они образуют так называемый наилок и способствуют постепенному повышению поймы.

Русловые наносы захватываются потоком со дна и с береговых склонов. У равнинных рек они представлены песками и гравием. В межень, при небольших скоростях течения, они движутся во влекомом и полувзвешенном состоянии, а во время паводка их мелкие фракции (крупностью обычно до 0,25 мм) переходят в состав взвешенных наносов.

Если представить последовательность потоков с песчаным дном, расположенных в порядке возрастания скорости течения, то в такой последовательности обнаруживаются следующие стадии движения русловых наносов:

1) стадия отсутствия общего движения, когда вследствие малости скоростей происходит изредка лишь шевеление и срывы отдельных частиц;

2) стадия движения наносов по ровному дну, или, как ее часто называют, «первая гладкая стадия»;

3) стадия рифелей;

4) стадия донных гряд;

5) переходная стадия смыва гряд;

6) «вторая гладкая стадия», для которой характерна высокая интенсивность транспорта русловых наносов с частичным переходом их во взвешенное состояние;

7) стадия антидюн.

Геометрия рифелей, гряд и антидюн была описана в п. 7.2.

В потоках, дно которых сложено крупным песком и гравием, рифели не образуются — «первая гладкая стадия», при повышении скоростей сменяется стадией гряд. В потоках с крупнозернистыми донными отложениями не происходит также смыва гряд. Вместо этого, когда интенсивность транспорта наносов становится очень большой, гряды перестраиваются, приобретая вид симметричных волн.

Переход от первой стадии ко второй, т. е. начало движения частиц, принято связывать или с критической величиной касательного напряжения на дне или с критической величиной средней скорости течения. Вопрос о границах между остальными стадиями менее ясен, и по нему имеется несколько разноречивых предложений (И. Л. Богарди [157], Р. Дж. Гарде и Ранга

Раджу [181], Д. Б. Саймонс и Э. В. Ричардсон [230], В. Ванони [241] и др.). Границы, определенные на основании лабораторных экспериментов, часто оказываются для естественных потоков неверными. По-видимому, можно считать установленными следующие общие положения: а) на переходе от ровного дна к рифелям сказывается влияние вязкости; б) нижняя и верхняя

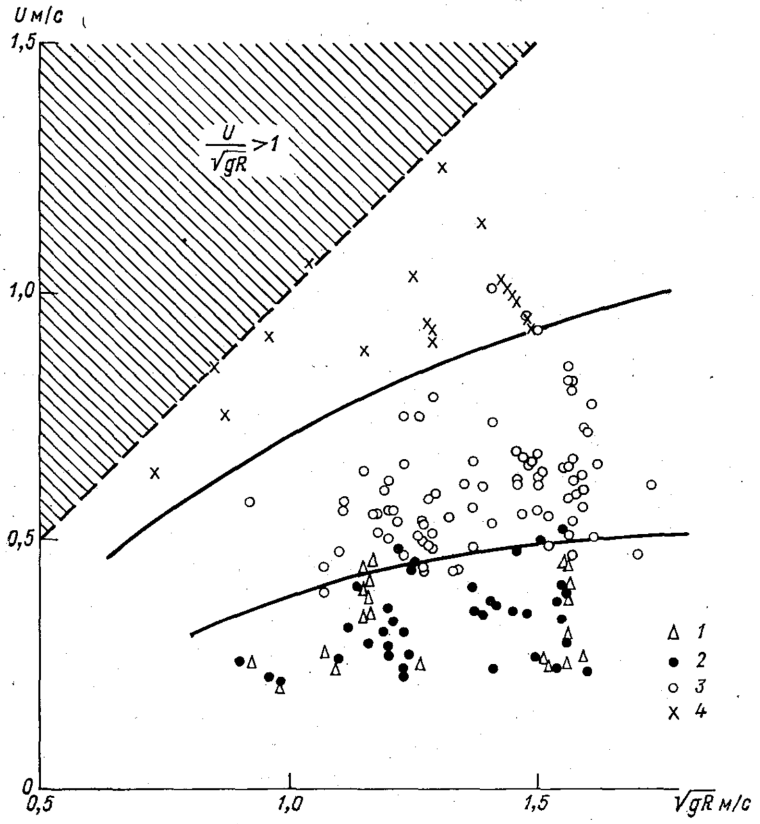


Рис. 74. Границы области существования гряд.
1 — ровное дно, *2* — рифели, *3* — гряды, *4* — смыв гряд.

границы существования гряд не зависят от вязкости; в) в диапазоне крупности частиц $d = 0{,}1 \div 1{,}0$ мм (песок) эти границы не зависят также от d; г) антидюны образуются при $Fr \geqslant 1$.

На рис. 74 показаны границы области существования гряд, построенные по экспериментальным данным Гая, Саймонса и Ричардсона [186]. Опыты велись в лотке шириной 2,44 м, при медианной крупности донных частиц 0,19, 0,27, 0,45 и 0,93 мм (подробные сведения об этих опытах см. в п. 23.2). Граничные кривые на рис. 74 построены в осях U, $\sqrt{gR}$. На этом рисунке

видно, что с ростом гидравлического радиуса происходит медленное увеличение диапазона скоростей, в котором наблюдается грядовое движение наносов, причем это увеличение совершается в основном за счет повышения скоростей, требующихся для смыва гряд. Вдоль граничных линий числа Фруда монотонно падают. Эта закономерность согласуется с данными по естественным потокам. Для смыва гряд лабораторный поток с гидравлическим радиусом 0,2 м должен иметь скорость $U \geqslant 0{,}9$ м/с, т. е. число Фруда $U^2/gR \geqslant 0{,}41$. В большой реке, с глубиной во время паводка 10 м, смыв гряд происходит при скоростях около 2 м/с, т. е. при числе Фруда, равном 0,04 — на порядок меньшем, чем в лаборатории.

Изучая границы между стадиями движения наносов, необходимо иметь в виду, что эти границы размытые — в некоторой полосе значений определяющих параметров могут наблюдаться обе смежные стадии. По-видимому, всем переходам свойственны явления гистерезиса.

14.3. Начало движения. Неразмывающая скорость

Неоднородность размеров и формы наносов, случайный характер их расположения на дне и пульсации скорости турбулентного потока придают захвату частиц со дна вероятностный характер. Частицы приходят в движение в случайных точках дна, в случайные моменты времени. Пройдя короткий путь они останавливаются, на смену им по тому же закону случайности вовлекаются в движение другие.

В экспериментальных исследованиях начала движения наносов обычно применяются почти однородные наносы. Это делает результаты наблюдений более определенными, исключает возможность изменения гранулометрического состава донных частиц за время эксперимента, но обязывает к введению поправок на неоднородность грунта при переходе к практическим расчетам. Рассмотрим начальную стадию движения однородных частиц.

Если осредненное движение жидкости установившееся, плоское и равномерное, дно ровное (без гряд) и наносы однородные, то в данном потоке существует определенная функция распределения вероятностей для числа частиц, приходящих в движение на единице площади дна в единицу времени. С изменением параметров потока и крупности частиц эта функция будет меняться.

Для практических целей достаточно знать математическое ожидание $\overline{N}$ числа N сдвигаемых частиц. Если это математическое ожидание определяется экспериментально, время разового наблюдения надо изменять с таким расчетом, чтобы относительная средняя квадратичная ошибка статистического

среднего была одной и той же при разной интенсивности захвата частиц потоком. Для дальнейшего удобно ввести безразмерную среднюю интенсивность захвата. Нормировав число $\overline{N}$ с помощью диаметра частиц и ускорения свободного падения, выразим эту безразмерную интенсивность в виде

$$\overline{y}=\overline{N}\frac{d^3}{\sqrt{gd}}. \qquad (14.6)$$

Величина $\overline{y}$ будет зависеть от отношения между силами, стремящимися сдвинуть донную частицу, и силами, удерживающими ее на месте. Определим эти силы, считая, что форма частиц симметрична относительно диаметральной плоскости, параллельной плоскости осредненного движения. Это допущение позволит нам свести все силы к плоской системе сил.

Удерживающими силами служат: избыточный вес частиц G, выражаемый правой частью формулы (14.1), и сила трения

$$R=fG=fg(\rho_s-\rho)k_2d^3, \qquad (14.7)$$

где f — коэффициент внутреннего трения грунта в воде. Приведя силы трения к центру массы частицы и сложив их с силой избыточного веса частицы, мы получим главный вектор удерживающих сил с модулем, пропорциональным G, и момент, стремящийся опрокинуть частицу в направлении течения.

Силы, сдвигающие частицу, состоят из нормальных к ее поверхности сил гидродинамического давления и касательных сил жидкостного (вязкого или турбулентного) трения. Приведя силы трения к центру давления и сложив их с силой давления, получим главный вектор сдвигающих сил и момент, который, так же как момент от сил трения в грунте, стремится опрокинуть частицу в направлении течения.

Вследствие несимметричности обтекания частицы в вертикальной плоскости главный вектор сдвигающих сил отклонен от горизонта и может быть разложен на лобовую $F_л$ и подъемную $F_п$ компоненты. Турбулентные пульсации скорости и давления делают эти компоненты колеблющимися во времени. Среднюю величину лобовой силы получим, заменив в выражении (14.1) скорость частицы w_0 придонной скоростью течения $\overline{u}(\Delta)$ и умножив это выражение на коэффициент a несимметричности обтекания:

$$F_л=aC_d\frac{\rho[\overline{u}(\Delta)]^2}{2}k_1d^2. \qquad (14.8)$$

Подъемная сила у однородных частиц связана постоянным отношением с лобовой: $F_п\sim F_л$.

Лежащая на дне частица обычно упирается в следующую вниз по течению и все силы могут создавать моменты относи-

тельно точки упора. К опрокидывающему моменту, создаваемому главным вектором сдвигающих сил, присоединяются опрокидывающие моменты, полученные при приведении сил трения к центру массы и центру давления. Поэтому, начиная двигаться, частицы или перекатываются, или сочетают подъем с вращением. Скользящее движение встречается лишь у уплощенных частиц. Так как при изменении параметров потока, например при увеличении скорости, меняются силы, а их плечи практически остаются прежними, то при дальнейшем рассмотрении вопроса о начале движения мы не будем заниматься моментами сил.

Из условий $R \sim G$ и $F_{\text{п}} \sim F_{\text{л}}$ следует, что отношение удерживающих сил к сдвигающим во всех случаях движения пропорционально отношению $G/F_{\text{л}}$. Если частицы крупные и дно гидравлически шероховатое, то коэффициенты a и C_d в выражении (14.8) постоянны, а $\overline{u}(\Delta) \sim v_*$. Отсюда легко найти, что отношение $G/F_{\text{л}}$ пропорционально уже известному нам коэффициенту устойчивости $\psi \equiv (\rho_s - \rho) gd/\rho v_*^2$.

Если частицы мелкие и на дне есть вязкий подслой, то коэффициент сопротивления C_d является функцией числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_d \equiv \frac{w_0 d}{\nu}$, а коэффициент несимметричности обтекания a зависит от отношения диаметра частиц к толщине подслоя, т. е. от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_* \equiv \frac{v_* d}{\nu}$. Таким образом, отношение удерживающих сил к сдвигающим становится зависящим от трех безразмерных переменных: ψ, Re_d и Re_*. Однако число Re_d мы вправе заменить числом

$$\mathrm{Re}_{gd} \equiv \frac{d\sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) gd}}{\nu}, \qquad (14.9)$$

которое может быть выражено через две другие переменные: $\mathrm{Re}_{gd} = \sqrt{\psi}\mathrm{Re}_*$. В результате величины ψ и Re_* оказываются исчерпывающими характеристиками отношения удерживающих сил к сдвигающим. Отсюда для безразмерной интенсивности захвата $\overline{y}$ мы имеем в общем случае следующее функциональное соотношение:

$$\overline{y} = \mathrm{fct}(\psi,\ \mathrm{Re}_*). \qquad (14.10)$$

Допустимо, очевидно, и такое решение, когда для исключения числа Re_{gd} коэффициент ψ заменяется отношением w_0^2/v_*^2. В расчетах обычно используется квадратный корень из этого отношения. Величина $\xi \equiv w_0/v_*$ также называется коэффициентом устойчивости. Величины $1/\psi$ и $1/\xi$, обратные коэффициентам

устойчивости, называются *коэффициентами подвижности.* Пользуясь коэффициентом ξ, будем иметь вместо (14.10) уравнение

$$\bar{y} = \text{fct}(\xi,\ \text{Re}_*). \tag{14.11}$$

Вследствие вероятностного характера явления экспериментально установить значение касательного напряжения на дне, при котором интенсивность захвата $\bar{y}$ обращалась бы в нуль, невозможно. Однако слабая интенсивность захвата не представляет практического интереса и поэтому можно выбрать некоторое малое значение интенсивности $\bar{y} = \text{const} > 0$, приняв его за условный порог транспорта наносов. При таком условии задача определения критического касательного напряжения на дне сведется к построению опытным путем одной из двух функций:

$$\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)\frac{gd}{v_{*c}^2} = \text{fct}\left(\frac{v_{*c}d}{\nu}\right) \tag{14.12}$$

или

$$\frac{w_0}{v_{*c}} = \text{fct}\left(\frac{v_{*c}d}{\nu}\right), \tag{14.13}$$

где индексом c отмечены значения динамической скорости на принятом пороге транспорта наносов. Общее свойство функций (14.12) и (14.13) состоит в том, что при достаточно больших значениях аргумента (числа Re_{*c}) они превращаются в постоянные.

Использование безразмерных переменных ψ_c, ξ_c и Re_{*c} в современных исследованиях начала движения наносов стало общепринятым. Слабую сторону выполненных экспериментов составляет отсутствие единого соглашения (типа равенства $1/\bar{y} = \text{const}$) о том, что считать таким началом. Разные экспериментаторы по-разному фиксировали начало движения и часто не заботились о том, чтобы дать своему приему точное количественное выражение. В результате формулы и графики разных авторов расходятся и их согласование является трудным, а иногда и невыполнимым делом.

Первым представил результаты своих опытов в переменных ψ_c и Re_{*c} А. Шильдс [224]. Критические значения касательного напряжения на дне он находил, экстраполируя к нулю связь между касательным напряжением и расходом наносов. Особенностью построенного Шильдсом графика $1/\psi_c = \text{fct}(\text{Re}_{*c})$ является минимум величины $1/\psi_c$ (т. е. максимум устойчивости донных частиц) при $\text{Re}_{*c} \approx 10$. Влияние вязкости на устойчивость исчезает по графику Шильдса лишь при $\text{Re}_{*c} \approx 500$, после чего величина $1/\psi_c$ имеет постоянное значение 0,06 (коэффициент $\psi_c = 16{,}7$). Последовавшие опыты показали, что экстраполяция

связи между расходом наносов и величиной τ_0 была произведена Шильдсом неточно — движение наносов наблюдается и в области значений $1/\psi$, меньших $1/\psi_c$ по его графику. Для крупнозернистых частиц, в частности, это легко устанавливается по данным измерений расхода наносов, выполненных гидравлической лабораторией в Цюрихе (см. рис. 81). Согласно оценке Б. Тэйлора (цит. по [242]), кривая Шильдса соответствует расходу наносов $q_s = 0{,}01 v_* d$.

В СССР наиболее крупное экспериментальное исследование начала движения наносов было произведено В. С. Кнорозом [68, 70]. Опыты велись с десятью разновидностями отсортированных песчаных и гравелистых частиц диаметром от 0,164 до

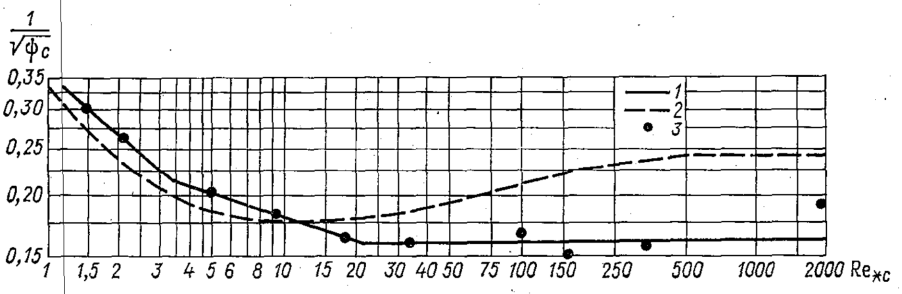


Рис. 75. Функция $1/\sqrt{\psi_c} = \mathrm{fct}(\mathrm{Re}_{*c})$.

1 — по Кнорозу, *2* — по Шильдсу, *3* — центры тяжести экспериментальных точек Кнороза.

18,4 мм, при глубинах воды в лотке от 0,06 до 0,80 м. Степень неоднородности использованных грунтов Кнороз характеризует отношением $d_{95}/d_{50} \approx 2$. Это примерно та же степень неоднородности, что в опытах Зегжды (см. п. 4.1).

На основе визуальных наблюдений Кнорозом фиксировались скорости течения при первых подвижках донных частиц и при переходе к повсеместному движению. Скорость, средняя из этих двух скоростей, принималась за критическую U_c. Всего было получено около 600 сопряженных значений ψ_c, Re_{*c} и U_c. Экспериментальный график Кнороза в осях $1/\sqrt{\psi_c}$, Re_{*c} показан на рис. 75. График представляет ломаную линию, стороны которой последовательно отвечают гладкостенному, переходному и квадратичному режимам сопротивления. Если принять отношение высоты выступов шероховатости к среднему диаметру частиц равным 1,6, т. е. такое же, как в опытах Зегжды, то границы режимов на графике Кнороза будут практически совпадать с границами, установленными Зегждой. Критический коэффициент устойчивости становится независящим от вязкости при $\mathrm{Re}_{*c} \approx 25$. В автомодельной области имеем: $1/\sqrt{\psi_c} = 0{,}16$, $1/\psi_c = 0{,}026$ и $\psi_c = 38{,}2$.

На рис. 75 нанесена также соответствующим образом пересчитанная кривая Шильдса. Если в области малых Re_{*c} (мелких частиц) кривые Кнороза и Шильдса довольно близки, то при $Re_{*c} > 10$ они резко расходятся. Вопрос о том, какая из двух кривых заслуживает большего доверия, долгое время оставался неясным, хотя значение $Re_{*c} = 500$, которое, по Шильдсу, определяет нижнюю границу автомодельности, всегда казалось сомнительным — оно лежит внутри области квадратичного сопротивления. Вопрос, по-видимому, можно считать решенным после появления работы У. Уайта и П. Акерса [246]. На основании обработки большого объема экспериментального материала по транспорту влекомых наносов (1000 опытов, принадлежащих 14 исследователям) Уайт и Акерс получили, так же

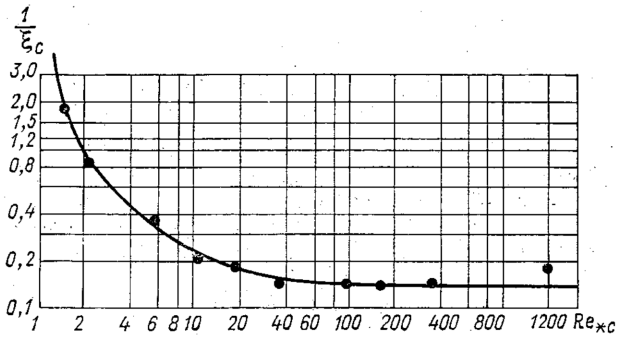


Рис. 76. Функция $1/\xi_c = fct(Re_{*c})$, по Кнорозу.

как Кнороз, закон монотонного убывания подвижности частиц с ростом их диаметра и уменьшением вязкости. Для автомодельной области они нашли значение $1/\sqrt{\psi_c} = 0{,}17$, что практически совпадает с результатом Кнороза. Таким образом, фундаментальное исследование Кнороза прошло независимую проверку и может рассматриваться как надежная основа для расчетов.

На рис. 76 график Кнороза дан в координатах $1/\xi_c$, Re_{*c}. В этих координатах он представляет собой плавную кривую. В автомодельной области $1/\xi = 0{,}135$ и $\xi = 7{,}4$. Сравнив последнюю цифру с отношением скоростей $\bar{u}(\Delta)/v_* = 7{,}5$, получаем, что при начале движения частиц, образующих гидравлически шероховатую поверхность, осредненная скорость над вершинами частиц равна их гидравлической крупности

$$\bar{u}_c(\Delta) \approx w_0. \qquad (14.14)$$

В расчетах вместо критического касательного напряжения $\tau_{0c} = \rho v_{*c}^2$ удобнее пользоваться критическим значением сред-

ней скорости $U_c = \frac{C}{\sqrt{g}} v_{*c}$. Появление при этом добавочной переменной — коэффициента Шези или коэффициента трения — не приводит к затруднениям, так как для ровного дна C и λ определяются с достаточной точностью. Скорость U_c называется *неразмывающей*.

Полученная Кнорозом формула неразмывающей скорости для квадратичной области, т. е. при $Re_{*c} > 25$, или ориентировочно при $d > 1$ мм, имеет вид

$$U_c = 1{,}3\sqrt{gd}\lg\frac{12R}{\Delta}. \qquad (14.15)$$

Для исключения отсюда высоты выступов шероховатости наряду с соотношением $\Delta = 1{,}6d_{50}$ при сильно неоднородных смесях можно пользоваться соотношением $\Delta = d_{90}$, предложенным И. И. Леви [83]. При сильной неоднородности донного грунта Леви рекомендовал также вводить в правую часть формулы (14.15) множитель $\left(\frac{d_{50}}{d_{90}}\right)^{0,1}$. Движение частиц неоднородного грунта начинается при несколько меньших скоростях, чем движение однородных частиц, диаметр которых равен среднему диаметру частиц в смеси.

В переходной области (ориентировочно при $0{,}25 < d < 1{,}0$ мм) вместо соотношения $U_c \sim \sqrt{d}$ по формуле (14.15) имеется соотношение $U_c \sim d^{0,25}$ и в области гидравлически гладкого дна (ориентировочно при $d < 0{,}25$ мм) — соотношение $U_c \sim d^{0,05}$ (полные выражения для U_c имеют громоздкий вид и мы их приводить не будем). Таким образом, *по мере усиления влияния вязкости влияние диаметра частиц на неразмывающую скорость быстро падает* и в области гладкого дна им можно практически пренебрегать. Эта картина объясняется двумя обстоятельствами: линейным распределением скоростей в вязком подслое: $\bar{u} \sim z$ и линейным законом сопротивления у мелких частиц: $F_{сдв} \sim \bar{u}$. В результате сдвигающая сила, так же как удерживающая, оказывается пропорциональной d^3 и отношение этих сил делается независящим от d.

Слабое влияние диаметра мелких частиц на захват их потоком нашло отражение в одной из ранних формул неразмывающей скорости — эмпирической формуле В. Н. Гончарова [23]

$$U_c = 0{,}96\sqrt{gd^{0,4}(d+0{,}0014)^{0,6}}\left(\frac{R}{d}\right)^{0,2}. \qquad (14.16)$$

Для крупных частиц постоянное слагаемое (длина 0,0014 м) мало по сравнению с d и мы получаем, согласно теории, $U_c \sim \sqrt{gd}$. У мелких частиц диаметр d становится мал по сравнению с 0,0014 м и влияние d на величину U_c резко падает.

Формула Гончарова не содержит вязкости в явном виде и отвечает температурам воды 10—15°С. Более низким температурам соответствуют несколько бóльшие значения неразмывающей скорости, более высоким температурам — несколько меньшие значения. В области гладкостенного сопротивления повышение температуры воды от 0 до 20°С уменьшает неразмывающую скорость почти на 20%.

Численные значения U_c, получаемые по формуле (14.16), при $1000 < \frac{R}{d} < 5000$ близки к значениям U_c по системе формул Кнороза. Так как пользоваться одной формулой удобнее, чем тремя, то формула (14.16) широко применяется в расчетах русловых деформаций. При сильно неоднородном грунте в правую часть формулы (14.16) вводится, по рекомендации Гончарова, множитель $\left(\frac{d_{50}}{d_{90}}\right)^{0,2}$.

Недостаточная определенность опытных данных о начале движения донных частиц вместе с важным значением этого вопроса в практических приложениях обусловили появление у нас и заграницей ряда новых исследований. Кроме уже упомянутой работы Уайта и Акерса, заслуживают внимания работы В. В. Романовского [114], Г. П. Скребкова и В. Е. Короткова [122, 79] и Ч. Янга [251].

Среди новых экспериментальных результатов значительный интерес вызывает обнаруженная очень высокая чувствительность расхода наносов в начале движения частиц к изменениям касательного напряжения и средней скорости. По данным А. Пэйнтала [214], а также Б. Тэйлора и В. Ванони [233], расход наносов крупностью около 0,2 мм изменялся в начале движения как 16—17-я степень касательного напряжения. В опытах Н. Н. Гришина и др. [37] расход гравия крупностью 5 мм изменялся при начале движения как 20-я степень средней скорости, расход частиц полистирола ($d = 5{,}8$ мм, $\frac{\rho_s}{\rho} = 1{,}05$) — как 8-я степень. Объяснение этих фактов, приведенное в работе [37], состоит в том, что при развитии движения рост расхода наносов происходит в основном за счет увеличения числа вовлекаемых в движение частиц, причем для значительного увеличения этого числа достаточно небольшого приращения донной скорости.

Совсем особую и притом сложную задачу, слабо поддающуюся теоретическому анализу, представляет определение неразмывающих скоростей для связных грунтов. Опыт показывает, что текущая вода при размыве связного грунта влечет его в виде небольших отдельностей — агрегатов, представляющих каждый скопление значительного числа частиц. При отрыве такого агрегата от дна давление воды преодолевает наряду с ве-

сом агрегата силу его сцепления с соседними агрегатами. Размер агрегатов и сцепление между ними меняются в широких пределах в зависимости от физико-механических свойств грунта, в частности, его консистенции. Силы сцепления, действующие внутри агрегата между составляющими его частицами, гораздо больше сил сцепления между агрегатами. Силы сцепления между частицами растут с уменьшением поперечных размеров частиц. Поэтому в области связных грунтов связь между неразмывающей скоростью и поперечным размером частиц обратная. Граница между областями прямой и обратной связи, между U_c и d, находится между значениями d, равными 0,1 и 0,2 мм.

Подробное изложение вопросов размыва связных грунтов имеется в монографии Ц. Е. Мирцхулавы [92]. Добавочные сведения можно найти в книге И. Ф. Карасева [61].

15. Движение влекомых наносов как случайный процесс

15.1. Картина движения по опытным данным

При значениях касательного напряжения на дне, немного больших критического, донные частицы перекатываются. С увеличением придонных скоростей перекатывание сменяется скачками. Перемещение посредством последовательных скачков представляет основной вид развитого движения влекомых твердых частиц. Этот вид движения изучался в лабораторных лотках и в натуре рядом исследователей, начиная с Г. К. Гильберта (1914 г.). В настоящее время применяются два способа исследований: 1) путем фиксации движения на кино- или фотокадрах и 2) путем наблюдений за перемещением меченых (окрашенных, флюоресцирующих или активизированных) частиц. О деталях движения, в частности о виде траекторий частиц, можно составить представление только с помощью первого способа. В этом пункте мы рассмотрим данные, полученные первым способом, а результаты наблюдений за мечеными частицами изложим в конце п. 15.2.

Наблюдения посредством кино- или фотосъемки были выполнены Ц. Е. Мирухулавой [91], Н. А. Михайловой [94], К. И. Россинским и К. С. Любомировой [117, 118], И. Тсучия [238], С. К. Олевинской [104], И. Френсисом [180]. Чтобы облегчить опознавание отдельных движущихся частиц, все экспериментаторы прибегали к закреплению зернистой шероховатости дна. В опытах Россинского и Любомировой размеры закрепленных донных частиц отличались от размеров движущихся.

У остальных экспериментаторов эти размеры были одинаковыми. В опытах Френсиса наблюдалось движение одиночных частиц. Чаще всего применялись частицы гравия и гальки, но Френсис использовал, кроме того, гранитную крошку и искусственно изготовленные частицы разной плотности. Значения коэффициента подвижности $1/\xi = \frac{v_*}{w_0}$ в опытах Френсиса достигали 1,3. Это позволило ему наблюдать движение не только влекомых (катящихся и подскакивающих) частиц, но и полувзвешенных. В опытах остальных исследователей коэффициент подвижности был меньше 0,5, что отвечает умеренной и слабой интенсивности движения в режимах подскакивания и качения.

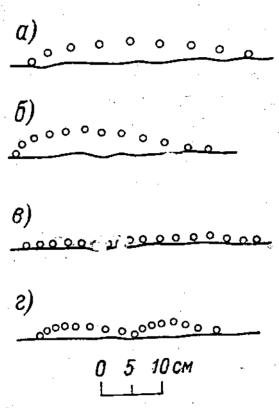


Рис. 77. Траектории подскакивающих частиц (по Россинскому и Любомировой).

а — нормальная (d=7 мм), *б* — с крутым подъемом (d=7 мм), *в* — настильная (d=4 мм), *г* — последовательные скачки (d=10,5 мм).

Данные о скачкообразном движении твердых частиц, полученные в шести циклах исследований, хорошо согласуются. Высоты скачков имеют порядок $10^0 d$, длины — порядок $10^1 d$. Средние высоты скачков составляли в экспериментах от $0{,}6d$ до $4d$. По данным Френсиса, высота подъема над дном полувзвешенных частиц в два-три раза больше, составляя в среднем около $10d$. Распределения вероятностей высот и длин скачков отличаются сильной положительной асимметрией. Наибольшие наблюденные в опытах высоты и длины скачков были больше модальных высот и длин в 4—4,7 раза.

Так как максимум подъемной силы приходится на начальный момент скачка, то восходящие ветви траекторий, как правило, круче нисходящих. В воде, однако, они далеко не так круты, как в воздухе — при движении под действием ветра. Это различие объясняется бо́льшим сопротивлением движению в более плотной среде. Характерные траектории подскакивающих частиц, полученные Россинским и Любомировой, показаны на рис. 77. Такой же вид имеют траектории, наблюденные Михайловой и Френсисом. По наблюдениям Френсиса, траектории полувзвешенных частиц имеют заметную извилистость, но в среднем, за исключением начального и конечного участков, параллельны дну.

Подъемная сила, приложенная к частице, лежащей на дне, образуется разностью между давлением в заторможенной жидкости под частицей и давлением в ускоряющейся жидкости над ней. В турбулентном потоке эта разность колеблется вместе

с пульсирующей продольной скоростью, и подскакивание частиц происходит в моменты максимумов u'. Заметим, что нормальная ко дну компонента мгновенной скорости никакой роли в захвате частиц потоком не играет, ибо при $z = \Delta$ она очень мала. Косвенное подтверждение этого дал эксперимент Френсиса с подскакиванием частиц в ламинарном потоке.

Частице достаточно лишь немного приподняться над дном, чтобы влияние дна на распределение давления по ее поверхности резко уменьшилось. Подъемная сила, однако не исчезает, так как в этот же момент в ее создание включается новый фактор — вращение частиц (эффект Магнуса). Уже отмечалось, что силы, сдвигающие частицу, обычно образуют момент относительно точки ее упора и, вылетая из своего гнезда, частица вращается. По наблюдениям Россинского и Любомировой [118], при скорости течения у дна около 1 м/с частицы диаметром 16 мм, делая скачок, вращались со скоростью 6—10 оборотов в секунду. Подъемная сила, возникающая при вращении шара в потоке с градиентом скорости, изучалась М. А. Дементьевым [42]. Так как опыты Дементьева велись в неограниченном потоке, то применить их результаты к движению частиц вблизи дна нельзя. Однако эти результаты позволяют все же сделать вывод, что подъемная сила, обусловленная вращением влекомых частиц в начале скачка, может быть соизмеримой с избыточным весом частиц. Дальнейшее состояние вращения зависит от соотношения между угловой скоростью частицы и вихрем скорости в потоке. Согласно формулам (1.5) и (1.6), вихрь скорости в плоском осредненном течении вдоль оси x определяется выражением

$$\Omega_y = \frac{d\overline{u}}{dz}. \qquad (15.1)$$

Угловая скорость подскакивающих частиц, по-видимому, всегда удовлетворяет неравенству $\omega_s > \frac{1}{2}\Omega_y$ и, следовательно, вращение частиц по длине скачка должно замедляться. Пульсация скоростей в потоке, скорее всего, дополнительно способствует этому замедлению.

Длина и время начального разгона частицы настолько малы, что в имеющихся наблюдениях эта активная стадия движения остается неосвещенной. Киносъемка, выполненная Россинским и Любомировой, зарегистрировала лишь отрицательные вертикальные ускорения подскакивающих частиц, т. е. осветила лишь пассивный участок восходящей ветви траектории, на котором сумма избыточного веса частицы и силы гидродинамического сопротивления превосходит подъемную силу. В вершине траектории вертикальный импульс обращается в нуль, после чего вес частицы, работая уже против силы сопротивления,

заставляет ее опуститься на дно. Из сказанного видно, что в движении подскакивающей донной частицы есть много общего с движением баллистического снаряда.

Продольная скорость частицы на нисходящей ветви траектории мало отличается от местных скоростей течения, но на восходящей ветви она существенно меньше и поэтому средняя скорость частицы меньше придонных скоростей потока. *Влекомые наносы отстают в своем движении от несущей жидкости.*

Еще в 1932 г. П. А. Войнович и М. А. Дементьев [20] экспериментально установили, что продольные скорости влекомых частиц почти сразу после начала движения достигают значений, равных $(0{,}4 \div 0{,}5)U$ и затем продолжают расти, стремясь сблизиться со средней скоростью потока U. Примерно такие же результаты были получены в опытах А. Т. Иппена и Р. П. Верма [193]. Вопрос о продольных скоростях подробно освещен в опытах Френсиса. На рис. 78 представлен экспериментальный график Френсиса — зависимость относительной скорости частиц $\overline{u}_s/U$ от коэффициента подвижности — для трех видов частиц: 1) окатанного гравия со средним диаметром 7,2 мм; 2) кусочков дробленого гранита такого же поперечного размера и 3) речного песка. Применялись также копии частиц гравия и гранита, изготовленные из пластических материалов с разной плотностью. Как видно на рис. 78, продольные скорости угловатых частиц меньше скоростей округлых. Из статьи Френсиса [180] следует, что угловатые частицы имеют зато бóльшие скорости вращения и в силу этого легче переходят в полувзвешенное состояние. Если принять за условную границу между влекомыми и полувзвешенными наносами значение коэффициента подвижности $v_*/w_0 = 0{,}5$, то для округлых влекомых частиц значения относительной скорости $\overline{u}_s/U$ будут лежать в пределах 0,4—0,8, что сходится с результатами Войновича и Дементьева. При переходе к полному взвешиванию

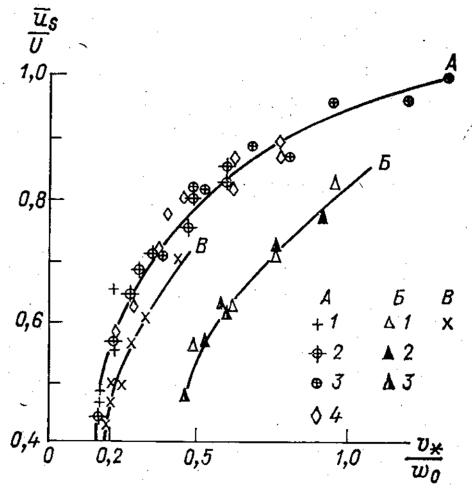


Рис. 78. Зависимость относительной скорости донных частиц от коэффициента подвижности (по Френсису).

Серия *А*: *1* — кварц, *2* — перспекс, *3* — полистирен, *4* — аральдит; серия *Б*: *1* — гранит, *2* — аральдит, *3* — аральдит со свинцовым ядром; серия *В* — речной песок.

($v_*/w_0 > 1$) скорости твердых частиц приближаются к средней скорости потока. При групповом перемещении частиц их скорости немного меньше скоростей одиночного движения.

15.2. Вероятностное описание движения

Будем рассматривать установившееся, плоское и равномерное, осредненное течение со скоростью больше неразмывающей в русле с ровным (безгрядовым) дном, сложенным из однородных частиц. Физический случайный процесс перемещения множества донных частиц под действием текущей воды удобно математически представить в виде совокупности двух случайных процессов — одного на пространственной оси x и другого на оси времени t. В отношении обоих процессов будем считать, что вероятностные характеристики движения многих частиц, такие же как у движения одной частицы на достаточно длинном интервале $(0, x)$ или $(0, t)$.

Рассмотрим сначала процесс на оси x. При одномерном вероятностном описании движения нет возможности различать катящиеся, подскакивающие и полувзвешенные частицы. При всех трех режимах перемещения будем иметь дело с одной случайной величиной — проекцией L на продольную ось x разовых, вообще говоря трехмерных, подвижек частицы. Величину L будем называть длиной шага или просто *шагом* частицы по оси x. Аналитическим выражением процесса перемещения будет случайная последовательность длин S_n пути, проходимого частицей по оси x за монотонно нарастающее число ее шагов n,

$$S_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (15.2)$$

В силу исходных предположений об установившемся и равномерном течении воды движение донных частиц однородно вдоль оси x — вероятность числа k остановок частицы на конечном интервале $(x, x+r)$ зависит только от k и r и инвариантна по отношению к x. Длина данного шага не связана с длиной предшествующего и, следовательно, все случайные величины L_i взаимно независимы. Из однородности движения следует, что все L_i имеют одну и ту же функцию распределения вероятностей $F(l)$. Случайный процесс, определяемый последовательностью вида (15.2), с взаимно независимыми и имеющими общее распределение вероятностей слагаемыми L_i называется *процессом восстановления* [73, 136] [1].

Процессу перемещения донных частиц можно приписать еще два важных свойства: ординарность и отсутствие последствия.

[1] Своим названием процессы восстановления обязаны важной прикладной задаче о сроках замены (восстановления) износившихся устройств и деталей. В настоящее время теория процессов восстановления охватывает гораздо более широкий круг задач.

Под *ординарностью* понимается тот очевидный факт, что на малом интервале Δx оси x не может быть более одной остановки частицы. Отсутствие последствия означает, что вероятность числа k остановок частицы на интервале $(x,\ x+r)$ не зависит от того, сколько раз и где останавливалась частица выше. Отсутствие последствия можно интерпретировать так же, как независимость длины L_b оставшегося отрезка шага от длины L_a пройденного отрезка. Распределение вероятностей для длины оставшегося отрезка шага такое же, как для всей длины $L=L_a+L_b$. Рассуждая таким образом, мы, разумеется, исключаем из рассмотрения динамические характеристики движения, такие как начальный импульс частицы и действующие на нее силы — они могут быть любыми. Ситуация здесь аналогична наблюдающейся при ожидании автобуса на остановке — время ожидания имеет такую же функцию распределения вероятностей, как интервал между последовательными приходами автобусов [136, с. 25—27].

Совместное выполнение условий однородности, ординарности и отсутствия последействия выделяет из класса процессов восстановления простейший вид процессов этого класса — *пуассоновский процесс* с показательной плотностью распределения вероятностей для длин шагов

$$f(l)=\gamma e^{-\gamma l}. \tag{15.3}$$

Математическое ожидание и дисперсия длины шага выражаются формулами

$$\mathbf{M}L=\gamma^{-1},\quad \mathbf{D}L=\gamma^{-2}. \tag{15.4}$$

Функция распределения имеет вид

$$F(l)=1-e^{-\gamma l}. \tag{15.5}$$

Располагая этими зависимостями, нетрудно найти остальные вероятностные характеристики процесса:

вероятность числа остановок (числа шагов) на интервале $(0,\ x)$

$$P(n,\ x)=\frac{(\gamma x)^n}{n!}e^{-\gamma x}; \tag{15.6}$$

плотность распределения пути S_n, проходимого частицей за n шагов,

$$f_x(s_n)=\gamma\,\frac{(\gamma s_n)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\gamma s_n}; \tag{15.7}$$

соответствующую функцию распределения

$$F_x(s_n)=1-e^{-\gamma s_n}\left[1+\frac{\gamma s_n}{1!}+\ldots+\frac{(\gamma s_n)^{n-1}}{(n-1)!}\right]. \tag{15.8}$$

Обратившись к протеканию процесса во времени, ограничимся случаем слабого транспорта наносов, когда время перемещения частицы допустимо считать пренебрежимо малым по сравнению с временем покоя [1]. Легко видеть, что случайная величина длительности покоя частицы между двумя последовательными (мгновенными) подвижками обладает теми же свойствами однородности, ординарности и отсутствия последствия, что и случайная величина шага частицы на оси x. Таким образом, мы располагаем случайной последовательностью времен R_n, за которые частица отдыхает n раз,

$$R_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{15.9}$$

с показательной плотностью распределения времен отдыха T

$$f(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}, \quad \mathbf{M}T = \alpha^{-1}, \quad \mathbf{D}T = \alpha^{-2}. \tag{15.10}$$

Далее, очевидно, нам остается переписать все формулы (15.5)—(15.8) с заменой в них l на τ, γ на α, x на t и s_n на r_n.

Совместное применение вероятностных характеристик процессов на осях x и t дает возможность найти итоговую характеристику процесса транспорта в целом — плотность распределения $f(s, t)$ длин пути S, проходимого частицами за время t.

Положим, что в момент $t = 0$, частица, которая находится в точке $x = 0$, начинает свое движение во времени. В соответствии с исходным условием слабого транспорта наносов частица, движущаяся по оси t, занимает неизменное положение на оси x, и наоборот, частица, движущаяся по оси x, покоится на оси t. К некоторому моменту времени $t > 0$ частица завершит n циклов перемещения на оси t и сделает n шагов на оси x. Путь, пройденный за эти n шагов, есть уже известная нам величина S_n. При фиксированном числе n плотность распределения для пути S_n, пройденного за время t, определяется произведением $f(s, n)P(n, t)$, где $f(s, n)$ выражается формулой (15.7), а $P(n, t)$ есть пуассоновская (т. е. имеющая вид (15.6)) вероятность числа остановок на интервале $(0, t)$. Суммируя по всем n от 0 до ∞, получим полную плотность распределения для пути S, проходимого частицами за время t,

$$f(s, t) = \sum_0^\infty f(s_n)\, P(n, t) = \sum_0^\infty \gamma \frac{(\gamma s_n)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\gamma s_n} \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} =$$

$$= \gamma e^{-\gamma s - \alpha t} \sqrt{\frac{\alpha t}{\gamma s}}\, I_1\left(2\sqrt{\gamma \alpha s t}\right), \tag{15.11}$$

где I_1 — модифицированная функция Бесселя первого порядка.

---

[1] Более общий случай транспорта наносов, когда время движения сравнимо с временем покоя и на оси t мы имеем т. н. *альтернирующий* процесс восстановления, рассмотрен в статье автора [31].

Формула (15.11) была получена Г. Эйнштейном [169]. Математическое ожидание и дисперсия пути S выражаются формулами:

$$\mathbf{M}S=\frac{\alpha}{\gamma}t, \qquad \mathbf{D}S=\frac{2\alpha t}{\gamma^2}. \tag{15.12}$$

При $t\to\infty$, распределение (15.11) асимптотически приближается к нормальному.

Зависимость (15.11) была проверена Эйнштейном с помощью наблюдений над движением меченых (окрашенных) частиц гальки диаметром 17—24 мм по дну, состоящему из таких же частиц в лабораторном лотке длиной 41 м. Позднее такая проверка была выполнена К. Яно, И. Тсучия и М. Мичуэ [252], которые экспериментировали с мечеными частицами гравия диа-

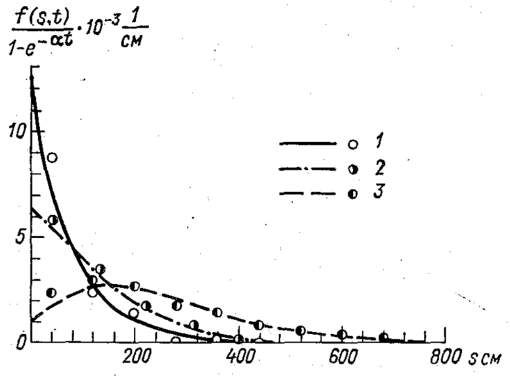


Рис. 79. Распределение меченых частиц по длине потока в три последовательные момента времени по формуле (15.11) и по опытам Яно, Тсучия и Мичуэ.

1 — t=40 с, *2* — t=120 с, *3* — t=300 с.

метром 3,5 мм и с мечеными искусственными частицами, имевшими диаметр 6,75 мм и относительную плотность $\rho_s/\rho = 1{,}24$. С опытом сравнивались зависимости (15.3), (15.11) и (15.12). Так же как в наблюдениях Эйнштейна, было установлено хорошее согласие теории и опыта. Один из экспериментальных графиков Яно и других показан на рис. 79. Заметим, что безразмерные средние длины шагов $\gamma^{-1}d$ получились в опытах японских исследователей на порядок большими, чем в группе исследований, выполненных с помощью кино- и фотосъемки. По-видимому, это объясняется соответственно бóльшими значениями коэффициента подвижности частиц.

Применение установленных вероятностных зависимостей в расчетах затрудняется тем, что значения параметров γ и α можно определить в каждом конкретном случае лишь из опыта. В работе Яно и других сделана попытка преодолеть этот недостаток с помощью добавочных полуэмпирических связей. Такое направление исследований, по-видимому, перспективно.

16. Расход влекомых наносов на безгрядовом дне

16.1. Формулы детерминистического типа

Принятое в этом параграфе деление формул расхода наносов на детерминистические и вероятностные основано не столько на виде формул, сколько на способе их получения. Вероятностные зависимости построены на представлениях о случайном процессе захвата и перемещения донных частиц, при выводе детерминистических формул флюктуации исключаются из рассмотрения.

Об исходных идеях и структуре формул детерминистического типа удобно судить по данным табл. 2, в которой приведены пять формул, опирающихся на достоверный экспериментальный материал и представляющих разные направления в поисках адэкватной связи между расходом влекомых наносов и параметрами потока и русла. Во всех формулах имеется в виду движение однородных крупнозернистых частиц на дне равномерного потока при квадратичном режиме сопротивления. Так как дно безгрядовое, то полный градиент потерь энергии равен градиенту потерь, обусловленных зернистой шероховатостью дна.

Таблица 2

Формулы расхода влекомых наносов

Автор	Год	Формула	№ формулы
А. Шильдс	1936	$q_s = 10\left(\frac{\rho}{\rho_s - \rho}\right)^2 qI\,\frac{\tau_0 - \tau_{0c}}{g\rho_s d}$	(16.1)
Э. Мейер-Петер и Р. Мюллер	1948	$q_s = 8\,\frac{\rho}{\rho_s - \rho}\,g^{1/2}\left(\frac{v_*^2}{g} - 0{,}047d\right)^{3/2}$	(16.2)
И. И. Леви	1948	$q_s = 0{,}00076\left(\frac{U}{\sqrt{gd}}\right)^3 d \times$ $\times (U - U_c)\left(\frac{d}{h}\right)^{0,25}$	(16.3)
И. В. Егиазаров	1949	$q_s = 0{,}015\,\frac{\rho}{\rho_s - \rho}\,qI^{1/2}\,\frac{\tau_0 - \tau_{0c}}{\tau_{0c}}$	(16.4)
Р. А. Бэгнольд	1973	$q_s = \frac{\rho v_* (v_* - v_{*c})}{g\rho_s \operatorname{tg}\alpha} \times$ $\times\left(U - 5{,}75 v_* \lg\frac{0{,}37h}{kd} - w_0\right)$ $\alpha = 32°,\ k = 1{,}4\left(\frac{v_*}{v_{*c}}\right)^{0,6}$	(16.5)

В формулах Шильдса и Егиазарова продолжается линия, начатая создателем исторически первой формулы расхода влекомых наносов М. Дюбуа (1879 г.), который предположил, что расход наносов пропорционален разности между касательным напряжением на дне и значением этого напряжения при начале движения частиц. Отношение указанной разности к критическому касательному напряжению Егиазаров назвал «безразмерным избытком влекущей силы».

В формуле Мейер-Петера и Мюллера, имеющей репутацию одной из наиболее надежных, эта же разность касательных напряжений представлена неявно в виде заключенной в скобки разности двух величин с размерностью длины. Показатель степени $^3/_2$ обусловлен требованием соблюдать при моделировании удельного расхода наносов закон подобия Фруда.

В формуле Леви разность касательных напряжений заменена разностью между средней скоростью на вертикали и неразмывающей скоростью. Эта замена предопределила появление в формуле величины d/h — относительной шероховатости дна. Аналогично построены формулы Г. И. Шамова [147] и В. В. Романовского [114]. Как считают авторы формул этого вида, разность $U - U_c$ характеризует скорость движения донных частиц, а величина $(U/\sqrt{gd})^3$ — число частиц, участвующих в движении. Скорость U_c при пользовании формулой Леви должна определяться по формуле Кнороза (14.15).

Р. Бэгнольд построил свою формулу на связи между расходом наносов и мощностью, расходуемой потоком на перемещение твердых частиц. Этот путь применяли у нас Ю. А. Ибад-Заде и в своих поздних работах И. В. Егиазаров. Мощность, расходуемая потоком на преодоление сопротивления дна, равна $U\tau_0$. Мощность, затрачиваемая на транспорт наносов, во много раз меньше этой величины и для ее определения надо знать некоторые характеристики скачкообразного движения частиц, в частности среднюю высоту подъема частиц над дном, скорость течения на этом уровне и среднюю скорость частиц. Эти вопросы были решены Бэгнольдом с помощью экспериментальных данных. Величина $U - 5{,}75v_* \lg(0{,}37h/kd)$ есть осредненная скорость жидкости на средней высоте движения частиц kd. Частицы отстают от жидкости в среднем на величину своей гидравлической крупности w_0. Таким образом, трехчлен, заключенный в скобки, представляет скорость твердых частиц. Угол α есть угол трения между движущимися и неподвижными донными частицами.

В соответствии с физической картиной явления ведущим аргументом во всех приведенных формулах служит *касательное напряжение на дне*. Оно входит в формулы или непосредственно, или через величины $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ и $U = \frac{C}{\sqrt{g}}\sqrt{\tau_0/\rho}$. Сопро-

тивление частиц влекущей силе потока учитывается посредством составления разностей между τ_0, v_*, U и критическими значениями этих величин. Ввиду условности всех критических значений рациональность такого подхода может вызывать сомнения. В частности, этот подход делает все формулы неприменимыми к слабому транспорту наносов, когда разности $\tau_0 - \tau_{0c}$, $v_* - v_{*c}$ и $U - U_c$ становятся сравнимыми с погрешностями в определении соответственно τ_{0c}, v_{*c} и U_c. В наименьшей мере этот недостаток сказывается на результатах расчетов по формулам Мейер-Петера и Мюллера и Бэгнольда, в которые динамическая скорость входит в третьей степени (в остальных формулах показатель степени равен 4—5).

Альтернативным решением, полностью устраняющим указанный недостаток может быть замена разности $\tau_0 - \tau_{0c}$ отношением влекущей силы τ_0 к удерживающей силе веса частиц в воде, т. е. введение в формулы расхода наносов коэффициента устойчивости донных частиц. С этим решением мы встретимся в следующем пункте.

16.2. Вероятностные зависимости

Случайный характер движения влекомых частиц был впервые учтен в задаче о расходе наносов Г. Эйнштейном, последовательно предложившим в 1942 и 1950 гг. два расчетных метода. Идеи Эйнштейна получили дальнейшее развитие в работах Великанова [17, 18], оставшихся, к сожалению, незавершенными. Ниже мы ограничимся изложением двух методов Эйнштейна.

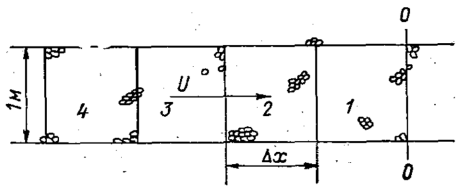


Рис. 80.

В первом методе Эйнштейна [170] исходным понятием служит вероятность P_1, что донная частица совершит за время Δt подвижку длиной Δx:

$$P_1 = P(\Delta t, \Delta x). \qquad (16.6)$$

Донные частицы считаются однородными.

Свяжем расход влекомых наносов с вероятностью P_1. Для этого вырежем на дне продольную, прямолинейную полосу шириной, равной единице, и разобьем ее на участки одинаковой длины Δx (рис. 80). Участки, расположенные вверх от створа

0—0, перенумеруем по порядку, как показано на рис. 80. Если N_d есть число частиц, лежащих одним слоем на единице площади дна, то число частиц, лежащих на площадке $1\times\Delta x$, равно $N_d\Delta x$. За время Δt створ 0—0 пересекут частицы с первой площадки в количестве $N_1 = P_1 N_d \Delta x$. Но створ 0—0 за тот же промежуток времени Δt пересекут также частицы с вышерасположенных площадок. Частицам из второй площадки для этого потребуется сделать за время Δt подвижку длиной $2\Delta x$, частицам из третьей площадки — подвижку длиной $3\Delta x$ и т. д. Согласно теореме о вероятности совместных событий, вероятность пересечь створ 0—0 за время Δt для частиц из второй площадки составит P_1^2, для частиц из третьей площадки составит P_1^3 и т. д.

Таким образом, общее число N частиц, которые пересекут створ 0—0 за время Δt, выразится геометрической прогрессией

$$N = N_1 + N_2 + \ldots = N_d \Delta x (P_1 + P_1^2 + \ldots) = N_d \Delta x \frac{P_1}{1 - P_1}. \tag{16.7}$$

Число N_d частиц, лежащих на единице площади дна, есть величина, обратная площади миделевого сечения частиц $k_1 d^2$. Поэтому формулу (16.7) можно переписать в виде

$$N = \frac{\Delta x}{k_1 d^2} \frac{P_1}{1 - P_1}. \tag{16.8}$$

Число N частиц, которые пересекают створ 0—0 за время Δt, связано с удельным расходом наносов простым соотношением

$$q_s = \frac{N k_2 d^3}{\Delta t}, \tag{16.9}$$

где $k_2 d^3$ — объем одной частицы. Исключая из уравнений (16.8) и (16.9) число N, устанавливаем в общем виде связь между расходом наносов и вероятностью P_1

$$q_s = \frac{k_2}{k_1} \frac{\Delta x}{\Delta t} d \frac{P_1}{1 - P_1}. \tag{16.10}$$

Теперь следует условиться о величинах длины Δx и времени Δt. Считая, что процесс движения наносов идет без участия вязкости, Эйнштейн принимает

$$\Delta x \sim d, \quad \Delta t \sim d\left[\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d\right]^{-1/2}. \tag{16.11}$$

Перенеся эти соотношения в формулу (16.10) и обозначая общий коэффициент пропорциональности k_3, получаем

$$q_s = k_3 \left[\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d^3\right]^{1/2} \frac{P_1}{1 - P_1}. \tag{16.12}$$

Последний шаг в теоретических рассуждениях сводится к физически обоснованной гипотезе о том, что вероятность P_1 должна быть функцией коэффициента устойчивости донных частиц

$$P_1 = f(\psi). \tag{16.13}$$

Отсюда, обозначив безразмерный расход наносов

$$q_s\left[\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) gd^3\right]^{-1/2} \equiv \varphi,$$

получаем возможность написать вместо (16.12)

$$\varphi = k_3 \frac{f(\psi)}{1 - f(\psi)}. \tag{16.14}$$

Обработав экспериментальные данные Гильберта [183] и гидравлической лаборатории в Цюрихе [207], Эйнштейн нашел: $k_3 = 2{,}17$, $f(\psi) = e^{-0{,}39\psi}$.

Окончательно формула расхода наносов имеет вид

$$\varphi = \frac{2{,}17}{e^{0{,}39\psi} - 1}. \tag{16.15}$$

При больших значениях коэффициента устойчивости $e^{0{,}39\psi} \gg 1$ уравнению (16.15) можно придать упрощенную форму

$$\varphi = 2{,}17e^{-0{,}39\psi}. \tag{16.16}$$

Графики уравнений (16.15) и (16.16) вместе с опытными точками показаны на рис. 81. В области значений $\psi > 4$ оба графика (*I* и *II*) практически совпадают, одинаково хорошо удовлетворяя опыту, хотя внимательное рассмотрение указывает на небольшую сортировку опытных точек по крупности (на это обстоятельство обращали внимание И. В. Егиазаров [45] и М. С. Ялин [248]). Что касается области малой устойчивости $\psi < 4$ (мелкие донные частицы), то хотя «точная» формула (16.15) дает здесь лучшие результаты, чем асимптотическое выражение (16.16), но и она сильно преуменьшает расход наносов. Значение $\psi = 4$ отвечает значению коэффициента подвижности $1/\xi$ около 0,5, которое, как было отмечено в п. 15, служит примерной границей между движением наносов во влекомом и в полувзвешенном состояниях. Отсюда можно заключить, что принятая Эйнштейном экспоненциальная функция $P_1 = f(\psi)$ адэкватна лишь режиму чистого влечения — движению крупных, подскакивающих частиц, а в области полувзвешенных частиц она должна быть заменена другой. Это подтвердил К. Б. Браун [159], который обработав опытные данные по мелким частицам, пришел к формуле расхода наносов очень простого вида

$$\varphi = \frac{40}{\psi^3}. \tag{16.17}$$

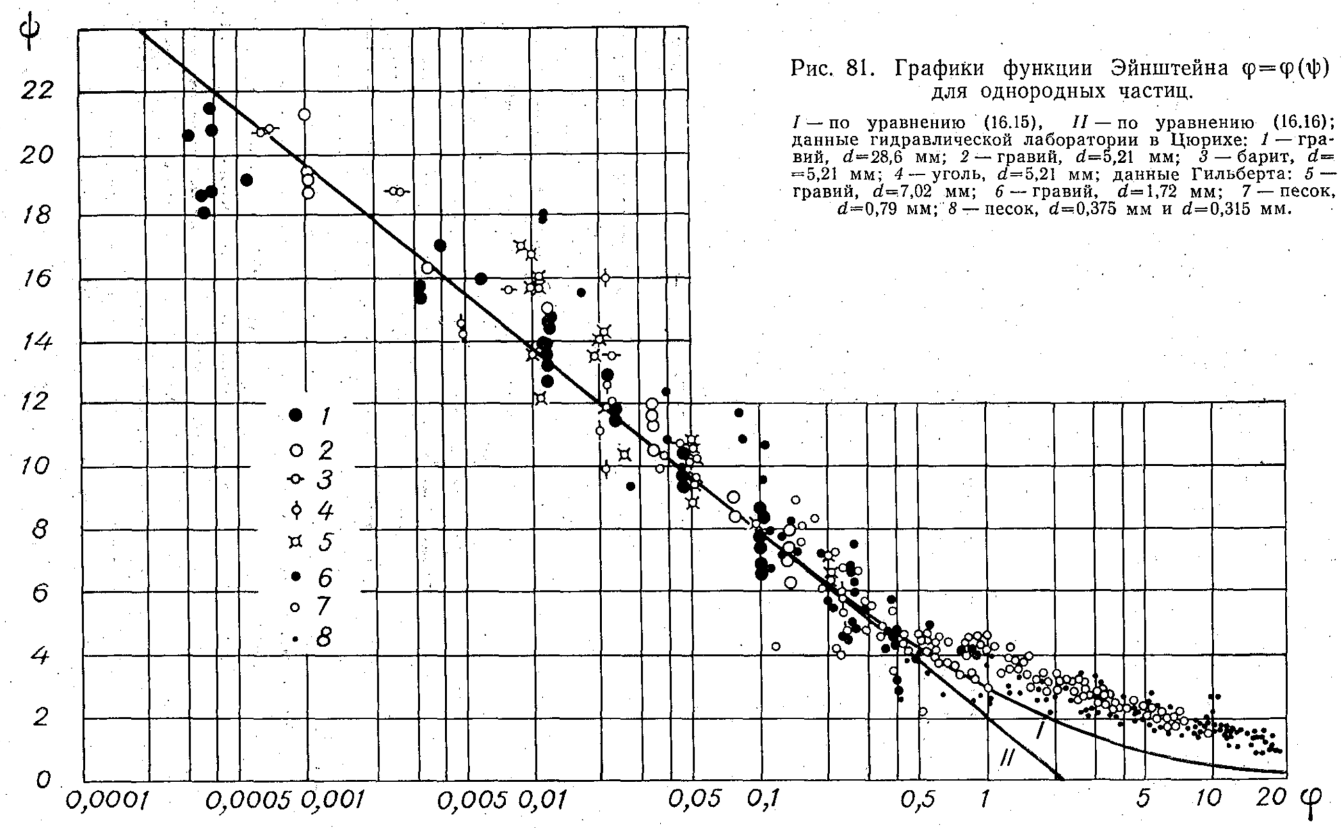


Рис. 81. Графики функции Эйнштейна $\varphi=\varphi(\psi)$ для однородных частиц.

I — по уравнению (16.15), *II* — по уравнению (16.16); данные гидравлической лаборатории в Цюрихе: *1* — гравий, d=28,6 мм; *2* — гравий, d=5,21 мм; *3* — барит, d=5,21 мм; *4* — уголь, d=5,21 мм; данные Гильберта: *5* — гравий, d=7,02 мм; *6* — гравий, d=1,72 мм; *7* — песок, d=0,79 мм; *8* — песок, d=0,375 мм и d=0,315 мм.

Соответствующая функция $f(\psi)$ записывается

$$f(\psi)=\frac{1}{\psi^3+1}. \qquad (16.18)$$

Формулой Брауна можно пользоваться в области значений $1<\psi<10$, т. е. во всей области движения наносов в полувзвешенном состоянии, а также в области их интенсивного влечения.

Во втором методе Эйнштейна [171] центральное место занимает не процесс перемещения частиц, а обмен частицами между потоком и дном. Основные положения метода следующие.

1. Наносы однородные, дно не деформируется.

2. Отсюда, среднее число N_{I} частиц, оседающих на дно, и среднее число N_{II} частиц, покидающих дно в единицу времени на единице площади, равны: $N_{\text{I}}=N_{\text{II}}$.

3. Оба числа являются функциями вероятности P_2 того, что мгновенная подъемная сила превысит действующую на частицу избыточную силу тяжести. Число $N_{\text{I}}\sim(1-P_2)$, число $N_{\text{II}}\sim P_2$.

4. Отрезок времени, необходимый в среднем для отрыва частицы от дна и замещения ее новой («время обмена»), определяется вторым из соотношений (16.11).

5. Средняя величина отношения избыточной силы тяжести к подъемной силе выражается равенством $\overline{\psi}_a=B\beta\psi$, в котором ψ — коэффициент устойчивости (7.16), β — функция отношения высоты выступов шероховатости к толщине вязкого подслоя и B — коэффициент.

6. Отклонения мгновенной подъемной силы от ее среднего значения подчиняются закону нормального распределения.

В результате формула безразмерного расхода наносов получает вид

$$\varphi=\frac{1}{A}\frac{1-P_2}{P_2}=\frac{1}{A}\left[\frac{2}{\operatorname{erf}\frac{1}{\eta_0}(B\psi_*-1)+\operatorname{erf}\frac{1}{\eta_0}(B\psi_*+1)}-1\right], \qquad (16.19)$$

где $\operatorname{erf}x$ — интеграл ошибок; η_0 — коэффициент вариации мгновенной подъемной силы; $\psi_*\equiv\beta\psi$; A и B — постоянные.

На основании опытных данных Эйнштейн нашел: $\eta_0=0{,}5$, $A=43{,}5$, $B=0{,}072$. Для функции β построен эмпирический график. Для гидравлически шероховатого дна $\beta=1{,}25$. Формула (16.19) хорошо согласуется с экспериментальными данными по транспорту однородных частиц во всем диапазоне значений модифицированного коэффициента устойчивости $25>\psi_*>1$. При умеренно неоднородном донном грунте формула (16.19) сохраняет свою силу, если, по рекомендации Эйнштейна, коэффициент ψ_* вычислять по диаметру d_{35}. Если режим сопротивления квадратичный, сохраняется и соотношение $\psi_*=1{,}25\psi$.

Если неоднородность грунта значительна, расчет расхода наносов необходимо вести по фракциям, умножая значения безразмерного расхода φ на отношение содержания данной фракции в транспортируемом материале к содержанию той же фракции в донных отложениях. Для вычисления величины ψ_* применяются специальные эмпирические графики.

Первый и особенно второй метод Эйнштейна подняли исследования расхода влекомых наносов на новую теоретическую ступень и относятся к наиболее существенным результатам из полученных по транспорту наносов в целом. К сожалению, появление этих методов не ознаменовалось каким-нибудь радикальным улучшением точности расчетов. Интересно, что пересчитав уравнение Мейер-Петера и Мюллера (16.2) в координаты Эйнштейна ψ_*, φ, Н. Чен [162] обнаружил, что графики двух функций в интервале $20>\psi_*>1$ очень близки друг к другу.

Формулы расхода наносов, приведенные в этом параграфе, применимы к относительно узкому кругу естественных потоков: к рекам, транспортирующим крупнозернистые (гравелистые и галечные) наносы при отсутствии на дне гряд. По-видимому, этими формулами допустимо пользоваться и при слаборазвитом грядовом рельефе дна, какой нередко встречается в горных и полугорных реках, однако в таких случаях значения динамической скорости должны находиться путем расчета по формулам Зегжды или Штриклера, а не по уклону свободной поверхности.

17. Донные волны

17.1. Уравнение сохранения наносов

Транспорт русловых наносов в реках и каналах с несвязными мелкозернистыми грунтами дна осуществляется преимущественно посредством движения донных волн — рифелей и гряд. Движение донных волн есть элементарный русловой процесс — простейший вид русловых деформаций. Как и во всех других случаях русловых деформаций, количественное описание явления строится на условии сохранения наносов.

Чтобы сформулировать это условие, поступим следующим образом. Проведем на поверхности дна $z_0 = z_0(x, y)$ произвольный, замкнутый, кусочно гладкий контур L и построим на нем, как на направляющей, цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси z. Объем, ограниченный этой поверхностью, дном и свободной поверхностью потока, запишется

$$V = \int_{\Omega} h \, d\Omega,$$

где Ω — площадь, ограниченная контуром L.

Составим баланс наносов для объема V. Будем пользоваться при этом плановой моделью руслового потока, т. е. будем оперировать средней на вертикали концентрацией наносов S и вектором элементарного расхода наносов $\mathbf{q}_s$:

$$S=\frac{dV_s}{h\,d\Omega}, \quad \mathbf{q}_s=hS\mathbf{W}_s,$$

где dV_s — объем твердых частиц, содержащихся в элементарном цилиндре $dV=hd\Omega$; $\mathbf{W}_s$ — вектор средней по вертикали скорости твердых частиц. Каким способом движутся наносы в объеме V, очевидно, значения не имеет.

Слагаемыми баланса наносов будут:

поток наносов через боковую цилиндрическую поверхность

$$\int_L (\mathbf{q}_s\cdot\mathbf{n})\,dL=\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{q}_s\,d\Omega,$$

приход или расход наносов за счет деформаций дна

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega z_0\,d\Omega=(1-\varepsilon)\int_\Omega\frac{\partial z_0}{\partial t}\,d\Omega,$$

интенсивность изменения объема наносов внутри объема V

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega hS\,d\Omega=\int_\Omega\frac{\partial hS}{\partial t}\,d\Omega.$$

Собирая члены баланса вместе и используя произвольность площади Ω, получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{q}_s+(1-\varepsilon)\frac{\partial z_0}{\partial t}+\frac{\partial hS}{\partial t}=0, \tag{17.1}$$

или в декартовых координатах

$$\frac{\partial q_{sx}}{\partial x}+\frac{\partial q_{sy}}{\partial y}+(1-\varepsilon)\frac{\partial z_0}{\partial t}+\frac{\partial hS}{\partial t}=0. \tag{17.2}$$

В простейшем случае осредненного движения наносов в плоскости (x, z) и малой концентрации S условие сохранения принимает вид

$$\frac{\partial q_s}{\partial x}+(1-\varepsilon)\frac{\partial z_0}{\partial t}=0. \tag{17.3}$$

Написанные уравнения обычно называют *уравнениями деформации*. Нетрудно написать уравнение деформации и в натуральных координатах, однако такая запись оправдана лишь при условии, что векторы средних на вертикали скоростей воды и твердых частиц коллинеарны.

Уравнение деформации, применимое к осевой (одномерной) модели руслового потока, можно получить, составив баланс наносов для объема, ограниченного двумя произвольными

поперечными сечениями потока, дном и свободной поверхностью. Ширина выделенного отсека потока может меняться как вследствие колебания уровней, так и в результате деформаций берегов. Учтя оба эти обстоятельства, придем к следующему уравнению:

$$\frac{\partial Q_s}{\partial l}+(1-\varepsilon)\left(B\frac{\partial z'}{\partial t}-\frac{\partial \omega}{\partial t}+q_s'\right)+\frac{\partial \omega S}{\partial t}=0. \qquad (17.4)$$

Здесь Q_s — полный твердый расход потока; q_s' — интенсивность поступления грунта с надводных береговых откосов, S — средняя концентрация наносов в живом сечении, остальные обозначения известны. Грунт, обрушающийся с надводных откосов, уменьшает сечение потока. У развитых излучин он нередко компенсирует размыв подводной части берегового склона. Если высота уровня не меняется, берега не деформируются и концентрация наносов мала, получаем вместо (17.4) простое уравнение

$$\frac{\partial Q_s}{\partial l}-(1-\varepsilon)\frac{\partial \omega}{\partial t}=0. \qquad (17.5)$$

Математически, оно лишь знаком и постоянным множителем перед вторым членом отличается от уравнения сохранения жидкости при неустановившемся движении ее в открытом русле.

17.2. Образование донных волн

Образование волн на поверхности подвижного дна родственно кругу явлений гидродинамической неустойчивости, известному под названием «неустойчивости Гельмгольца» [12]. Однако тот факт, что взаимодействующими средами являются не две жидкости, а жидкость и сыпучее тело, придает процессу особые черты: образующиеся волны с самого начала получают асимметричный продольный профиль, перемещение их вниз по потоку совершается за счет движения лишь поверхностного слоя твердых частиц и вследствие этого всегда очень медленно, жидкие вихри локализуются за тыловыми скатами волн и становятся статистически стационарными.

В соответствии с определением А. М. Ляпунова, мы считаем движение устойчивым, если после наложения на него малых возмущений оно остается мало отличающимся от исходного. Если с течением времени возмущенное движение будет отходить от исходного как бы малы ни были начальные возмущения, движение неустойчиво. В гидродинамике основным средством исследования движений на устойчивость служит метод малых колебаний. По этому методу начальные возмущения задаются в форме периодических функций координат пространства и времени. Каждый из элементов $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots, y_n$ воз-

мущенного движения (компонента скорости, высота свободной поверхности, высота дна и т. д.) представляется в виде суммы значений y_{k0} этого элемента в исходном невозмущенном движении и наложенного возмущения:

$$y_k = y_{k0} + y'_k, \quad y'_k \ll y_{k0}. \tag{17.6}$$

Уравнения возмущенного движения линеаризуются — в них отбрасываются все члены, содержащие произведения малых величин y'_k, а значит и все члены с величинами y'_k в степени выше первой. Чтобы облегчить расчеты, величины возмущений считают комплексными.

Большинство решенных задач относится к плоским движениям жидкости. Величина возмущения записывается при этом в виде

$$y' = a\,[\cos k\,(x - ct) + i \sin k\,(x - ct)], \tag{17.7}$$

или, что более удобно,

$$y' = a \exp\,[ik\,(x - ct)]. \tag{17.8}$$

В этих формулах $a = a_r + ia_i$ — комплексная амплитуда, по предположению, малая, $k \equiv 2\pi/\lambda$ — волновое число, $c = c_r + ic_i$ — комплексная скорость распространения волн. Физическое значение имеют, конечно, только вещественные части амплитуды a и скорости c. Раскрыв в формуле (17.8) обозначение скорости c, получим

$$y' = a \exp\,\{k\,[i\,(x - c_r t) + c_i t]\}. \tag{17.9}$$

Из уравнения (17.9) следует, что вопрос об устойчивости исходного невозмущенного движения решается знаком мнимой части комплексной волновой скорости. Если $c_i > 0$, возмущение будет с течением времени экспоненциально нарастать — исходное движение окажется неустойчивым. Если $c_i < 0$, возмущение будет экспоненциально затухать — исходное невозмущенное движение устойчиво. При $c_i = 0$ будем иметь нейтральные волны — не нарастающие и не затухающие.

Знак величины c_i определяется в результате подстановки выражения

$$y = y_0 + y' = y_0 + a \exp\,[ik\,(x - ct)]$$

в линеаризованное уравнение возмущенного движения. Важную роль при этом играет инвариантность показательной функции по отношению к операции дифференцирования. В силу этого свойства величина $\exp\,[ik(x - ct)]$ оказывается общим множителем всех членов линеаризованного уравнения и сокращается. Остающееся уравнение — дифференциальное или алгебраическое дает возможность определить c, а значит и c_i. В большинстве случаев оказывается, что неустойчивость развивается лишь

в определенном интервале длин волн λ, а вне этого интервала движение устойчиво.

Первая работа, в которой метод малых колебаний был применен к задаче о начальной устойчивости подвижного дна, принадлежит Д. Картрайту [161], исследовавшему формирование гряд на морском дне под действием ливных течений. Начиная с 1963 г., появился ряд работ, в которых методом малых колебаний было исследовано образование волн на дне русловых потоков. Основное значение в этом ряду имели работы Дж. Ф. Кеннеди [195, 196], А. Рейнольдса [221] и Ф. Энгелунда [177]. Подробный обзор работ по начальной устойчивости дна русловых

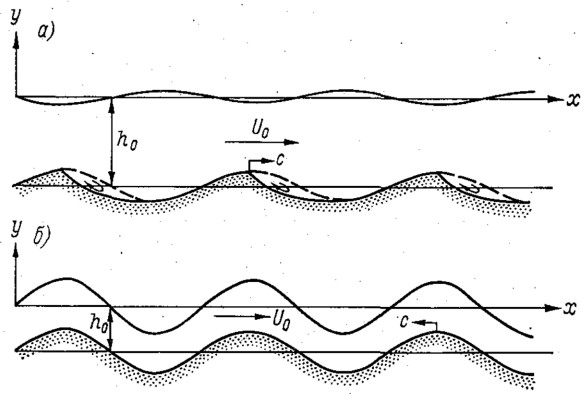


Рис. 82. Синусоидальные возмущения дна и свободной поверхности.

а — гряды, *б* — антидюны.

потоков, опубликованных до 1974 г., содержится в книге автора [33]. Здесь мы изложим лишь главные полученные результаты.

Следуя Кеннеди, рассмотрим плоский, потенциальный поток идеальной жидкости в открытом русле. Продольную ось x расположим в плоскости невозмущенной свободной поверхности, ось y направим от этой плоскости вверх (рис. 82). Начальным состоянием потока является равномерное движение с глубиной h_0, скоростью U_0 и числом Фруда $\mathrm{Fr}_0 = U_0^2/gh_0$.

Наложим на поверхность дна малое периодическое возмущение

$$\eta(x, t) = a(t)\sin k(x - ct), \quad a \ll h_0. \tag{17.10}$$

При этом на свободной поверхности возникнет периодическое возмущение $\xi(x, t)$ с амплитудой $A \gtrless a$. Скорость течения вдоль оси x изменится на малую величину u и, кроме того, появится ненулевая вертикальная компонента скорости v. Введя

потенциал скорости возмущенного движения φ, можем представить компоненты скорости в виде

$$U_0+u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{17.11}$$

Поставив требования, чтобы потенциал φ удовлетворял двумерному уравнению Лапласа (т. е. условию неразрывности), кинематическим граничным условиям на дне и свободной поверхности, а на последней также условию постоянства давления и воспользовавшись некоторыми результатами теории волн малой амплитуды, можно прийти к следующему выражению:

$$\varphi=U_0x+A(t)\,U_0\left(\frac{\operatorname{ch} ky}{\mathrm{Fr}_0\,kh_0}+\operatorname{sh} ky\right)\cos k(x-ct). \tag{17.12}$$

Из уравнения (17.12) и выражения для функции тока возмущенного движения, которое мы опускаем, следует формула связи между амплитудами донных и поверхностных волн

$$a(t)=A(t)\left(1-\frac{\operatorname{th} kh_0}{\mathrm{Fr}_0\,kh_0}\right)\operatorname{ch} kh_0. \tag{17.13}$$

Если $\mathrm{Fr}_0 > \operatorname{th} kh_0/kh_0$, донные и поверхностные волны находятся *в фазе*, если $\mathrm{Fr}_0 < \operatorname{th} kh_0/kh_0$, две системы волн находятся *в противофазе* (рис. 82). Донные волны, отвечающие первому случаю, Кеннеди назвал *антидюнами*, отвечающие второму случаю — *грядами*.

Поставим теперь вопрос, имеющий кардинальное значение для всего анализа устойчивости: каким образом может расти во времени амплитуда донных (а значит и поверхностных) волн? К постановке этого вопроса нас обязывает уравнение деформации (17.3) и известный факт прямой и тесной связи расхода наносов со скоростью течения. Если расход наносов следует за скоростью, а скорость меняется обратно изменению глубин, то на гребнях и во впадинах донных волн производная dq_s/dx будет равна нулю и значит высота гребней и впадин не будет меняться. Впервые это обнаружил Ф. Экснер [179]. Введя в уравнение деформации линейную зависимость расхода наносов от средней скорости, он получил, что синусоидальное возвышение дна с течением времени смещается вниз по потоку, смещаясь перекашивается, но сохраняет начальную амплитуду. Чтобы иметь донные волны, изменяющие свою высоту во времени, необходимо предположить, что *расход наносов, изменяясь вдоль волнообразной линии дна, отстает от изменения средней скорости*

$$q_s(x)=q_s(U_0+u)_{x-\delta x}. \tag{17.14}$$

Гидродинамические соображения и некоторые экспериментальные данные позволяют заключить, что сдвиг фазы δx обусловлен перераспределением скоростей на вертикали при

неравномерном движении воды по волнообразному дну. При некоторых профилях волн (в частности, при синусоидальном) максимум донной скорости и с ним максимум расхода влекомых наносов располагаются на расстоянии δx вверх по потоку от максимума средней скорости (гребня волны). В начальной стадии образования волн допустимо считать, что их профили подобны и, значит, сдвиг δx есть линейная функция длины волны

$$\delta x = \alpha\lambda = \alpha\frac{2\pi}{k}. \qquad (17.15)$$

В соответствии с общим соотношением (17.14) Кеннеди придал формуле расхода наносов следующий вид:

$$q_s(x, t) = (1-\varepsilon)\, n\,[U_0 - U_c + u(x-\delta x, -h_0, t)]^m, \qquad (17.16)$$

где U_c — неразмывающая скорость; n и m — постоянные. Разложив правую часть (17.16) в биномиальный ряд, нетрудно получить линеаризованную формулу расхода наносов со скоростью u в первой степени. Подставляя линеаризованное выражение q_s в уравнение деформации и используя уравнения (17.10), (17.12) и (17.13), получаем формулу для фазовой скорости и далее выражение для амплитуды донных волн $a(t)$, имеющее экспоненциальный вид. Положительные значения экспонента отвечают росту волн (неустойчивости дна), отрицательные — затуханию волн (устойчивости дна). С учетом поправки, внесенной в построения Кеннеди Рейнольдсом, условия развития донных волн получают следующий вид:

для антидюн

$$\frac{\operatorname{th} kh_0}{kh_0} < \mathrm{Fr}_0 < \frac{\operatorname{cth} kh_0}{kh_0}, \qquad (17.17)$$

для гряд

$$\mathrm{Fr}_0 < \frac{\operatorname{th} kh_0}{kh_0}, \qquad (17.18)$$

причем в первом случае $0 < k\delta x < \pi$, во втором $\frac{3}{2}\pi < k\delta x < 2\pi$. Равенство

$$\operatorname{th} kh_0 = \mathrm{Fr}_0\, kh_0 \qquad (17.19)$$

определяет на плоскости переменных kh_0, Fr_0 границу между областями существования гряд и антидюн.

Чтобы определить длину реально формирующихся волн и довести, тем самым, решение до конца, надо выделить из множества нарастающих возмущений возмущения с наибольшей начальной скоростью роста. Это легко сделать продифференцировав функцию $a(t)$ и приравняв результат нулю при $t = 0$. При учете равенства (17.15) решение имеет вид

$$\mathrm{Fr}_0 = \frac{\operatorname{ch}^2 kh_0}{kh_0\,(\operatorname{sh} 2kh_0 + kh_0)}. \qquad (17.20)$$

Формула (17.20) определяет длину волн *доминирующих возмущений.* Как видно из формулы (17.20), при данной глубине и скорости потока эта длина имеет единственное значение. Тем самым решенной оказывается проблема, долгое время приводившая в замешательство исследователей русловых потоков: каким образом непрерывный, широкий спектр турбулентных пульсаций приводит к образованию квазипериодических донных волн? Ответ, который мы теперь имеем, говорит, что в силу спе-

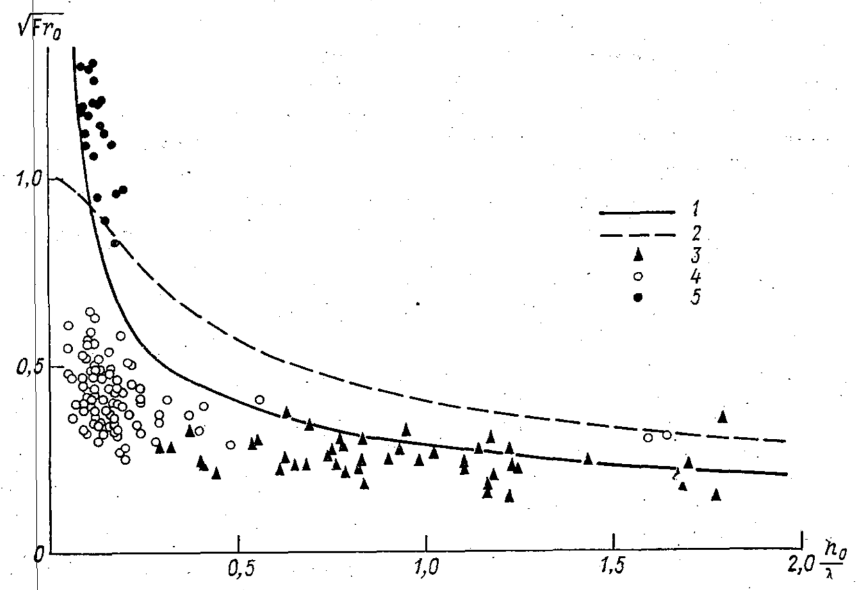


Рис. 83.

1 — график уравнения (17.20); *2* — граница между областями гряд и антидюн по (17.19); точки опытов: *3* — рифели, *4* — гряды, *5* — антидюны.

цифических свойств системы поток—русло эта система по-разному реагирует на возмущения с разной длиной волн — *эта система обладает избирательной способностью.*

На рис. 83 кривая, построенная по формуле Кеннеди (17.20) в осях h_0/λ, $\sqrt{Fr_0}$, сопоставлена с опытными данными Г. Гая, Д. Саймонса и Э. Ричардсона [186]. Известно, что переход от начальных возмущений дна к донным волнам конечной амплитуды сопровождается изменением длин волн. По мере своего развития волны, обтекаемые с отрывом потока — гряды и рифели, увеличивают свою длину, безотрывно обтекаемые антидюны уменьшают. Так как в опытах фиксировались размеры развитых донных волн, то кривая, дающая длины волн с наибольшей начальной скоростью роста, должна служить для

опытных точек огибающей. На рис. 83 видно, что это так и есть. Точки, относящиеся к грядам и рифелям, в подавляющем большинстве располагаются влево от теоретической кривой, точки, относящиеся к антидюнам, все лежат вправо от кривой.

Ф. Энгелунд выполнил анализ устойчивости подвижного дна с помощью модели плоского турбулентного потока при квадратичном режиме сопротивления, дополнительно предполагая, что наносы движутся как во влекомом, так и во взвешенном состоянии. Уравнение, полученное Энгелундом для комплексной скорости распространения возмущений допускает только численное решение и результаты расчетов для нескольких характерных случаев представлены им в виде графиков. Эти графики показывают, что учет сил трения не отменяет результаты, полученные с помощью модели потенциального движения, но позволяет детализировать условия устойчивости. В частности, длина волн доминирующих возмущений оказывается зависящей не только от глубины и скорости потока, но также от сопротивления дна и подвижности донных частиц. Один из принципиальных результатов Энгелунда, хорошо согласующийся с опытом, состоит в том, что если все наносы движутся во взвешенном состоянии, единственным возможным видом донных волн являются антидюны. Построенное Энгелундом для этого случая семейство кривых нейтральной устойчивости с параметром v_{*c}/w_0 имеет своими огибающими границы области развития антидюн, установленные Кеннеди и Рейнольдсом (см. неравенство (17.17)).

В сложной картине образования на песчаном дне периодических структур остается объяснить, вследствие чего структуры, возникающие в условиях спокойного течения — рифели и гряды, с самого начала приобретают характерный асимметричный профиль с пологим напорным и крутым тыловым скатом. Вопрос этот лежит за границами возможностей метода малых колебаний. Читатель, вероятно, заметил, что в схеме Кеннеди синусоидальная донная линия тока оконтуривает тело гряды вместе с вихревой зоной на тыловом скате (рис. 82 *а*).

Чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо обратиться к конкретным агентам возмущений дна, какими в спокойном русловом потоке могут быть только турбулентные вихри. Так как ищется в основном качественное решение задачи, заменим реальный турбулентный поток простой моделью плоского потенциального течения с цепочкой вихревых точек, движущихся вдоль поверхности дна. В начальный момент времени $t = 0$ дно будем считать плоским. Ось x направим по потоку, ось y — от дна вверх. Расстояние вихрей от дна обозначим $\delta/2$, расстояние вихрей друг от друга (шаг цепочки) — λ. Положив, что расстояние $\delta/2$ мало по сравнению с глубиной потока, можем свести картину течения к сумме двух движений жидкости: однородного течения со скоростью U_0 и течения, возбуждаемого

вихревой цепочкой вблизи дна бесконечно глубокого водоема. Комплексный потенциал суммы течений имеет вид [80, с. 209]

$$F(z)=U_0 z+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{\sin\frac{\pi}{\lambda}(z-z_2)}{\sin\frac{\pi}{\lambda}(z-z_1)}, \qquad (17.21)$$

где z_1 и z_2 — комплексные координаты реального и отраженного вихрей 1 и 2, принимаемых за основные; Γ — модуль интенсивности вихрей (рис. 84).

В системе координат, перемещающейся вместе с вихрями: $x'=x-c_v t$, $y'=y$ (где $c_v=U_0-c$ — скорость вихрей относительно дна и c — их скорость в жидкости, покоящейся на бес-

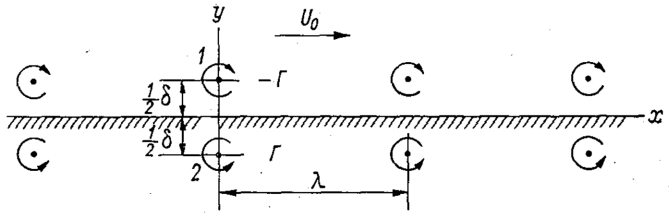


Рис. 84.

конечности), будем иметь комплексный аргумент $z'=x'+iy'$. Дифференцируя потенциал $F(z')$ по z', выделяя в выражении комплексной скорости вещественную часть, приравнивая в ней $y=0$ и возвращаясь к системе координат, связанной с руслом, получаем следующую формулу скорости на линии дна:

$$u(x,\,0,\,t)=U_0-\frac{\Gamma}{\lambda}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\delta}{\lambda}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\delta}{\lambda}-\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-c_v t)}. \qquad (17.22)$$

Для определения деформации дна под действием скорости $u(x,\,0,\,t)$ воспользуемся уравнением (17.3). Так как в начальной стадии деформации превышение донной скорости над ее критическим значением u_c невелико, примем для расхода наносов линейную зависимость

$$q_s=m(1-\varepsilon)d(u-u_c), \qquad (17.23)$$

где m — коэффициент. Имея дело с начальной деформацией будем пренебрегать, кроме того, обратным влиянием формы дна на поле скоростей. Это дает нам право подставить в (17.23) выражение (17.22) без изменения и перенести результат

в уравнение деформации (17.3). Обозначив высоту поверхности дна y_0, получим уравнение деформации в следующем виде:

$$\frac{md}{1-\varepsilon}\frac{2\pi\Gamma}{\lambda^2}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\delta}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-c_v t)}{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi\delta}{\lambda}-\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-c_v t)\right]^2}+\frac{\partial y_0}{\partial t}=0. \qquad (17.24)$$

Интегрирование уравнения (17.24) по t при начальном условии плоского дна $y_0(x, 0)=0$ дает уравнение мгновенного профиля дна *для малых значений t*

$$\frac{1-\varepsilon}{m}\frac{\lambda c_v}{\Gamma}\frac{y_0}{d}=$$

$$=\operatorname{sh}\frac{\pi\delta}{\lambda}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi\delta}{\lambda}-\cos\frac{2\pi x}{\lambda}}-\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi\delta}{\lambda}-\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-c_v t)}\right]. \qquad (17.25)$$

Безразмерные профили дна, построенные по уравнению (17.25) для трех последовательных моментов времени при $\delta/\lambda=0{,}4$, представлены на рис. 85. Перед нами характерные асимметричные контуры песчаных гряд. В действительности это

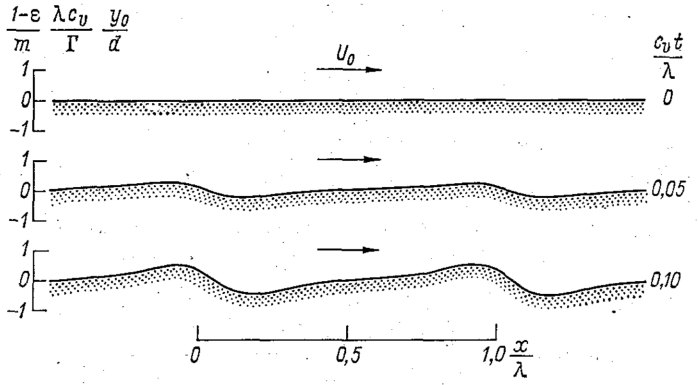


Рис. 85. Образование гряд под действием цепочки вихрей.

«зародыши» гряд, несущие, однако, в себе их будущую форму. Анализ уравнения (17.25) показывает, что эта характерная форма возникает в определенном диапазоне значений отношения δ/λ — приблизительно от 0,3 до 0,6. При малых значениях δ/λ гряды, сохраняя асимметричный профиль, разобщаются, между ними появляются участки почти горизонтального дна. При $\delta/\lambda > 0{,}6$ гряды симметризуются.

Приведенное гидромеханическое исследование позволяет сделать следующее заключение. Асимметричная форма, которую рифели и гряды приобретают при своем образовании, есть следствие *особого распределения скоростей в окрестности вихря*,

движущегося вблизи твердой поверхности. Формирование правильной последовательности донных волн требует, чтобы расстояние между смежными вихрями изменялось в определенных, довольно узких пределах. Это косвенно подтверждается тем опытным фактом, что отношение длин зарождающихся волн к глубине потока представляет собой слабо колеблющуюся величину. Это качественно согласуется и с концепцией доминирующих возмущений в теории Кеннеди.

Асимметричная форма начальных возмущений дна приводит к образованию локализованных вихрей за тыловыми скатами волн. Возникнув, локализованные вихри способствуют дальнейшему росту волн, а рост волн ведет к усилению интенсивности вихрей. Предел этому развитию кладется конечной глубиной потока [1].

Процесс формирования рифелей и гряд экспериментально исследовался Н. А. Михайловой [93], Х. Лю [203], А. Дж. Родкиви [219], Ф. Райхленом и Дж. Кеннеди [218], М. С. Ялиным [249], С. Джейном [194]. Н. А. Михайлова, наряду с промерами и визуальными наблюдениями, пользовалась замедленной киносъемкой. По данным экспериментов, начальные длины волн составляют от половины глубины до полутора—двух глубин. В ходе дальнейшего развития, прежде чем стать статистически стабильными волны увеличивают свою длину в два-три раза. Значительный интерес представляют построенные Михайловой [94] кривые плотности распределения длин волн на разных этапах развития. Кривые показывают, что *наиболее правильную периодичность волны имеют при своем образовании.* В дальнейшем это было подтверждено и другими исследователями.

Образование донных волн в натуре можно наблюдать либо в период их восстановления после смыва, происшедшего на пике паводка, либо в дноуглубительной прорези, где в результате работы снаряда ранее существовавший волнообразный рельеф дна бывает уничтожен. Более удобная вторая возможность была реализована Б. Ф. Снищенко [124]. Выполнив с помощью эхолота несколько серий продольных промеров в семи прорезях на четырех больших судоходных реках, он получил картину, качественно сходную с той, которая наблюдается в лабораториях: развиваясь, волны увеличивают свою длину и высоту, процесс сначала идет быстро, а затем затухает. Различие состоит в том, что результатом развития в лабораторном лотке обычно являются рифели, а в реке гряды. На рис. 86 показано постепенное формирование грядового рельефа дна в прорези на р. Дон. Введя безразмерную потерю судоходной глубины

[1] Роли вихрей в формировании донных волн уделено значительное место в монографии Б. А. Шуляка [150]. К сожалению, в эту интересную и оригинальную работу вошли неправильные представления о нулевой начальной длине волн и сохранении ими в процессе роста постоянной крутизны.

gy/v_*^2 безразмерную высоту гряд gh_r/v_*^2 и безразмерное время v_*t/h, Снищенко на основании своих измерений получил универсальный график, представленный на рис. 87. Динамическая

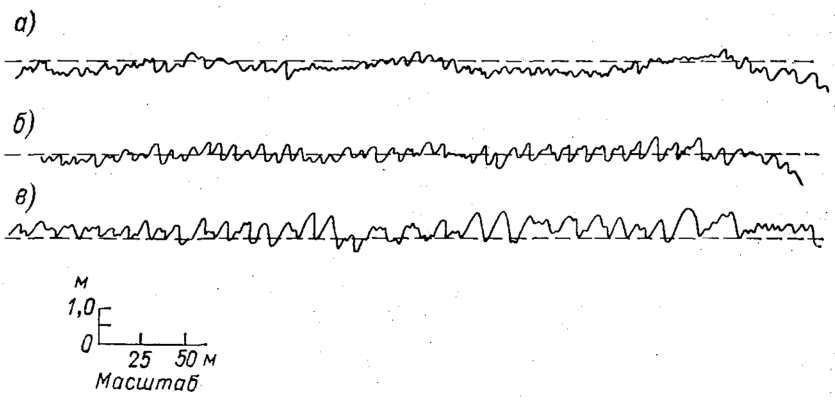


Рис. 86. Развитие гряд в дноуглубительной прорези на р. Дон (по Снищенко).

а — 12/IX 1961 г., *б* — 26/IX 1961 г., *в* — 5/XI 1961 г.

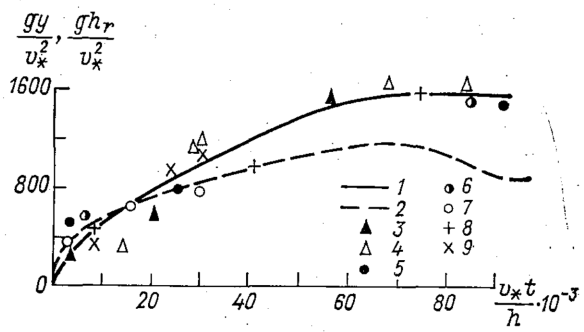


Рис. 87. График роста гряд в дноуглубительных прорезях (по Снищенко).

1 — полная потеря глубины, *2* — высота гряд; точки натурных измерений: *3* — р. Волга, прк. приверх Саралевского о-ва, *4* — р. Волга, прк. С. Солодниковский, *5* — р. Дон, прк. Соленый Яр, *6* — р. Дон, прк. Кагальницкий, *7* — р. Б. С. Двина, прк. Хаврогорский, *8* — р. Вычегда, прк. Н. Мунтасский, *9* — р. Вычегда, прк. Суходольский.

скорость определялась по фактическому уклону свободной поверхности и отражает, таким образом, полное сопротивление дна. Уровни во время измерений колебались мало и глубина в прорези, использованная при вычислении v_*, изменялась преимущественно за счет изменения высоты дна.

17.3. Квазиустановившееся движение гряд и рифелей

Под квазиустановившимся движением гряд и рифелей понимается движение, при котором все статистические характеристики донного рельефа, в частности, средняя высота и средняя длина гряд или рифелей не зависят от времени. В более точной формулировке, это движение, образующее стационарный случайный процесс с эргодическим свойством. Оно, очевидно, возможно лишь в том случае, если движение воды за вычетом флуктуаций, вызванных донными волнами, является установившимся и равномерным.

В прямолинейных потоках с большим отношением ширины к глубине движение гряд допустимо считать плоским. Высота дна z_0 будет при этом функцией двух переменных: x и t. Взяв на мгновенной линии дна произвольную точку, напишем полный дифференциал ее высоты

$$dz_0=\frac{\partial z_0}{\partial x}dx+\frac{\partial z_0}{\partial t}dt. \tag{17.26}$$

Если высоту z_0 фиксировать и следить далее за перемещением точки с этой высотой вдоль потока, будем иметь $dz_0=0$, или

$$\frac{\partial z_0}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z_0}{\partial t}=0. \tag{17.27}$$

Исключив производную dz_0/dt с помощью уравнения деформации (17.3) и обозначив скорость точки $\frac{dx}{dt}\equiv c_{z_0}$, получим

$$\left(\frac{\partial q_s}{\partial x}\right)_{z_0}=(1-\varepsilon)\,c_{z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x}. \tag{17.28}$$

За достаточно малый, конечный интервал времени Δt изменениями формы гряд можно пренебрегать. Это значит, что $c_{z_0}=c_r=\text{const}$ и уравнение (17.28) имеет следующий общий интеграл:

$$q_s=(1-\varepsilon)\,c_r z_0+F(t). \tag{17.29}$$

Расход наносов, движущихся в форме гряд, обращается в нуль в наинизшей точке дна. Расположив начало оси z в горизонтальной плоскости, проходящей через эту точку, найдем, что произвольная функция $F(t)$ равна нулю и, следовательно,

$$q_s=(1-\varepsilon)\,c_r z_0, \tag{17.30}$$

если гряды перемещаются не деформируясь, расход наносов меняется по их длине, как высоты их профиля.

Средний расход наносов, переносимых отдельной грядой, получим, интегрируя уравнение (17.30) по длине гряды

$$q_{sr}=\frac{(1-\varepsilon)\,c_r}{l_r}\int_0^{l_r} z_0(x)\,dx=(1-\varepsilon)\,c_r\frac{\omega_r}{l_r}=(1-\varepsilon)\,\sigma c_r h_r, \qquad (17.31)$$

где ω_r — площадь продольного сечения; l_r — длина; h_r — высота гряды; $\sigma\equiv\omega_r/h_r l_r$ — коэффициент полноты профиля гряды (рис. 88). Значения коэффициента σ лежат в пределах 0,50—0,75.

Формула (17.31) служит основой известного способа определения расхода влекомых наносов по элементам движения гряд. Применяя этот способ, необходимо производить промеры эхолотом по продольным галсам, на длине которых разме-

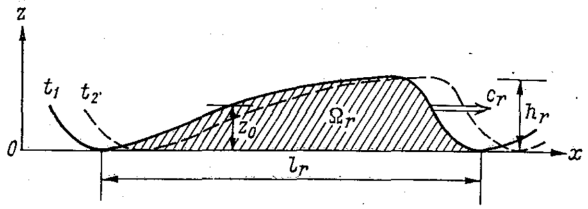


Рис. 88.

щается не менее 20—30 гряд. Средний расход наносов на длине галса находится путем осреднения расходов отдельных гряд

$$q_s=\frac{1}{\sum_1^n l_{ri}}(q_{sr1}l_{r1}+q_{sr2}l_{r2}+\ldots+q_{srn}l_{rn}). \qquad (17.32)$$

Если гребни гряд расположены нормально к потоку и наносы на гребнях не взвешиваются, то этот способ определения расхода влекомых наносов дает более надежные результаты, чем измерения с помощью донных батометров.

В различных лабораториях мира было произведено много опытов с целью установить связи между главными характеристиками плоских гряд — их средней высотой, средней длиной, средней скоростью, с одной стороны, и параметрами потока и наносов, с другой. Эксперименты, а также натурные наблюдения показывают, что высота и длина гряд связаны прямой зависимостью с глубиной потока. В области значений относительной зернистой шероховатости дна $d_{50}/R\leqslant 10^{-3}$ связь между размерами гряд и крупностью донных частиц не прослеживается. При переходе шероховатости за указанный условный предел гряды становятся короче и круче. Скорость движения гряд быстро растет со скоростью течения.

Ниже приводятся эмпирические формулы высоты, длины и скорости плоских гряд, полученные В. С. Кнорозом [70] на основании опытов с песком и мелким гравием ($d > 0{,}5$ мм):

$$\frac{h_r}{R} = 3{,}5\left(1 - \frac{U_c}{U}\right)^{2/3}\left(\lg\frac{R}{d} + 6\right)^{-1}, \tag{17.33}$$

$$\frac{l_r}{R} = 2{,}8\left(1 - \frac{U_c}{U}\right)^{-1}, \tag{17.34}$$

$$\frac{c_r}{\sqrt{gd}} = 0{,}425\left(\frac{U - U_c}{\sqrt{gR}}\right)^{2{,}5}. \tag{17.35}$$

Формулы действительны до значений скорости течения $U = 2{,}5 \div 2{,}7U_c$, при которых начинается смыв гряд. Применяя формулы (17.33) и (17.34) к широкому потоку, у которого гидравлический радиус не отличается от средней глубины, найдем, что при обычных для рек значениях отношения $U/U_c \approx 1{,}2 \div 2{,}0$ высота гряд составляет $(0{,}1 \div 0{,}25)h$, а длина $(6 \div 17)h$. Эти оценки хорошо согласуются с размерами гряд, формирующихся в равнинных реках при стабильных уровнях воды. Колебания уровней вызывают переформирования гряд и поскольку переформирования идут обычно медленнее, чем колеблются уровни, то связи между размерами гряд и параметрами потока оказываются в реках неоднозначными (см. п. 17.4).

Б. Ф. Снищенко и З. Д. Копалиани [130], использовав обширные натурные и лабораторные данные, получили недавно более универсальную и содержательную, чем (17.35), зависимость для скорости движения гряд

$$\frac{c_r}{U} = 0{,}019\mathrm{Fr}^{1{,}45}. \tag{17.36}$$

Согласно формуле (17.36), скорость гряд пропорциональна скорости потока в степени примерно 4 и не зависит от крупности перемещаемого материала. Последнее обстоятельство тем более интересно, что данные, использованные при получении формулы (17.36), включают гряды в горных потоках с числами $\mathrm{Fr} > 1$ и галечным составом донных частиц. Отношение c_r/U в таких потоках достигает порядка 10^{-2}. В равнинных реках с числами $\mathrm{Fr} = 0{,}01 \div 0{,}10$ это отношение имеет порядок 10^{-5}—10^{-4}. На основании ограниченного круга лабораторных опытов формула, отличающаяся от (17.36) лишь значениями численных констант, была предложена ранее Д. Кондепом и Р. Гарде [197].

Как уже отмечалось, движение гряд в равномерном потоке представляет стационарный случайный процесс. Экспериментальные оценки параметров этого процесса свидетельствуют

о довольно высокой изменчивости элементов движения. Так, в опытах Кнороза коэффициент вариации высот гряд составил 0,36, длин гряд 0,32 и скоростей 0,54.

К. Ф. Нордин и Дж. Х. Алджерт [213], обработав снятые эхолотом продольные профили $z_0(x)$ грядового дна в лабораторных лотках и небольшом канале, построили двухточечные корреляционные функции и функции спектральной плотности высот дна. Корреляционная связь между высотами дна в точках, разделенных расстоянием $\zeta = x - x_0$, оказалась достаточно тесной, пока ζ не превосходит приблизительно $\frac{1}{4} l_r$. На расстояниях, превосходящих длину гряды, корреляция практически отсутствует. Такой же результат был получен ранее Михайловой [94].

Взяв в качестве репрезентативной высоты гряд среднее значение высот одной трети наиболее высоких гряд, Нордин и Алджерт получили соотношение

$$(h_r)_{1/3} = 3\sqrt{\sigma_{z_0}^2}, \tag{17.37}$$

где $\sigma_{z_0}^2$ — стандарт отклонений высот дна от его средней плоскости. Репрезентативная высота гряд $(h_r)_{1/3}$ оказалась связанной линейной зависимостью с удельным расходом воды.

М. Хино [187] высказал гипотезу, что высоты гряд, принадлежащие к мелкомасштабной области спектра, не должны зависеть от глубины и средней скорости потока. Это значит, что в спектре высот гряд должен существовать *инерционный интервал*, подобный инерционному интервалу в спектре турбулентных пульсаций. Используя соображения размерности, Хино получил следующее выражение для спектральной плотности высот гряд в инерционном интервале:

$$\varphi(k) = f(\alpha)(2\pi)^3 k^{-3}, \tag{17.38}$$

где k — волновое число, α — угол внутреннего трения грунта. Практически $f(\alpha) = \text{const}$. На основании экспериментальных данных эта постоянная определена равной $2{,}8 \cdot 10^{-4}$. «Закон минус трех», так же как «закон пяти третей» в спектре турбулентности, простирает свое действие на смежный участок области малых волновых чисел. По данным Хино, нижняя граница применимости формулы (17.38) определяется волновым числом $k \approx 0{,}95 h^{-1}$, т. е. длиной гряд $l_r \approx 7h$.

С. Джейн и Дж. Кеннеди [194], использовав модель потенциального течения идеальной жидкости и введя, так же как в работе Кеннеди [195], сдвиг δx между изменением расхода наносов и изменением скорости течения, получили теоретическое выражение спектра высот донных волн $\varphi(k, t)$, которое

дает для квазистационарных волн соотношение (17.38), если волновые числа k достаточно велики. Это соотношение хорошо подтвердили и опыты Джейна. Таким образом, «закон минус трех» можно считать установленным.

Развившийся под действием течения грядовый рельеф дна оказывает сильное обратное влияние на кинематику потока. По длине напорного ската гряды — от конца водоворотной зоны до гребня — средняя скорость растет и параллельно с этим меняет свой вид профиль осредненных скоростей. Из крайне неравномерного в конце водоворота он превращается в весьма выравненный на гребне гряды. Такая трансформация означает, что *донная скорость растет на напорном скате быстрее средней*. Ее максимум или совпадает с максимумом средней скорости, т. е. приходится на гребень гряды, или наступает несколько раньше. В последнем случае гряда растет вверх. Б. Ф. Снищенко и др. [129], измерив скорости над песчаной грядой в русле р. Полометь, нашли, что в то время, как средняя скорость увеличивалась по длине напорного ската в 1,14 раза, скорость на высоте $0{,}1h$ над дном возрастала в 2 раза. Высота гряды была равна $0{,}27h$. Касательное напряжение на дне пропорционально квадрату донной скорости. В опытах А. Родкиви [219] с искусственными жесткими грядами высотой $0{,}1h$ касательное напряжение на гребне гряды было больше среднего на напорном скате в 1,75 раза.

Однако наиболее сильное возмущение потока происходит на участке тылового ската и подвалья гряды, где течение отрывается от дна. Здесь сосредоточены главные потери энергии и резко повышается уровень турбулентности. Как во всех случаях отрывных течений, максимальная интенсивность турбулентности наблюдается в области смешения, т. е. в окрестности линии нулевых осредненных скоростей. Зарождающиеся здесь вихри вовлекаются в поток и способствуют общему повышению его турбулентности. Высокий уровень турбулентности наблюдается и у дна на участке безотрывного движения за водоворотом. По опытам В. С. Кнороза [71] с искусственными жесткими грядами высотой $0{,}25h$, продольные пульсации на этом участке в два раза интенсивнее пульсаций на ровном дне, при той же средней скорости. Являясь разновидностями плохо обтекаемых тел, гряды и рифели разделяют в гидродинамике общую судьбу таких тел; законы их обтекания потоком в малой степени доступны теоретическому анализу. К сожалению, объем экспериментов пока мал и не дает материала для эмпирических обобщений.

Повышенная турбулентность потоков с грядовым дном увеличивает их способность к взвешиванию наносов и несколько снижает значения неразмывающей скорости. Оба эти обстоятельства интенсифицируют транспорт наносов.

17.4. Гряды в нестационарном потоке

В течение паводка донный рельеф проходит через цикл сложных переформирований. Продольные промеры, выполняемые во время подъема уровней, сначала регистрируют быстрое увеличение высот и длин гряд. Однако при приближении к пику

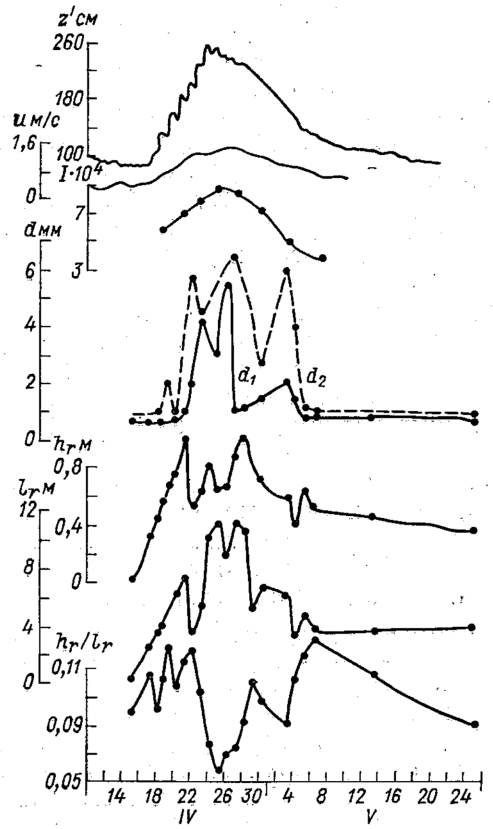


Рис. 89. Изменение параметров потока и размеров гряд во время паводка на р. Полометь (по Снищенко).

паводка, если он достаточно высокий, рост гряд в высоту прекращается и сменяется обратным процессом — понижением их гребней, заканчивающимся иногда полным смывом гряд. Увеличение длин гряд регистрируется до тех пор, пока гряды существуют. Одновременные снижение высоты и увеличение длин гряд находят свое выражение в резком падении значений их крутизны во время стояния высоких уровней. Увеличение длины гряд, по-видимому, происходит в результате наползания на на-

порные скаты крупных гряд быстрее движущихся гряд меньших размеров. Этот процесс сам по себе обеспечивает увеличение средней высоты гряд, но на подъеме паводка в высоту растут также отдельные гряды, до тех пор пока взвешивание частиц на их гребнях не станет массовым. При наблюдении через стеклянную стенку лотка хорошо видно, как перед началом сработки гребни гряд начинают «дымить» — косо вверх протягиваются от них колеблющиеся шлейфы мути.

На спаде паводка грядовый рельеф быстро восстанавливается. Благодаря большим глубинам в это время формируются длинные и высокие гряды. Их дальнейшая судьба зависит от интенсивности спада. Чаще всего падение уровней и уменьшение скоростей затрудняют перестройку гряд и в середине спада мы застаем в русле реки гряды гораздо более крупные, чем те, которые при таких же уровнях наблюдались на подъеме. На графике связи высоты гряд с глубиной потока получается типичная петля гистерезиса. Нередко, система больших гряд, созданных паводком, доживает до межени, а меженный поток развивает тем временем новую систему более мелких и быстрых гряд, которые движутся по поверхности своих старших собратьев. Так как длины гряд двух этих систем отличаются во много раз, то слияния малых гряд с большими не происходит. Промеры, выполненные экспедицией ЛИВТ во время межени 1976 г. на р. Надым, обнаружили в русле этой реки сохранившиеся после быстрого спада гряды длиной 100—125 м и многочисленные меженные гряды длиной в 10—15 м. Подобной картины не будет, если спад уровней идет медленно. Чем медленнее спад, тем уже петля гистерезиса.

На рис. 89 представлены графики изменения параметров потока и осредненных размеров гряд на участке р. Плометь у с. Яжелбиц за время весеннего паводка 1965 г. На них отчетливо видны взаимосвязанные изменения высот, длин и крутизны гряд, происшедшие при прохождении паводочной волны высотой всего лишь 1,5 м. В последние годы экспедициями ГГИ получены обширные данные о трансформациях гряд в нестационарных потоках. Некоторые из этих данных приводятся в докладе [128].

Гряды и рифели образуют младшее, самое массовое и самое упорядоченное звено в иерархии русловых форм. Они служат одновременно средством транспорта наносов и средством регулирования гидравлического сопротивления русел. Два этих качества волнообразного дна русловых потоков тесно связаны между собой.

Глава VI

Движение взвешенных наносов

18. Уравнения механики взвесенесущей жидкости

18.1. Уравнения актуального движения

Речная вода никогда не бывает «чистой», она всегда содержит взвешенные твердые частицы различной крупности, т. е. представляет собой двухкомпонентную среду.

Для дальнейшего важно, что содержание взвешенных твердых частиц в речной воде все же очень мало и основную их массу составляют очень мелкие частицы. Содержание, или концентрация, взвешенных наносов (в гидрологии мутность) достигает наибольших значений во время паводков на горных реках. В этих случаях средняя по живому сечению объемная концентрация может иметь порядок 10^{-3}—10^{-2}. Среднегодовая объемная концентрация у горных рек имеет порядок 10^{-4}—10^{-3}. У большинства равнинных рек средняя в живом сечении объемная концентрация достигает значений порядка 10^{-4} только во время паводков, а в среднем за год она имеет порядок 10^{-4}—10^{-5}.

Основная масса взвешенных внерусловых наносов состоит из частиц с диаметром $d<0{,}05$ мм, т. е. имеющих гидравлическую крупность меньше 0,15 см/с. Максимальные расходы взвешенных внерусловых наносов наблюдаются в моменты наибольшей интенсивности стока воды с поверхности бассейна, т. е. приблизительно в середине паводочного подъема уровней. Среди взвешенных русловых наносов преобладают функции 0,05—0,25 мм с гидравлической крупностью до 2,0—2,5 см/с. Максимумы расхода взвешенных русловых наносов обычно совпадают с пиком паводка, когда речной поток имеет наибольшие скорости.

Главные задачи теории движения взвешенных наносов состоят в установлении закона, по которому твердые частицы распределяются на вертикали и в отыскании расхода взвешенных наносов. Постановка второй из этих задач уместна лишь в отношении русловых фракций наносов. Исходя из параметров потока и русла, определить количество содержащихся в воде внерусловых наносов невозможно.

При составлении уравнений движения взвесенесущей жидкости Ф. И. Франкль [142] определил актуальное (т. е. точечное и мгновенное) содержание твердой компоненты как величину, которая может принимать два дискретных значения: единица внутри твердых частиц и ноль в жидкости. При таком определении все производные, входящие в уравнения актуального движения, представляют собой разрывные функции координат пространства и времени. Для получения непрерывных производных над уравнениями актуального движения каждой компоненты совершается операция пространственно-временно́го осреднения.

То обстоятельство, что поперечные размеры частиц наносов, взвешиваемых речными потоками, малы по сравнению с размерами переносящих эти частицы турбулентных вихрей, позволяет принять здесь более простую, хотя и менее строгую процедуру. Эта процедура основывается на условной замене множества взвешенных дискретных частиц наносов некоторой тяжелой субстанцией, непрерывно распределенной в жидкости. Жидкость, содержащую такую субстанцию, называют дисперсоидом. Уравнения актуального движения дисперсоида не содержат разрывных функций и для перехода от этих уравнений к уравнениям осредненного турбулентного движения требуется лишь временно́е осреднение.

Концепция дисперсоида в динамике русловых потоков носит традиционный характер. Основной вклад в развитие этой концепции внесли В. Шмидт, В. М. Маккавеев, Х. Рауз, М. А. Великанов, М. А. Дементьев и Г. И. Баренблатт.

В соответствии с понятием дисперсоида мгновенное содержание наносов в точке $M(x_i)$ определяется как предел отношения объема твердой примеси к объему дисперсоида при стремлении последнего к нулю, т. е. точно так же, как определяется объемное содержание растворенных в воде веществ

$$s(M, t)=\lim_{V_m\to 0}\frac{V_s(t)}{V_m}. \qquad (18.1)$$

Индексом s отмечен объем наносов, индексом m — объем дисперсоида. Точка M предполагается находящейся внутри объема V_m при всех значениях этого объема. Величина $s(M, t)$, подобно другим элементам турбулентного потока, может быть представлена в виде суммы ее осредненного значения и пульсационной составляющей

$$s=\bar{s}+s'. \qquad (18.2)$$

Актуальная плотность дисперсоида выражается формулой

$$\rho_m(M, t)=\rho(1-s)+\rho_s s. \qquad (18.3)$$

Очевидно, она также представляет собой случайно колеблющуюся величину $\rho_m=\bar{\rho}_m+\rho'_m$.

Скорость движения дисперсоида v_{mi} определяется как среднее взвешенное по массе значение скоростей жидкой v_i и твердой v_{si} компонент в центре массы элементарного объема, окружающего точку M,

$$v_{mi}(M,\ t)=\frac{\rho v_i(1-s)+\rho_s v_{si}s}{\rho(1-s)+\rho_s s}. \tag{18.4}$$

Уравнения сохранения массы для жидкости и примеси имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(1-s)]+\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[\rho(1-s)v_i]=0, \tag{18.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s s)+\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_s s v_{si})=0. \tag{18.6}$$

Сложив эти два уравнения, получим уравнение сохранения массы для дисперсоида

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t}+\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_m v_{mi})=0. \tag{18.7}$$

Оно совпадает по виду с уравнением сохранения массы для сжимаемой жидкости. Если предварительно разделить уравнения (18.5) и (18.6) соответственно на ρ и ρ_s, то результатом суммирования будет чисто кинематическое условие неразрывности

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[(1-s)v_i+sv_{si}]=0. \tag{18.8}$$

Написав уравнения движения в напряжениях для несущей жидкости и для твердой примеси и затем сложив их, получим уравнения актуального движения дисперсоида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m v_{mi})+\sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j}[\rho(1-s)v_i]+\sum_j v_{sj}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_s s v_{si})=$$

$$=\rho_m X_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}^{(m)}}{\partial x_j}. \tag{18.9}$$

Компоненты $\tau_{ij}^{(m)}$ входящего сюда тензора напряжений представляют собой суммы вязких напряжений несущей жидкости и напряжений, обусловленных столкновениями твердых частиц между собой,

$$\tau_{ij}^{(m)}=\tau_{ij}^{(v)}+\tau_{ij}^{(s)}. \tag{18.10}$$

Напряжения $\tau_{ij}^{(s)}$, вообще говоря, малы и поэтому компоненты $\tau_{ij}^{(m)}$ при малых значениях s, характерных для естественных по-

токов, практически не отличаются от напряжений молекулярной вязкости в чистой жидкости. Положив в (18.9) $s=0$, $\tau_{ij}^{(s)}=0$ и объединив гидродинамическое давление с касательными напряжениями в тензоре полных напряжений вязкой жидкости, получим уравнения Коши (2.12).

Система (18.7)—(18.9) представляет собой наиболее общую систему уравнений для задачи о движении вязкой жидкости с непрерывно распределенной примесью. Чтобы сблизить эту систему с реально наблюдаемой картиной транспорта наносов открытыми потоками, расположим оси x_1, x_2 в горизонтальной плоскости, а ось x_3 направим по вертикали вверх. Единственной массовой силой будет сила тяжести с компонентами на единицу массы

$$X_i=-g\delta_{i3}, \tag{18.11}$$

где δ_{ij} — единичный тензор ($\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$ и $\delta_{ij}=1$ при $i=j$).

Опираясь снова на малость поперечных размеров твердых частиц и считая, кроме того, что ускорения жидкости малы по сравнению с ускорением силы тяжести, примем, что составляющие актуальных скоростей твердых частиц и жидкости в горизонтальной плоскости равны, а по оси x_3 отличаются на величину гидравлической крупности частиц

$$v_{si}=v_i-w_0\delta_{i3}. \tag{18.12}$$

Гидравлическую крупность w_0 будем считать не зависящей от содержания твердой примеси — при малом содержании это допущение не может вызвать возражений.

В соответствии с предположением (18.12) выражение для актуальной скорости дисперсоида примет вид

$$v_{mi}=v_i-\frac{\rho_s s w_0\delta_{i3}}{\rho(1-s)+\rho_s s}. \tag{18.13}$$

Добавив условие

$$s\ll 1 \tag{18.14}$$

и условие, вытекающее отсюда при не очень большой разнице в плотностях наносов и воды,

$$\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)s\ll 1, \tag{18.15}$$

будем иметь

$$v_{mi}=v_i-\frac{\rho_s}{\rho}sw_0\delta_{i3}. \tag{18.16}$$

Введя условия (18.11), (18.12), (18.14) и (18.15) в систему основных уравнений актуального движения дисперсоида, представим эту систему в виде:

$$\frac{\partial v_{mi}}{\partial t}+\sum_j v_{mj}\frac{\partial v_{mi}}{\partial x_j}=-g\delta_{i3}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\sum_j\frac{\partial \tau_{ij}^{(m)}}{\partial x_j}, \qquad (18.17)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\sum_i v_{mi}\frac{\partial s}{\partial x_i}-w_0\frac{\partial s}{\partial x_3}=0, \qquad (18.18)$$

$$\sum_i\frac{\partial v_{mi}}{\partial x_i}+\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)w_0\frac{\partial s}{\partial x_3}=0. \qquad (18.19)$$

Второй член левой части уравнения (18.19) при небольших s мал по сравнению с первым членом и поэтому (18.19) можно писать также в виде

$$\sum_i\frac{\partial v_{mi}}{\partial x_i}=0. \qquad (18.20)$$

18.2. Уравнения осредненного движения

Произведя операцию осреднения над членами уравнения (18.17) и отбросив как малые по сравнению с турбулентными напряжениями напряжения $\tau_{ij}^{(m)}$ (что в потоке с гидравлически шероховатым дном и невысоким содержанием наносов допустимо до самого дна), будем иметь

$$\frac{\partial \bar{v}_{mi}}{\partial t}+\sum_j \bar{v}_{mj}\frac{\partial \bar{v}_{mi}}{\partial x_j}=-g\delta_{i3}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}-\sum_j\frac{\partial \overline{v'_{mi}v'_{mj}}}{\partial x_j}. \qquad (18.21)$$

Осреднение выражений (18.18) и (18.19) дает:

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t}+\sum_i \bar{v}_{mi}\frac{\partial \bar{s}}{\partial x_i}+\sum_i\frac{\partial \overline{s'v'_{mi}}}{\partial x_i}-w_0\frac{\partial \bar{s}}{\partial x_3}=0, \qquad (18.22)$$

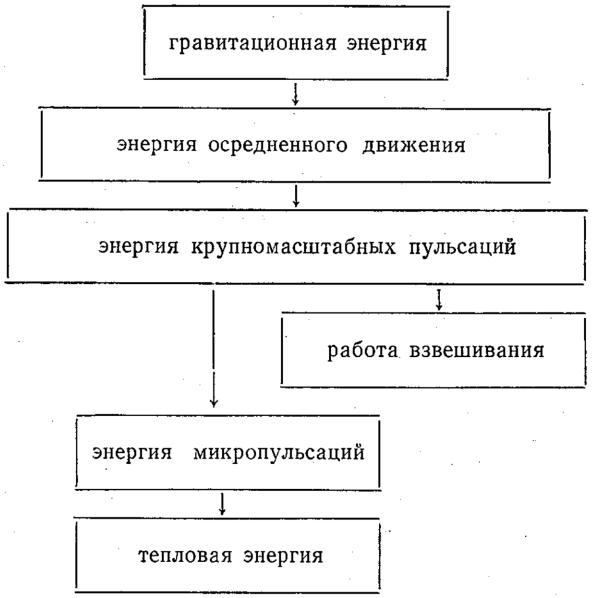
$$\sum_i\frac{\partial \bar{v}_{mi}}{\partial x_i}+\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)w_0\frac{\partial \bar{s}}{\partial x_3}=0. \qquad (18.23)$$

Г. И. Баренблатт [7], которому принадлежит приведенный выше вывод общих уравнений актуального и осредненного движения дисперсоида, составил также уравнение баланса пульсационной энергии дисперсоида. Оказалось, что это уравнение содержит члены с тем же физическим смыслом, что и члены баланса энергии пульсаций чистой жидкости (3.30) плюс добавочный член, выражающий затрату энергии пульсаций на

подъем твердых частиц (т. е. работу пульсаций против силы тяжести). Этот добавочный член имеет вид

$$-(\rho_s - \rho) g w_0 \bar{s}.$$

При больших $\bar{s}$ он должен был бы содержать еще множитель $(1 - \bar{s})$, но при этом, как отмечает Баренблатт, следовало бы принимать во внимание и влияние содержания наносов на величину гидравлической крупности частиц. Выражение для «работы взвешивания», составленное впервые В. Г. Глушковым еще в 1915 г., впоследствии заняло важное место в построениях М. А. Великанова. Введя работу взвешивания в баланс энергии не пульсационного, а основного движения, т. е. предположив, что взвешивание твердых частиц образует наравне с турбулентным рассеянием энергии самостоятельный канал отбора энергии от среднего движения, Великанов построил на этой основе особый вариант теории движения взвешенных наносов, получивший название «гравитационной теории». В конце 40-х—начале 50-х годов гравитационная теория явилась предметом оживленной научной дискуссии. Неправомочность включения работы взвешивания в баланс энергии основного движения и необходимость ее учета в балансе энергии пульсационного движения была доказана А. Н. Колмогоровым [76]. Процесс превращения энергии в турбулентном взвесенесущем потоке изображен Колмогоровым в виде следующей схемы:



Появление работы взвешивания в балансе энергии турбулентности взвесенесущего потока физически означает, что

присутствие взвешенных тяжелых частиц в турбулентном потоке имеет своим следствием ослабление энергии пульсаций — гашение турбулентности.

Напишем систему основных уравнений нашей задачи для простейшего случая установившегося плоского и равномерного осредненного течения в открытом канале с малым уклоном дна $i_0 \ll 1$. Ось x_1 расположим в плоскости дна, направив ее по течению. Ось x_3 будет направлена по нормали ко дну вверх.

Уравнения движения, уравнение сохранения массы и уравнение неразрывности примут вид:

$$\bar{v}_{m3}\frac{d\bar{v}_{m1}}{dx_3} = gi_0 - \frac{\overline{dv'_{m1}v'_{m3}}}{dx_3}, \tag{18.24}$$

$$\bar{v}_{m3}\frac{d\bar{v}_{m3}}{dx_3} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx_3} - \frac{\overline{dv'^2_{m3}}}{dx_3}, \tag{18.25}$$

$$\bar{v}_{m3}\frac{d\bar{s}}{dx_3} + \frac{\overline{ds'v'_{m3}}}{dx_3} - w_0\frac{d\bar{s}}{dx_3} = 0, \tag{18.26}$$

$$\frac{d\bar{v}_{m3}}{dx_3} + \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) w_0\frac{d\bar{s}}{dx_3} = 0. \tag{18.27}$$

Интегрируя (18.27), находим компоненту осредненной скорости дисперсоида по оси x_3

$$\bar{v}_{m3} = -\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) w_0\bar{s} \tag{18.28}$$

(постоянная интегрирования равна нулю, так как при $\bar{s} = 0$ должно быть $\bar{v}_{m3} = \bar{v}_3 = 0$). Подставив (18.28) в (18.26) и интегрируя, определим момент связи между пульсациями мутности и пульсациями компоненты скорости дисперсоида по оси x_3

$$\overline{s'v'_{m3}} = \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) w_0\bar{s}^2 + w_0\bar{s} \approx w_0\bar{s}. \tag{18.29}$$

Полученное уравнение указывает на *равенство плотностей двух потоков примеси: одного восходящего, обусловленного процессом турбулентного перемешивания, и другого нисходящего, обусловленного падением твердых частиц под действием их избыточного веса.* Очевидно, указанное равенство может наблюдаться лишь при установившемся и равномерном осредненном движении дисперсоида.

Подставив (18.28) в (18.25), отбросив нормальную компоненту турбулентных напряжений, интегрируя и пренебрегая членом, содержащим $\bar{s}^2$, найдем, что в условиях малой мутности давление по вертикали открытого взвесенесущего потока распределяется так же, как по вертикали потока чистой воды

$$\bar{p} = \rho g(h - x_3).$$

Подставив (18.28) в (18.24), можно увидеть, что конвективный член в (18.24) мал по сравнению с членом, выражающим изменение турбулентного трения. Отсюда имеем

$$-\overline{v'_{m1}v'_{m3}} = gi_0(h - x_3).$$

В результате некоторых упрощений уравнения баланса пульсационной энергии Баренблатт [8] получил следующее соотношение между энергией пульсаций в плоском равномерном потоке дисперсоида и энергией пульсаций в таком же потоке чистой воды:

$$\frac{b_m}{b} = (1 - \mathrm{Ko})^{1/2}, \tag{18.30}$$

где Ko — число Колмогорова, представляющее собой аналог известного в метеорологии числа Ричардсона

$$\mathrm{Ko} = -g\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)\frac{d\bar{s}}{dx_3}\left(\frac{d\bar{v}_{m1}}{dx_3}\right)^{-2}. \tag{18.31}$$

Формула (18.30) дает количественную оценку снижения уровня турбулентности во взвесенесущем потоке. Производная $\frac{d\bar{s}}{dx_3}$ принимает наибольшие значения при взвешивании крупных частиц, а также при больших насыщениях потока твердой примесью. В этих условиях, практически реализуемых, например, в напорном гидротранспорте, число Ko сравнимо с единицей и наблюдается сильное гашение турбулентности.

Для потоков, где содержание взвешенных частиц мало и частицы имеют малую крупность, а таково подавляющее большинство равнинных речных потоков, удовлетворяется неравенство $\mathrm{Ko} \ll 1$, означающее, что присутствие твердых частиц не влияет заметным образом на турбулентные пульсации. Отсюда вытекает возможность находить распределение взвеси в таких потоках, используя описанную в главе II *аналогию Рейнольдса*. Теория движения взвешенных наносов, основанная на аналогии Рейнольдса, называется *диффузионной*.

19. Распределение взвешенных частиц по вертикали

19.1. Основное дифференциальное уравнение диффузионной теории и его интегрирование

Положим, как и в конце п. 18.2, что мы имеем дело с плоским и равномерным осредненным течением взвесенесущей жидкости в канале с малым уклоном дна $i_0 \ll 1$. Содержание наносов будем считать малым, наносы мелкими и однородными: $\mathrm{Ko} \ll 1$,

$w_0 = \text{const}$. Изменим обозначения осей координат и компонент скорости: x_1 на x, x_3 на z, v_1 на u и v_3 на w. В рассматриваемых условиях вертикальная компонента пульсационной скорости дисперсоида не отличается от вертикальной компоненты пульсационной скорости несущей жидкости $w'_m = w'$, и поэтому уравнение (18.29) может быть представлено в виде

$$\overline{s'w'} = w_0 \bar{s}. \tag{19.1}$$

Феноменологическое выражение для плотности диффузионного потока вещества по (3.28) записывается в виде

$$\overline{s'w'} = -K \frac{d\bar{s}}{dz},$$

причем, согласно аналогии Рейнольдса, коэффициент диффузии твердой примеси совпадает с коэффициентом диффузии импульса

$$K = \nu_т.$$

Отсюда вместо (19.1) получаем

$$w_0 \bar{s} + \nu_т \frac{d\bar{s}}{dz} = 0. \tag{19.2}$$

Уравнение (19.2) и представляет собой основную дифференциальную зависимость диффузионной теории движения взвешенных наносов. Разрешив уравнение (19.2) относительно производной $\frac{d\bar{s}}{dz}$, представив коэффициент турбулентной вязкости через отношение $\frac{\tau}{\rho} \Big/ \frac{d\bar{u}}{dz}$ и перенеся результат в выражение числа Колмогорова (18.31), найдем

$$\text{Ко} = \frac{g(\rho_s - \rho) w_0 \bar{s}(z)}{\tau(z) \frac{d\bar{u}}{dz}}. \tag{19.3}$$

Из этой записи видно, что число Ко есть *отношение работы взвешивания к полной энергии турбулентности.*

Интегрируя (19.2) в пределах от некоторого $z = a = \text{const}$ до текущего z, имеем

$$\bar{s}(z) = \bar{s}(a) \exp\left(-w_0 \int_a^z \frac{dz}{\nu_т} \right). \tag{19.4}$$

Уравнение (19.4) было впервые применено В. Шмидтом [225] к описанию вертикального распределения пыли в атмосфере. Положив $\nu_т = \text{const}$, Шмидт получил

$$\bar{s}(z) = \bar{s}(a) \exp\left[-\frac{w_0}{\nu_т}(z - a) \right]. \tag{19.5}$$

К распределению взвешенных наносов в открытом водном потоке уравнение (19.4) впервые применил В. М. Маккавеев (1931 г.).

Гипотеза постоянного коэффициента диффузии не может быть использована для открытых потоков даже в порядке первого грубого приближения. Как было показано в главе II, коэффициент турбулентного обмена $\nu_т$ сильно изменяется вдоль вертикали, достигая максимума на середине глубины и принимая близкие к нулю значения у дна и на свободной поверхности. Подставив выражение (4.10) в (19.4), будем иметь

$$\bar{s}(z)=\bar{s}(a)\exp\left[-\frac{w_0}{\varkappa v_*}\int_a^z\frac{h_i}{z(h-z)}\,dz\right], \tag{19.6}$$

после интегрирования

$$\bar{s}(z)=\bar{s}(a)\left(\frac{h-z}{z}\,\frac{a}{h-a}\right)^{\frac{w_0}{\varkappa v_*}}. \tag{19.7}$$

При $a=\Delta\ll h$ формула (19.7) принимает вид, в котором она обычно применяется,

$$\bar{s}(z)=\bar{s}(\Delta)\left(\frac{h-z}{z}\,\frac{\Delta}{h}\right)^{\frac{w_0}{\varkappa v_*}}. \tag{19.8}$$

Уравнение распределения взвешенных наносов по вертикали (19.8) впервые было опубликовано Х. Раузом, проведшим также и первую количественную проверку этого уравнения [223].

Так как содержание наносов связано с гидравлической крупностью частиц нелинейно, то при разнородных наносах написанные уравнения распределения должны применяться к каждой фракции в отдельности, и для получения полной эпюры мутности полученные результаты должны складываться.

19.2. Сравнение диффузионной теории с экспериментом и натурными наблюдениями

Эксперименты в лабораторных лотках и тщательно выполненные измерения в естественных потоках будучи обработаны в форме связей между логарифмами содержания наносов и логарифмами отношения $\frac{h-z}{z}$ дают в широких диапазонах содержания твердой компоненты и гидравлической крупности частиц прямые вида

$$\lg[\bar{s}(z)]=\alpha_1\lg\frac{h-z}{z}+\alpha_2. \tag{19.9}$$

Входящее сюда число α_1 при справедливости диффузионной теории должно определяться равенством

$$\alpha_1 = \frac{w_0}{\varkappa v_*}, \qquad (19.10)$$

где $\varkappa$ — значение параметра Кармана, установленное по распределению скоростей в потоке чистой воды. Число α_2 зависит от выбора уровня a, абсолютного значения концентрации $\overline{s}(a)$ на этом уровне, а также от значения α_1.

Таким образом, общий вид распределения концентрации, выражаемый степенной зависимостью (19.7), полностью подтверж-

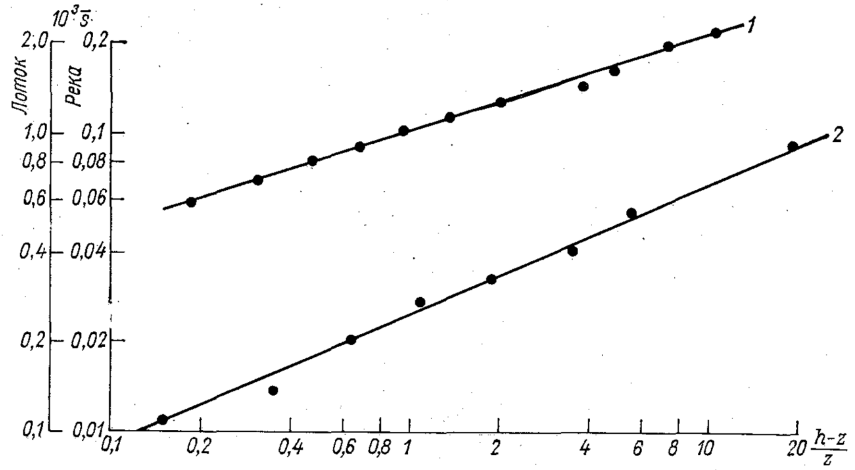


Рис. 90. Распределение взвешенных наносов по вертикали в лабораторном лотке (*1*) и в речном потоке (*2*).

дается опытом. В качестве примеров опытных связей на рис. 90 в логарифмических масштабах представлены два графика распределения мутности — один, полученный в экспериментах В. Ванони, а другой, полученный в результате натурных измерений на р. Миссури[1] (табл. 3).

Таблица 3

Характеристики исследованных течений

Поток	h м	I	d мм	v_* м/с	α_1
В лотке	0,18	0,00125	0,10	0,045	0,32
р. Миссури у Омахи	2,34	0,000121	0,062—0,074	0,053	0,43

[1] Опытные точки сняты с графиков, приведенных в работе В. Ванони [240]. Серия аналогичных графиков из работы Ванони [239] воспроизведена в книге [152].

Абсолютные значения мутности в лотке примерно в 20 раз больше абсолютных значений мутности речного потока.

Определив из опыта величину показателя степени α_1, мы можем найти величину

$$\varkappa_s = \frac{w_0}{\alpha_1 v_*}, \tag{19.11}$$

т. е. параметр Кармана для взвесенесущего потока. Получаемые из опытных данных о распределении мутности значения $\varkappa_s$ меняются в довольно широких пределах, особенно если используются натурные измерения. Последнее легко объясняется отклонениями естественных потоков от условий плоского и равномерного осредненного движения, неоднородностью состава наносов, а также невысокой точностью натурных измерений.

Тем не менее аккуратно выполненные натурные и лабораторные измерения позволяют с полной определенностью установить общий характер изменения параметра $\varkappa_s$. При малой крупности наносов и их малом содержании в потоке значения $\varkappa_s$ совпадают со значениями параметра Кармана, установленными по распределению скоростей в потоках чистой воды, подтверждая тем самым действительность диффузионной теории для указанных условий.

При увеличении содержания наносов или (и) увеличении их крупности и лабораторные, и натурные измерения дают неравенство

$$\varkappa_s < \varkappa, \tag{19.12}$$

причем различие между значениями $\varkappa_s$ и $\varkappa$ растет вместе с содержанием и крупностью наносов. Выполненный Колмогоровым и Баренблаттом теоретический анализ вопроса о влиянии взвешенных частиц на турбулентные пульсации полностью объясняет экспериментальные результаты. Взвешивание значительных количеств наносов так же, как подъем крупных частиц, снижает интенсивность турбулентности, т. е. ослабляет перемешивание жидкости и как следствие это приводит к росту градиентов осредненных скоростей и градиентов осредненного содержания наносов. Увеличение неравномерности распределений $\overline{u}$ и $\overline{s}$ и выражается падением значений параметра $\varkappa_s$.

Хорошую иллюстрацию к сказанному дают профили распределения скоростей в потоке чистой воды и в потоке с большим содержанием наносов, совмещенные на рис. 91. Обе серии измерений были сделаны Ванони [240] при одном и том же наполнении лотка ($h = 9$ см) и одном и том же уклоне свободной поверхности ($I = 0{,}0025$). Среднее по вертикали весовое содержание твердой компоненты в потоке с наносами составляло 155 Н/м³ (среднее объемное содержание около 0,006). Диаметр взвешенных частиц был равен 0,1 мм. На рис. 91 видно, что

присутствие твердых частиц существенно увеличило градиенты осредненных скоростей и сами осредненные скорости.

А. Т. Иппен [191], использовав экспериментальные данные Ванони, Эйнштейна и Чена и свои собственные, получил следующую формулу для параметра Кармана во взвесенесущем потоке:

$$\varkappa_s = 0{,}385 \frac{1 + \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)\bar{s}_{ср}}{1 + 2{,}5\bar{s}\,(\Delta)}. \qquad (19.13)$$

При наблюденных предельно высоких значениях придонной концентрации $s\,(\Delta) = 0{,}25 \div 0{,}30$ значение $\varkappa_s$ по формуле (19.13) уменьшается по сравнению с $\varkappa$ почти в два раза. Еще более низкие значения $\varkappa_s$ для больших концентраций дает графическая зависимость, предложенная Эйнштейном и Абдель-Аль-Фаруком [172].

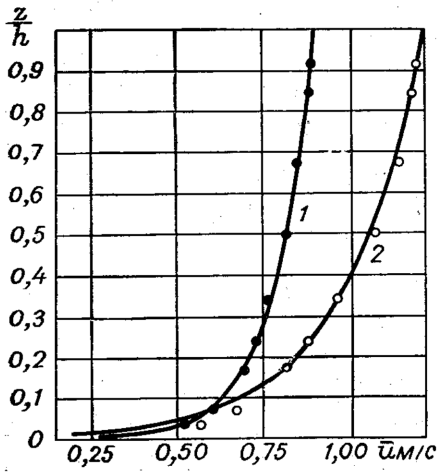


Рис. 91. Распределение осредненных скоростей в потоке чистой воды (*1*) и в потоке со взвесью (*2*), по Ванони.

Формула (19.13) и ей подобные представляют собой попытки корректировать диффузионную теорию, не выходя за ее пределы. Лучшим выходом из положения представляется создание более точной теории. Такую теорию можно строить как на основе концепции непрерывно распределенной мутности, так и на основе более строгого представления о движении дискретных твердых частиц. Работа в первом направлении была начата Г. И. Баренблаттом, во втором — Ф. И. Франклем. К сожалению, оба исследования не были доведены до расчетных зависимостей. Интересный вариант развития теории Баренблатта предложили недавно М. И. Железняк и В. А. Шнайдман [49]. Применив распределение масштаба турбулентности по вертикали, разработанное в теории атмосферной турбулентности, они пришли к системе уравнений, численное решение которой дало близкое к опыту распределение концентрации при высоких ее значениях.

В потоках малой мутности, таких, к каким относится большинство речных потоков Восточно-Европейской и Западно-Сибирской равнин, диффузионная теория не требует поправок. Для построения эпюры распределения концентрации по вертикали средствами диффузионной теории надо знать концентрацию в одной точке вертикали. Наиболее удобно было бы располагать

с этой целью добавочным уравнением, определяющим придонную концентрацию $\overline{s}(\Delta)$ (при неоднородных наносах необходимо знать $\overline{s_i}(\Delta)$ для каждой i-той фракции). Несколько попыток, предпринятых у нас и за рубежом, создать такое уравнение не привели пока к удовлетворительному результату. Добавочные осложнения вносятся в эту задачу грядовым рельефом дна.

Если распределения объемной концентрации и осредненных продольных скоростей на вертикали известны, элементарный расход взвешенных наносов находится по формуле

$$q_s = \int_{\Delta}^{h} \overline{s}(z)\,\overline{u}(z)\,dz. \tag{19.14}$$

Полный расход наносов получают при интегрировании функции $q_s(b)$ по ширине живого сечения.

20. Транспортирующая способность потока и полный расход русловых наносов

20.1. Транспортирующая способность

Открытый поток при заданных глубине и скорости может переносить количество взвешенных частиц заданной гидравлической крупности, не превышающее определенного предела. Отвечающий этому пределу расход твердой примеси $Q_{s,\,\mathrm{lim}}$ называется *транспортирующей способностью потока.* Отвечающее этому пределу среднее в живом сечении содержание твердых частиц

$$S_c = \frac{Q_{s\,\mathrm{lim}}}{Q} \tag{20.1}$$

называется *критической концентрацией,* или критической мутностью. Скорость течения U_+, при которой насыщение потока наносами критическое, называется *незаиляющей.* Выражение (20.1) дает среднее расходное содержание взвеси, которое будет меньше среднего действительного содержания, если осредненные скорости твердых частиц будут меньше осредненных скоростей несущей жидкости. Мы, однако, по-прежнему, будем считать, что в естественных потоках отставание существенно только для влекомых частиц и при вычислении расхода взвешенных наносов им можно пренебрегать.

Критическая концентрация русловых наносов наблюдается в реках при смыве гряд. По отношению к внерусловым наносам

речной поток всегда недогружен. Величины незаиляющей скорости и критической концентрации играют важную роль в расчетах сечений неукрепленных каналов по методу «допустимых скоростей». В связи с этим их определению было посвящено много работ. Так как величины $Q_{s\,\mathrm{lim}}$, S_c и U_+ взаимосвязаны (имея формулу для S_c, легко разрешить ее относительно U_+), мы ограничимся приведением зависимостей только для критической концентрации.

Наилучшее согласие с опытом имеют формулы критической концентрации, прямо или косвенно восходящие к соотношению М. А. Великанова [17]

$$S \sim \frac{U^2}{gR}\frac{U}{w_0} = \frac{U^2}{gR}\frac{v_*}{w_0}\frac{C}{\sqrt{g}}. \qquad (20.2)$$

Мы приведем три формулы, выделив в них те же три безразмерные величины Fr, $\frac{v_*}{w_0}$ и $C/\sqrt{g}$, в виде произведения которых представлена нами правая часть соотношения Великанова. Практически повторяет это соотношение формула С. Х. Абальянца [1]

$$S_c = 6{,}7 \cdot 10^{-6}\frac{U^3}{Rw_0} = 66{,}7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Fr}\frac{v_*}{w_0}\frac{C}{\sqrt{g}}. \qquad (20.3)$$

Более сложное строение имеют формулы:

А. В. Караушева [61]

$$S_c = 1{,}34 \cdot 10^{-7}\frac{(0{,}7C+6)\,C}{g}\frac{U^{2,75}}{Rw_0^{0,75}} =$$

$$= 0{,}92 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Fr}\left(\frac{v_*}{w_0}\right)^{0,75}\left(\frac{C}{\sqrt{g}}+2{,}7\right)\left(\frac{C}{\sqrt{g}}\right)^{1,75}, \qquad (20.4)$$

И. И. Леви [83]

$$S_c = 0{,}006\left(\frac{U}{w_0}\right)^4\left(\frac{d}{R}\right)^{1,6} = 0{,}006\,\mathrm{Fr}\left(\frac{v_*}{w_0}\right)^2\left(\frac{C}{\sqrt{g}}\right)^2\frac{gd}{w_0^2}\left(\frac{d}{R}\right)^{0,6}. \qquad (20.5)$$

Формула Абальянца основана на материале многочисленных измерений, выполненных на оросительных каналах Средней Азии, Кавказа и КНР (бассейн р. Хуанхэ), а также в лабораторном и полевом опытных каналах САНИИРИ. А. В. Караушев использовал измерения в реках, каналах и лабораторных лотках при значениях средней гидравлической крупности транспортируемых наносов от 0,09 до 2,0 см/с. И. И. Леви основывался на опытах В. С. Кнороза [67] в лотке с гладким дном при значениях средней гидравлической крупности от 0,68 до 3,87 см/с.

Из прямой связи критической концентрации с числом Фруда следует важный практический вывод: при одном и том же расходе воды и площади живого сечения более широкий и мелкий поток способен иметь бóльшую концентрацию взвешенных наносов данной крупности, чем узкий и глубокий. Предельный расход взвешенных наносов в силу этого получается слабосвязанным с глубиной потока. Остальные комментарии к формулам критической концентрации мы сделаем в конце следующего пункта.

20.2. Полный расход русловых наносов

В расчетах русловых деформаций необходимо знать полный расход русловых наносов.

У речных потоков с дном из крупного песка и гравия этот расход в межень равен расходу влекомых наносов. У потоков с мелкозернистыми донными отложениями он равен в межень сумме расходов влекомых и полувзвешенных наносов. Во время паводка на всех реках значительная, а иногда преобладающая часть транспортируемых русловых наносов движется во взвешенном состоянии.

Возможны два пути определения полного расхода русловых наносов: 1) посредством суммирования отдельно рассчитанных расходов влекомых и взвешенных наносов; 2) с помощью одной общей формулы, допускающей применение ко всем способам перемещения твердых частиц.

Первый путь был наиболее основательно разработан Г. Эйнштейном [171]. Сущность его метода сводится к следующему. Поток делится по глубине на две части: 1) придонный слой, в котором наносы движутся во влекомом состоянии (т. е. путем качения и подскакивания), и 2) вышележащая основная толща турбулентной жидкости, где наносы перемещаются во взвеси. Расчет ведется по отдельным фракциям наносов. Толщина придонного слоя принимается для каждой фракции разной, а именно равной $2d_i$. Расход наносов в слое определяется с помощью формулы (16.19). Найдя концентрацию $\overline{s_i}(2d_i)$ наносов каждой фракции в придонном слое, вычисляют распределение взвешенных частиц по формуле (19.7) с заменой в ней a на $2d_i$. При подсчете удельного расхода наносов используется логарифмический закон распределения скоростей. Применимость метода ограничена участками водотоков с равномерным движением, где возможно аккуратное измерение уклона свободной поверхности. Метод Эйнштейна был впоследствии модифицирован Б. Колби [163] и Ф. Тоффалети [237]. Несмотря на несколько упрощений, введенных этими авторами, и поправки, сделанные самим Эйнштейном, его метод остается трудоемким, требующим большого объема исходных данных и вследствие этого неудобным в инженерных расчетах.

Своей простотой выгодно отличается от зависимостей Эйнштейна двухчленная формула, предложенная Р. Бэгнольдом [154]. При учете формулы Шези, она записывается

$$q_{st}=\frac{\rho}{\rho_s}\frac{U^3}{C^2}\left(\frac{e'}{\operatorname{tg}\alpha}+0{,}01\frac{v_*}{w_0}\frac{C}{\sqrt{g}}\right). \qquad (20.6)$$

Здесь α — угол внутреннего трения грунта в воде и e' — коэффициент, учитывающий затраты энергии на транспорт влекомых наносов. Коэффициент e' зависит от крупности донных частиц и скорости течения. В диапазоне скоростей $0{,}5<U<1{,}5$ м/с округленные значения коэффициента следующие: при $d=1{,}0$ мм $e'\approx 0{,}12$, при $d=0{,}3$ мм $e'\approx 0{,}13$ и при $d=0{,}1$ мм $e'\approx 0{,}14$. Дно предполагается безгрядовым. Первый член в скобке определяет расход влекомых наносов, второй — взвешенных. Приравняв первый член нулю, т. е. оставив только взвешенные наносы, и разделив обе части формулы (20.6) на элементарный расход воды $q=Uh$, можно увидеть, что она отличается от соотношения Великанова (20.2) лишь другой (обратной) оценкой роли сопротивления русла.

Из нескольких предложений по интегральному определению расхода русловых наносов мы остановимся только на формуле В. Графа и Е. Акароглу [185], обоснованной широкими опытными данными, относящимися как к открытым (в том числе естественным), так и к закрытым водоводам. При учете формулы Шези и округлении эмпирического показателя степени при отношении U/C от 5,04 до 5,00 формула Графа—Акароглу может быть представлена в виде

$$q_{st}=10{,}4\frac{U^3}{C^2}\frac{v_*^2}{\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)^2 gd}\frac{\sqrt{g}}{C}. \qquad (20.7)$$

Ее родственность формуле Бэгнольда и формуле критической концентрации Леви очевидна. Как считают авторы формулы, она применима как к безгрядовому, так и к грядовому дну: входящий в нее коэффициент Шези C отражает суммарное сопротивление гряд и зернистой поверхности дна.

Приведенные формулы критической концентрации и полного расхода русловых наносов едины в том отношении, что все они выделяют одни и те же три фактора, влияющие на содержание русловых наносов в потоке: *кинетичность потока, подвижность частиц, гидравлическое сопротивление русла.* Если подвижность и сопротивление фиксированы, все формулы указывают на пропорциональность расхода наносов третьей степени скорости течения.

Величины подвижности частиц и сопротивления русла связаны друг с другом. Свидетельством этой связи служит обнаруживаемое в ряду формул (20.3)—(20.7) закономерное изменение

показателя степени при v_*/w_0 с изменением показателя степени при $C/\sqrt{g}$. Формулы с высоким показателем степени при первой из этих величин имеют низкий показатель степени при второй, и наоборот. Так как показатели степени определены эмпирическим путем, то их взаимосвязанное изменение отражает объективную реальность.

На рис. 92 обратная связь между показателем степени n при v_*/w_0 и показателем степени m при $C/\sqrt{g}$ в ряду из пяти формул (20.3)—(20.7) представлена графически. При определении

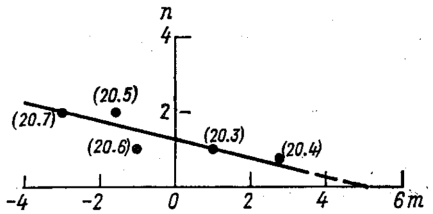


Рис. 92. Связь между показателями степени n при v_*/w_0 и m при $C/\sqrt{g}$ в ряду формул (20.3)—(20.7).

показателя m в формуле Леви (20.5) было использовано соотношение: $h/d \sim (C/\sqrt{g})^6$, а при определении показателя n в формуле Графа—Акароглу — соотношение $w_0 \sim \sqrt{gd}$. Проведенная на рис. 92 осредняющая прямая имеет уравнение

$$n = 1{,}25 - 0{,}25m. \tag{20.8}$$

Из этого уравнения следует, что для концентрации русловых наносов (как критической, так и докритической) можно пользоваться простым выражением

$$S \sim \mathrm{Fr}\left(\frac{v_*}{w_0}\right)^{1{,}25}. \tag{20.9}$$

Здесь w_0 обозначает среднюю гидравлическую крупность движущихся русловых частиц — величину, меньшую средней крупности донных наносов.

Глава VII
Русловой процесс

21. Концепция руслового процесса и ее практическое значение

21.1. Свойства руслового процесса

Русловой процесс — общее понятие, объединяющее процессы образования и последующих переформирований открытых русел под действием текущей воды. Это понятие равно применимо к естественным и искусственным руслам. Развитие канала из пионерной траншеи, размыв или занесение канала, отложение наносов в водохранилище представляют частные случаи руслового процесса.

Обращаясь к существу руслового процесса мы должны повторить в более точной форме то, что было сказано во Введении о взаимодействии двух частей системы поток—русло. Действие активной части этой системы — текущей воды — на пассивную часть — подстилающий грунт — осуществляется посредством транспорта наносов: захвата, перемещения и отложения частиц грунта. Удаление или отложение грунта, т. е. деформация русла, изменяют граничные условия движения воды, а следовательно, и состояние ее движения. *Изменение граничных условий движения в результате перемещения наносов представляет обратную связь между двумя частями системы.* Выражением этой связи служит закон сохранения наносов. Действуя вместе с законами гидравлического сопротивления, он управляет ходом деформаций, обеспечивая гибкую реакцию русла на меняющийся жидкий сток. Если сток статистически стабилен, статистически стабильно и русло. Его деформации при этом знакопеременны как во времени, так и по длине потока. Обусловленное кориолисовым ускорением необратимое, медленное смещение русел рек северного полушария вправо (южного — влево) сообщает асимметрию некоторым статистическим характеристикам русел, но не делает эти характеристики нестабильными.

Темп руслового процесса — средняя интенсивность русловых деформаций на участке реки или на реке в целом — меняется при переходе от одного участка к другому и от реки к реке вместе с удельным расходом русловых наносов, т. е., как мы только

что видели, со степенью кинетичности потока и податливостью материала дна размыву. Так как кинетичность потоков изменяется слабее, чем размываемость дна, то темп руслового процесса в основном обусловлен родом грунта. Наиболее медленно развиваются русла, прокладываемые водой в скале. Далее идут русла с валунно-галечными и моренными (глинисто-валунными) грунтами. Затем следуют гравелистые и песчаные русла. Как читатель уже имел возможность убедиться, в песчаных руслах поток является хозяином положения, он не только вырабатывает и переделывает русло, но управляет и его шероховатостью.

Деформации русел даже при весьма подвижных грунтах происходят гораздо медленнее, чем колебания уровней воды. Вследствие этого данное состояние русла не является отпечатком данного состояния потока — оно всегда хранит в себе следы его предшествующих состояний. В переходных режимах связи между элементами потока и русла обычно имеют гистерезисный характер.

Взаимодействие между потоком и руслом совершается по определенным механическим законам и приводит к образованию ограниченного набора закономерно повторяющихся русловых форм. По предложению Н. Е. Кондратьева [77], следует различать три иерархические ступени русловых форм: 1) микроформы — рифели, гряды и антидюны, образование которых связано с крупномасштабной турбулентностью руслового потока; 2) мезоформы — побочни, осередки, аккумулятивные острова, образование которых связано с полем осредненных скоростей; 3) макроформы — морфологические пары плёс—перекат, пойменные извилины и разветвления. Основные параметры макроформ обнаруживают связь с элементами одномерной модели руслового потока. Русловой процесс удобно интерпретировать как процесс движения и преобразования перечисленных дискретных русловых форм. Этот подход, оказавшийся плодотворным при решении многих частных задач, составляет одно из исходных положений созданной Н. Е. Кондратьевым и И. В. Поповым [77], [106] гидролого-морфологической теории руслового процесса.

Две морфологические особенности русловой процесс придает всем размываемым руслам без исключения. Это волнистость продольного профиля дна и то преимущественное развитие русел в ширину, на которое нам приходилось неоднократно ссылаться. Дно всех рек состоит из чередующихся глубоких и мелких мест — плёсов и перекатов или порогов. *Только такая форма дна статистически устойчива.*

Отношение ширины потока по зеркалу воды к средней глубине менее 10 встречается лишь у малых рек и ручьев. У рек большой водности оно достигает 10^2—10^3. Причина этого проста: она состоит в значительно меньшей устойчивости частиц на береговых откосах по сравнению с их устойчивостью на дне. В конечном итоге ответственность за распластанные сечения речных русел несет сила тяжести.

21.2. Русловой процесс и деятельность человека

В текущем столетии сильно возросло влияние на русловой процесс деятельности человека. Систематическое инженерное воздействие на русла судоходных рек производится посредством дноуглубительных и выправительных работ. Чтобы охарактеризовать современные масштабы этих работ в СССР, достаточно сказать, что на реках Волге, Оби, Б. Северной Двине стали нередкими дноуглубительные прорези с объемами в 1—2 млн. м^3 и больше. На реках Белой, Дону, Иртыше, Припяти и др. выполнены и продолжают вестись работы по спрямлению пойменных извилин. На малых и средних реках растет число и высота выправительных сооружений. Увеличивая глубины на перекатах, смягчая кривизну и стабилизируя положение русла, воднопутевые работы способствуют улучшению рек.

Сложные местные переформирования русел происходят при создании мостовых переходов через реки, особенно в тех случаях, когда предмостовые дамбы перекрывают широкую пойму. Изъятие больших объемов воды из реки на орошение ведет к деградации русла на нижележащем участке.

Коренные изменения вносятся в русловой процесс при возведении на реке подпорных сооружений. Современный крупный гидроузел, подпирая вышележащий участок реки, создает там условия для отложения наносов и отмирания старого русла. Если емкость верхнего бьефа такова, что он представляет собой регулирующее сток водохранилище, влияние гидроузла распространяется далеко вниз по реке. Задержка (полная или частичная) паводка в водохранилище и увеличение расходов воды в летнюю и зимнюю межени вносят сильные изменения в режим русловых форм, вплоть до смены одного типа руслового процесса другим. Если неукрепленные каналы с течением времени приближаются по своим формам к естественным руслам, то реки под влиянием глубокого регулирования стока канализуются — разница между глубинами плёсов и перекатов уменьшается, сезонные деформации дна слабеют. Примером такой реки может служить нижний Дон, где стабилизирующее влияние многолетнего регулирования стока Цымлянским водохранилищем было добавочно поддержано дноуглубительными работами.

Индустриализация нашей страны привела к появлению на берегах ее рек множества сооружений, которые, не влияя или слабо влияя на русловой процесс, могут испытывать с его стороны сильные, иногда решающие воздействия. К таким сооружениям относятся: водозаборы промышленного и гражданского водоснабжения, водозаборы тепловых и атомных электростанций, выпуски сточных вод, переходы трубопроводов и линий электропередачи. По отношению к русловому процессу эти сооружения могут быть названы пассивными, в отличие от сооружений, в той или иной мере изменяющих русловой процесс,—

активных, таких, как плотины, предмостовые дамбы, полузапруды и т. п. (деление предложено Б. Ф. Снищенко [127]).

Для того чтобы сооружения активного типа благоприятно влияли на русловой процесс, а пассивные не подвергались авариям, необходимо, чтобы при их проектировании закономерности руслового процесса принимались во внимание. К сожалению, сейчас это не всегда так, и дело здесь не только в недостаточном распространении знаний о русловом процессе среди инженеров, но также в неполноте и неточности имеющихся знаний. Поэтому развитие исследований по русловому процессу и тесно связанной с ним проблеме транспорта наносов имеет большое практическое значение.

Динамика русловых потоков отвечает на потребности проектирования созданием физических и математических моделей руслового процесса. Основная область физического моделирования — это местные деформации русел вблизи гидротехнических сооружений, где движение воды не бывает плавно изменяющимся. В задачах этого рода, вероятно, никогда не удастся пойти дальше лабораторного эксперимента и эмпирического или полуэмпирического обобщения результатов натурных и лабораторных наблюдений. Деформации протяженных участков русел с плавно изменяющимся движением воды доступны математическому моделированию. На нем основан расчет русловых деформаций. К расчету деформаций непосредственно примыкает задача об условиях, при которых ограниченные по своей длине участки подвижных русел могут быть устойчивы. На ее решении основывается расчет сечений неукрепленных каналов. Мы рассмотрим дальше совокупность этих расчетных задач, а в заключение остановимся на сезонных деформациях перекатов — виде русловых деформаций, посредством которого реки регулируют сток наносов. Сложная и пока еще плохо решаемая задача физического (гидравлического) моделирования руслового процесса составляет специальную большую тему. Многие вопросы теории руслового процесса, из которых особо отметим вопрос о деформациях берегов рек и каналов, еще ждут своего решения.

22. Расчет русловых деформаций

22.1. Исходные уравнения

В создании методов расчета русловых деформаций участвовали: Ф. Экснер, М. А. Великанов, И. И. Леви, А. В. Караушев, К. И. Россинский, И. Л. Розовский, М. де Врис и другие исследователи. Наиболее крупный вклад внес И. И. Леви [83].

В большинстве случаев расчет ведется в рамках одномерной модели руслового потока. Переход к плановой модели, усложняя вычисления, не требует изменения принципов расчета. Расход воды на расчетном интервале времени считается постоянным. В связи с этим непрерывный гидрограф заменяется ступенчатым. Движение воды предполагается плавно изменяющимся, берега — недеформируемыми.

При постоянном расходе воды изменения уровней могут вызываться только деформациями русла. Поэтому они относительно невелики и иногда ими можно пренебрегать. В общем случае, когда так поступать нельзя, исходная система уравнений состоит из уравнения движения воды и уравнений сохранения воды и наносов.

Записывая эти уравнения, мы будем считать, что ширина живых сечений меняется вдоль потока, как это всегда бывает в естественных руслах, но изменение ширин во времени несущественно. Таким образом, $B = B(l)$. Хотя движение, которое будут описывать наши уравнения не является установившимся, локальные ускорения воды в нем ничтожны и могут не приниматься во внимание.

При указанных допущениях удобно представить уравнения в следующем виде:

$$\frac{\partial Z_0}{\partial l} + \frac{\partial H}{\partial l} + \frac{U^2}{C^2 H} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial l} = 0, \tag{22.1}$$

$$B\left(H\frac{\partial U}{\partial l} + U\frac{\partial H}{\partial l}\right) + HU\frac{dB}{dl} = 0, \tag{22.2}$$

$$B\frac{\partial q_s}{\partial l} + q_s\frac{dB}{dl} + (1-\varepsilon)\frac{\partial Z_0}{\partial t} = 0. \tag{22.3}$$

Через $Z_0 = z' - H$ обозначается средняя высота дна в живом сечении. В пунктах 22.1 и 22.3 мы заменим уравнение деформации (22.3) его компактной записью (17.5).

Система (22.1)—(22.3) содержит пять неизвестных функций: H, Z_0, U, C и q_s. Функция $B(l)$ должна быть задана. Для замыкания системы служат закон сопротивления (формула для коэффициента Шези) и формула расхода наносов. Выбор последней является ключевым вопросом расчета деформаций и требует подробного обсуждения.

Относительно легко этот вопрос решается применительно к рекам, транспортирующим крупнозернистые наносы. Сравнив результаты вычислений по имеющимся формулам расхода влекомых наносов с данными полевых измерений, обычно удается выбрать одну или две формулы, пригодные для расчетов. При необходимости численные параметры формул можно корректировать. Если измерений на данной реке нет, обращаются к опыту расчетов по рекам с близкими грунтовыми условиями.

В реках с мелкозернистыми грунтами, где русловые наносы транспортируются как во влекомом, так и во взвешенном состояниях, даже лучшие из формул, основанных на лабораторном эксперименте, работают неудовлетворительно. Наряду с этим, имеются успешные попытки расчета деформаций на таких реках с помощью простых соотношений, связывающих расход наносов или с одной средней скоростью течения или со скоростью и глубиной. Понять, почему это так, можно с помощью следующих соображений.

В лабораторном лотке значения диаметра донных, как правило однородных, частиц d, скорости U и глубины H могут комбинироваться по воле экспериментатора. По отношению к расходу наносов все три величины играют роль независимых переменных. В отличие от этого у рек, достигших статистически стабильного состояния, скорости и глубины находятся в вполне определенном соответствии с крупностью грунта. Так как этот грунт неоднородный, то при изменении скорости течения, меняется не только концентрация транспортируемых наносов, но и их гранулометрический состав — *поток сам производит отбор транспортируемых фракций.* Вследствие грядового рельефа дна и циклического характера деформаций эффекты отмостки, которые могли бы ограничивать этот отбор, проявляются редко и в слабой форме. Одновременное действие на концентрацию и на крупность наносов производят также колебания вязкости (температуры воды).

Таким образом, на участке, где состав донных отложений приблизительно одинаков, а на равнинной реке длины таких участков могут измеряться сотнями километров, расход русловых наносов имеет лишь опосредованную связь с крупностью транспортируемых частиц. Практически он полностью определяется состоянием потока и физическими свойствами воды

$$q_s = \mathrm{fct}\,(U,\ H,\ g,\ \rho,\ \mu). \qquad (22.4)$$

Вязкость входит в это функциональное соотношение через ее влияние на гидравлическую крупность наносов и на неразмывающую скорость. Чем больше вязкость, тем более высокой может быть концентрация взвешенных наносов данного диаметра, но тем выше должна быть и скорость, способная сдвинуть их со дна. Так как два этих эффекта влияют на расход наносов противоположным образом, то итоговое действие изменений вязкости представляется сложным. На основании экспериментов Б. Тэйлора, В. Ванони [234] и Ч. Янга [251], по-видимому, можно считать, что концентрация и расход очень мелких частиц ($d < 0{,}2$ мм) с увеличением вязкости падают, а более крупных — растут. Суммарный расход мелких и крупных фракций получается мало меняющимся с колебаниями вязкости. Если к тому же эти колебания невелики, то, учтя, что g и ρ есть практически

постоянные величины, соотношение (22.4) можно представить в более простом виде

$$q_s = \text{fct}(U, H). \tag{22.5}$$

В расчетах обычно принимают, что функция (22.5) степенная

$$q_s = k_s H^m U^n. \tag{22.6}$$

Размерный коэффициент k_s и показатели степени m и n определяются по натурным данным. Так как влияние скорости на расход наносов гораздо сильнее влияния глубины, то можно заранее положить, как делали Леви [83] и де Врис [244], показатель $m = 0$, т. е. использовать формулу

$$q_s = k_s' U^n \tag{22.7}$$

с новым размерным коэффициентом. Значения коэффициентов k_s и k_s' на разных реках и участках могут быть разными. Приведем два примера построения таких локальных формул.

Использовав материалы повторных промеров глубин на 13 участках рек Волги, Оки, Ветлуги и Вычегды, автор рассчитал интенсивность деформаций дна и сопоставил ее с данными об изменении размеров поперечных сечений и средних скоростей течения по длине участков. Бóльшая часть наблюдений была произведена во время весеннего паводка. Деформации в 11 случаях состояли из намыва дна и в 2 случаях — из размыва. Средняя крупность донных отложений на всех участках была близка к 0,4 мм. Это позволило рассматривать данные по всем четырем рекам как однородный массив. Анализ полученных результатов показал, что они хорошо согласуются с выражением для расхода наносов (22.6). После подстановки опытных значений постоянных оно приобрело вид

$$q_s = 5 \cdot 10^{-5} H U^3. \tag{22.8}$$

Среднее квадратичное отклонение наблюденных скоростей деформаций от рассчитанных с помощью формулы (22.8) составляет около 15%.

Соотношение вида (22.7) было использовано в расчетах деформаций русла р. Днепра в нижнем бьефе Каневской ГЭС, выполненных под руководством И. Л. Розовского [112]. Показатель степени n был принят, в соответствии с формулой Великанова (20.2), равным 4, а значения постоянной k_s' устанавливались по измеренным расходам наносов. Они получились: на подъеме паводка $15 \cdot 10^{-5}$ с³/м², на спаде $5{,}7 \cdot 10^{-5}$ с³/м². Средняя крупность донных отложений р. Днепра на рассмотренном участке составляет 0,47 мм. К русловым фракциям в измеренных расходах наносов были отнесены частицы крупностью более 0,1 мм. Большая разница в значениях коэффициента k_s' на подъ-

еме и на спаде паводка, возможно, связана с условностью этой границы. Использование в качестве исходных данных объемов русловых деформаций, а не измеренных расходов наносов есть единственное средство избавиться от таких условностей.

22.2. Общий обзор методов расчета. Применение разностей аппроксимации уравнения деформации

Расчет русловых деформаций при необходимости учитывать их влияние на свободную поверхность потока представляет собой сложную задачу, связанную с трудоемкими вычислениями. Задача решается путем последовательных приближений. Сначала деформации рассчитываются за некоторый ограниченный интервал времени при фиксированном положении свободной поверхности. Затем кривая свободной поверхности перестраивается с учетом полученных деформаций. Далее в скорости и глубины вводятся поправки, отвечающие изменившимся высотам свободной поверхности, и расчет деформаций делается еще раз. Обычно это второе приближение считается достаточным и после него переходят к следующему временно́му интервалу. При чаще всего применяемых разностных способах решения уравнения деформации временно́й интервал между двумя последовательными построениями кривой свободной поверхности бывает разбит на ряд более мелких шагов. Когда расчет деформаций делается во втором приближении, значения глубин и скоростей на границах шагов определяют в предположении, что высоты свободной поверхности при переходе от одного ее положения к другому меняются по линейному закону.

В составе всей процедуры расчетов принципиальное значение имеет решение уравнения деформации. В дальнейшем мы и сосредоточим внимание на этой задаче. Свободную поверхность потока будем считать фиксированной. В общем случае расчетов это предположение применяется на отдельных этапах последовательных приближений, но если деформации слабо влияют на профиль свободной поверхности, оно действительно без ограничений по времени, или точнее, пока мы считаем постоянным расход воды. Случаи, когда влиянием деформаций на свободную поверхность можно пренебрегать, не так уж редки. С ними мы встречаемся, когда нас удовлетворяет расчет деформаций за относительно короткий промежуток времени, когда деформации охватывают короткий участок русла и когда деформации знакопеременные, так что сглаженная поверхность дна не изменяет заметно своего высотного положения.

Решать уравнение деформации можно двумя путями. Первый, более простой, состоит в том, что разностная аппроксимация применяется к уравнению деформации в его общем виде, и выражение для расхода наносов вводится в разностное

уравнение. Второй путь состоит в том, что выражение расхода наносов вводится в дифференциальное уравнение деформации. Как правило, это приводит к квазилинейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка. Зависимой переменной в нем может быть высота дна Z_0, средняя глубина H или площадь живого сечения ω. Так как уравнение относится к гиперболическому типу, его удобно решать методом характеристик.

Рассмотрим первый путь решения. Кроме простоты, его достоинством является возможность применять любую формулу расхода наносов. При ручном счете последовательность операций следующая. Поток разбивается на участки конечной длины Δl. На момент времени t_k нам известны (по натурным данным или из расчета за предшествующие промежутки времени) средние глубины граничных сечений. Ширины русла, а если нужно и крупность донных отложений, входят в состав исходных данных. Зная расход воды, находим средние скорости в граничных сечениях, а затем по выбранной формуле значения расхода наносов $Q_s = Bq_s$. Для определения деформации в i-том сечении за малый промежуток времени $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ применяем разностную запись уравнения деформации (17.5)

$$\omega(l_i,\ t_{k+1}) = \omega(l_i,\ t_k) + \frac{Q_s(l_i,\ t_k) - Q_s(l_{i-1},\ t_k)}{(1-\varepsilon)\,\Delta l}\,\Delta t. \quad (22.9)$$

Приращение расхода наносов выражено здесь через левую разность его значений в граничных сечениях с учетом того, что расход наносов связан с площадью поперечного сечения обратной зависимостью. Средние глубины в граничных сечениях на момент t_{k+1} находят, деля полученные площади на ширины сечений, средние высоты дна определяют, вычитая эти глубины из высот свободной поверхности.

Из имеющихся предложений по способам машинного счета отметим разностные схемы, разработанные М. де Врисом [245] и Дж. Кунге, Н. Пердро [168].

22.3. Интегрирование способом характеристик однородного уравнения деформации

Переходим ко второму пути расчета русловых деформаций. Расчет требует наименьшего объема вычислений, а на его точность не влияет величина шага по времени, если после подстановки выражения расхода наносов в дифференциальное уравнение деформации оно оказывается однородным. С таким случаем мы встречаемся, применяя формулу расхода наносов (22.8) и все другие, в которых расход наносов является функцией глубины и скорости потока, причем его связь с глубиной *линейная*.

Так как при этом расход наносов по всему живому сечению выражается формулой

$$Q_s = Bq_s = BHf(U) = \omega f\left(\frac{Q}{\omega}\right), \tag{22.10}$$

то снова удобно воспользоваться уравнением деформации (17.5). Подставив в него выражение расхода наносов (22.10), после элементарных преобразований получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{1-\varepsilon}\left(f + \omega \frac{df}{d\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial l} = 0. \tag{22.11}$$

Напишем эквивалентную этому уравнению систему характеристических уравнений

$$\frac{dt}{1} = -(1-\varepsilon)\frac{dl}{f + \omega \frac{df}{d\omega}} = \frac{d\omega}{0}. \tag{22.12}$$

Как видно, характеристики уравнения (22.11) представляют собой прямые линии на волновой плоскости (l, t). Такой вид характеристик обусловлен однородностью уравнения (22.11) и отсутствием в нем переменных параметров. В силу того, что $\frac{d\omega}{dt} = 0$, на каждой из характеристик сохраняется постоянное значение площади живого сечения $\omega_i = \omega(l_i, 0)$. Иными словами, *характеристики есть «графики движения» фиксированных площадей* ω_i, и деформации русла могут быть представлены как результат этого движения. Угол наклона характеристик к оси t, определяемый соотношением

$$\frac{dl}{dt} = -(1-\varepsilon)\left(f + \omega \frac{df}{d\omega}\right), \tag{22.13}$$

выражает скорость движения площадей.

Порядок расчета русловых деформаций следующий. Располагая распределением площадей живых сечений на начальный момент времени $t = 0$, выбираем ряд характерных сечений с площадями $\omega_1 = \omega(l_1, 0)$, $\omega_2 = \omega(l_2, 0)$, ..., $\omega_i = \omega(l_i, 0)$, ... Подставляя значения этих площадей в правую часть (22.13), строим семейство характеристик. Когда характеристики построены, взяв некоторый момент времени $t_k > 0$, проводим на чертеже линию $t = t_k$. Снеся точки пересечения этой линии с характеристиками на ось l, получаем координаты площадей ω_i в момент t_k (рис. 93). После этого надо снова обратиться к начальному распределению площадей и найти в каждом из мест, куда переместились площади ω_i, разность $\omega(l, 0) - \omega_i$. Деление этих разностей на ширины сечений дает приращения средних отметок дна и средних глубин за время t_k

$$Z_0(l, t_k) - Z_0(l, 0) = H(l, 0) - H(l, t_k) = \frac{\omega(l, 0) - \omega_i}{B(l)}. \tag{22.14}$$

Выбор момента t_k ограничивается лишь двумя условиями: 1) время t_k не должно быть больше того времени, в течение которого расход воды считается постоянным, 2) полученные абсолютные приращения глубин не должны быть больше определенной доли начальных глубин (ориентировочно $0{,}1H$). Без соблюдения последнего условия нельзя продолжать пользоваться начальной кривой свободной поверхности.

Так как малые площади перемещаются быстрее больших, то возможны так называемые *перехлесты* — пересечения двух смежных характеристик. На рис. 93 они обозначены буквами A и B. Математически перехлест представляет собой разрыв ре-

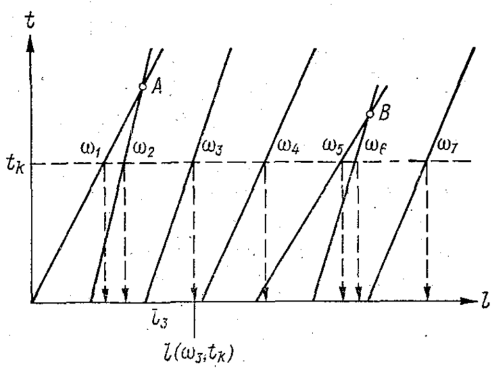


Рис. 93. К интегрированию уравнения деформации способом характеристик.

шения уравнения, деформации, физически — образование в русле реки гряды или переката с отрывом потока на гребне. Движение воды здесь перестает быть плавно изменяющимся, однако скорость перемещения возникшего разрыва можно определить, используя способ применяемый в газовой динамике для определения скорости распространения ударных волн. Не излагая вывода, который в общем виде изложен в книге С. К. Годунова и В. С. Рябенького [22], приведем конечный результат

$$c_{\text{разр}} = -\frac{\delta Q_s}{(1-\varepsilon)\,\delta\omega}. \qquad (22.15)$$

Здесь $\delta\omega$ — разность площадей на двух пересекающихся характеристиках; δQ_s — разность расходов наносов по обе стороны разрыва. При продвижении разрыва величина $\delta\omega$ сохраняется, а разность средних глубин (высота гряды или переката) меняется по закону

$$\delta H = \frac{\delta\omega}{B(l)}. \qquad (22.16)$$

22.4. Интегрирование неоднородного уравнения деформации

Если связь расхода наносов с глубиной потока нелинейная или отсутствует (как в формулах вида (22.7) и русло имеет переменную ширину, уравнение деформации после подстановки в него выражения расхода наносов становится неоднородным. Занимаясь его интегрированием, мы в целях общности не будем связывать решение с какой-нибудь определенной формулой расхода наносов или с какой-нибудь определенной структурой формулы, а воспользуемся функциональным соотношением (22.5), условившись лишь, что рассмотренный в п. 22.3 случай $q_s \sim Hf(U)$ не имеет места. Производная от удельного расхода наносов по длине потока при этом напишется

$$\frac{\partial q_s}{\partial l} = \frac{\partial q_s}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial l} + \frac{\partial q_s}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial l}. \qquad (22.17)$$

Уравнение неразрывности (22.2) позволяет исключить отсюда производную $\partial U/\partial l$, в результате чего уравнение деформации (22.3) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial Z_0}{\partial t} = \frac{1}{1-\varepsilon}\left[\left(\frac{U}{H}\frac{\partial q_s}{\partial U} - \frac{\partial q_s}{\partial H}\right)\frac{\partial H}{\partial l} + \left(U\frac{\partial q_s}{\partial U} - q_s\right)\frac{1}{B}\frac{dB}{dl}\right]. \qquad (22.18)$$

Если свободная поверхность потока фиксирована, то $\partial Z_0/\partial t = -\partial H/\partial t$ и уравнение переписывается окончательно так:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{U}{H}\frac{\partial q_s}{\partial U} - \frac{\partial q_s}{\partial H}\right)\frac{\partial H}{\partial l} = -\frac{1}{1-\varepsilon}\left(U\frac{\partial q_s}{\partial U} - q_s\right)\frac{1}{B}\frac{dB}{dl}. \qquad (22.19)$$

Зависимой переменной в этом неоднородном квазилинейном уравнении является средняя глубина живого сечения H. Ширина B играет роль переменного параметра. Расход воды постоянный. Обозначив множитель при производной $\partial H/\partial l$ через Θ_1, а правую часть уравнения (22.19) через Θ_2, можем, следовательно, написать

$$\Theta_1 = \Theta_1(H, B), \quad \Theta_2 = \Theta_2\left(H, B, \frac{dB}{dl}\right). \qquad (22.20)$$

Составим в этих обозначениях эквивалентную уравнению (22.19) систему характеристических уравнений

$$\frac{dt}{1} = \frac{dl}{\Theta_1} = -\frac{dH}{\Theta_2}. \qquad (22.21)$$

Характеристики уравнения (22.19) представляют собой кривые в трехмерном пространстве (l, t, H). Система (22.21) позволяет интерпретировать одномерные русловые деформации как

результат *перемещения отмеченных точек продольного профиля дна*. Это перемещение аналогично движению невзаимодействующих частиц, обладающих некоторым одним свойством или модусом, влияющим на скорость частиц и могущим меняться по ходу движения [57, с. 126—131]. В рассматриваемом нами процессе таким модусом служит глубина H.

Проекции трехмерных характеристик уравнения (22.19) на плоскость (l, t) представляют «графики движения» отмеченных точек. Они тоже называются характеристиками. Наклон касательных к этим проекциям выражает скорость точек вдоль оси l

$$\frac{dl}{dt} = \Theta_1 = \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{U}{H}\frac{\partial q_s}{\partial U} - \frac{\partial q_s}{\partial H}\right). \qquad (22.22)$$

Проекции трехмерных характеристик на плоскость (t, H) определяют изменение глубины H со временем движения отмеченных точек. Проекции на плоскость (l, H) есть траектории отмеченных точек. Соединив точки траекторий, отвечающие одному и тому же моменту времени, будем иметь на плоскости (l, H) мгновенный продольный профиль дна. При выполнении расчетов профиль в момент времени $t = 0$ должен быть задан. Задача расчетов состоит в построении профилей для последующих моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$

Заметим, что так как русловые формы смещаются вниз по потоку, начальное условие $H = H(l, 0)$ должно задаваться не только в интервале $[0, L]$, для которого ищется решение, но и на лежащем вверх от точки $l = 0$ интервале длиной $\left(\frac{dl}{dt}\right)_{ср} T$, где $\left(\frac{dl}{dt}\right)_{ср}$ — средняя скорость движения русловых форм на участке, T — период времени, для которого ведется расчет. Это замечание относится ко всем случаям применения метода характеристик.

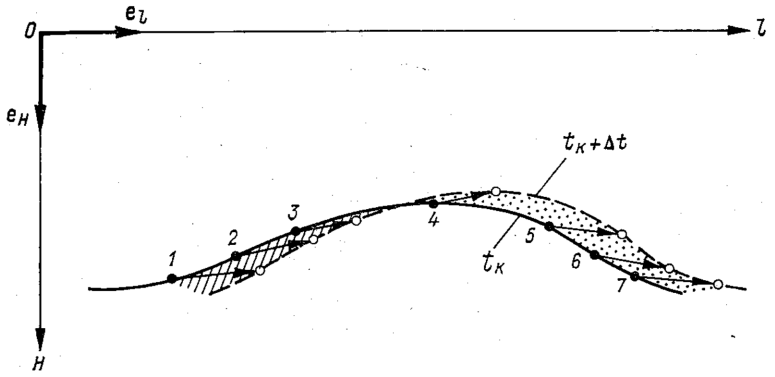


Рис. 94. Построение деформированного профиля дна с помощью уравнения (22.23).

Решение системы уравнений (22.21) приходится вести методом конечных разностей. Удобна при этом следующая графоаналитическая процедура. Располагая продольным профилем дна в момент времени t_k, находим для ряда выбранных точек профиля векторы $\Delta\mathbf{r}$ их малых смещений за малое приращение времени Δt

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta l\mathbf{e}_l + \Delta H\mathbf{e}_H = (\Theta_1\mathbf{e}_l + \Theta_2\mathbf{e}_H)\,\Delta t, \qquad (22.23)$$

где $\mathbf{e}_l$ и $\mathbf{e}_H$ — единичные векторы осей l и H, а значения функций Θ_1 и Θ_2 взяты в момент времени t_k. Построив векторы $\Delta\mathbf{r}$, соединяем их концы плавной кривой, что и дает профиль дна в момент времени $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ (рис. 94). Затем переходим к следующему моменту времени. При желании увеличить точность расчетов компоненты векторов $\Delta\mathbf{r}$ следует находить путем итераций.

23. Устойчивые участки подвижных русел

23.1. Понятие устойчивости русла. Условия временной устойчивости

Понятие «устойчивость русла» применяется в разных контекстах и поэтому должно быть дифференцировано. В этой книге мы уже пользовались понятиями *начальной* и *статистической* устойчивости русла. Напомним, что под первой из них понимается устойчивость ровного подвижного дна или прямолинейного призматического канала в несвязном грунте по отношению к бесконечно малым возмущениям. Статистическая устойчивость означает неизменность во времени распределений вероятности морфологических параметров протяженного участка русла.

В практических задачах представляет интерес третий род устойчивости, для которого автор предложил название *временной* устойчивости русла [33]. Этот термин относится к участкам сформировавшихся русел ограниченной длины и обозначает сохраняемость их формы и главных поперечных размеров в течение ограниченного, но достаточно долгого времени — не менее нескольких годовых гидрологических циклов. Поскольку речь идет о главных поперечных размерах русла, флуктуации поверхности дна, вызванные движением гряд, а также сезонные изменения высоты гряд не принимаются во внимание. Отсюда не накладывается ограничений и на интенсивность транспорта русловых наносов. В настоящем параграфе мы будем заниматься этим родом устойчивости.

Из уравнения деформации и формул расхода наносов следует, что необходимым условием неизменяемости русла в рамках

одномерной модели руслового потока служит постоянство на длине участка средней скорости течения: $\partial U/\partial l = 0$. Сложная морфология естественных русел и колебания стока заставляют в связи с этим поставить два вопроса: 1) на какой длине естественного русла средняя скорость может быть приблизительно постоянной; 2) может ли условие $\partial U/\partial l = 0$ соблюдаться независимо от высоты и фазы колебания уровней?

Ответ на первый вопрос дает теория начальной устойчивости. Если устойчивость ровного дна в двумерной задаче нарушается случайными возмущениями с длинами волн порядка глубины h, устойчивость пространственной конфигурации прямолинейного призматического канала нарушается случайными возмущениями с длинами волн порядка ширины потока B. Отсюда непосредственно следует, что порядок B должны иметь и длины участков, обладающих временной устойчивостью в сформировавшемся естественном русле. Устойчивые участки естественных русел это *прямолинейные или слабоизогнутые плёсовые лощины корытообразной формы*. Длины таких плёсовых лощин составляют примерно от 5 до 20 ширин русла. Если их берега незатопляемы, они могут сохранять свою форму и поперечные размеры в течение десятков и сотен лет. Заметим, что короткие и мелкие плёсовые лощины в реках с побочневым типом руслового процесса, где весь подводный рельеф ползет вниз по течению, не бывают устойчивыми.

Ответом на второй вопрос мы уже располагаем. В п. 8 было показано, что если колебания уровней происходят достаточно медленно, движение воды на прямолинейных корытообразных участках естественных русел остается при всех наполнениях и независимо от фазы колебаний *квазиравномерным*. Напомним, что при квазиравномерном движении скорость потока меняется по его длине только в той мере, в какой изменяется расход воды. При обычной для равнинных рек интенсивности изменения расхода воды это дает значения производной $\partial U/\partial l$ порядка $(10^{-6}—10^{-5})$ $с^{-1}$. Столь малая изменяемость движения не может вызвать ощутимых деформаций русла.

Таким образом, мы имеем возможность заменить общее и недостаточно определенное условие устойчивости $\partial U/\partial l = 0$ уравнением квазиравномерного движения (8.25), которое мы для ясности перепишем в виде

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\left[\frac{H\,(gB)^{1/4}}{Q^{1/2}}\right] = 0. \qquad (23.1)$$

Уравнение (23.1) и принимается дальше за основное условие временной устойчивости подвижных русел.

Если эталоном участков, где уравнение (23.1) выполняется, служит корытообразная *плёсовая лощина*, то примеры участков, где оно не выполняется и где русло интенсивно деформируется, дают *перекаты*.

В расчетах устойчивости русел по крайней мере одна из трех величин H, Q, B бывает неизвестна. Поэтому для решения практических задач необходимо располагать численными значениями локальной постоянной M. В п. 8.3 указывалось, что определенные по натурным данным значения M варьируют в относительно узких пределах — от 0,5 (галечно-валуннное русло) до 2,0 (торф). Уже эти общие сведения указывают на связь величины M с характером поверхности дна, т. е. с гидравлическим сопротивлением русла. Тот же вывод следует из простого соображения, что вариации M могут быть обусловлены только факторами, которые не входят в зависимости квазиравномерного движения. Единственным таким фактором является сопротивление русла, исключенное с самого начала построений в п. 8.2 в силу равенства $I = I_f$.

В соответствии с данными п. 7 следует раздельно рассматривать значения постоянной M в руслах, сложенных крупными частицами, где сопротивление движению потока обусловлено зернистой шероховатостью дна (русла класса I), и ее значения в руслах, состоящих из мелких частиц, где сопротивление определяется в основном грядовой макрошероховатостью (русла класса II).

В руслах класса I величина M должна зависеть от относительной зернистой шероховатости d/H, однако ввиду локальной инвариантности M эта зависимость должна действовать лишь при переходе от одного устойчивого участка к другому, не проявляя себя при колебаниях уровней на отдельно взятом участке. Вытекающее отсюда условие локальной инвариантности d/H может осуществляться при очень совершенном регулировании потоком крупности поверхностного слоя донных отложений. Практически достаточно, чтобы влияние локальных вариаций d/H не выходило за границы точности опытного определения значений M. Это все же означает, что связь между M и d/H должна быть не очень сильной.

В руслах класса II допустимо считать, что определяющая их сопротивление грядовая макрошероховатость регулируется потоком по некоторым универсальным законам, совсем не связанным с крупностью донных частиц. Так как гидравлические элементы потока (глубина H и скорость U) входят в зависимости квазиравномерного движения, то отсюда вытекает, что постоянная квазиравномерного движения M должна иметь на всех устойчивых цилиндрических участках этих русел приблизительно одно и то же значение.

Таковы соображения, которые могут быть высказаны априори. Чтобы стать достоверными, они должны быть проверены опытом.

Что касается русел, проложенных потоками в связных грунтах (глина, суглинки, торф), то сформулировать какие-нибудь общие положения о поведении в них постоянной M трудно.

Приходится встать здесь на путь чисто эмпирического исследования.

Особый вопрос представляет влияние на величину M высоких концентраций взвешенных наносов. Так как действие на поток высоких концентраций взвешенных наносов аналогично действию добавочной шероховатости, такое влияние нельзя заранее исключить.

После этих предварительных замечаний перейдем к анализу опытных данных. Начнем с наиболее обширного и наиболее изученного класса подвижных русел с мелкозернистыми донными грунтами.

23.2. Устойчивые участки с мелкозернистыми донными грунтами

Вычисление опытных значений постоянной M велось при использовании натурных данных по формуле (8.25), а при использовании лабораторных экспериментов — по выражению

$$M=\frac{R\,(g\chi)^{1/4}}{Q^{1/2}}, \tag{23.2}$$

где χ — смоченный периметр; R — гидравлический радиус сечения.

Основным натурным материалом послужили данные измерений на 35 гидрометрических створах 25 равнинных рек СССР, протекающих в песчаных и песчано-гравелистых грунтах (табл. 4). Все выбранные створы расположены на устойчивых, корытообразных участках русел. По каждому створу были взяты за один год три измерения: при наибольшем, наименьшем и близком к среднему расходах воды из числа измеренных. Всего, таким образом, было взято 105 измерений. Крайние значения гидравлических элементов потока в этих измерениях приведены в табл. 5.

На рис. 95 представлен график функции (8.27) $H=\mathrm{fct}\,(l_Q)$, построенный по точкам измерений. Как видно на этом рисунке, все точки расположились около одной прямой, т. е. для всего рассмотренного ряда участков мы имеем одно значение постоянной квазиравномерного движения

$$M=0{,}92\pm 0{,}12.$$

Коэффициент вариации опытных значений M составил $0{,}12:0{,}92=0{,}13$. Значения M по отдельным створам (средние из трех измерений) приведены в табл. 4. Эти средние отличаются от средних по всем измерениям на данном гидростворе за год не более чем на $\pm 4\%$.

Основательное исследование значений постоянной M было произведено по материалам гидрометрических работ на реках Польши М. Я. Лошем [204]. Были использованы 112 измерений

Таблица 4

Устойчивые гидрометрические участки

Река	Створ	Год измерений	Расстояние от устья, км	Площадь водосбора, тыс. км²	*M*
	Бассейн Белого и Баренцева морей				
Печора	Троицко-Печорск	1962	1359	35,6	0,77
„	Усть-Цильма	1962	425	248	0,97
Уса	Адьзва	1962	165	54,7	0,91
Вычегда	Федяково	1962	73	112	0,79
Вымь	Половники	1962	57	25,1	1,03
Вага	Усть-Сюма	1962	57	43,9	0,91
	Бассейн Балтийского моря				
Западная Двина	Велиж	1962	724	17,6	0,95
„ „	Даугавпилс	1962	267	64,6	0,94
Неман	Друскининкай	1962	450	37,1	0,92
Нерис (Вилия)	Вильнюс	1962	165	15,2	0,93
	Бассейн Черного и Азовского морей				
Днепр	Орша	1962	1645	18,0	1,03
„	Вышгород	1962	903	239	0,73
„	Киев	1956	880	328	0,93
Сож	Славгород	1962	296	17,7	0,89
Припять	Мозырь	1962	192	97,2	1,05
„	Чернобыль	1962	32	106	0,94
Северский Донец	Изюм	1962	595	22,6	1,03
Оскол	Ниновка	1962	309	6,3	0,78
	Бассейн Каспийского моря				
Волга	Старица	1962	3344	21,1	0,95
„	Горький	1962	2361	234	0,79
„	Чебоксары	1953	2072	604	0,94
„	Поляна им. Фрунзе	1955	1481	1210	0,94
Молога	Устюжна	1955	70	19,4	1,02
Ока	Муром	1962	211	188	0,89
Кама	Сокольи Горы	1951	204	504	0,96
Белая	Уфа	1962	478	100	0,88
„	Бирск	1962	272	121	1,01
	Бассейн Карского моря				
Обь	Колпашево	1962	2400	481	1,09
Томь	Томск	1953	68	57,3	0,78
Чулым	Тегульдет	1962	598	59,2	0,91
„	Коммунарка	1962	131	131	0,87
Иртыш	Тобольск	1962	637	969	1,06
Тагил	Трошкова	1962	80	7,9	0,79
Таз	Таз	1962	357	89,1	0,76
	Бассейн Тихого океана				
Амур	Комсомольск-на-Амуре	1957	583	1720	0,96

Таблица 5

Крайние значения гидравлических элементов на 35 гидрометрических участках

	Q м³/с	U м/с	B м	H м
Максимум	34 500	1,87	1540	15,8
Минимум	7,4	0,29	48,6	0,51

на 28 гидростворах 11 рек: Вислы, Сана, Буга, Нарева и Вепша с притоками. Среднее значение M по всем измерениям оказалось равным 1,13. При исключении измерений на 13 гидростворах, за-

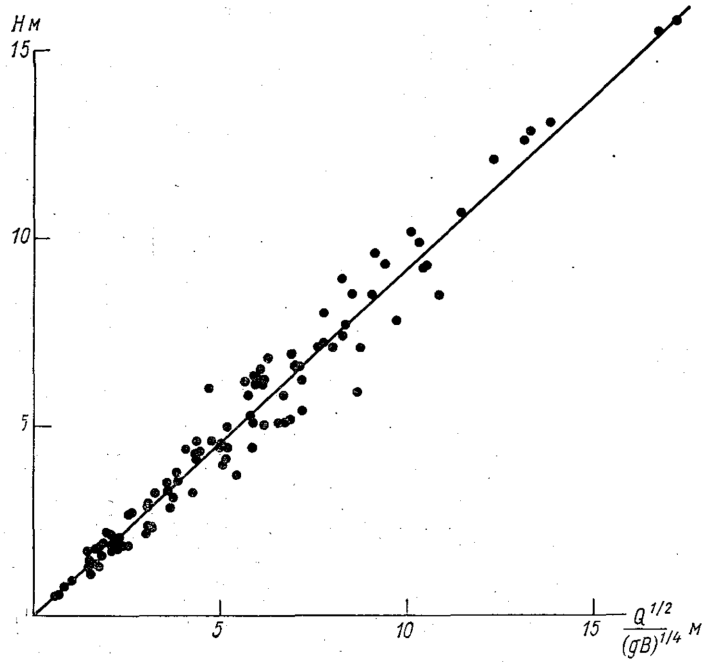


Рис. 95. Универсальность постоянной M в руслах с мелкозернистыми грунтами. Измерения на 35 створах 25 равнинных рек СССР.

мыкающих бассейны площадью менее 5000 км² (многие из рек с такими бассейнами протекают в торфяниках), среднее значение M получилось равным 0,92, что совпадает с нашим результатом. В статье Лоша приведены также графики для двух гидростворов на р. Вепш, иллюстрирующие локальную инвариантность M. Еще одно независимое свидетельство стабильности

значений M в руслах с мелкозернистыми грунтами дают результаты довольно давнего исследования Ю. В. Чернова [144]. Обработав методом анализа размерностей данные по нескольким гидростворам на устойчивых участках рек бассейна Каспийского моря (40 измеренных расходов воды), Чернов получил эмпирическую формулу средней скорости

$$U = k\sqrt{\frac{g}{B}}\, h_{\text{макс}}^{0,75} H^{0,25}, \tag{23.3}$$

где $k \approx 1$. По данным таблицы, приведенной в статье Чернова, устанавливается, что среднее значение отношения $h_{\text{макс}}/H$ в использованном ряду измерений равно 1,57. Введя это значение в формулу (23.3), получаем

$$U = 1{,}4\sqrt{\frac{g}{B}}\, H, \tag{23.4}$$

т. е. формулу (8.29) при $M = 0{,}85$.

Перейдем к лабораторным экспериментам. Мы располагаем в настоящее время четырьмя циклами экспериментов, в которых исследовалось транзитное движение донных наносов в условиях развитого взаимодействия между потоком и руслом, т. е. при волнообразной поверхности дна. При этом рельефе дна признаком транзитного движения наносов служит неизменяемость статистических параметров донных волн во времени и по длине потока. Необходимое условие транзита наносов состоит в равномерном движении потока. Четыре цикла экспериментов, о которых идет речь, это опыты Е. М. Лорсена [199], Н. П. Гая, Б. В. Саймонса и Е. В. Ричардсона [186], В. А. Ванони и Ли-сан Фана [243], С. П. Гарга, А. К. Агравала и П. Р. Синга [182]. Наиболее крупным был второй из этих циклов, проведенный в лотке шириной 2,44 м в Колорадском университете США. В 338 опытах этого цикла был обследован широкий диапазон чисел Фруда, охватывающий как спокойные, так и бурные течения.

Так как исходная концепция временной устойчивости подвижных русел имеет в виду спокойные течения с развитым движением донных волн, то для получения репрезентативных значений постоянной M необходимо было отобрать опыты, удовлетворяющие этим условиям. Их наличие устанавливалось с помощью двух следующих неравенств:

$$\text{Fr}_R \equiv \frac{U^2}{gR} \leqslant 0{,}2, \tag{23.5}$$

$$\frac{h_r}{R} \geqslant 0{,}05. \tag{23.6}$$

Первое неравенство приближенно определяет область значений чисел Фруда, которые встречаются у равнинных речных

потоков с песчаными и песчано-гравелистыми донными отложениями. В лабораторных лотках при $Fr_R > 0{,}2$ наблюдается смыв донных гряд. Второе неравенство приближенно определяет область значений высоты донных волн, в которой рельеф подвижного дна можно считать полностью развитым. Волны с высотой $h_r < 0{,}05R$ встречаются только в начальной стадии формирования волнообразного рельефа дна при скоростях, лишь немного превосходящих неразмывающую. Использовать неравенство (23.6) в четвертом цикле экспериментов оказалось невозможно, так как статья Гарга, Агравала и Синга не содержит сведений о рельефе дна. Поэтому данные четвертого цикла экспериментов будут рассмотрены отдельно от данных трех первых циклов. Из общей совокупности 386 опытов, принадлежащих к трем первым циклам, условиям (23.5), (23.6) удовлетворяет 131 опыт. Они и были использованы в дальнейшем анализе. Отобранные опыты охватывают практически весь диапазон крупности песчаных частиц — от 0,1 до 0,93 мм. В одной из серий опытов Колорадского университета был применен почти однородный песок. В другой серии было исследовано поведение искусственно приготовленной очень неоднородной смеси частиц. Во всех остальных опытах гранулометрический состав был естественным. На рис. 96 представлен график функции (23.2) в осях R, $l_Q \equiv Q^{1/2}/(g\chi)^{1/4}$, построенный по опытным точкам. Простого сравнения рис. 96 с рис. 95 достаточно для того, чтобы убедиться в практической тождественности результатов измерений в лабораторных лотках и в реках. Среднее (по 131 опыту) значение $M = 0{,}91 \pm 0{,}12$, т. е. оно практически такое же, как по гидрометрическим данным.

В опытах, результаты которых показаны на рис. 96, величина относительной зернистой шероховатости d_{50}/R менялась от 0,00033 до 0,00530, а объемная концентрация взвешенных наносов S — от 0 до 0,025. В указанных широких диапазонах изменения d_{50}/R и S нельзя заметить какое-нибудь влияние этих величин на постоянную M. Никак не сказывается на значениях M и степень неоднородности грунта.

Е. Лорсен, помимо опытов с транспортом песчаных частиц крупностью 0,1 мм, выполнил серию опытов с очень мелкими частицами пылеватой фракции ($d_{50} = 0{,}04$ мм). Эти наносы легко переходили во взвешенное состояние, создавая объемные концентрации до 0,0377. В опытах с этими частицами было обнаружено снижение значений постоянной M с ростом концентрации, но столь медленное, что для уменьшения M с 0,9 до 0,8, т. е. в пределах ее случайных вариаций, надо довести концентрацию до 550 Н/м³. У естественных потоков такая огромная концентрация может встретиться лишь в исключительных случаях. Основываясь на совокупности данных Колорадского университета и Ванони, следует, таким образом, считать, что *величина M на устойчивых участках равнинных рек не зависит от концентрации взвешенных наносов.*

Опыты в Колорадском университете указывают на другой фактор, влияние которого на величину M должно быть отмечено. Согласно этим опытам, значения M при рифельном дне в среднем выше, чем при грядовом. По 43 опытам с рифелями среднее значение $M = 0{,}98$, а по 57 опытам с грядами $M = 0{,}85$. Если исключить опыты с грядами в диапазоне чисел Фруда 0,15—0,20,

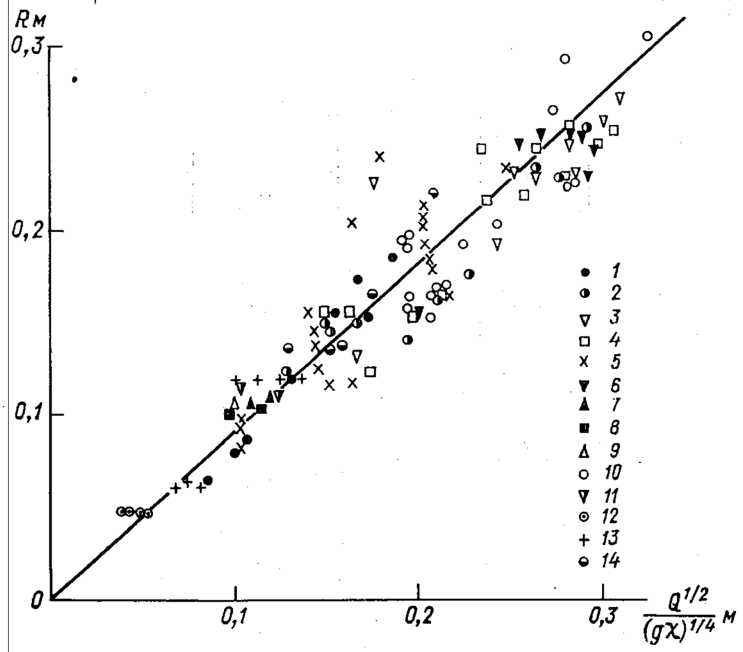


Рис. 96. Универсальность постоянной M в руслах с мелкозернистыми грунтами. Лабораторные измерения.

1 — опыты Лорсена, d_{50}=0,1 мм; *2—11* — опыты Гая, Саймонса и Ричардсона при d_{50}: *2* — 0,19 мм; *3* — 0,27 мм, *4* — 0,28 мм, *5* — 0,45 мм, *6* — 0,93 мм, *7* — 0,32 мм, *8* — 0,33 мм (однородный песок), *9* — 0,33 мм (очень неоднородная смесь), *10* — 0,47 мм (при наличии глинистой взвеси), *11* — 0,54 мм (то же); *12—14* — опыты Ванони и Фана при d_{50}: *12* — 0,23 мм, *13* — 0,137 мм, *14* — 0,206 мм.

не характерном для равнинных рек, среднее значение M при грядовом дне возрастает до 0,87, оставаясь все же на 11% меньше значения M при рифельном. Так как в реках мы встречаемся всегда с движением гряд, то практического значения эти результаты не имеют, но они подтверждают чувствительность постоянной M к характеру поверхности дна.

Опыты Гарга, Агравала и Синга, составляющие четвертый цикл исследований, велись в лотке шириной 1,22 м с песками медианной крупностью 0,29, 0,49 и 0,53 мм. В статье этих авторов приведены также данные опытов Синга с песком крупностью 0,60 мм. Всего насчитывается 82 опыта, из них к области чисел

Фруда $Fr_R < 0{,}2$ относятся 52. Среднее значение M по этим 52 опытам составляет 0,965[1].

Для полноты картины приведем в заключение полные данные трех опытов М. Крикмора [167], выполненных с целью изучить влияние ширины лотка на характер донных волн (табл. 6). Медианная крупность песка составляла 0,6 мм. Значения M для всех трех опытов близки к 0,9.

Таблица 6

Данные опытов М. Крикмора

B м	Q м³/с	χ м	R м	$\frac{Q^{1/2}}{(g\chi)^{1/4}}$ м	$\frac{U^2}{gR}$	M
1,52	0,118	1,89	0,147	0,165	0,127	0,89
0,92	0,078	1,29	0,134	0,147	0,153	0,91
0,46	0,040	0,83	0,103	0,119	0,218	0,87
					Средн.	0,89

Заканчивая на этом рассмотрение опытных данных, можно видеть, что все они с редким согласием подтверждают универсальность постоянной M в классе устойчивых участков с мелкозернистыми грунтами и дают ей одно и то же численное значение 0,9. Это значение M служит важным дополнением к условию устойчивости (23.1). Учтя случайные вариации опытных значений M и приняв с округлением их среднее квадратичное отклонение равным 0,15, сформулируем полное условие временной устойчивости русел с мелкозернистыми грунтами следующим образом: *устойчивы те участки русел, где величина M не изменяет своего значения при колебаниях расхода воды, причем это значение лежит в интервале*

$$0{,}75 \leqslant M \leqslant 1{,}05. \qquad (23.7)$$

Значения M, большие 1,05 и меньшие 0,75, образуют две области неустойчивости. К первой из них, где значения M велики, относятся участки с недостаточной транспортирующей способностью потока. Здесь возможно *заиление русла.* Ко второй, где значения M малы, относятся участки с повышенной транспортирующей способностью потока. Здесь возможна *эрозия дна.*

Подставив значение $M = 0{,}9$ в формулу (8.26), будем иметь

$$\frac{H}{B} = 0{,}7\mathrm{Fr}, \qquad (23.8)$$

или *относительная глубина устойчивых участков рек с мелкозернистыми донными грунтами прямо пропорциональна кинетично-*

[1] График функции (23.2) по опытам Гарга и др. приведен в книге [33].

сти потока. Как эмпирический факт, это было отмечено С. Т. Алтуниным [3], в классификации рек которого они расположены в порядке возрастания ширины и убывания числа Фруда.

Из формулы (23.8) следует также, что *если потоки на двух устойчивых участках рек с мелкозернистыми донными грунтами геометрически подобны, они подобны и динамически.*

Кратко остановимся на роли, которую играет во временной устойчивости русла его кривизна. Устойчивые плёсовые лощины не всегда прямые. Поэтому важно знать, каково то предельное значение кривизны русла, до достижения которого допустимо пользоваться в качестве признака устойчивости неравенствами (23.7). Для ответа на этот вопрос была выполнена обработка данных по 23 участкам четырех меандрирующих рек: Верхней Сухоны, Десны, Верхнего Дона и Иртыша. Грунт дна на всех участках песчаный. На каждом участке были определены при меженном уровне элементы потока в сечении с наибольшей глубиной и радиус кривизны вогнутого берега R_2. Сопоставление значений безразмерной средней глубины сечения $H(gB)^{1/4}/Q^{1/2}$ со значениями относительной кривизны русла B/R_2 показало, что связь между этими величинами практически отсутствует (значения безразмерной средней глубины остаются в среднем близкими к 0,9), пока относительная кривизна не превзойдет 0,15—0,20 (радиус кривизны вогнутого берега R_2 не станет меньше 6—5 ширин русла). Значение относительной кривизны 0,15 и следует считать предельным при пользовании неравенствами (23.7). В области больших значений кривизны $B/R_2 > 0{,}3$ безразмерная средняя глубина сечений быстро растет и на крутых изгибах русла достигает значений 4—5.

23.3. Устойчивые участки с крупнозернистыми грунтами

Для изучения связи между значениями постоянной M и зернистой шероховатостью русел с крупнозернистыми донными грунтами были использованы измерения расходов воды и одновременно взятые пробы донных отложений на шести горных и предгорных участках рек СССР. За репрезентативный диаметр донных частиц был взят медианный диаметр d_{50}. Значения d_{50}, полученные на разных вертикалях, осреднялись по ширине сечения. Если число вертикалей было больше четырех, пробы на прибрежных вертикалях не принимались во внимание. Неоднородность грунта в галечно-валунных руслах очень велика и диаметр d_{50} отнюдь не является исчерпывающей характеристикой крупности донных частиц. Это придает подсчетам ориентировочный характер. Полученная связь между значениями постоянной M и относительной гладкостью дна H/d_{50} представлена на рис. 97. Кроме точек по шести створам с крупнозернистыми грунтами, на этот график нанесены точки, по четырем створам

с мелкозернистыми (песчаными и илистыми) грунтами. Совместное рассмотрение двух групп точек дает возможность определить границу влияния на величину M зернистой шероховатости дна. Основные сведения о 10 использованных створах приведены в табл. 7.

Хотя опытные точки в области малой гладкости русла сильно разбросаны, они не только указывают на систематическое уменьшение значений постоянной M с уменьшением гладкости, но и

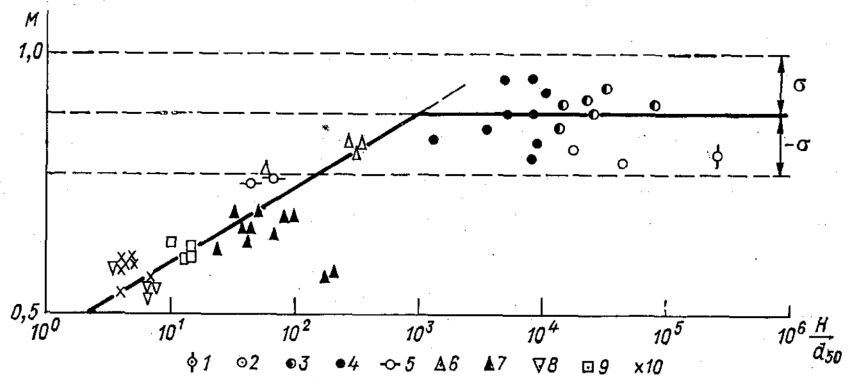


Рис. 97. Связь постоянной M с относительной гладкостью русла.
1—10 — соответствуют номерам в табл. 7.

дают возможность наметить соответствующую линию связи. Ее уравнение записывается в виде

$$M=0{,}151\lg\frac{1000H}{d_{50}}. \qquad (23.9)$$

Точке пересечения графика уравнения (23.9) с прямой $M=0{,}9$ отвечает значение $H/d_{50}=1000$. Учтя рассеяние опытных точек, представляется правильным, однако, принять в качестве расчетной границы влияния на величину M зернистой шероховатости значительно меньшее значение $H/d_{50}\approx 200$ или $d_{50}/H\approx 0{,}005$. Лабораторные данные, приведенные в п. 23.2, согласуются с этими цифрами, поскольку ими не обнаруживается влияние зернистой шероховатости на величину M во всей области $d_{50}/H\leqslant 0{,}005$. В табл. 8 приведены значения M, подсчитанные по нескольким гидрствторам на реках с галечно-валунными грунтами, относительно крупности которых нет количественных данных. Порядок значений M в этих створах хорошо согласуется с порядком значений M на рис. 97.

Некоторые исследователи пытались строить связи постоянной M в таких реках с уклоном свободной поверхности. Подобные связи имеют ограниченное значение — они действительны только для той группы объектов, из которой взяты исходные

Таблица 7

Гидрометрические створы с различной крупностью донных отложений

№ усл. обозначений на рис. 97	Бассейн	Река	Створ	Расстояние от устья, км	Площадь водосбора, тыс. км²	Годы измерений	Число измерений	d_{50}, мм	
								макс.	мин.
1	Карское море	Обь	Салехард	312	2450	1962	1	0,04	0,04
2	Каспийское море	Волга	Горький	2354	479	1955	2	0,20	0,20
3	То же	„	Чебоксары	2072	604	1952—53	6	0,40	0,10
4	„	„	Поляна им. Фрунзе	1481	1210	1952—55	10	5,0	0,55
5	„	Колва	Петрецова	237	2,83	1961—62	2	40	35
6	Оз. Саумал-Куль	Чу	Таш-Уткуль	657	19,1	1947	4	19	5,0
7	Оз. Балхаш	Асса	Маймак	230	2,85	1948,51, 53,58	12	16	5,0
8	„	Баскан	«Энергия»	153	0,90	1962—63	4	100	100
9	„	Талгар	Талгар	77	0,43	1963	4	78	50
10	„	Коктал	Арал-Тюбе	27	0,29	1962—63	7	100	100

Таблица 8

Значения постоянной M на некоторых гидростворах рек с галечно-валунными донными грунтами

Река	Гидроствор	Расстояние от устья, км	Площадь водосбора, тыс. км^2	Год измерений	Число измерений	M
Кок-Су	Кук-Креу	48	3,82	1962	23	0,52
Бия	Турочак	194	25,4	1962	25	0,50
Енисей	Кызыл	3350	112	1962	19	0,55
„	Скит	2371	288	1962	48	0,64
Ангара	Богучаны	325	883	1962	16	0,49
„	Татарка	32	1060	1962	17	0,50
Тиса	Деловое	945	1,19	1964	28	0,53

данные. Так как уклон больше зависит от скорости течения, чем от сопротивления русла, то универсальной связи между M и уклоном нет.

С физической точки зрения малые значения постоянной квазиравномерного движения M в руслах с большой крупностью донных частиц отражают затрудненность в них глубинной эрозии. При одном и том же числе Фруда поток в русле, сложенном из гальки и валунов, всегда более мелкий, чем в песчаном русле. Из всех рек Советского Союза самые большие значения отношения B/H, достигающие 700—800, имеет р. Ангара, протекающая в скальном грунте.

24. Расчет неукрепленных каналов

24.1. Постоянная M в каналах с мелкозернистыми грунтами

Существующая практика проектирования неукрепленных каналов основана в СССР на требовании иметь в них незаиляющую скорость, а в Индии, Пакистане и Египте — на применении эмпирических формул, т. н. *теории режима* [156]. Понятие «режима» в применении к подвижным руслам совпадает с нашим понятием временной устойчивости. Немногочисленные каналы, прокладываемые в крупнозернистых грунтах, рассчитываются на критическое касательное напряжение или по величине неразмывающей скорости. Так как значения неразмывающей скорости для крупных донных частиц велики, то сечения таких каналов не получаются чрезмерно большими.

И метод незаиляющей скорости и метод теории режима допускают в каналах грядовый транспорт влекомых наносов.

Вследствие общей неустойчивости системы, состоящей из турбулентного потока и подвижного прямолинейного русла, каналы с течением времени деформируются и в них приходится вести дноуглубительные работы. В каналах большой длины эти работы не могут предотвратить образование русловых мезоформ — побочней и осередков,— а затем и макроформ, т. е. перекатов и плёсов. Канал постепенно приобретает формы естественного русла. Ярким примером развития в таком направлении является Каракумский канал [2, 110].

Благодаря постоянным или мало изменяющимся расходам воды деформации каналов протекают менее интенсивно, чем деформации естественных русел. Удачно запроектированные каналы небольшой длины оказываются «режимными», т. е. обладающими временной устойчивостью. У длинных каналов, так же как у естественных русел, временной устойчивостью обладают отдельные участки. Когда мы пользуемся выражениями «удачно» или «неудачно» запроектированный канал, то это значит, что ни метод незаиляющей скорости, ни метод теории режима не дают надежного общего решения задачи создания устойчивого канала. Слабость первого из них состоит в узкой постановке задачи (не допустить отложения поступающих в канал взвешенных наносов), слабость второго — в региональном характере его эмпирических формул.

Так как все исходные предпосылки временной устойчивости подвижных русел (призматическая форма, медленные колебания расходов, постоянная ширина потока) в каналах обеспечиваются, то поперечные размеры устойчивых участков каналов, проложенных в мелкозернистых грунтах, должны удовлетворять неравенствам (23.7). Для проверки этого автором было обработано свыше 300 измерений расходов воды на неукрепленных оросительных каналах Средней Азии, Закавказья, Индии и Пакистана. Подробный анализ этих данных содержится в книге [33]. Измерения показывают, что значения постоянной M на устойчивых участках каналов, действительно, большей частью лежат в области (23.7) с тем, однако, отличием от рек, что по преимуществу они группируются в верхней половине этой области, т. е. в интервале 0,9—1,05. Отдельные измерения дают значения M, достигающие 1,1—1,2. Сказанное иллюстрируется рис. 98 и 99, на которых представлены графики функции $R = \mathrm{fct}\,(l_Q)$ по измерениям на устойчивых каналах Хорезма и Северной Индии.

Различие между значениями M на устойчивых участках каналов и рек обусловлено искусственным происхождением каналов, а именно, стремлением строителей каналов иметь возможно меньшие объемы выемок. При заданной пропускной способности канала $K = \frac{1}{n}\chi R^{5/3}$ сечения с меньшими значениями отношения χ/R дают меньшие площади χR. В результате при одном и том

же числе Фруда отношение χ/R на устойчивых участках каналов обычно оказывается на 30—40% меньшим отношения χ/R в плёсовых лощинах рек. Пока верхняя граница области устойчивости $M = 1{,}05$ существенно не нарушается, это не ведет к неприятным последствиям, однако при дальнейшей погоне за малыми значениями χ/R транспортирующая способность потока в канале ста-

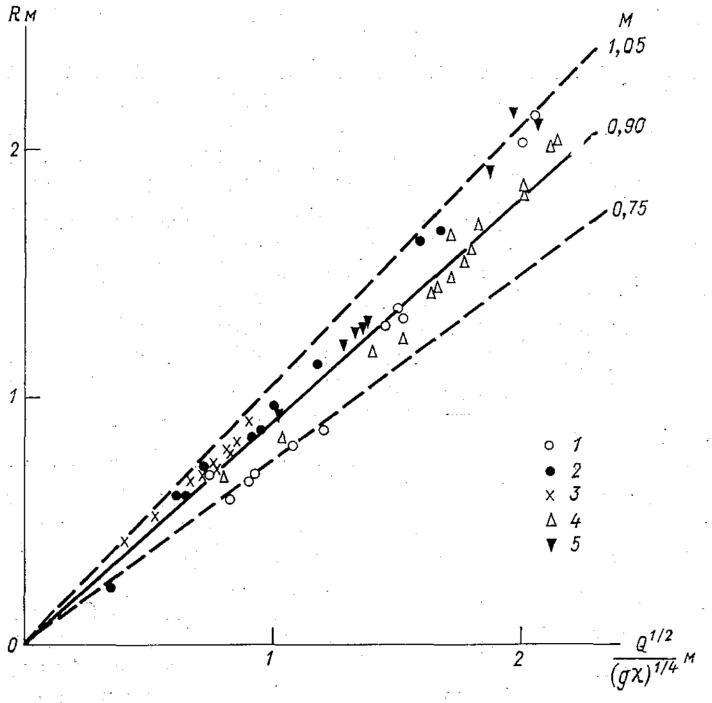


Рис. 98. К анализу значений постоянной M на устойчивых каналах.

Каналы Хорезма: *1* — Палват, *2* — Газават, *3* — Кайсар Сака, *4* — Шават, участок № 1, *5* — Шават, участок № 2. Данные Е. А. Замарина [55].

новится недостаточной и канал получается заиляющимся. Заметим, что дело здесь не столько в отложении поступающих в канал взвешенных наносов, количество которых всегда можно уменьшить с помощью отстойных сооружений, сколько в *неспособности потока транспортировать грунт, обрушающийся с береговых откосов.* Интенсивное обрушение берегов является характерной особенностью деформаций каналов, построенных с малыми значениями отношения χ/R. Так, например, по данным В. С. Алтунина и др. [2], за полтора года (с июля 1960 по ян-

варь 1962 г.) при неизменившемся расходе воды ширина по урезу на 210 км Каракумского канала увеличилась с 55 до 66 м и отношение χ/R возросло с 18,6 до 23,0. Канал проходит здесь в мелкозернистых песках. Поток, таким образом, «не соглашается» с желанием проектировщиков дать ему узкое и глубокое русло.

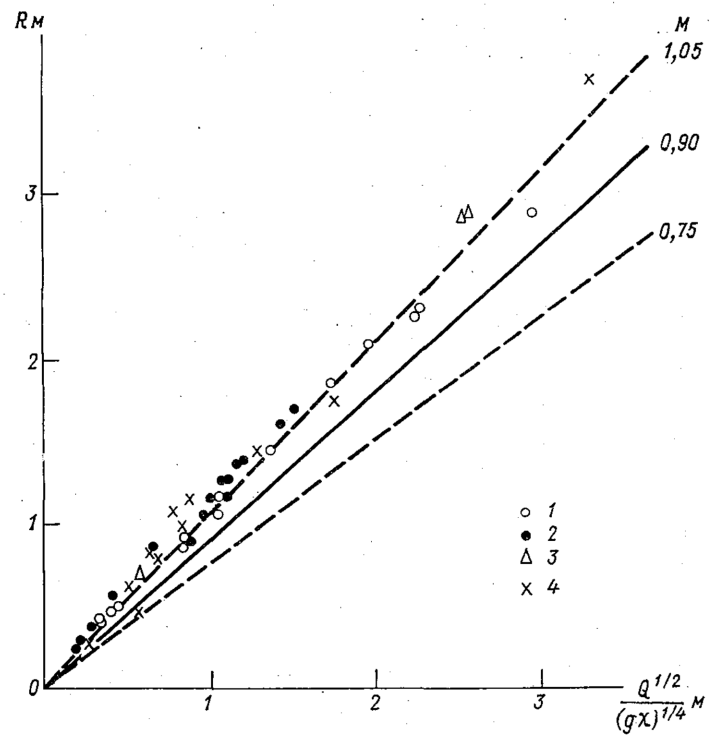


Рис. 99. К анализу значений постоянной M на устойчивых каналах.

Каналы Северной Индии и Пакистана: *1* — Нижний Ченаб, *2* — Нижний Джелам, *3* — Нижний Бари-Доб, *4* — Верхний Ганг. Данные К. Смита [231].

Будучи обоснованным теоретически и подтверждаясь измерениями в обширном ряду устойчивых участков каналов, сформулированное в п. 23.2 условие устойчивости русел с мелкозернистыми грунтами может и должно стать основой для проектирования. Так как стремление иметь возможно меньшие объемы выемок в разумных пределах оправдано, то учтя опыт успешной эксплуатации каналов со значениями M, близкими к верхней границе области устойчивости (23.7), в качестве расчетного можно рекомендовать значение $M = 1{,}05$.

24.2. Расчет сечений каналов

Будем считать, что канал проектируется для пропуска постоянного расхода воды и что при эксплуатации больших отклонений от этого расхода не ожидается. В этом случае достаточно обеспечить расчетное значение M при расчетном расходе воды.

При расчетном расходе воды движение воды в канале должно быть равномерным, т. е. должно удовлетворять уравнению Шези—Маннинга

$$I = i_0 = \frac{n^2 Q^2}{\chi^2 R^{10/3}}. \qquad (24.1)$$

Исключая из системы уравнений (24.1) и (23.2) гидравлический радиус, получаем формулу смоченного периметра

$$\chi = \frac{1}{M^{20/7}} \left(\frac{g^{5/2} n^6 Q}{i_0^3} \right)^{2/7}. \qquad (24.2)$$

Для удобства расчетов введем обозначение

$$\frac{g^{5/7} n^{12/7}}{M^{20/7}} \equiv a.$$

Формула (24.2) получит при этом компактный вид

$$\chi = a \left(\frac{Q}{i_0^3} \right)^{2/7}. \qquad (24.3)$$

Значения размерного коэффициента a при M, равном 1,05 и 0,9, приведены в табл. 9.

Таблица 9

Значения коэффициента a в формуле смоченного периметра (24.3)

n с/м$^{1/3}$	0,016	0,018	0,020	0,022	0,024	0,026	0,028	0,030
$a \cdot 10^3$ м$^{1/7}$/с$^{2/7}$ при								
$M = 0{,}9$	5,77	7,05	8,44	9,99	11,6	13,3	15,1	17,0
$M = 1{,}05$	3,69	4,51	5,40	6,37	7,39	8,49	9,64	10,9

Решая совместно уравнения (24.1) и (23.2), получаем также формулу средней скорости течения в устойчивом канале

$$U = M \left(\frac{\chi i_0^3}{g n^6} \right)^{1/4} R^{1/2}. \qquad (24.4)$$

Последовательность расчетов следующая. Расход воды Q и коэффициент шероховатости n должны быть заданы. Уклон дна i_0 в общем случае надо варьировать, отыскивая решение с наименьшим объемом земляных работ (увеличение уклона позволяет уменьшить площадь живого сечения, но ведет к увеличению врезки канала). Если канал проектируется для целей оро-

шения, то уклон его дна должен обеспечить также «командование» канала над местностью, т. е. возможность подачи воды из канала в распределительную сеть.

Задавшись уклоном i_0 и подсчитав по (24.3) значение смоченного периметра χ, подставляем его в формулу (23.2) и находим значение гидравлического радиуса R, после чего определяем площадь живого сечения $\omega = \chi R$. Повторив расчеты при других значениях i_0, получаем ряд вариантов решения. Для каждого варианта определяются элементы трапецеидального сечения канала: ширина по дну b_0 и наполнение h. С этой целью используется система уравнений:

$$\omega = h(b_0 + mh), \tag{24.5}$$

$$\chi = b_0 + 2\sqrt{1 + m^2}h, \tag{24.6}$$

где m — коэффициент откосов. Для каждого варианта подсчитывается объем выемки грунта, и вариант с наименьшим объемом, если нет каких-нибудь дополнительных условий, принимается за окончательный.

Запроектированные этим способом каналы небольшой длины могут поддерживаться в проектном состоянии без больших затрат. Постоянно действующие гидродинамические факторы деформаций в них исключены, а случайные местные деформации берегов и дна легко могут обнаруживаться и устраняться. Иначе обстоит дело с проектируемыми в настоящее время каналами очень большого протяжения — с длинами, измеряемыми сотнями километров. Надобность в таких каналах возникает при строительстве особо крупных оросительных систем, а также при намечаемых работах по межбассейновому перераспределению стока. Поддерживать такие каналы в проектном состоянии — нереальная и ненужная задача. С течением времени они неизбежно будут приобретать формы естественных русел. Задача проектирования должна состоять в определении таких начальных размеров канала, при которых его последующие переформирования будут идти постепенно, будут умеренными и не вызовут нарушения пропускной способности канала. Очевидно, для этого необходимо, чтобы начальные размеры канала были приближены к размерам устойчивых участков естественных русел. Расчет с использованием постоянной квазиравномерного движения M как раз и предоставляет такую возможность.

25. Сезонные деформации перекатов

Волнистость продольного профиля дна естественных потоков — чередование плёсов и перекатов по их длине — обусловливает колебательный характер продольного изменения расхода русловых наносов, а отсюда делает неизбежным чередование

участков размыва и намыва дна. При колебаниях стока изменяется интенсивность русловых деформаций, а очень часто и их знак. Если паводки имеют более или менее правильную повторность, как, например, на реках со снеговым и ледниковым питанием, то в каждом фиксированном створе наблюдаются циклические сезонные и многолетние колебания высоты дна. Наибольшего размаха они достигают на перекатах.

В течение долгого времени сведения о сезонных колебаниях высоты дна на перекатах сводились к данным промеров, выполняемых работниками судоходной обстановки. Недостаток этих данных состоит в том, что они обычно охватывают лишь вторую половину спада паводка и межень и остается неосвещенным самый важный период пика паводка. Тем не менее, используя эти данные, В. А. Макаров еще в 1893 г. в докладе на II съезде русских гидротехников ясно сформулировал основную закономерность следования колебаний высоты дна на перекатах за колебаниями уровней. В 1929—1934 гг. Калачевская гидрологическая станция произвела серию повторных промеров с охватом всего навигационного периода на нескольких перекатах р. Дон. Результаты этих промеров были проанализированы Г. И. Шамовым [147]. Небольшое число объектов, расположенных на коротком участке одной реки, ограничило анализ Шамова.

В 1970—1972 гг. ЛИВТ совместно с бассейновыми управлениями пути МРФ выполнил большой цикл исследований на 13 интенсивно деформирующихся перекатах рек Волги, Оки, Вятки, Ветлуги, Б. Северной Двины и Оби. Эти исследования позволили проверить имевшиеся теоретические представления о деформациях перекатов и в значительной степени прояснили их картину.

Исследования показали, что необходимо различать два вида перекатов: перекаты, расположенные в уширениях русла, и перекаты, расположенные между параллельными берегами. Последний случай типичен для рек с побочневым типом руслового процесса. Перекаты первого вида образуют более многочисленную группу и именно они отличаются большими колебаниями высоты своих гребней. На перекатах второго вида колебания высоты гребней незначительны, деформации идут на их скатах.

Рассмотрим перекаты на уширенных участках русла. Первое и верное указание на причины их сезонных деформаций было сделано В. М. Лохтиным [84], заметившим, что при переходе от низких уровней к высоким или обратно разность скоростей на гребне переката и в вышележащей плёсовой лощине меняет свой знак. К. И. Россинский и И. А. Кузьмин [116] дополнили объяснение Лохтина, указав, что такой характер изменения скоростей обусловлен различием формы поперечных сечений в плёсе и на перекате.

Этим рассуждениям легко придать аналитический вид. Составим выражение для производной от средней скорости течения U по уровню воды z'

$$\frac{dU}{dz'} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dQ}{dz'} - \frac{Q}{\omega}\frac{d\omega}{dz'}\right) \tag{25.1}$$

и разделим обе части полученного равенства на U. Приняв во внимание, что $\frac{d\omega}{dz'} = B$, будем иметь

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dz'} = \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dz'} - \frac{1}{H}. \tag{25.2}$$

При одном и том же расходе воды производная $\frac{dQ}{dz'}$ на перекате и в смежной плёсовой лощине имеет приблизительно одинаковые значения. Вследствие этого величина правой части (25.2) практически зависит только от средней глубины H. Но средняя глубина на перекате всегда меньше средней глубины в плёсе. Отсюда вытекает неравенство

$$\left(\frac{1}{U}\frac{dU}{dz'}\right)_{\text{прк}} < \left(\frac{1}{U}\frac{dU}{dz'}\right)_{\text{пл}}. \tag{25.3}$$

Это неравенство свидетельствует, что при том наполнении русла, при котором скорости в плёсе и на перекате одинаковы, производная dU/dz' в плёсе больше производной dU/dz' на перекате. Или, иными словами, кривые зависимости средней скорости от уровня $U = U(z')$ на перекате и в вышележащей плёсовой лощине пересекаются таким образом, что при высоких уровнях скорость в плёсе становится больше скорости на перекате, а при низких — меньше.

Полученный результат отлично подтверждается натурными наблюдениями. Все они дают картину, в обобщенном виде представленную на рис. 100. При высоких уровнях, когда побочни затоплены и ширина сечений на перекате гораздо больше ширины плёсовой лощины, на напорном скате переката $\partial U/\partial l < 0$ и он намывается. При низких уровнях, когда побочни сухие и ширина потока на перекате примерно такая же, как в плёсовой лощине, на напорном скате $\partial U/\partial l > 0$ и он размывается. Большие расходы наносов при высоких уровнях обеспечивают высокую интенсивность намыва. На перекатах, расположенных в уширениях русла средних и больших рек ЕТС, за две-три недели стояния высоких уровней успевает отложиться слой наносов толщиной в 1—2 м (рис. 101). Меженному потоку для смыва этих наносов требуется вся остальная часть навигационного периода.

Так как намыв и размыв испытывают гребень и напорный скат переката, то смещения переката вниз по потоку не происходит. Перекаты в уширениях русла практически неподвижны.

В ходе деформаций кривая $U = U(z')$ переката меняет свое положение. Поэтому меняется и высота точки ее пересечения

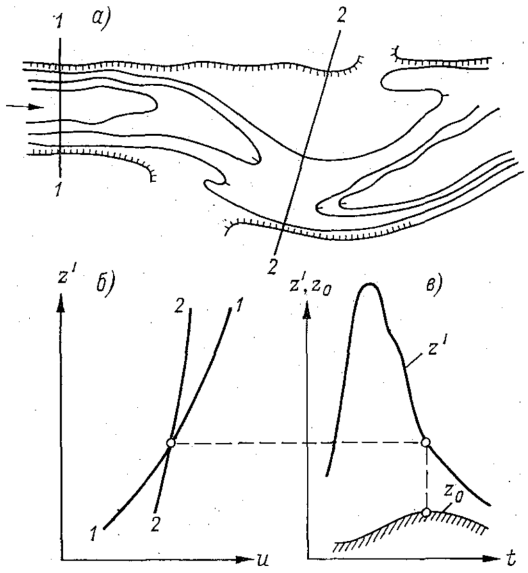


Рис. 100. Сезонные деформации переката в уширении русла.

а — план переката, *б* — кривые связи $U=U(z')$, *в* — графики колебания уровней и высоты дна.

с кривой $U = U(z')$ в плёсе (последняя смещается мало). В ходе намыва переката точка пересечения сдвигается вверх, в ходе

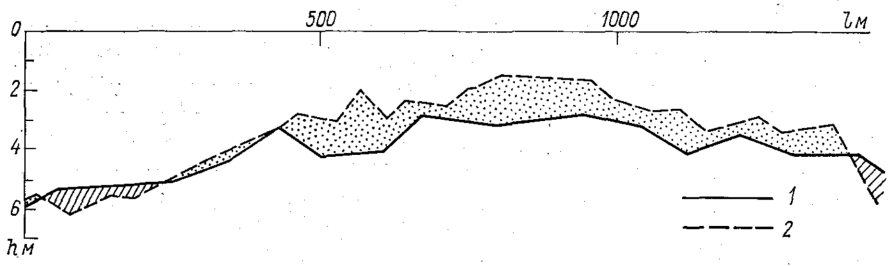


Рис. 101. Продольные профили дна по линии наибольших глубин на В. Желнинском перекате р. Оки.

1 — 27/IV 1970 г., уровень 11,00 м; *2* — 7/V 1970 г., уровень 10,30 м.

размыва — вниз. Поэтому намыв перекатов начинается при более низком уровне (на подъеме), чем размыв (на спаде). На больших реках ЕТС разность этих уровней может достигать 2—3 м.

Мы уже указывали, что безразмерная глубина $H(gB)^{1/4}/Q^{1/2}$ на перекатах не является постоянной. Согласно наблюдениям, между ее изменением с высотой уровня и размахом высотных деформаций имеется прямая пропорциональность.

Картина на перекатах второго вида (в руслах с параллельными берегами) значительно проще. Ширина потока в таких руслах меняется при колебаниях уровней на перекатах и в плёсах одинаково. Поэтому продольная изменяемость скоростей, а значит, и расхода наносов полностью определяется изменением глубин. Напорные скаты перекатов подвержены здесь размыву при всех уровнях, с той лишь разницей, что при высоких уровнях размыв идет интенсивно, а при низких слабо. Смываемые с напорного ската наносы откладываются на тыловом

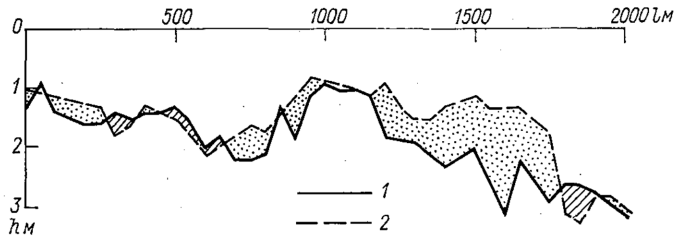


Рис. 102. Продольные профили дна по линии наибольших глубин на 2-м Соловьевском перекате р. Вятки.

1 — 25/IV 1972 г., уровень 5,47 м; *2* — 5/V 1972 г., уровень 5,77 м.

скате, создавая эффект смещения перекатного вала вниз по течению (рис. 102). В отличие от перекатов в уширениях, перекаты между параллельными берегами представляют собой подвижные образования. В фиксированном створе смещение перекатов вниз по потоку создает многолетние колебания высоты дна.

Во Введении мы бегло отмечали роль, которую перекаты в качестве складов наносов играют в обеспечении статистической стабильности подвижных русел. Располагаясь вдоль реки в почти периодическом порядке, они аккумулируют наносы в период, когда поток несет их в наибольшем количестве и либо медленно сбрасывают накопленный материал во время стояния низких уровней, как это делают перекаты в уширениях, либо пользуются этим материалом для своего собственного перемещения, как поступают перекаты в руслах с побочневым типом процесса. В результате этой отлично организованной работы перекаты предотвращают развитие беспорядочных деформаций и оказывают сглаживающее влияние на колебания стока русловых наносов.

Располагая скромными опытными данными, но имея высокую наблюдательность, эту картину ясно описал еще В. М. Лохтин

в работе [84]. Приведем его слова (Лохтин здесь имеет в виду наиболее распространенный случай перекатов в уширениях русла; подвижные перекаты в руслах побочневого типа не попали в поле его зрения): «Постоянство расположения перекатов, издавна и неизменно остающихся на одних и тех же местах, резкое деление русла на плёсы и перекаты, ступенчатый вид продольного профиля реки и перемещение усиленных уклонов с перекатов на плёсы при прибыли воды и обратно при убыли — вот те черты, которые характеризуют устойчивые реки и которые составляют необходимое условие возможности неизменного существования этих рек в достигнутом ими в течение многих веков уравновешенном состоянии».

Плёс и перекат — антиподы по своей морфологии, гидравлике и режиму транспорта наносов. Вместе они образуют неразрывное целое — *структурное звено подвижного русла.*

Приложение

Краткие сведения по математической теории поля и тензорному исчислению

1. Определение поля. Виды величин и полей

Совокупность значений компонент физической величины, определенных во всех точках некоторой области пространства, называется полем этой величины.

Различные величины классифицируются по числу компонент и законам преобразования компонент при преобразовании системы координат. Дальше рассматриваются только системы прямолинейных, прямоугольных декартовых координат в трехмерном евклидовом пространстве.

Скаляры (тензоры нулевого ранга) имеют одну компоненту, которая не изменяется при преобразовании координат. *Векторы* (тензоры первого ранга) имеют три компоненты, преобразующиеся при повороте системы координат вокруг неподвижного начала, по закону

$$a_i' = \sum_j \alpha_{ij} a_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где a_i' — компоненты вектора $\mathbf{a}$ в «новой» и a_j — в «старой» системах координат; $\alpha_{ij} \equiv \cos(x_i', x_j)$ — направляющие косинусы новых осей. *Тензоры второго ранга* имеют девять компонент. Закон их преобразования будет указан дальше.

В соответствии с таким делением величин, различаются следующие (стационарные) поля: скалярное $U(x_1, x_2, x_3)$, векторное $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$ и тензорное $T(x_1, x_2, x_3)$.

2. Скалярное поле

Естественный способ изобразить скалярное поле состоит в том, чтобы провести в поле поверхности, на каждой из которых скаляр U имеет определенное постоянное значение: $U(x_1, x_2, x_3) = C_1, C_2, C_3, \ldots$ Такие поверхности называются *эквипотенциальными.*

Направление и абсолютная величина наибольшей скорости изменения поля в окрестности данной точки пространства выражаются вектором *градиента поля*

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial n}\,\mathbf{n}, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности в этой точке. Вектор $\mathbf{n}$, а с ним и вектор $\operatorname{grad} U$ направлены в сторону возрастания U. Компоненты вектора $\operatorname{grad} U$ по осям координат имеют вид

$$\operatorname{grad}_i U = \frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Скаляр U называется *потенциалом* векторного поля $\operatorname{grad} U$, а поле вектора $\operatorname{grad} U$ (любого вектора, компоненты которого равны правым частям уравнений (3)) называется *потенциальным*.

3. Векторное поле и его дивергенция

Естественный способ изобразить поле вектора $\mathbf{a}$ состоит в том, чтобы провести *векторные линии* поля. По определению векторной линии, касательная к ней в любой ее точке коллинеарна вектору поля в этой точке. Уравнения векторных линий

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \frac{dx_3}{a_3} \tag{4}$$

выражают это условие в аналитическом виде. Совокупность векторных линий, проходящих через все точки замкнутого контура, образует *векторную трубку*.

Если провести в поле вектора $\mathbf{a}$ произвольную поверхность S и выбрать на этой поверхности положительное направление нормали, интеграл по поверхности S

$$\int_S (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS \equiv \int_S a_n\,dS \tag{5}$$

будет выражать поток векторного поля $\mathbf{a}$ через поверхность S. Если поверхность S замкнутая, то положительным считается направление внешней нормали. При этом поток поля, выходящий из замкнутой поверхности, будет иметь знак плюс, а поток, входящий внутрь,— знак минус. Полный поток поля через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме выходящего и входящего потоков. Это значит, что полный поток поля через замкнутую поверхность выражает приращение потока поля внутри этой поверхности. Разделив полный поток векторного поля через замкнутую поверхность S на объем V, ограниченный этой поверхностью, получим *удельный поток поля* — среднее по объему V приращение потока поля в единице объема.

Если объем V односвязный и поле вектора $\mathbf{a}$ вместе со своими производными первого порядка по координатам непрерывно, то при стягивании поверхности S к некоторой точке объема V удельный поток поля будет стремиться к конечному пределу. Этот предел называется *дивергенцией* (расходимостью) векторного поля $\mathbf{a}$

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS. \tag{6}$$

Дивергенция векторного поля в данной точке пространства измеряет отнесенное к единице объема приращение потока поля в бесконечно малой окрестности точки. Выражение дивергенции через компоненты векторного поля имеет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\equiv\sum_1^3\frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Векторное поле, в котором, за исключением может быть конечного числа особых точек, $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$, называется *соленоидальным*. Векторные линии соленоидального поля или замкнутые, или начинаются и оканчиваются на границах поля. Особая точка соленоидального поля, в которой $\operatorname{div}\mathbf{a}=\infty$, называется *источником*, особая точка, в которой $\operatorname{div}\mathbf{a}=-\infty$, называется *стоком*.

Согласно *теореме Гаусса—Остроградского*, поток векторного поля через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции поля по объему V, ограниченному этой поверхностью

$$\oint_S(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS=\int_V\operatorname{div}\mathbf{a}\,dV. \tag{8}$$

4. Ротация векторного поля

Линейным интегралом вектора $\mathbf{a}$ по пространственной кривой L называется величина

$$\int_L(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,dL\equiv\int_L a_\sigma\,dL, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — единичный вектор касательной к кривой L. Положительным считается направление касательной, совпадающее с принятым направлением обхода кривой. Если кривая L замкнутая, взятый по ней линейный интеграл Γ называется *циркуляцией* поля $\mathbf{a}$ по кривой L

$$\Gamma=\oint_L(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,dL. \tag{10}$$

При правой системе координат замкнутые контуры обходятся против часовой стрелки. Если замкнутый контур L плоский,

удобно ввести *удельную циркуляцию* векторного поля — частное от деления циркуляции по контуру L на площадь A, ограниченную контуром

$$\bar{\gamma}=\frac{\Gamma}{A}. \tag{11}$$

Считая площадь A односвязной, стянем контур L к некоторой внутренней точке M_0. Если векторное поле $\mathbf{a}$ вместе со своими производными первого порядка по координатам непрерывно, величина удельной циркуляции будет при этом стремиться к конечному пределу

$$\gamma(M_0)=\lim_{A\to 0}\frac{1}{A}\oint_L(\mathbf{a}\cdot\sigma)\,dL. \tag{12}$$

Вращая плоскость контура L вокруг точки M_0, мы обнаружим, что циркуляция Γ меняется с изменением положения контура, т. е. с изменением направления единичного вектора нормали $\mathbf{n}$ к плоскости контура. Вместе с циркуляцией меняется в точке M_0 полученная путем предельного перехода (12) величина γ и при некотором определенном направлении вектора $\mathbf{n}=\mathbf{n}_0$ она проходит через максимум

$$\gamma(M_0,\ \mathbf{n}_0)=\gamma_{\text{макс}}. \tag{13}$$

Вектор

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=\gamma_{\text{макс}}\mathbf{n}_0 \tag{14}$$

называется *ротацией* (вращением) векторного поля $\mathbf{a}$ в точке M_0. Если поле $\mathbf{a}$ есть поле скоростей жидкости, вектор $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ равен удвоенному вектору угловой скорости вращения ее бесконечно малого объема. Компоненты вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ выражаются через компоненты исходного векторного поля $\mathbf{a}$ следующим образом:

$$\operatorname{rot}_1\mathbf{a}=\frac{da_3}{dx_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3},\qquad \operatorname{rot}_2\mathbf{a}=\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1},$$

$$\operatorname{rot}_3\mathbf{a}=\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}. \tag{15}$$

Векторные линии поля вектора ротации называются *вихревыми линиями.* Совокупность вихревых линий, проходящих через все точки замкнутого контура, называется *вихревой трубкой.* Подставив в выражение дивергенции (7) в качестве величин a_i компоненты вектора ротации по (15), находим

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0, \tag{16}$$

т. е. поле вектора ротации соленоидальное. Вихревые линии не могут обрываться внутри поля.

Согласно *теореме Стокса,* циркуляция векторного поля $\mathbf{a}$ по замкнутому, нигде себя не пересекающему контуру L равна по-

току вектора ротации поля через произвольную поверхность S, натянутую на этот контур

$$\oint_L (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})\, dL = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{17}$$

Поток вектора ротации через поперечное сечение вихревой трубки называется ее *интенсивностью*. Вследствие соленоидальности поля $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ интенсивность вихревой трубки по ее длине постоянна. Из теоремы Стокса тут же вытекает, что циркуляция вектора $\mathbf{a}$ по всем замкнутым контурам, охватывающим данную вихревую трубку, одна и та же. Устремив площадь поперечного сечения вихревой трубки к нулю, получим *вихревую нить* с интенсивностью $\Gamma = \operatorname{rot} \mathbf{a}\, dS$.

5. Потенциальные векторные поля

Наиболее изученный класс векторных полей представляют потенциальные поля. Подставив выражения компонент потенциального вектора (3) в формулы компонент вектора ротации (15), находим

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0. \tag{18}$$

Векторные поля, удовлетворяющие условию $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, называются *безвихревыми*. Из равенства (18) следует, что всякое потенциальное векторное поле является безвихревым. Можно доказать справедливость и обратного утверждения. Безвихревое поле может содержать особенности: отдельные вихревые точки, линии или поверхности, на которых $\operatorname{rot} \mathbf{a} \neq 0$.

Выражение для дивергенции потенциального векторного поля имеет вид

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}. \tag{19}$$

Дифференциальный оператор $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ называется *оператором Лапласа* и обозначается Δ.

Таким образом, равенство (19) можно написать в виде $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U$. Если потенциальное поле соленоидальное, то имеем

$$\Delta U = 0. \tag{20}$$

Дифференциальное уравнение (20) называется *уравнением Лапласа*. Функция U (потенциал векторного поля $\operatorname{grad} U$), являющаяся решением уравнения (20), называется *гармонической*. Так как уравнение (20) линейное, потенциальные поля можно векторно складывать.

Во многих задачах гидродинамики, электростатики и термодинамики приходится оперировать с плоскими потенциальными полями, удовлетворяющими двумерному уравнению Лапласа. Обозначив двумерный вектор градиента $\mathbf{v}$, а потенциал его поля φ, имеем

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{22}$$

Так как поле вектора $\mathbf{v}(x, y)$ соленоидальное, то из уравнения векторных линий на плоскости

$$v_x\,dy-v_y\,dx=0 \tag{23}$$

следует существование функции $\psi(x, y)$, полный дифференциал которой

$$d\psi=v_x dy-v_y dx \tag{24}$$

равен на векторной линии нулю. Когда $\mathbf{v}$ есть вектор скорости жидкости, функцию ψ называют функцией тока.

Согласно (24)

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{25}$$

Сравнивая выражения (21) и (25), получаем условия Коши—Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{26}$$

Дифференцируя первое из равенств (26) по y, а второе по x и затем вычитая из первого результата второй, имеем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0, \tag{27}$$

функция ψ так же, как функция φ, гармоническая. Гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши—Римана (26), называются *сопряженными*. В теории функций комплексной переменной доказывается, что сопряженные гармонические функции образуют действительную и мнимую части некоторой аналитической функции

$$F(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y). \tag{28}$$

Функция F комплексного аргумента $z=x+iy$ называется *комплексным потенциалом*. Плоское, безвихревое, соленоидальное векторное поле полностью определяется его комплексным потенциалом.

6. *Тензоры второго ранга*

Тензором второго ранга называется физическая или геометрическая величина, определяемая в каждой прямолинейной, прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 совокупностью трех векторов $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, которые при повороте системы координат преобразуются в векторы $\mathbf{T}'_1$, $\mathbf{T}'_2$, $\mathbf{T}'_3$ по закону

$$\mathbf{T}'_i = \sum_j \alpha_{ij} \mathbf{T}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{29}$$

где $\alpha_{ij} \equiv \cos(x'_i, x_j)$ — направляющие косинусы новых осей. Векторы $\mathbf{T}_i$ являются *векторными компонентами* тензора T. Из сравнения формул (29) с формулами (1) следует, что векторные компоненты тензора преобразуются таким же образом, как скалярные компоненты вектора. Проектируя векторы $\mathbf{T}_i$ на оси координат, получаем девять *скалярных компонент* тензора T. Векторные компоненты тензора записываются в виде матрицы-столбца

$$\| \mathbf{T}_i \| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{matrix} \right\|, \tag{30}$$

скалярные компоненты — в виде квадратной матрицы

$$\| T_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{matrix} \right\|. \tag{31}$$

Первый индекс (i) отмечает направление нормали к координатной площадке, второй (j) — направление компоненты вектора $\mathbf{T}_i$. Скалярные компоненты тензора второго ранга преобразуются при повороте системы координат по закону, повторяющему закон преобразования компонент физического вектора дважды

$$T_{ij} = \sum_k \sum_l \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \tag{32}$$

Поменяв местами строки и столбцы матрицы скалярных компонент, получим *транспонированный тензор* $\widetilde{T}_{ij} = T_{ji}$.

Важными частными видами тензоров второго ранга являются *симметричные тензоры*, удовлетворяющие условию $T_{ij} = T_{ji}$ и имеющие, следовательно, только шесть независимых скалярных компонент и *антисимметричные тензоры*, удовлетворяющие условию

$$T_{ij} = \begin{cases} -T_{ji}, & i \neq j. \\ 0, & i = j. \end{cases} \tag{33}$$

Антисимметричные тензоры имеют, таким образом, только три независимые компоненты. Знаки этих компонент при переходе от правой системы координат к левой, или наоборот, меняются на противоположные. Это значит, что антисимметричные тензоры представляют собой псевдовекторы.

Симметричный тензор δ с матрицей компонент

$$\|\delta_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{34}$$

называется *единичным тензором*, или *тензорной единицей*.

Тензоры второго ранга с компонентами одной и той же размерности можно складывать по правилу

$$P_{ij} + R_{ij} = T_{ij}. \tag{35}$$

В соответствии с этим правилом, всякий тензор второго ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \tag{36}$$

Перемножать можно тензоры любых рангов. Ввиду этого рассматривают произведения тензора на скаляр, на вектор и на тензор. Произведение тензора второго ранга T на скаляр U есть тензор с компонентами $(UT)_{ij} = UT_{ij}$. Произведение $T\mathbf{a}$ тензора второго ранга *на вектор справа* представляет собой новый вектор $\mathbf{b}$ с компонентами

$$b_i = \sum_j T_{ij} a_j. \tag{37}$$

Произведение $\mathbf{a}T$ тензора второго ранга *на вектор слева* есть новый вектор $\mathbf{c}$ с компонентами

$$\mathbf{c}_i = \sum_j T_{ji} a_j. \tag{38}$$

Для симметричных тензоров $T\mathbf{a} = \mathbf{a}T$. Формулы (37) и (38) показывают, что тензор второго ранга служит *оператором линейного преобразования одного вектора в другой*. Это свойство тензоров часто используется для доказательства тензорной природы тех или иных величин: если мы имеем в каждой системе координат совокупность девяти чисел, являющихся коэффициентами линейного преобразования компонент одного вектора в компоненты другого, такая совокупность представляет тензор второго ранга. Преобразование компонент одного вектора в ком-

поненты другого, очевидно, существенно отличается от преобразования компонент одного и того же вектора при повороте системы координат. Коэффициенты последнего преобразования не образуют тензора.

Различают скалярное и тензорное произведения тензоров. *Скалярным произведением* двух тензоров второго ранга P и R называется число, равное сумме произведений соответственных компонент этих тензоров

$$PR = \sum_i \sum_j P_{ij} R_{ij}. \tag{39}$$

Умножение по этому правилу тензора второго ранга на единичный тензор дает скаляр, равный сумме диагональных компонент тензора и называемый *линейным инвариантом*, или *следом* тензора

$$\delta T = \sum_i \sum_j \delta_{ij} T_{ij} = \sum_i T_{ii} \equiv \mathrm{inv}_1. \tag{40}$$

Скалярное умножение тензора на самого себя дает *квадратичный инвариант* тензора

$$T^2 = \sum_i \sum_j T_{ij}^2 \equiv \mathrm{inv}_2. \tag{41}$$

Тензорным (или *внутренним*) произведением двух тензоров второго ранга P и R называется новый тензор второго ранга с компонентами

$$(PR)_{ij} = \sum_k P_{ik} R_{kj}. \tag{42}$$

Таким образом, компонента тензора-произведения $(PR)_{ij}$ есть скалярное произведение i-той векторной компоненты тензора P на j-тую векторную компоненту транспонированного тензора $\widetilde{R}$. Тензорное произведение не переместительно: $PR \neq RP$.

7. *Тензорные поверхности*

Если при умножении тензора T на вектор **a** получается вектор **b**, коллинеарный **a**, т. е. вектор **a** преобразуется только по модулю, то направление **a** называется *главным направлением тензора* T, а ось этого направления — *главной осью* тензора. У всех симметричных тензоров второго ранга существует по крайней мере одна система трех взаимно перпендикулярных главных осей. В координатной системе главных осей все недиагональные компоненты симметричного тензора равны нулю.

Определенные в этой системе диагональные компоненты называются *главными значениями* тензора.

Для единичного тензора и всех тензоров, получаемых из единичного путем его умножения на скалярную величину, все оси главные.

Каждому симметричному тензору второго ранга можно поставить в соответствие определенную поверхность второго порядка

$$\sum_i \sum_j T_{ij} x_i x_j = 1. \tag{43}$$

Эта поверхность, инвариантная относительно преобразования координат, называется *тензорной*. Если все диагональные компоненты тензора положительны, тензорная поверхность представляет эллипсоид. Главные оси тензорного эллипсоида совпадают с главными осями тензора. Уравнение тензорного эллипсоида в главных осях имеет вид

$$\sum_i \lambda_i x_i^2 = 1, \tag{44}$$

где λ_i — главные значения тензора. Полуоси d_i тензорного эллипсоида выражаются через главные значения тензора формулой

$$d_i = \lambda_i^{-1/2}. \tag{45}$$

Для единичного тензора δ и всех тензоров вида $U\delta$, где U — скаляр, тензорный эллипсоид вырождается в сферу ($d_1 = d_2 = d_3 = U^{-1/2}$). Поэтому такие тензоры называются *сферическими* (шаровыми). Под сферической частью тензора второго ранга понимают тензор $T^{(S)}$ с компонентами

$$T_{ij}^{(S)} = \frac{\mathrm{inv}_1}{3} \delta_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{3} \sum_i T_{ii}.$$

Вычитая из тензора T его сферическую часть, получаем тензор с линейным инвариантом, равным нулю

$$\sum_i \left(T_{ii} - \frac{1}{3} \sum_i T_{ii} \right) = 0.$$

Тензоры с нулевым линейным инвариантом называются *девиаторами*.

Таким образом, любой тензор второго ранга можно представить в виде суммы сферического тензора $T^{(S)}$ и девиатора $T^{(d)}$

$$T = T^{(S)} + T^{(d)}. \tag{46}$$

8. Тензорное поле

Пусть $T(x_1, x_2, x_3)$ — поле тензора T и S — произвольная поверхность, на которой выбрано положительное направление нормали. Потоком тензорного поля через поверхность S называется интеграл

$$\mathbf{G} = \int_S \mathbf{n} T \, dS. \tag{47}$$

Поток тензорного поля — вектор. Если T есть тензор напряжений, поток $\mathbf{G}$ поля тензора T через поверхность S представляет равнодействующую поверхностных сил, распределенных по S. Величины $\mathbf{n}$ и T в подынтегральном выражении правой части формулы (47) нельзя менять местами, так как в общем случае $\mathbf{n}T \neq T\mathbf{n}$. Компоненты вектора $\mathbf{G}$ выражаются в следующем виде:

$$G_i = \int_S \sum_j n_j T_{ji} \, dS. \tag{48}$$

Дивергенция тензорного поля определяется посредством предельного перехода, аналогичного предельному переходу в формуле (6)

$$\operatorname{div} T = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} T \, dS, \tag{49}$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V и стягивающаяся к заданной точке. Дивергенция тензорного поля, так же как поток тензорного поля,— вектор. Она измеряет неоднородность тензорного поля и указывает направление вектора потока поля через поверхность бесконечно малой сферы, окружающей данную точку. Выражение вектора дивергенции через векторные компоненты тензора T имеет вид

$$\operatorname{div} T = \sum_i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial x_i}. \tag{50}$$

Компоненты вектора дивергенции записываются

$$\operatorname{div}_i T = \sum_j \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}. \tag{51}$$

В тензорном поле действительна интегральная теорема, аналогичная теореме Гаусса—Остроградского,

$$\oint_S \mathbf{n} T \, dS = \int_V \operatorname{div} T \, dV. \tag{52}$$

9. Тензоры высших рангов

Тензорное исчисление рассматривает тензоры произвольного n-го ранга, имеющие в каждой системе прямоугольных декартовых координат трехмерного пространства 3^n компонент (n — положительное целое число). Число индексов у компонент тензора равно его рангу. При повороте системы координат компоненты тензора преобразуются по закону, который повторяет для каждого индекса закон преобразования компонент вектора. Примером тензора высшего ранга может служить тензор 4-го ранга, устанавливающий линейную связь между компонентами двух тензоров второго ранга. Тензор 4-го ранга имеет 81 компоненту.

В обычных задачах механики сплошной среды достаточно применения тензоров с рангом не выше второго. Однако в некоторых специальных вопросах (например, в теории турбулентности) встречается надобность пользоваться и тензорами высших рангов.

Список литературы

1. Абальянц С. Х. Движение взвесей в открытых потоках.— Труды САНИИРИ, 1958, вып. 96, с. 3—156.
2. Алтунин В. С. и др. Интенсивные русловые деформации реки Амударьи/Алтунин В. С., Аннаев С. А., Аширов С. А.— Ашхабад: Ылым, 1975.— 102 с.
3. Алтунин С. Т. Некоторые итоги исследований водозаборных сооружений на реках Средней Азии.— Труды Ин-та энергетики АН УзбССР, 1948, вып. 2, с. 21—40.
4. Ананян А. К. Движение жидкости на повороте водовода.— Ереван: Изд. АН АрмССР, 1957. 361 с.
5. Антроповский В. И. Связь типов руслового процесса с определяющими факторами.— Труды ГГИ, 1970, вып. 183, с. 70—80.
6. Баланин В. В., Селезнев В. М. К расчету скоростного поля за полузапрудой.— Труды ЛИИВТ, 1959, вып. 26, с. 42—53.
7. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке.— Прикладная математика и механика, 1953, т. 17, № 3, с. 261—274.
8. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или плоский открытый канал конечной глубины.— Прикладная математика и механика, 1955, т. 19, № 1, с. 61—88.
9. Бахметев Б. А. Гидравлика открытых русел/Перев. с англ. под ред. А. А. Сабанеева.— Л.; М.: Госстройиздат, 1941.— 246 с.
10. Бейкер А. Дж. Алгоритм метода конечных элементов для решения уравнений Навье—Стокса.— Сб. Механика, 1977, № 14, с. 163—173.
11. Бернадский Н., Проскуряков Б. Опыт теории и практики расчета прудов-холодильников.— В кн.: Материалы по гидрологии, гидрографии и водным силам СССР. Вып. 5. М.; Л., 1931. 128 с.
12. Биркгоф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тэйлора.— В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. Перев. с англ. под ред. А. С. Монина. М., Мир, 1964, с. 68—94.
13. Бутаков А. Н. Расчет течений при внезапном расширении потока.— Метеорология и гидрология, 1970, № 11, с. 70—76.
14. Васильев О. Ф. и др. Численный метод расчета распространения длинных волн в открытых руслах и приложение его к задаче о паводке/ Васильев О. Ф., Годунов С. К., Притвиц Н. А., Темноева Т. А.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3, с. 525—527.
15. Васильев О. Ф., Квон В. И. О влиянии нестационарности при движении открытого потока жидкости.— Прикл. механика и техн. физ., 1966, № 1, с. 126—128.
16. Васильев О. Ф., Темноева Т. А., Шугрин С. М. Численный метод расчета неустановившихся течений в открытых руслах.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2, с. 17—25.
17. Великанов М. А. Динамика русловых потоков.— 3-е изд.— М.: ГИТТЛ, 1954—1955.— Т. 1, 323 с. Т. 2, 323 с.
18. Великанов М. А. Русловой процесс (основы теории).— М.: Физматгиз, 1958.— 395 с.
19. Власенко Ю. Д. Формирование русла на участке поворота при неустановившемся режиме движения воды.— В кн.: Исследования турбулентных одно- и двухфазных потоков. Киев, 1966, с. 125—138.
20. Войнович П. А., Дементьев М. А. Об уравнении размыва.— Изв. НИИГ, 1932, т. 6, с. 80—102.
21. Гиляров Н. П. Моделирование речных потоков.— Л.: Гидрометеоиздат, 1973.— 198 с.

22. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы.— 2-е изд.— М.: Наука, 1977.—439 с.
23. Гончаров В. Н. Движение наносов.— Л.—М.: ОНТИ, 1938.— 312 с.
24. Гончаров В. Н. Динамика русловых потоков.— Л.: Гидрометеоиздат, 1962.— 373 с.
25. Грачев Е. Н. Гидравлический режим акваторий портов и затонов.— Новосибирск: изд. НИИВТ, 1974.— 96 с.
26. Гринвальд Д. И. Некоторые закономерности крупномасштабной турбулентности потоков.— Изв. АН СССР. Сер. геогр., 1965, № 3, с. 89—94.
27. Гринвальд Д. И. Турбулентность русловых потоков.— Л.: Гидрометеоиздат, 1974.— 164 с.
28. Гришанин К. В. Распределение скоростей при турбулентном течении в гидравлически шероховатых трубах.— Труды ЛИВТ, 1962, вып. 26, с. 5—13.
29. Гришанин К. В. Динамика донного течения в стационарном водовороте.— Труды ЛИВТ. 1964, вып. 61, с. 36—43.
30. Гришанин К. В. Влияние нестационарности движения на распределение скоростей в плоском открытом потоке.— Труды ЛИВТ, 1967, вып. 88, с. 42—50.
31. Гришанин К. В. Движение донных наносов, как процесс восстановления.— Труды ГГИ, 1972, вып. 190, с. 141—150.
32. Гришанин К. В. Теория руслового процесса.— М.: Транспорт, 1972.— 215 с.
33. Гришанин К. В. Устойчивость русел рек и каналов.— Л.: Гидрометеоиздат, 1974.— 144 с.
34. Гришанин К. В. Сезонные деформации перекатов.— В кн.: Труды IV Всесоюз. гидрологического съезда. Л., 1976, т. 10, с. 13—21.
35. Гришанин К. В., Снищенко Б. Ф. Формирование донных гряд в условиях паводка.— В кн.: Движение наносов в открытых руслах. М., 1970, с. 161—163.
36. Гришанин К. В., Спецов Ф. А. Распределение скоростей и сопротивление трения в потоках под ледяным покровом.— Труды ЛИВТ, 1968, вып. 119, с. 53—62.
37. О скоростях потока вблизи критических значений/Гришин Н. Н., Дебольский В. К., Костюченко И. П. и др.— Водные ресурсы, 1976, № 2, с. 202—208.
38. Грушевский М. С. Волны попусков и паводков в реках.— Л.: Гидрометеоиздат, 1969.— 336 с.
39. Данелия Н. Ф. Формирование русла на изгибе потока методом поперечной циркуляции.— В кн.: Поперечная циркуляция в открытом потоке. М., 1936, с. 200—226.
40. Данелия Н. Ф. Водозаборные сооружения на реках с обильными донными наносами.— М.: Колос, 1964.
41. Дементьев В. В. Исследование пульсации скорости течения на горных реках и ее влияние на точность измерения расхода воды.— Труды ГГИ, 1962, вып. 98, с. 56—98.
42. Дементьев М. А. Транспорт одиночного твердого тела неоднородным потоком жидкости— Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1955, т. 54, с. 3—26.
43. Дмитриев Н. М., Лурье М. В. О реологической модели анизотропной турбулентности.— Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 4, с. 775—777.
44. Доманевский Н. А. и др. Русловые процессы и путевые работы на свободных реках/Доманевский Н. А., Лосиевский А. И., Маккавеев Н. И., Матлин Г. М., Ржаницын Н. А.— Труды ЦНИИЭВТ, 1956, вып. 8. 458 с.
45. Егиазаров И. В. Расход влекомых потоком наносов.— Изв. АН АрмССР. Отд. техн. наук, 1949, № 5.
46. Егиазаров И. В. Транспортирующая способность открытых потоков.— Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Энергетика и автоматика, 1959, № 5, с. 115—126.

47. Емцев Б. Т. Двухмерные бурные потоки.— М.: Энергия, 1967.— 210 с.
48. Ефремов В. И. Некоторые результаты экспериментального исследования структуры придонной области равномерного руслового потока при большой шероховатости.— Труды ЛГМИ, 1967, вып. 25, с. 13—20.
49. Железняк М. И., Шнайдман В. А. Численное моделирование турбулентного обмена двухфазного стратифицированного потока в канале.— Метеорология и гидрология, 1975, № 3, с. 58—67.
50. Железняков Г. В. Гидравлическое обоснование методов речной гидрометрии.— М.; Л.: Изд. АН СССР, 1950.— 164 с.
51. Железняков Г. В. Исследование скорости движения паводочных волн.— В кн.: Вопросы гидрологии. М., 1957, с. 43—55.
52. Железняков Г. В. Относительный дефицит средней скорости неустановившегося открытого потока.— Труды МИИТ, 1963, вып. 176, с. 5—14.
53. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на линии тока.— Полн. собр. соч. М.; Л., 1936. Т. 3, с. 195—341.
54. Залуцкий Э. В. О потерях энергии в турбулентных неравномерных открытых потоках.— В кн.: Исследования турбулентных одно- и двухфазных потоков. Киев, 1966, с. 45—54.
55. Замарин Е. А. Транспортирующая способность и допускаемые скорости течения в каналах.— 2-е изд.— М.; Л.: Госстройиздат, 1951.— 83 с.
56. Зегжда А. П. Гидравлические потери на трение в каналах и трубопроводах.— Л.; М.: Госстройиздат, 1957.— 276 с.
57. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики.— М.: Наука, 1973.— 351 с.
58. Зубков Н. С. Расчет очертания выпуклого берега в начале поворота русла.— Труды ЛИВТ, 1968, вып. 119, с. 82—93.
59. Ибад-Заде Ю. А. Движение наносов в открытых руслах.— М.: Стройиздат, 1974.— 351 с.
60. Иванов В. В. Гидравлический расчет проектного перераспределения расходов воды при выправлении многорукавных русел рек.— Труды ААНИИ, 1976, т. 314, с. 5—15.
61. Карасев И. Ф. Русловые процессы при переброске стока. Изд. 2-е.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.— 288 с.
62. Карауше в А. В. Теория и методы расчета речных наносов.—Л.: Гидрометеоиздат, 1977.— 272 с.
63. Картвелишвили Н. А. Потоки в недеформируемых руслах.— Л.: Гидрометеоиздат, 1973.— 279 с.
64. Клавен А. Б. Исследование структуры турбулентного потока.— Труды ГГИ, 1966, вып. 136, с. 65—76.
65. Клавен А. Б. Кинематическая структура турбулентного потока.— Труды ГГИ, 1968, вып. 147, с. 134—141.
66. Клавен А. Б. Лабораторное исследование кинематической структуры турбулентного потока с сильно шероховатым дном.— Труды ГГИ, 1973, вып. 209, с. 67—90.
67. Кнороз В. С. Безнапорный гидротранспорт и его расчет.— Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1951, т. 44, с. 112—142.
68. Кнороз В. С. Неразмывающая скорость для несвязных грунтов и факторы ее определяющие.— Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1958, т. 59, с. 62—81.
69. Кнороз В. С. Влияние макрошероховатости русла на его гидравлические сопротивления.— Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1959, т. 62, с. 75—96.
70. Кнороз В. С. О деформациях дна и о влиянии их на гидравлический режим потоков.— В кн.: Труды III Всесоюз. гидрол. съезда. Л., 1960, т. 5, с. 166—176.
71. Кнороз В. С. Влияние грядовой формы дна на характеристики турбулентности безнапорных водных потоков.— Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1965, т. 78, с. 142—169.

72. Кожевников М. П. О движении воды на повороте русла.— Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1949, т. 40, с. 105—133.
73. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления/Перев. с англ. под ред. Ю. К. Беляева.— М.: Советское радио, 1967.— 299 с.
74. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4, с. 299—303.
75. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, т. 6, № 1—2, с. 56—58.
76. Колмогоров А. Н. О новом варианте гравитационной теории движения взвешенных наносов М. А. Великанова.— Вестник Моск. ун-та. Сер. физ.-мат. и естеств. наук, 1954, № 3, с. 41—45.
77. Кондратьев Н. Е. Русловой процесс/Под ред. Н. Е. Кондратьева.— Л.: Гидрометеоиздат, 1959.— 371 с.
78. Конт-Бело Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками/Перев. с франц. под ред. Г. Н. Абрамовича.— М.: Мир, 1968.—176 с.
79. Коротков В. Е. Некоторые результаты исследования неразмывающих скоростей для несвязных грунтов.— Сб. Промышленная теплотехника и гидравлика, 1976, вып. 2.
80. Кочин Н. Е. и др. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1-я.— 6-е изд./ Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.— М.: Физматгиз, 1963.— 583 с.
81. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1973.— 416 с.
82. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— 2-е изд.— М.: ГИТТЛ, 1953.— 788 с.
83. Леви И. И. Динамика русловых потоков.— 2-е изд.— Л.; М.: Госэнергоиздат, 1957.— 252 с.
84. Лохтин В. М. О механизме речного русла.— В кн.: Вопросы гидротехники свободных рек. М., 1948, с. 23—59.
85. Маккавеев В. М. О плановом очертании струенаправляющих сооружений мостовых переходов.— В кн.: Проблемы Волго-Каспия. Л., 1934, Т. 2, с. 687—719.
86. Маккавеев В. М. Режим естественных водных потоков.— В кн.: Маккавеева В. М. и Коновалова И. М. Гидравлика. Л.; М., 1940, с. 565—636.
87. Маккавеев Н. И. Русло реки и эрозия в ее бассейне.— М.: Изд. АН СССР, 1955.— 344 с.
88. Милович А. Я. Нерабочий изгиб потока жидкости.— Бюлл. Политехн. о-ва. М., 1914, № 10.
89. Милович А. Я. Теория деления и соединения потоков жидкости.— Л.; М.: Речиздат, 1947.— 95 с.
90. Минский Е. М. Турбулентность руслового потока.— Л.: Гидрометеоиздат, 1952.— 164 с.
91. Мирцхулава Ц. Е. Исследование движения донных наносов скоростной микрокиносъемкой.— Изв. АН СССР. Сер. геогр., 1960, № 6, с. 879—881.
92. Мирцхулава Ц. Е. Размыв русел и методика оценки их устойчивости.— М.: Колос, 1967.— 179 с.
93. Михайлова Н. А. О механизме образования и движения песчаных волн.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1952, № 1, с. 47—56.
94. Михайлова Н. А. Перенос твердых частиц турбулентными потоками воды.— Л.: Гидрометеоиздат, 1966.— 232 с.
95. Михалев М. А. К вопросу о распространении струи капельной жидкости вдоль шероховатой поверхности.— Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1965, т. 77, с. 79—100.
96. Михалев М. А. Гидравлический расчет потоков с водоворотом.— Л.: Энергия, 1971.— 184 с.
97. Монин А. С. О характеристиках анизотропной турбулентности.— Докл. АН СССР, 1950, т. 75, № 5, с. 621—624.
98. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика.—Ч. 1.— М.: Наука, 1965.— 639 с.

99. Никитин И. К. Турбулентный русловой поток и процессы в придонной области.— Киев: Изд. АН УССР, 1963.— 142 с.
100. Никитин И. К. Особенности структуры турбулентного потока у его свободной поверхности.— В кн.: Гидротехника и гидромеханика. Киев, 1964, с. 3—6.
101. Образовский А. С. Гидравлика водоприемных ковшей.— М.: Госстройиздат, 1962. 195 с.
102. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1941, № 4—5, с. 453—463.
103. Обухов А. М. Турбулентность.— В кн.: Механика в СССР за 30 лет. М.; Л., 1950, с. 332—340.
104. Олевинская С. К. и др. Экспериментальное исследование влияния сальтирующих наносов на кинематику потока/Олевинская С. К., Пивоваров А. А., Россинский К. И.— Водные ресурсы, 1973, вып. 2, с. 111—117.
105. Офицеров А. С. Вопросы гидравлики водозабора.— М.: Госстройиздат, 1952. 234 с.
106. Попов И. В. Деформации речных русел и гидротехническое строительство.— 2-е изд.— Л.: Гидрометеоиздат, 1969.— 363 с.
107. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов/ Перев. с англ. под ред. Н. С. Акулова.— М.: ИЛ, 1960.— 127 с.
108. Рахманов А. Н. Закономерности изменения протяженности водоворотного участка расширяющегося «спокойного» потока.— Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1965, т. 78, с. 83—109.
109. Рахманов А. Н. О влиянии шероховатости русла на протяженность водоворотного участка расширяющегося спокойного потока.— Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1967, т. 83, с. 85—104.
110. Ржаницын Н. А. и др. Основные направления в развитии русловых процессов на Каракумском канале им. В. И. Ленина/Ржаницын Н. А., Аннаев С. А., Сарыев Д. С.— В кн.: Речная гидравлика и гидротехника. М., 1973, с. 27—44.
111. Розовский И. Л. Движение воды на повороте открытого русла.— Киев: Изд. АН УССР, 1957.— 188 с.
112. Розовский И. Л. и др. Неустановившееся движение водного потока ниже гидроэлектростанций и его влияние на русло/Розовский И. Л., Еременко Е. В., Базилевич В. А.— Киев: Наукова думка, 1967.— 276 с.
113. Романовский В. В. Изучение скорости осаждения крупных наносов.— Труды ГГИ, 1966, вып. 132, с. 90—109.
114. Романовский В. В. Исследование начальной скорости влечения частиц наносов.— Труды ГГИ, 1974, вып. 210, с. 130—150.
115. Ромашин В. В. Типы руслового процесса в связи с определяющими факторами.— Труды ГГИ, 1968, вып. 155, с. 56—63.
116. Россинский К. И., Кузьмин И. А. Речное русло.— В кн.: Крицкого С. Н. и Менкеля М. Ф. Гидрологические основы речной гидротехники. М.; Л., 1950, с. 52—97.
117. Россинский К. И., Любомирова К. С. Скачкообразное движение твердой частицы по дну турбулентного потока.— Труды ГГИ, 1969, вып. 162, с. 221—235.
118. Россинский К. И., Любомирова К. С. Скачкообразное движение речных наносов.— В кн.: *Динамика и термика речных потоков*. М., 1972, с. 50—62.
119. Рось У. С. О положении уровня максимальной скорости течения на вертикали в период ледостава.— Метеорология и гидрология, 1965, № 9, с. 33—36.
120. Селезнев В. М. Расчет скоростных полей на участках расширения потока с учетом шероховатости и уклона дна.— Труды ЛИВТ, 1970, вып. 129, с. 164—174.
121. Селезнев В. М., Фильчаков В. В. Общие уравнения турбулентных струй и их решение с использованием ЭВМ.— Гидромеханика, 1976, вып. 34, с. 86—93.

122. Скребков Г. П., Коротков В. Е. Влияние температуры на неразмывающие скорости потока.— В кн.: Гидравл. исслед. сооружений. Очистка и осветление жидкостей. Вып. 2. Саратов, 1976, с. 57—59.
123. Слуцкий Е. Е. Сложение случайных причин, как источник циклических процессов.— Избранные труды. М., Изд. АН СССР. 1960, с. 99—132.
124. Снищенко Б. Ф. Заносимость дноуглубительной прорези в межень.— Труды ЛИВТ, 1963, вып. 46, с. 49—58.
125. Снищенко Б. Ф. Скоростной режим потока в судоходной прорези на реке.— Труды ЛИВТ, 1964, вып. 61, с. 52—63.
126. Снищенко Б. Ф. Стабилизация бокового рукава при незавершенном меандрировании.— Труды ГГИ, 1968, вып. 155, с. 64—74.
127. Снищенко Б. Ф. Методы решения практических задач на основе гидроморфологической теории руслового процесса.— В кн.: Труды IV Всесоюз. гидрол. съезда. Л., 1976, т. 10, с. 376—382.
128. Снищенко Б. Ф. Русловой процесс в нижних бьефах крупных гидротехнических сооружений.— В кн.: Труды IX Конф. придунайских стран по гидрологическим прогнозам. Будапешт, 1977.— 19 с.
129. Снищенко Б. Ф. и др. Пространственный характер движения песчаных гряд и кинематика потока над ними/Снищенко Б. Ф., Клавен А. Б., Корчоха Ю. М.— Труды ГГИ, 1972, вып. 190, с. 151—164.
130. Снищенко Б. Ф., Копалиани З. Д. О скорости движения гряд в реках и лабораторных лотках.— Труды ГГИ, 1978, вып. 252, с. 20—37.
131. Стокер Дж. Дж. Волны на воде/Перев. с англ. под ред. М. А. Лаврентьева и Н. Н. Моисеева.— М.: ИЛ, 1959.— 617 с.
132. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом/Перев. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: ИЛ, 1959.— 399 с.
133. Тер-Астацатрян М. И. О законе площадей при движении жидкости на поворотах открытых водоводов.— Изв. АН Арм. ССР. Физ-мат., Естест. и техн. науки, 1950, № 3, 4.
134. Трофимов Г. И. Течение жидкости на участке слияния двух потоков.— Труды ЛИВТ, 1960, вып. 7, с. 49—56.
135. Фавр А. Пространственно-временные корреляции в турбулентных потоках жидкости.— В кн.: Сб. переводов «Механика», вып. 2 (90). М.: Мир, 1965, с. 70—99.
136. Феллер В. Введение в теорию вероятности и ее приложения/Перев. с англ. Ю. В. Прохорова.— М.: Мир, 1967.— 752 с.
137. Федоров Н. Н. Влияние неустановившегося движения воды на распределение осредненных скоростей по вертикали.— Труды ГГИ, 1965, вып. 121, с. 52—63.
138. Фидман Б. А. О влиянии шероховатости стенок на структуру турбулентного потока.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1948, т. 12, № 3, с. 255—260.
139. Фидман Б. А. Некоторые экспериментальные данные о крупномасштабной турбулентности в открытом потоке.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз. и геогр., 1950, т. 14, № 3, с. 267—280.
140. Фидман Б. А. Основные результаты экспериментального изучения структуры турбулентных потоков.— В кн.: Проблемы русловых процессов. Л., 1953, с. 138—160.
141. Форхгеймер Ф. Гидравлика. Пер. с нем.— М.; Л.: ОНТИ, 1935.— 615 с.
142. Франкль Ф. И. К теории движения взвешенных наносов.— В кн.: Избранные труды по газовой динамике. М., 1973, с. 669—687.
143. Хинце И. О. Турбулентность/Перев. с англ. под ред. Г. Н. Абрамовича.— М.: Физматгиз, 1963—680 с.
144. Чернов Ю. В. Сочетание гидроморфологических характеристик потока и русла при транзите наносов.— В кн.: Труды III Всесоюз. гидрол. съезда. Л., 1960, т. 5, с. 290—296.
145. Чоу В. Т. Гидравлика открытых каналов./Перев. с англ. под ред. А. И. Богомолова.— М.: Госстройиздат, 1969.— 464 с.
146. Чугаев Р. Р. Гидравлика (техническая механика жидкости).— Л.: Энергия, 1975.— 599 с.

147. Шамов Г. И. Речные наносы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1959.— 378 с.
148. Шаумян В. А. Научные основы орошения и оросительных сооружений.— М.: Сельхозгиз, 1948. 758 с.
149. Шевелев Ф. А. Исследование основных гидравлических закономерностей турбулентного движения в трубах.— М.: Госстройиздат, 1953.— 208 с.
150. Шуляк Б. А. Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости.— М.: Наука, 1971.— 400 с.
151. Эйнштейн А. Причины образования извилин в руслах рек и так называемый закон Бэра.— Успехи физ. наук, 1956, т. 59, вып. 1, с. 185—188.
152. Юфин А. П. Движение наносов и гидравлический транспорт/Под ред. А. П. Юфина.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963.— 199 с.
153. Alam Abu M. Z., Kennedy J. F. Friction factors for flow in sand-bed channels.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE., 1969, vol. 95, N 6.
154. Bagnold R. A. An approach to the sediment transport problem from general physics.— U. S. Geol. Survey, 1966, Pap. 422-J.
155. Bagnold R. A. The nature of saltation and of "bed-load" transport in water.— Proc. Roy. Soc. L., 1973, A332, N 1591, p. 473—504.
156. Blench T. Mobile bed fluviology.— Alberta: Alberta Univ. Press. 1969.
157. Bogardi J. L. Discussion on the paper by E. M. Laursen.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1958, vol. 84, N 6.
158. Bogardi J. Sediment transport in alluvial streams.— Budapest: Akademia Kiado, 1974, p. 826.
159. Brown C. B. Sediment transportation.— In: Engineering Hydraulics, ch. 7, by H. Rouse (ed.), New York, 1950.
160. Bulle H. Untersuchungen über die Geschiebeableitung bei der Spaltung von Wasserläufen. Berlin, 1926.
161. Cartwright D. E. On submarine sand-waves and tidal lee-waves.— Proc. Roy. Soc. L., 1959, A 253, N 1273, p. 218—241.
162. Chien N. The present status of research on sediment transport.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1954, vol. 80, N 565, p. 1—33.
163. Colby B. R., Hubbel D. W. Simplified method for computing total sediment discharge with the modified Einstein procedure. U. S. Geol. Survey Water Supply Paper, 1593. 1961.
164. Coles D. The law of the wake in the turbulent boundary layer.— J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, N 2.
165. Corcoran W. H., Opfell J. B., Sage B. H. Momentum transfer in fluids.— N—Y, 1956.
166. Corcoran W. H. e. a. Temperature gradients in turbulent gas streams.—Ind. a. Ing. Chem., 1952, vol. 44, N 2.
167. Crickmore M. J. Effect of flume width on bed form characteristics.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1970, vol. 96, N 2, p. 473—496.
168. Cunge J. A., Perdreau N. Mobile bed fluvial mathematical models.— La Houille Blanche, 1973, N 7, p. 561—580.
169. Einstein H. A. Der Geschiebetrieb als Wahrscheinlichkeitsproblem.— Zürich: Verlag Rasher, 1937.
170. Einstein H. A. Formulas for the transportation of bed load.— Trans. ASCE, 1942, 107.
171. Einstein H. A. The bed-load function for sediment transportation in open channel flows.— U. S. Dept. of Agriculture. Techn. Bull., 1950, 1026.
172. Einstein H. A., Abdel-Aal-Farouk M. Einstein bed-load function at high sediment rates.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1972, vol. 98, N 1, p. 137—151.
173. Einstein H. A., Barbarossa N. L. River channel roughness.— Trans. ASCE, 1952, 117, p. 1121—1132.
174. Einstein H. A., Harder J. A. Velocity distribution and the boundary layer at channel bends.— Trans. Am. Geophys. Union, 1954, vol. 35, N 1.
175. Engelund F. Hydraulic resistance of alluvial streams.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1966, vol. 92, N 2, p. 315—326.

176. Engelund F. Closure to "Hydraulic resistance of alluvial streams".— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1967, vol. 93, N 4, p. 287—296.
177. Engelund F. Instability of erodible beds.— J. Fluid Mech., 1970, vol. 42, N 2, p. 225—244.
178. Engelund F., Hansen E. A monograph on sediment transport in alluvial streams.— Copenhagen: Danish Techn. Press, 1972.
179. Exner F. M. Über die Wechselwirkung zwischen Wasser und Geschiebe in Flussen.— Sitzenber. d. Acad. d. Wissenschaften, Wien, 1925, H. 3—4.
180. Francis I. R. D. Experiments on the motion of solitary grains along the bed of a water-stream.— Proc. Roy. Soc. L., 1973, A 332, p. 443—471.
181. Garde R. J., Ranga Raju K. G. Regime criteria for alluvial streams.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1963, vol. 89, N 6.
182. Garg S. P., Agrawal A. K., Singh P. R. Bed load transportation in alluvial channels.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1971, vol. 97, N 5, p. 653—664.
183. Gilbert G. K. Transportation of debris by running water.— U. S. Geol. Survey Prof. Paper, 86, 1914.
184. Graf W. H. Hydraulics of sediment transport.— New York: Mc Graw-Hill Inc., 1971. 513 p.
185. Graf W. H., Acaroglu E. R. Sediment transport in conveyance systems (Part 1).— Bull. Int. Assoc. Sci. Hydr., 1968, XIII^{e} année, N 2.
186. Guy N. P., Simons D. B., Richardson E. V. Summary of alluvial channel data from flume experiments.— Geol. Survey Prof. Paper, 462—1 1967.
187. Hino M. Equilibrium-range spectra of sand waves formed by flowing water.— J. Fluid Mech., 1968, vol. 34, N 3, p. 565—573.
188. Hoffman E. R., Joubert P. N. Turbulent line vortices.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 16, N 3.
189. Hook R. L. B. Distribution of sediment transport and shear stress in a meander bend.— J. Geology, 1975, vol. 83, N 5, p. 543—565.
190. Imamoto H. Universal representation of turbulence characteristics in free surface shear flow.— In: Proc. XVI Congr. of JAHR, vol. 5.— Sao Paulo, 1975, p. 63—68.
191. Ippen A. T. A new look at sedimentation in turbulent streams.— J. Boston Soc. Civ. Eng., 1971, vol. 58, N 3, p. 131—163.
192. Ippen A. T., Drinker P. A. Boundary shear stresses in curved trapezoidal channels.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1962, vol. 88, N 5.
193. Ippen A. T., Verma R. P. The motion of discrete particles along the bed of a turbulent stream.— In: Proc. Minnesota Int. Hydr. Convention, Minneapolis, 1953.
194. Jain S. C., Kennedy J. F. The spectral evolution of sedimentary bed forms.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 63, N 2, p. 301—314.
195. Kennedy J. F. The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels.— J. Fluid Mech., 1968, vol. 16, N 4, p. 521—544.
196. Kennedy J. F. The formation of sediment ripples, dunes and antidunes.— Annual Rev. Fluid Mech., 1969, 1.— Palo Alto Calif. Annual Revs., p. 147—168.
197. Kondap D. M., Garde R. J. Velocity of bed forms in alluvial channels.— In: Proc. XV Congr. JAHR, Istanbul, 1973, vol. 5, p. 101—104.
198. Laufer J. Some recent measurements in a two-dimensional turbulent channel.— J. Aero Sci., 1950, vol. 17, N 5.
199. Laursen E. M. The total sediment load of streams.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1958, vol. 84, N 1, p. 1—36.
200. Law Shiu Wai, Reinolds A. J. Dividing flow in an open channel.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1966, vol. 92, N 2.
201. Leopold L. B., Langbein W. B. The concept of entropy in landscape evolution.— U. S. Geol. Survey Prof. Paper, 500-A, 1962, p. 1—20.
202. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers.— Proc. Roy. Soc. L., 1955, A 229, N 1178, p. 281—316.

203. Liu Hsin-Kuan. Mechanis of sediment ripple formation.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1957, vol. 83, N 2.
204. Los M. I. Uwagi o podobienstwie hydraulicznym koryt rzecznych.— Gospodarka Wodna, 1973, N 1 (308), p. 8—11.
205. Lovera F., Kennedy J. F. Friction factors for flat-bed flows in sand channels.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1969, vol. 95, N 4, p. 1227—1234.
206. McQuivey R. S., Richardson E. V. Some turbulence measurements in open-channel flow.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1969, vol. 95, N 1, p. 209—223.
207. Meyer-Peter E., Favre H., Einstein A. Neuere Versuchsresultate über den Geschiebetrieb.— Schwez. Bauzeitung, 1934, Bd 103, N 13.
208. Meyer-Peter E., Müller R. Formulas for bed-load transport.— In: Proc. II Congr. JAHR, Stockholm, 1948, vol. 3, p. 39—64.
209. Mockmore C. A. Flow around bends in stable channels.— Proc. ASCE, 1943, vol. 69, N 3.
210. Nikuradse I. Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in convergenten und divergenten Kanälen.— Forsch-Arb. a. d. Gebiete d. Ing-Wes., 1929, H. 289.
211. Nikuradse I. Gezetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren.— VDJ Forschungsheft, 1932, N 356.
212. Nikuradse I. Stromungsgezetze in rauchen Rohren.— VDJ Forschungsheft, 1933, N 361.
213. Nordin C. F., Algert J. H. Spectral analyses of sand waves.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1966, vol. 92, N 5, p. 95—114.
214. Paintal A. S. Concept of critical shear stress in loose boundary open channels.— J. Hydr. Res., 1971, 9, p. 91—107.
215. Prus-Chacinski T. M. Patterns of motion in open channel bends.— J. Inst. Water Engrs, 1956, vol. 10, N 5.
216. Prus-Chacinski T. M. Discussion on open channel resistance.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1966, vol. 92, N 2.
217. Raichlen F. Some turbulence measurements in water.— J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, 1967, vol. 93, N 2, p. 73—97.
218. Raichlen F., Kennedy J. F. The growth of sediment bed forms from an initially flattened bed.— In: Proc. XI Congress of JAHR, Leningrad, 1965, Paper 3.7. 8 p.
219. Raudkivi A. J. Study of sediment ripple formation.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1963, vol. 89, N 6.
220. Raudkivi A. J. Loose boundary Hydraulics. 2nd ed.—N. Y.: Pergamon Press, 1976. 397 p.
221. Reinolds A. J. Waves on erodible bed of an open channel.— J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, N 1, p. 113—133.
222. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion.— Phyl. Trans. Roy. Soc. London, 1895, A186, p. 123—161.
223. Rouse H. Experiments on the mechanics of sediment suspension.— In: Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech., 1938, Cambridge. Mass.
224. Schields A. Anwendung der Aechnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung. Mitteilungen d. Preuss. Versuchanstalt f. Wasserbau u. Schiffbau. Berlin, 1936, H. 26.
225. Schmidt W. Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen.— Probl. Cosm. Phys., 1925, Bd 7.
226. Sharma H. D., Varshney D. V. Bed form friction in alluvial channels.— Irrigation a. Power, 1974, vol. 31, N 4, p. 425—435.
227. Shen H. W. Development of bed roughness in alluvial channels.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1962, vol. 88, N 3.
228. Shen H. W. (ed.). River mechanics. vol. I, II. Ft Collins, Colorado, USA, 1971.
229. Shukry A. Flow around bends in an open flume.— Trans. Am. Soc. Civ. Engrs, 1950, vol. 115.

230. Simons D. B., Richardson E. V. Forms of bed roughness in alluvial channels.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1961, vol. 87, N 3.
231. Smith K. V. H. Similarity in unlined irrigation canal systems.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1970, vol. 96, N 1, p. 13—28.
232. Stricler A. Beitrage zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauchigketszahlen fur Strome, Kanale und geschlossene Leitungen.— Mitteilungen des eidgenössischen Amtes fur Wasserwirtschaft, 1923, N 16.
233. Taylor B. D., Vanoni V. A. Temperature effects in low transport, flat-bed flows.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1972, vol. 98, N 8, p. 1427—1445.
234. Taylor B. D., Vanoni V. A. Temperature effects in high transport, flat bed flows.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1972, vol. 98, N 12, p. 2191—2206.
235. Taylor G. I. The spectrum of turbulence.— Proc. Roy. Soc. L., 1938, A164, N 919.
236. The bed configuration and roughness of alluvial streams. Task Commitie of JSCE.— Proc. JSCE, 1973, N 210, p. 65—91.
237. Toffaleti F. B. Definitive computations of sand discharge in rivers.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1969, vol. 95, N 1.
238. Tsuchiya Y. Mechanics of the successive saltation of a sand particle on a granular bed in a turbulent stream.— Bull. Dis. Pres. Res. Inst. Kyoto Univ., 1969, vol. 19, N 1.
239. Vanoni V. A. Transportation of suspended sediment by water.— Trans. Am. Soc. Civ. Engrs, 1946, N 111.
240. Vanoni V. A. Sediment transportation mechanics: suspension of sediment (Progress Report of Task Committee).— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1963, vol. 89, N 5.
241. Vanoni V. A. Factors, determining bed forms of alluvial streams.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1974, vol. 100, N 3, p. 363—377.
242. Vanoni V. A. River Dynamics.— In: Advances in applied Mechanics. Ed. by Chia-Shun Yih. vol. 15, 1975.— N—Y, S—Fr, L.: Acad. Press, p. 1—87.
243. Vanoni V. A., Hwang Li-San. Relation between bed forms and friction in streams.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1967, vol. 93, N 3, p. 121—144.
244. Vries de, M. Considerations about non-steady bed-load transport in open channels.— In: Proc. XI Congr. IAHR, Leningrad, 1965, Paper 3.8, p. 12.
245. Vries de, M. Solving river problems by hydraulic and mathematical models. Delft Hydr. Lab. Publ. 1969, N 76—11.
246. White W. R., Ackers P. A general function to describe the movement of sediment in channels.— In: Proc. XV Congr. IAHR, Istanbul, 1973, vol. 1, p. 353—360.
247. Willmarth W. W. Structure of turbulence in boundary layers. Adv. in applied Mechanics. Ed. by Chia-Shun Yih. v. 15. 1975. Acad. Press. N—Y, S—Fr., L. 159—254.
248. Yalin M. S. An expression for bed-load transportation.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1963, vol. 89, N 3.
249. Yalin M. S. On the development of sand waves in time.— In: XVI Congress of IAHR, Sao Paulo, 1975, vol. 2, paper B-27, p. 212—219.
250. Yalin M. S. Mechanics of sediment transport. 2nd ed.— L.: Pergamon Press, 1977.
251. Yang C. F. Incipient motion and sediment transport.— J. Hydr. Div. Proc. ASCE, 1973, vol. 99, N 10, p. 1679—1704.
252. Yano K., Tsuchiya Y., Michiue M. Studies on the sand transport in streams with tracers.— Bull. Dis. Prev. Res. Inst. Kyoto Univ., 1969, vol. 18, N 3, p. 1—16.
253. Yokosi Sh. The structure of river turbulence.— Bull. Dis. Prev. Res. Inst. Kyoto Univ., 1967, vol. 17, N 2, p. 1—29.

Оглавление

Предисловие 3
Введение 5

Глава I. **Основы динамики вязкой несжимаемой жидкости** 12
1. Кинематика жидкости . . . . . —
2. Уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости 18

Глава II. **Турбулентность** 33
3. Уравнения турбулентного движения . . . . . —
4. Распределение осредненных скоростей и гидравлическое сопротивление жестких русел 51
5. Турбулентные пульсации 66

Глава III. **Осевая и плановая модели движения воды в открытом русле** 90
6. Осреднение трехмерных уравнений по поперечному сечению потока . . . . . —
7. Гидравлическое сопротивление естественных русел . . 100
8. Речной паводок 117
9. Методы интегрирования уравнений неустановившегося движения 129
10. Плановые задачи при безотрывном движении 131
11. Плановые задачи при отрыве потока от берегов . . . 138

Глава IV. **Некоторые пространственные задачи движения воды в естественных руслах** 156
12. Движение воды на изгибе русла . . . . . —
13. Деление потоков 175

Глава V. **Движение влекомых наносов** 186
14. Общие сведения о движении наносов . . . . . —
15. Движение влекомых наносов как случайный процесс . . 199
16. Расход влекомых наносов на безгрядовом дне 207
17. Донные волны 214

Глава VI. **Движение взвешенных наносов** 234
18. Уравнения механики взвесенесущей жидкости . . . . —
19. Распределение взвешенных частиц по вертикали . . . 241
20. Транспортирующая способность потока и полный расход русловых наносов 247

Глава VII. **Русловой процесс** 252
21. Концепция руслового процесса и ее практическое значение . . . . . —
22. Расчет русловых деформаций 255
23. Устойчивые участки подвижных русел 265
24. Расчет неукрепленных каналов 278
25. Сезонные деформации перекатов 283

Приложение. Краткие сведения по математической теории поля и тензорному исчислению 289
Список литературы 301

311

Кирилл Владимирович Гришанин

Динамика русловых потоков

Редактор З. М. Кожина. Художник С. Э. Шиблер. Техн. редактор Г. В. Ивкова. Корректоры: Е. И. Бородина, И. А. Крайнева. ИБ-359. Сдано в набор 28.08.78. Подписано в печать 09.02.79. М-12952. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Печать высокая. Печ. л. 19,5. Уч.-изд. л. 20,1. Тираж 2600 экз. Индекс ГЛ-233. Заказ № 345. Цена 3 р. 30 к.
Гидрометеоиздат. 199053, Ленинград, 2-я линия, д. 23.
Ленинградская типография № 8 ЛПО «Техническая книга» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.